Апрель 2004 г. *Том 174, № 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Свойства интегрируемости в квантовой хромодинамике высоких энергий при большом числе цветов

Л.Н. Липатов

Показано, что взаимодействие реджезованных глюонов в лидирующем логарифмическом приближении (ЛЛП) в КХД при большом числе цветов обладает рядом замечательных математических свойств, в частности, конформной инвариантностью, голоморфной факторизуемостью и дуальной симметрией. Реджеонный гамильтониан совпадает с гамильтонианом интегрируемой модели Гейзенберга, причем роль спинов играют генераторы группы Мёбиуса. Используя представление Бакстера–Склянина, мы вычисляем интерсепты реджевских траекторий для бесцветных состояний, построенных из трех и четырех реджезованных глюонов и также аномальные размерности соответствующих операторов высших твистов. Для выяснения природы свойств интегрируемости в КХД высоких энергий при большом числе цветов в лидирующем логарифмическом приближении мы исследуем поправки к БФКЛ и ДГЛАП уравнениям в $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теории за пределами ЛЛП.

PACS numbers: 11.15.Pg, **12.38.–t**, 12.40.Nn

Содержание

1. Введение

В квантовой хромодинамике (КХД) амплитуды рассеяния $A(s,t)$ в реджевской кинематике при высоких энергиях, $2E = \sqrt{s}$, и фиксированном переданном импульсе $q = \sqrt{-t}$ в лидирующем логарифмическом приближении (ЛЛП), $\alpha_s \ln s \sim 1$, $\alpha_s = g^2/(4\pi) \to 0$, где g обозначает сильную константу связи, могут быть получены вычислением с последующим суммированием ведущих вкладов $\sim (\alpha_s \ln(s))^n$ во всех порядках теории возмущений. Амплитуда с квантовыми числами глюона в t-канале имеет реджевскую форму [1]

$$A(s,t) \sim s^{\,j(t)}, \quad j(t) = 1 + \omega(t)\,,$$

где $j(t)$ — редже-траектория глюона. Функция $\omega(t)$ в ЛЛП дается выражением

$$\omega(t) = -\frac{g^2}{8\pi^2}\, N_c \ln\left(-\frac{t}{\lambda^2}\right) + O(g^4)\,,$$

где λ — фиктивная масса глюона, введенная для регуляризации инфракрасной расходимости, а N_c — ранг калибровочной группы (для КХД $N_c = 3$). В инклюзивных процессах, например, при расчете полного сечения, эта расходимость сокращается, поскольку вероятность испускания мягкого глюона содержит такой же вклад, но с противоположным знаком [1]. Приведенное выше выражение для амплитуды $A(s,t)$ означает, что глюон принадлежит к семейству частиц с нечетными спинами j и массами $\sqrt{t}$, лежащими на реджевской траектории $j = j(t)$ с отрицательной сигнатурой. Реджевская траектория глюона была вычислена в двух первых порядках теории возмущений в [1, 2].

В режиме ЛЛП наиболее существенным процессом при высоких энергиях $s = (p_A + p_B)^2 \simeq (p_{A'} + p_{B'})^2$ является рождение произвольного числа глюонов с импульсами k_r ($r = 1, 2, \ldots, n$) в мультиреджевской кинематике, когда относительные энергии $\sqrt{s_k}$, $s_k = (k_{r-1} + k_r)^2$, велики и поперечные импульсы $k_r^{\perp}$ фиксированы. В этой кинематике амплитуда рождения имеет мультиреджев-

Л.Н. Липатов. Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН,
188350 Гатчина, Ленинградская обл., Орлова роща, Российская Федерация
Тел. (812) 714-60-96
Факс (812) 713-19-63
E-mail: lipatov@thd.pnpi.spb.ru

Статья поступила 28 марта 2003 г.

скую форму [1]

$$A_{2\to 2+n} = 2s\Gamma^{c_1}_{AA'}\,\frac{s_1^{\omega(t_1)}}{\mathbf{q}_1^2}\,\Gamma^{d_1}_{c_2c_1}\,\frac{s_2^{\omega(t_2)}}{\mathbf{q}_2^2}\,\Gamma^{d_2}_{c_3c_2}\ldots\frac{s_{n+1}^{\omega(t_{n+1})}}{\mathbf{q}_{n+1}^2}\,\Gamma^{c_{n+1}}_{BB'}\,,$$

где $\mathbf{q}_r$ — переданные импульсы, $t_r = -\mathbf{q}_r^2$. Символы $A, A', B, B', c_1, d_1\ldots$ соответствуют глюонным цветовым индексам. Вершины $\Gamma^{d_r}_{c_{r+1}c_r}$, отвечающие рождению глюона цвета d_r и определенной спиральности, содержат помимо структурных констант $f_{d_r c_{r+1} c_r}$ калибровочной группы $\mathrm{SU}(N_c)$ также фактор $(q_r q^*_{r+1})/k_r$. В этом множителе мы ввели комплексные компоненты $q_r = q_r^1 + \mathrm{i}q_r^2$, q_r^* и k_r, k_r^* двумерных импульсов $\mathbf{q}_r$ и $\mathbf{k}_r$ соответственно. При вычислении полного сечения квадрат амплитуды Γ содержит дополнительный пропагатор $|k_r|^{-2}$ в поперечном подпространстве.

Поведение полного сечения при высоких энергиях $\sigma_t \sim s^\Delta$ отвечает обмену в t-канале реджеоном с вакуумными квантовыми числами, включая положительную сигнатуру, и с интерсептом Δ для соответствующей траектории Редже. Этот реджеон называется помероном. В лидирующем и в следующем приближениях померон представляет собой связанное состояние двух реджезованных глюонов. Его волновая функция удовлетворяет уравнению Балицкого, Фадина, Кураева и Липатова (БФКЛ) [1]. Это уравнение используется для описания структурных функций в глубоконеупругом лептон-адронном рассеянии совместно с уравнением Докшицера, Грибова, Липатова, Альтарелли и Паризи (ДГЛАП) [3]. В пространстве прицельных параметров $\boldsymbol{\rho}$ уравнение БФКЛ имеет форму уравнения Шрёдингера [4, 5]

$$E f(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = H_{12}\, f(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)\,, \tag{1}$$

где в ЛЛП собственное значение E основного состояния связано с померонным интерсептом Δ как

$$\Delta = -\frac{g^2 N_c}{8\pi^2}\, E \tag{2}$$

и в операторной форме гамильтониан имеет вид

$$H_{12} = \ln|p_1|^2 + \ln|p_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{p_1 p_2^*}{|p_1|^2|p_2|^2}\left(\ln|\rho_{12}|^2\right) p_1^* p_2 + 4\gamma\,. \tag{3}$$

Здесь первые два члена описывают редже-траектории двух виртуальных глюонов, третий член возникает в результате преобразования Фурье произведения двух эффективных вершин $\Gamma^{d_r}_{c_{r+1}c_r} \sim q_r q^*_{r+1}/k_r$ для рождения глюона в мультиреджевской кинематике и $\gamma = -\Psi(1)$ — постоянная Эйлера (см. [4]). Инфракрасная расходимость между членами, отвечающими виртуальным и реальным вкладам, при $\lambda \to 0$ сокращается. Мы ввели комплексные компоненты глюонных координат $\rho_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, ρ_k^* ($\rho_{12} = \rho_1 - \rho_2$) и канонически сопряженные импульсы $p_k = \mathrm{i}\partial/(\partial\rho_k)$, $p_k^* = \mathrm{i}\partial/(\partial\rho_k^*)$. Уравнение БФКЛ в ЛЛП инвариантно относительно преобразований группы Мёбиуса [5]

$$\rho_k \to \frac{a\rho_k + b}{c\rho_k + d}\,, \tag{4}$$

где a, b, c, d — произвольные комплексные параметры. Его решения принадлежат к главной последовательности унитарных представлений группы Мёбиуса. Для этой последовательности конформные веса

$$m = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\nu + \frac{n}{2}\,,\quad \widetilde{m} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\nu - \frac{n}{2} \tag{5}$$

выражаются через аномальные размерности $\gamma = 1 + 2\mathrm{i}\nu$ (с вещественным ν) и целочисленные конформные спины n для локальных операторов $O_{m,\tilde m}(\boldsymbol{\rho}_0)$. Конформные веса связаны с собственными значениями

$$M^2 f_{m,\tilde m} = m(m-1) f_{m,\tilde m}\,,\quad M^{*2} f_{m,\tilde m} = \widetilde{m}(\widetilde{m}-1) f_{m,\tilde m} \tag{6}$$

операторов Казимира M^2 и M^{*2} группы Мёбиуса (для померона число реджеонов $n = 2$),

$$M^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} M_k^a\right)^2 = \sum_{r<s} 2\, M_r^a\, M_s^a = -\sum_{r<s} \rho_{rs}^2 \partial_r \partial_s\,,$$

$$M^{*2} = (M^2)^*. \tag{7}$$

Здесь M_k^a — генераторы группы

$$M_k^3 = \rho_k \partial_k\,,\quad M_k^- = \partial_k\,,\quad M_k^+ = -\rho_k^2 \partial_k \tag{8}$$

и $\partial_k = \partial/(\partial\rho_k)$. Собственные функции H могут пониматься как трехточечные функции двумерной конформной теории поля, в анзаце Полякова имеем [5]

$$f_{m,\tilde m}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \boldsymbol{\rho}_0) = \left\langle 0\right|\varphi(\boldsymbol{\rho}_1)\,\varphi(\boldsymbol{\rho}_1)\,O_{m,\tilde m}(\boldsymbol{\rho}_0)\left|0\right\rangle = \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{10}\,\rho_{20}}\right)^m \left(\frac{\rho_{12}^*}{\rho_{10}^*\,\rho_{20}^*}\right)^{\tilde m}. \tag{9}$$

Подставляя этот анзац в уравнение БФКЛ, можно вычислить энергию [1]

$$E_{m,\tilde m} = 4\,\mathrm{Re}\left[\Psi\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\nu + \frac{|n|}{2}\right)\right] - 4\Psi(1)\,. \tag{10}$$

Заметим, что $E_{m,\tilde m}$ может быть представлена в форме, совместимой с голоморфной сепарабельностью H_{12} [4],

$$E_{m,\tilde m} = \varepsilon_m + \varepsilon_{\tilde m}\,,\quad \varepsilon_m = \Psi(m) + \Psi(1-m) - 2\Psi(1)\,. \tag{11}$$

Минимум $E_{m,\tilde m}$, который достигается при $\nu = n = 0$, равен:

$$\min E_{m,\tilde m} = -8\ln 2\,. \tag{12}$$

Вследствие этого полное сечение в ЛЛП быстро растет:

$$\sigma_t \sim s^\Delta,\quad \Delta = \frac{g^2}{\pi^2}\, N_c \ln 2\,, \tag{13}$$

и нарушает предел Фруассара $\sigma_t \leqslant \ln^2 s$. Для типичных виртуальностей фотона в процессах глубоконеупругого ep-рассеяния, измеренных в ДЭЗИ (Германия), эффективная константа связи g такова, что $\Delta \approx 0{,}5$.

Поправки к лидирующему приближению позволяют установить область применимости уравнения БФКЛ [2]. В частности, можно получить для померонного интерсепта $\Delta \approx 0{,}2$ [6], что совпадает с феноменологической оценкой интерсепта мягкого померона, полученной много лет назад в работах К.А. Тер-Мартиросяна, А.Б. Кайдалова и других. Более того, рассчитанное в этом приближении полное сечение аннигиляции виртуальных фотонов в адроны согласуется с экспериментальными результатами, полученными в ЦЕРНе. В рамках оптимальной схемы перенормировок можно убедиться в том, что инвариантность относительно группы Мёбиуса, полученная ранее в ЛЛП [5], приближенно справедлива даже после учета поправок к лидирующему члену в ядре БФКЛ [6]. Тем не менее поправки к лидирующему вкладу в померонный интерсепт не приводят к унитаризации амплитуд рассеяния, и противоречие с ограничением Фруассара для полного сечения остается. Самосогласованный подход к построению унитарной S-матрицы при высоких энергиях в пертурбативной КХД должен основываться на эффективном действии для взаимодействующих реджезованных глюонов [7]. Мы, однако, в дальнейшем используем более простой метод, связанный с рассмотрением решений уравнений Бартельса, Квичинского и Прасаловича (БКП) (Bartels, Kwiecinski, Prascalowich) для связанного состояния n реджезованных глюонов [8].

2. Связанные состояния реджезованных глюонов в квантовой хромодинамике при большом числе цветов

Померон БФКЛ является связанным состоянием двух реджезованных глюонов. Это справедливо, однако, лишь в лидирующем приближении и при учете первой поправки к нему. Вообще говоря, необходимо также рассматривать компоненты волновой функции померона, отвечающие большему числу глюонов. Реджевские траектории и мультиглюонные вершины для полевой реджеонной теории могут быть получены в КХД с помощью эффективного действия, построенного в [7]. В обобщенном ЛЛП можно пренебречь несохранением числа реджезованных глюонов в t-канале, учитывая только их парное взаимодействие, даваемое (с точностью до цветового фактора) гамильтонианом H_{kl}. Таким образом, мы приходим к уравнению БКП [8]

$$E_{m,\widetilde{m}}\,\psi_{m,\widetilde{m}} = H\,\psi_{m,\widetilde{m}}\,,\quad H = \sum_{1\leqslant r<l\leqslant n} H_{rl}\,\frac{T_r^a T_l^a}{(-N_c)}\,. \qquad (14)$$

Здесь T_r^a обозначает генератор калибровочной группы, действующий на цветовой индекс глюона r. Мы также учли, что ввиду инвариантности H относительно преобразований группы Мёбиуса волновые функции и энергии нумеруются своими конформными весами m и $\widetilde{m}$ для соответствующих представлений группы Мёбиуса. Интерсепты $\Delta_{m,\widetilde{m}}$, фигурирующие в асимптотических выражениях $\sigma_t \sim s^{\Delta}$ для полного сечения и возникающие из фейнмановских диаграмм с n реджезованными глюонами в t-канале, даются соотношением

$$\Delta_{m,\widetilde{m}} = -\frac{g^2 N_c}{8\pi^2}\,E_{m,\widetilde{m}}\,. \qquad (15)$$

Функции $\psi_{m,\widetilde{m}}$ пропорциональны скачку t-канальной парциальной волны $f_j(t)$ на разрезах в j-плоскости, а собственные значения $\Delta_{m,\widetilde{m}}$ располагаются на плоскости ω $(\omega = j-1)$. Из-за инвариантности относительно группы Мёбиуса сингулярности $f_j(t)$ имеют вид $(\omega-\Delta_{m,\widetilde{m}})^{1/2}$ и не двигаются с t. Собственная функция $\psi_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\ldots,\boldsymbol{\rho}_n;\boldsymbol{\rho}_0)$, описывающая связанное состояние $\Psi_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_0)$ для n реджезованных глюонов, зависит от их прицельных параметров $\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\ldots,\boldsymbol{\rho}_n$.

В частном случае оддерона — связанного состояния трех реджезованных глюонов с зарядовой четностью $C=-1$ и сигнатурой $P_j=-1$ — цветовой фактор жестко фиксирован и совпадает с симметричным тензором d_{abc} [8, 9]. Поэтому, учитывая, что в этом состоянии каждая пара глюонов должна быть в присоединенном представлении, уравнение для формфактора $f_{m,\widetilde{m}}$, стоящего перед d_{abc}, упрощается [8]:

$$E_{m,\widetilde{m}}\,f_{m,\widetilde{m}} = \frac{1}{2}\,(H_{12}+H_{13}+H_{23})f_{m,\widetilde{m}}\,. \qquad (16)$$

Собственное значение этого уравнения связано с поведением при высоких энергиях разности между полным сечением σ_{pp} и $\sigma_{\mathrm{p\overline{p}}}$ для взаимодействия частиц p и античастиц $\overline{\mathrm{p}}$ с мишенью [9]

$$\sigma_{\mathrm{pp}} - \sigma_{\mathrm{p\overline{p}}} \sim s^{\Delta_{m,\widetilde{m}}}\,. \qquad (17)$$

Вследствие бозе-симметрии волновая функция оддерона полностью симметрична:

$$f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_3;\boldsymbol{\rho}_0) = f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_3;\boldsymbol{\rho}_0) = \\ = f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_3,\boldsymbol{\rho}_1;\boldsymbol{\rho}_0)\,. \qquad (18)$$

Заметим, что другое решение, пропорциональное антисимметричному тензору f_{abc}, характеризуется антисимметричной волновой функцией и описывает состояние с померонными квантовыми числами $C=P_j=1$.

В целях упрощения структуры уравнения для бесцветных связанных состояний n реджезованных глюонов при $n>3$ мы рассматриваем предел большого числа цветов $N_c\to\infty$ [4]. Согласно 'т Хоофту в этом пределе важны только планарные диаграммы. В нашем случае это означает, что, описывая цветовые степени свободы глюона r с помощью эрмитовой матрицы $A_a T_r^a$ ранга N_c с функцией Грина в виде пары кварковой и антикварковой линий, мы должны учитывать только выживающие в t-канале диаграммы цилиндрического типа. Достаточно рассматривать неприводимый вклад, для которого волновая функция имеет следующую цветовую структуру:

$$\psi_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\ldots,\boldsymbol{\rho}_n;\boldsymbol{\rho}_0) = \\ = \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_{i_1},\boldsymbol{\rho}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\rho}_{i_n};\boldsymbol{\rho}_0)\,\mathrm{tr}\,(T^{a_{i_1}}T^{a_{i_2}}\ldots T^{a_{i_n}})\,, \qquad (19)$$

где суммирование осуществляется по всем перестановкам $\{i_1\ldots i_n\}$ глюонов $1,2,\ldots,n$. При больших N_c каждый член в сумме удовлетворяет уравнению Шрёдингера, вследствие чего для формфактора $f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\ldots,\boldsymbol{\rho}_n;\boldsymbol{\rho}_0)$ симметричного относительно циклических перестановок

$$f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\ldots,\boldsymbol{\rho}_n;\boldsymbol{\rho}_0) = f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_n,\boldsymbol{\rho}_1,\ldots,\boldsymbol{\rho}_{n-1};\boldsymbol{\rho}_0) \qquad (20)$$

мы имеем уравнение, аналогичное уравнению в оддеронном случае,

$$E_{m,\widetilde{m}}f_{m,\widetilde{m}} = Hf_{m,\widetilde{m}}\,,\quad H = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} H_{r,r+1}\,. \qquad (21)$$

Только соседние глюоны при $N_c \to \infty$ взаимодействуют друг с другом, и фактор $1/2$ связан с тем, что каждая глюонная пара находится в присоединенном представлении. Подразумевается, что $H_{n,n+1} = H_{1,n}$. Важно, что гамильтониан H в КХД при большом числе цветов демонстрирует голоморфную сепарабельность [10]:

$$H = \frac{1}{2}(h + h^*)\,, \quad [h, h^*] = 0\,, \tag{22}$$

где голоморфный и антиголоморфный гамильтонианы

$$h = \sum_{k=1}^{n} h_{k,k+1}\,,\; h^* = \sum_{k=1}^{n} h^*_{k,k+1} \tag{23}$$

выражаются в терминах соответствующей пары БФКЛ-гамильтонианов [10]:

$$h_{k,k+1} = \ln(p_k) + \ln(p_{k+1}) + p_k^{-1} \ln(\rho_{k,k+1})\, p_k + \\ + p_{k+1}^{-1} \ln(\rho_{k,k+1})\, p_{k+1} + 2\gamma\,. \tag{24}$$

Благодаря голоморфной сепарабельности H волновая функция $f_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \ldots, \boldsymbol{\rho}_n; \boldsymbol{\rho}_0)$ обладает свойством голоморфной факторизуемости [10]:

$$f_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \ldots, \boldsymbol{\rho}_n; \boldsymbol{\rho}_0) = \sum_{r,l} c_{r,l}\, f_m^r(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n; \rho_0) \times \\ \times f_{\tilde{m}}^l(\rho_1^*, \rho_2^*, \ldots, \rho_n^*; \rho_0^*)\,, \tag{25}$$

где r и l — номера вырожденных решений уравнения Шрёдингера соответственно в голоморфном и антиголоморфном подпространствах:

$$\epsilon_m f_m = h f_m\,, \quad \epsilon_{\tilde{m}} f_{\tilde{m}} = h^* f_{\tilde{m}}\,, \quad E_{m,\tilde{m}} = \frac{1}{2}(\epsilon_m + \epsilon_{\tilde{m}})\,. \tag{26}$$

Как и в двумерных конформных теориях поля, коэффициенты $c_{r,l}$ фиксированы условием однозначности волновой функции $f_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \ldots, \boldsymbol{\rho}_n; \boldsymbol{\rho}_0)$ в двумерном $\boldsymbol{\rho}$-пространстве. Отметим, что в этих конформных моделях голоморфная факторизация функций Грина является следствием инвариантности операторной алгебры относительно бесконечномерной группы Вирасоро [11].

3. Интегрируемость реджеонной динамики в квантовой хромодинамике при большом числе цветов

Легко убедиться, что для парного гамильтониана можно записать другое представление [10]

$$h_{k,k+1} = \rho_{k,k+1} \ln(p_k)\, \rho_{k,k+1}^{-1} + \rho_{k,k-1} \ln(p_k)\, \rho_{k,k-1}^{-1} + \\ + \ln(p_{k+1}) + 2\ln(\rho_{k,k+1}) + 2\gamma\,. \tag{27}$$

Как результат, имеем два различных условия нормировки для волновой функции

$$\|f\|_1^2 = \int \prod_{r=1}^{n} \mathrm{d}^2\rho_r \left| \prod_{r=1}^{n} \rho_{r,r+1}^{-1} f \right|^2, \\ \|f\|_2^2 = \int \prod_{r=1}^{n} \mathrm{d}^2\rho_r \left| \prod_{r=1}^{n} p_r f \right|^2, \tag{28}$$

совместимых с эрмитовостью H. Действительно, транспонированный гамильтониан h^{T} связан с h посредством двух преобразований подобия [10]

$$h^{\mathrm{T}} = \prod_{r=1}^{n} p_r\, h \prod_{r=1}^{n} p_r^{-1} = \prod_{r=1}^{n} \rho_{r,r+1}^{-1}\, h \prod_{r=1}^{n} \rho_{r,r+1}\,. \tag{29}$$

Поэтому h коммутирует,

$$[h, A] = 0\,, \tag{30}$$

с дифференциальным оператором [10]

$$A = \rho_{12}\rho_{23}\ldots\rho_{n1}\, p_1 p_2 \ldots p_n\,. \tag{31}$$

Далее, согласно работе [12] имеется семейство $\{q_r\}$ взаимно коммутирующих интегралов движения

$$[q_r, q_s] = 0\,, \quad [q_r, h] = 0\,, \tag{32}$$

выражающихся в виде

$$q_r = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} \rho_{i_1 i_2}\, \rho_{i_2 i_3} \ldots \rho_{i_r i_1}\, p_{i_1}\, p_{i_2} \ldots p_{i_r}\,. \tag{33}$$

В частности, q_n равно A, а q_2 пропорционально M^2.

Производящий функционал для этих интегралов движения совпадает с трансфер-матрицей $T(u)$ для XXX-модели [12, 13]

$$T(u) = \mathrm{tr}\big[L_1(u)\, L_2(u) \ldots L_n(u)\big] = \sum_{r=0}^{n} u^{n-r} q_r\,, \tag{34}$$

где операторы L имеют вид

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u + \rho_k p_k & p_k \\ -\rho_k^2 p_k & u - \rho_k p_k \end{pmatrix} = \\ = u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho_k \end{pmatrix} (\rho_k \quad 1)\, p_k\,. \tag{35}$$

Трансфер-матрица получается в результате взятия следа матрицы монодромии $t(u)$:

$$T(u) = \mathrm{tr}\big[t(u)\big]\,, \quad t(u) = L_1(u)\, L_2(u) \ldots L_n(u)\,. \tag{36}$$

Можно показать, что $t(u)$ удовлетворяет уравнению Янга – Бакстера [12, 13]

$$t_{r_1'}^{s_1}(u)\, t_{r_2'}^{s_2}(v)\, l_{r_1 r_2}^{r_1' r_2'}(v-u) = l_{s_1' s_2'}^{s_1 s_2}(v-u)\, t_{r_2}^{s_2'}(v)\, t_{r_1}^{s_1'}(u)\,, \tag{37}$$

где $l(w)$ совпадает с L-оператором для хорошо известной спиновой модели Гейзенберга

$$l_{s_1' s_2'}^{s_1 s_2}(w) = w\, \delta_{s_1'}^{s_1}\, \delta_{s_2'}^{s_2} + \mathrm{i}\, \delta_{s_2'}^{s_1}\, \delta_{s_1'}^{s_2}\,. \tag{38}$$

Коммутативность $T(u)$ и $T(v)$,

$$\big[T(u), T(v)\big] = 0\,, \tag{39}$$

следует из уравнения Янга – Бакстера.

Если параметризовать $t(u)$ следующим образом

$$t(u) = \begin{pmatrix} j_0(u) + j_3(u) & j_-(u) \\ j_+(u) & j_0(u) - j_3(u) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

то это уравнение сводится к следующим лоренц-ковариантным соотношениям для токов $j_\mu(u)$:

$$\left[\, j_\mu(u), j_\nu(v)\right] = \left[\, j_\mu(v), j_\nu(u)\right] = \frac{\mathrm{i}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{2(u-v)} \left(j^\rho(u) j^\sigma(v) - - j^\rho(v) j^\sigma(u)\right). \tag{41}$$

Здесь $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — антисимметричный тензор ($\epsilon_{1230} = 1$) в четырехмерном пространстве Минковского, и метрический тензор $\eta^{\mu\nu}$ имеет сигнатуру $(1, -1, -1, -1)$. Такая форма является следствием инвариантности уравнения Янга – Бакстера относительно преобразований группы Лоренца.

Генераторы пространственных вращений совпадают с генераторами преобразований группы Мёбиуса

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_k\,, \tag{42}$$

$$M_k^3 = \rho_k\,\partial_k\,, \quad M_k^1 = \frac{1}{2}\,(1-\rho_k^2)\,\partial_k\,, \quad M_k^2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\,(1+\rho_k^2)\,\partial_k\,. \tag{43}$$

Коммутационные соотношения алгебры Лоренца имеют вид

$$\left[M^s, M^t\right] = \mathrm{i}\epsilon_{stu}\, M^u, \quad \left[M^s, N^t\right] = \mathrm{i}\epsilon_{stu}\, N^u,$$

$$\left[N^s, N^t\right] = \mathrm{i}\epsilon_{stu}\, M^u\,, \tag{44}$$

где $\mathbf{N}$ — генераторы лоренцевских бустов.

Коммутативность трансфер-матрицы $T(u)$ с локальным гамильтонианом h [12, 13]

$$\left[T(u), h\right] = 0 \tag{45}$$

следует из соотношения

$$\left[L_k(u)\, L_{k+1}(u), h_{k,k+1}\right] = -\mathrm{i}\left(L_k(u) - L_{k+1}(u)\right) \tag{46}$$

для гамильтониана $h_{k,k+1}$. Это соотношение, в свою очередь, вытекает из инвариантности $h_{k,k+1}$ относительно группы Мёбиуса, а также из тождества

$$\Big[h_{k,k+1}, \left[(\mathbf{M}_{k,k+1})^2, \mathbf{N}_{k,k+1}\right]\Big] = 4\,\mathbf{N}_{k,k+1}\,, \tag{47}$$

где

$$\mathbf{M}_{k,k+1} = \mathbf{M}_k + \mathbf{M}_{k+1}\,, \quad \mathbf{N}_{k,k+1} = \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_{k+1} \tag{48}$$

суть генераторы группы Лоренца для двухглюонного состояния. Для того чтобы убедиться в справедливости этого тождества, следует принять во внимание, что парный гамильтониан $h_{k,k+1}$ зависит только от оператора Казимира $\left(\mathbf{M}_{k,k+1}\right)^2$, и поэтому он диагонален,

$$h_{k,k+1}\,|m_{k,k+1}\rangle = \big(\Psi(m_{k,k+1}) + \Psi(1-m_{k,k+1}) - - 2\,\Psi(1)\big)|m_{k,k+1}\rangle, \tag{49}$$

в представлении конформных весов:

$$(\mathbf{M}_{k,k+1})^2\,|m_{k,k+1}\rangle = m_{k,k+1}(m_{k,k+1}-1)\,|m_{k,k+1}\rangle\,. \tag{50}$$

Далее, используя коммутационные соотношения между $\mathbf{M}_{k,k+1}$ и $\mathbf{N}_{k,k+1}$, а также учитывая, что $(\mathbf{M}_k)^2 = 0$, можно убедиться, что оператор $\mathbf{N}_{k,k+1}$ имеет ненулевые матричные элементы только между состояниями $|m_{k,k+1}\rangle$ и $|m_{k,k+1} \pm 1\rangle$. В результате приведенное выше тождество для $\mathbf{N}_{k,k+1}$ оказывается следствием известных рекуррентных соотношений для Ψ-функций:

$$\Psi(m) = \Psi(m-1) + \frac{1}{m-1}\,,$$

$$\Psi(1-m) = \Psi(2-m) + \frac{1}{(m-1)}\,. \tag{51}$$

Парный гамильтониан $h_{k,k+1}$ может быть выражен через асимптотику при малых u для фундаментального оператора $\widehat{L}$ интегрируемой модели Гейзенберга с генераторами группы Мёбиуса в роли спинов [13, 14]

$$\widehat{L}_{k,k+1}(u) = P_{k,k+1}(1 + \mathrm{i}\,u\,h_{k,k+1} + \ldots)\,. \tag{52}$$

Фундаментальный оператор $\widehat{L}$ действует на функции $f(\rho_k, \rho_{k+1})$, при этом $P_{k,k+1}$ задается соотношением

$$P_{k,k+1}\, f(\rho_k, \rho_{k+1}) = f(\rho_{k+1}, \rho_k)\,. \tag{53}$$

Оператор $\widehat{L}_{k,k+1}$ удовлетворяет линейному уравнению Янга – Бакстера [13]

$$L_k(u) L_{k+1}(v)\, \widehat{L}_{k,k+1}(u-v) = = \widehat{L}_{k,k+1}(u-v)\, L_{k+1}(v)\, L_k(u)\,. \tag{54}$$

Это уравнение может быть решено аналогично уравнению для $h_{k,k+1}$:

$$\widehat{L}_{k,k+1}(u) \sim \sim P_{k,k+1} \sqrt{\frac{\Gamma(\widehat{m}_{k,k+1} + \mathrm{i}u)\,\Gamma(1 - \widehat{m}_{k,k+1} + \mathrm{i}u)}{\Gamma(\widehat{m}_{k,k+1} - \mathrm{i}u)\Gamma(1 - \widehat{m}_{k,k+1} - \mathrm{i}u)}}\; \frac{\Gamma(1-\mathrm{i}u)}{\Gamma(1+\mathrm{i}u)}\,, \tag{55}$$

где интегральный оператор $\widehat{m}_{k,k+1}$ определен как решение уравнения

$$\widehat{m}_{k,k+1}\,(\widehat{m}_{k,k+1} - 1) = (\mathbf{M}_k + \mathbf{M}_{k+1})^2\,, \tag{56}$$

и множитель пропорциональности, являющийся периодической функцией с единичным периодом, фиксируется из треугольного уравнения Янга – Бакстера

$$\widehat{L}_{13}(u)\, \widehat{L}_{23}(v)\, \widehat{L}_{12}(u-v) = \widehat{L}_{12}(u-v)\, \widehat{L}_{23}(v)\, \widehat{L}_{13}(u)\,. \tag{57}$$

Для нахождения представления операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям Янга – Бакстера, может быть использован алгебраический анзац Бете [13]. Сначала следует, используя вышеприведенную параметризацию матрицы монодромии $t(u)$ в терминах токов $j_\mu(u)$, построить псевдовакуумное состояние $|0\rangle$, удовлетворяющее уравнениям

$$j_+(u)\,|0\rangle = 0\,. \tag{58}$$

Эти уравнения, однако, имеют нетривиальное решение только тогда, когда L-операторы регуляризованы,

$$L_k^\delta(u) = \begin{pmatrix} u + \rho_k\, p_k - \mathrm{i}\,\delta & p_k \\ -\rho_k^2\, p_k + 2\,\mathrm{i}\,\rho_k\,\delta & u - \rho_k\, p_k + \mathrm{i}\delta \end{pmatrix}, \tag{59}$$

путем введения малого конформного веса $\delta \to 0$ для реджезованных глюонов. Другая возможность состоит в переходе к дуальному пространству, отвечающему $\delta = -1$ [14]. Для регуляризации (59) псевдовакуумное состояние задается как

$$|\delta\rangle = \prod_{k=1}^{n} \rho_k^{2\delta}\,. \tag{60}$$

Оно также является собственным состоянием трансфер-матрицы

$$T(u)|\delta\rangle = 2j_0(u)|\delta\rangle = \big((u - \mathrm{i}\delta)^n + (u + \mathrm{i}\delta)^n\big)|\delta\rangle\,. \tag{61}$$

Более того, все возбужденные состояния получаются посредством применения к $|\delta\rangle$ произведения операторов $j_-(v)$

$$|v_1 v_2 \ldots v_k\rangle = j_-(v_1)\, j_-(v_2) \ldots j_-(v_k)\,|\delta\rangle\,, \tag{62}$$

которые представляют собой собственные функции трансфер-матрицы $T(u)$ с собственными значениями

$$\widetilde{T}(u) = (u + \mathrm{i}\delta)^n \prod_{r=1}^{k} \frac{u - v_r - \mathrm{i}}{u - v_r} + (u - \mathrm{i}\delta)^n \prod_{r=1}^{k} \frac{u - v_r + \mathrm{i}}{u - v_r}\,, \tag{63}$$

при условии, что спектральные параметры $v_1, v_2, \ldots, v_k$ являются набором решений уравнений Бете [13]

$$\left(\frac{v_s - \mathrm{i}\delta}{v_s + \mathrm{i}\delta}\right)^n = \prod_{r \neq s} \frac{v_s - v_r - \mathrm{i}}{v_s - v_r + \mathrm{i}} \tag{64}$$

для $s = 1, 2, \ldots, k$. В силу этого функция Бакстера

$$Q(u) = \prod_{r=1}^{k} (u - v_r) \tag{65}$$

удовлетворяет уравнению [13, 14]

$$\widetilde{T}(u)\, Q(u) = (u - \mathrm{i}\delta)^n\, Q(u + \mathrm{i}) + (u + \mathrm{i}\delta)^n\, Q(u - \mathrm{i})\,, \tag{66}$$

где $\widetilde{T}(u)$ — собственное значение трансфер-матрицы. Собственные функции h и q_k могут быть выражены через решение $Q^{(k)}(u)$ этого уравнения с помощью анзаца Склянина [15]

$$|v_1 v_2 \ldots v_k\rangle = Q^{(k)}(\widehat{u}_1)\; Q^{(k)}(\widehat{u}_2)\; \ldots\; Q^{(k)}(\widehat{u}_{n-1})\,|\delta\rangle\,, \tag{67}$$

где интегральные операторы $\widehat{u}_r$ — нули тока $j_-(u)$:

$$j_-(u) = c \prod_{r=1}^{n-1} (u - \widehat{u}_r)\,. \tag{68}$$

Таким образом, проблема нахождения волновых функций и интерсептов связанных состояний реджезованных глюонов сводится к решению уравнения Бакстера [13, 14]. Подход Бакстера – Склянина будет рассмотрен в разделе 6.

4. Дуальные свойства реджеонных взаимодействий

Интегралы движения q_r и гамильтониан h инвариантны относительно циклической перестановки глюонных индексов $i \to i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в соответствии с бозе-симметрией реджеонной волновой функции при $N_c \to \infty$. Интересно, что эти операторы также инвариантны относительно более общих канонических преобразований [16]

$$\rho_{i-1,\,i} \to p_i \to \rho_{i,\,i+1}\,, \tag{69}$$

в сочетании с обращением порядка операторного умножения. Эта дуальная симметрия реализуется как унитарное преобразование только для нулевого полного импульса

$$\mathbf{p} = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{p}_r = 0\,. \tag{70}$$

Волновая функция $\psi_{m,\tilde{m}}$ связанного состояния с $\mathbf{p} = 0$ может быть представлена через собственную функцию $f_{m\tilde{m}}$ интегралов движения q_k и q_k^* для $k = 1, 2, \ldots, n$ как

$$\psi_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_{23}, \ldots, \boldsymbol{\rho}_{n1}) = \int \frac{\mathrm{d}^2 \rho_0}{2\pi}\, f_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \ldots, \boldsymbol{\rho}_n; \boldsymbol{\rho}_0)\,. \tag{71}$$

Принимая во внимание эрмитовость полного гамильтониана [10, 12]

$$H^+ = \prod_{k=1}^{n} |\rho_{k,\,k+1}|^{-2} H \prod_{k=1}^{n} |\rho_{k,\,k+1}|^2 = \prod_{k=1}^{n} |p_k|^2 H \prod_{k=1}^{n} |p_k|^{-2}\,, \tag{72}$$

решение $\psi^+_{\tilde{m},m}$ комплексно-сопряженного уравнения Шрёдингера для $\mathbf{p} = 0$ может быть записано через $\psi_{\tilde{m},m}$ в следующем виде:

$$\psi^+_{\tilde{m},m}(\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_{23}, \ldots, \boldsymbol{\rho}_{n1}) = \prod_{k=1}^{n} |\rho_{k,\,k+1}|^{-2} \times \\ \times \big(\psi_{\tilde{m},m}(\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_{23}, \ldots, \boldsymbol{\rho}_{n1})\big)^*\,. \tag{73}$$

Поскольку $\psi_{m,\tilde{m}}$ также является собственной функцией интегралов движения $A = q_n$ и A^* с собственными значениями λ_m и $\lambda_m^* = \lambda_{\tilde{m}}$ [10]:

$$A\,\psi_{m,\tilde{m}} = \lambda_m\,\psi_{m,\tilde{m}}\,, \quad A^*\,\psi_{m,\tilde{m}} = \lambda_{\tilde{m}}\,\psi_{m,\tilde{m}}\,, \\ A = \rho_{12} \ldots \rho_{n1}\, p_1 \ldots p_n\,, \tag{74}$$

можно убедиться, что дуальность принимает вид интегрального уравнения для $\psi_{m,\tilde{m}}$ [16]

$$\psi_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_{12}, \ldots, \boldsymbol{\rho}_{n1}) = |\lambda_m|\, 2^n \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^2 \rho'_{k-1,\,k}}{2\pi} \times \\ \times \prod_{k=1}^{n} \frac{\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\rho}_{k,\,k+1}\, \boldsymbol{\rho}'_k)}{|\rho'_{k,\,k+1}|^2}\, \psi^*_{\tilde{m},m}(\boldsymbol{\rho}'_{12}, \ldots, \boldsymbol{\rho}'_{n1})\,. \tag{75}$$

В оддеронном случае конформная инвариантность фиксирует решение уравнения Шрёдингера [10]

$$f_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3; \boldsymbol{\rho}_0) = \left(\frac{\rho_{12}\,\rho_{23}\,\rho_{31}}{\rho_{10}^2\,\rho_{20}^2\,\rho_{30}^2}\right)^{m/3} \times \\ \times \left(\frac{\rho^*_{12}\,\rho^*_{23}\,\rho^*_{31}}{\rho^{*2}_{10}\,\rho^{*2}_{20}\,\rho^{*2}_{30}}\right)^{\tilde{m}/3} f_{m,\tilde{m}}(\mathbf{x}) \tag{76}$$

с точностью до произвольной функции $f_{m,\tilde{m}}(\mathbf{x})$ одной комплексной переменной x, являющейся ангармоническим отношением четырех координат

$$x = \frac{\rho_{12}\,\rho_{30}}{\rho_{10}\,\rho_{32}}\,. \tag{77}$$

Отметим, что бозе-симметрия волновой функции оддерона предполагает определенные модулярные свойства $f_{m,\tilde{m}}(\mathbf{x})$ по отношению к преобразованиям $x \to 1-x$, $x \to 1/x$ [16, 17].

Оддеронная волновая функция $\psi_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_{ij})$ при $\mathbf{q}=0$ может быть записана как

$$\psi_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_{ij}) = \left(\frac{\rho_{23}}{\rho_{12}\rho_{31}}\right)^{m-1}\left(\frac{\rho_{23}^*}{\rho_{12}^*\rho_{31}^*}\right)^{\tilde{m}-1}\chi_{m,\tilde{m}}(\mathbf{z})\,,$$

$$z = \frac{\rho_{12}}{\rho_{32}}\,, \tag{78}$$

где

$$\chi_{m,\tilde{m}}(\mathbf{z}) = \int\frac{\mathrm{d}^2x\,f_{m,\tilde{m}}(\mathbf{x})}{2\,\pi|x-z|^4}\left[\frac{(x-z)^3}{x(1-x)}\right]^{2m/3}\left[\frac{(x^*-z^*)^3}{x^*(1-x^*)}\right]^{2\tilde{m}/3}. \tag{79}$$

Эта функция пропорциональна $f_{1-m,1-\tilde{m}}(\mathbf{z})$:

$$\chi_{m,\tilde{m}}(\mathbf{z}) \sim \left[x(1-x)\right]^{2(m-1)/3}\times$$
$$\times\left[x^*(1-x^*)\right]^{2(\tilde{m}-1)/3} f_{1-m,1-\tilde{m}}(\mathbf{z})\,, \tag{80}$$

ввиду линейной зависимости между двумя представлениями $(m,\widetilde{m})$ и $(1-m, 1-\widetilde{m})$. Соответствующее условие вещественности для представлений группы Мёбиуса может быть представлено в виде интегрального соотношения

$$\chi_{m,\tilde{m}}(\mathbf{z}) = \int\frac{\mathrm{d}^2x}{2\,\pi}\,(x-z)^{2m-2}\,(x^*-z^*)^{2\tilde{m}-2}\,\chi_{1-m,1-\tilde{m}}(\mathbf{x}) \tag{81}$$

для подходящего выбора фаз у функций $\chi_{m,\tilde{m}}$ и $\chi_{1-m,1-\tilde{m}}$.

Уравнение дуальности для $\chi_{m,\tilde{m}}(\mathbf{z})$ записывается в псевдодифференциальной форме [16]:

$$z(1-z)\,(\mathrm{i}\partial)^{2-m}\,z^*(1-z^*)\,(\mathrm{i}\partial^*)^{2-\tilde{m}}\,\varphi_{1-m,1-\tilde{m}}(\mathbf{z}) =$$
$$= |\lambda_{m,\tilde{m}}|\left[\varphi_{1-m,1-\tilde{m}}(\mathbf{z})\right]^*, \tag{82}$$

где

$$\varphi_{1-m,1-\tilde{m}}(\mathbf{z}) = \left[z(1-z)\right]^{1-m}\left[z^*(1-z^*)\right]^{1-\tilde{m}}\chi_{m,\tilde{m}}(\mathbf{z})\,. \tag{83}$$

Условие нормировки волновой функции

$$\|\varphi_{m,\tilde{m}}\|^2 = \int\frac{\mathrm{d}^2x}{\left|x(1-x)\right|^2}\,\left|\varphi_{m,\tilde{m}}(\mathbf{x})\right|^2 \tag{84}$$

совместимо с дуальностью.

Для голоморфных факторов $\varphi^{(m)}(x)$ уравнения дуальности имеют вид [16]

$$a_m\varphi^{(m)}(x) = \lambda^m\varphi^{(1-m)}(x)\,,$$
$$a_{1-m}\varphi^{(1-m)}(x) = \lambda^{1-m}\varphi^{(m)}(x)\,, \tag{85}$$

где

$$a_m = x(1-x)\,p^{1+m}\,. \tag{86}$$

Если мы проинтерпретируем p как координату, а $x-1/2$ как импульс, то уравнение дуальности для наиболее важного случая $m=1/2$ может быть сведено к уравнению Шрёдингера с потенциалом $V(p)=\sqrt{\lambda}\,p^{-3/2}$ [16].

Обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, соответствующее диагонализации оператора A,

$$a_{1-m}\,a_m\,\varphi = -\mathrm{i}x(1-x)\big\{x(1-x)\partial^2 + (2-m)\times$$
$$\times\left[(1-2x)\partial - 1 + m\right]\big\}\partial\,\varphi = \lambda\varphi \tag{87}$$

имеет три независимых решения $\varphi_i^{(m)}(x,\lambda)$ [10] для каждого собственного значения λ. При $x\to 0$ они могут быть выбраны в виде [17]

$$\varphi_r^{(m)}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(m)}(\lambda)\,x^k\,,\quad d_1^{(m)}(\lambda) = 1\,; \tag{88}$$

$$\varphi_s^{(m)}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)}(\lambda)\,x^k + \varphi_r^{(m)}(x,\lambda)\,\ln x\,,\quad a_1^{(m)} = 0\,; \tag{89}$$

$$\varphi_f^{(m)}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}^{(m)}(\lambda)\,x^{k+m}\,,\quad c_m^{(m)}(\lambda) = 1\,. \tag{90}$$

Дифференциальное уравнение (87) налагает определенные рекуррентные соотношения на коэффициенты a_k, c_k и d_k. Из условия однозначности в окрестности $\mathbf{x}=0$ мы получаем следующее представление для полной волновой функции:

$$\varphi_{m,\tilde{m}}(x,x^*) = \varphi_f^{(m)}(x,\lambda)\,\varphi_f^{(\tilde{m})}(x^*,\lambda^*) +$$
$$+ c_2\,\varphi_r^{(m)}(x,\lambda)\,\varphi_r^{(\tilde{m})}(x^*,\lambda^*) +$$
$$+ c_1\big(\varphi_s^{(m)}(x,\lambda)\,\varphi_r^{(\tilde{m})}(x^*,\lambda^*) +$$
$$+ \varphi_r^{(m)}(x,\lambda)\,\varphi_s^{(\tilde{m})}(x^*,\lambda^*)\big) + (\lambda\to-\lambda)\,. \tag{91}$$

Комплексные коэффициенты c_1, c_2 и собственные значения λ фиксируются условием однозначности $f_{m,\tilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_3;\boldsymbol{\rho}_0)$ при $\boldsymbol{\rho}_3=\boldsymbol{\rho}_i$ $(i=1,2)$ и бозе-симметрией [17].

Из уравнения дуальности также имеем [16]

$$|c_1| = |\lambda|\,. \tag{92}$$

Другое соотношение

$$\mathrm{Im}\,\frac{c_2}{c_1} = \mathrm{Im}\left(m^{-1}+\widetilde{m}^{-1}\right) \tag{93}$$

может быть получено [16] при учете того, что комплексно-сопряженные представления $\varphi_{m,\tilde{m}}$ и $\varphi_{1-m,1-\tilde{m}}$ группы Мёбиуса связаны линейным преобразованием, которое обсуждалось выше. Используя численные результаты из работы [17], можно показать, что оба соотношения для c_1 и c_2 выполняются.

Если для произвольного n мы рассмотрим парный гамильтониан $h_{k,k+1}(t)$, зависящий от времени как

$$h_{k,k+1}(t) = \exp\left(\mathrm{i}T(u)\,t\right)h_{k,k+1}\,\exp\left(-\,\mathrm{i}T(u)\,t\right), \tag{94}$$

то можно осуществить следующую подстановку в полном гамильтониане h без его изменения:

$$h_{k,\,k+1} \to h_{k,\,k+1}(t)\,, \tag{95}$$

поскольку h и $T(u)$ коммутируют. С другой стороны, из-за быстрых осцилляций при $t \to \infty$ $h_{k,\,k+1}(t)$ диагонализуется в представлении, в котором трансфер-матрица $T(u)$ диагональна:

$$h_{k,\,k+1}(\infty) = f_{k,\,k+1}(\widehat{q}_2, \widehat{q}_3, \ldots, \widehat{q}_n)\,. \tag{96}$$

В оддеронном случае $h_{k,\,k+1}(\infty)$ является функцией полного конформного момента M^2 и интеграла движения $q_3 = A$, который может быть представлен в виде

$$A = \frac{\mathrm{i}^3}{2}\left[M_{12}^2\,, M_{13}^2\right] = \frac{\mathrm{i}^3}{2}\left[M_{23}^2\,, M_{12}^2\right] = \frac{\mathrm{i}^3}{2}\left[M_{13}^2\,, M_{23}^2\right]. \tag{97}$$

В общем случае n реджезованных глюонов можно применить технику Клебша–Гордана, основанную на построении общих собственных функций полного момента q_2 с собственными значениями $m(m-1)$ и набора $\{\widehat{M}_k\}$ коммутирующих моментов для того, чтобы найти все операторы $M_{k,\,k+1}^2$ в соответствующем представлении. Однако для того чтобы диагонализовать h, необходимо произвести унитарное преобразование к представлению, в котором $T(u)$ диагональна. Ядро этого интегрального преобразования удовлетворяет некоторым рекуррентным соотношениям (см. [16]).

5. Оддеронный гамильтониан и интегралы движения

Голоморфный гамильтониан для n реджезованных глюонов можно записать в форме, инвариантной относительно преобразований группы Мёбиуса [16],

$$h = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{\rho_{k+2,0}\,\rho_{k,\,k+1}^2}{\rho_{k+1,0}\,\rho_{k+1,\,k+2}}\,\partial_k\right) + \ln\left(\frac{\rho_{k-2,0}\,\rho_{k,\,k-1}^2}{\rho_{k-1,0}\,\rho_{k-1,\,k-2}}\,\partial_k\right) - 2\,\Psi(1)\right], \tag{98}$$

где ρ_0 — координата связанного состояния.

Рассмотрим оддеронный случай подробнее. Используя конформный анзац для волновой функции

$$f_m(\rho_1, \rho_2, \rho_3; \rho_0) = \left(\frac{\rho_{23}}{\rho_{20}\rho_{30}}\right)^m \varphi_m(x)\,, \quad x = \frac{\rho_{12}\rho_{30}}{\rho_{10}\rho_{32}}\,, \tag{99}$$

можно получить гамильтониан для функции $\varphi_m(x)$ в пространстве ангармонического отношения x [10]

$$\begin{aligned} h = {} & 6\gamma + \ln(x^2\partial) + \ln\left[(1-x)^2\partial\right] + \\ & + \ln\left\{\frac{x^2}{1-x}\left[(1-x)\partial + m\right]\right\} + \\ & + \ln\left\{\frac{1}{1-x}\left[(1-x)\partial + m\right]\right\} + \\ & + \ln\left[\frac{(1-x)^2}{x}(x\partial - m)\right] + \ln\left[\frac{1}{x}(x\partial - m)\right]. \end{aligned} \tag{100}$$

Удобно ввести логарифмическую производную $P \equiv x\partial$ в качестве нового импульса. Используя соотношения вида

$$\ln(\partial) = -\ln(x) + \Psi(-x\partial)\,,$$

$$\ln(x^2\partial) = \ln(\partial) + 2\ln(x) - \frac{1}{P}$$

и раскладывая функции в ряд по x, можно получить оддеронный гамильтониан в нормально упорядоченном виде [16]:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} = {} & -\ln(x) + \Psi(1-P) + \Psi(-P) + \\ & + \Psi(m-P) - 3\Psi(1) + \sum_{k=1}^{\infty} x^k f_k(P)\,, \end{aligned} \tag{101}$$

где

$$f_k(P) = -\frac{2}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P+k-m} + \frac{1}{P+k}\right) + \sum_{t=0}^{k}\frac{c_t(k)}{P+t}\,. \tag{102}$$

Здесь

$$c_t(k) = \frac{(-1)^{k-t}\,\Gamma(m+t)\left[(t-k)\,(m+t) + mk/2\right]}{k\Gamma(m-k+t+1)\,\Gamma(t+1)\,\Gamma(k-t+1)}\,. \tag{103}$$

Поскольку h и $B = \mathrm{i}A$ коммутируют, h является функцией B. В частности, для больших B эта функция должна иметь вид

$$\frac{h}{2} = \ln(B) + 3\gamma + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{B^{2r}}\,. \tag{104}$$

Первые два члена этого асимптотического разложения были вычислены в [5]. Ряд содержит обратные степени B^2, так как h должен быть инвариантен относительно всех модулярных преобразований, включая инверсию $x \to 1/x$, при которой B меняет знак. Такое же функциональное соотношение должно иметь место для собственных значений $\varepsilon/2$ и $\mu = \mathrm{i}\lambda$ этих операторов.

Для больших μ удобно рассматривать уравнение на собственные значения в P-представлении, при этом x выступает в роли оператора сдвига,

$$x = \exp\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P}\right), \tag{105}$$

после выделения из собственных функций B и h общего фактора

$$\varphi_m(P) = \Gamma(-P)\,\Gamma(1-P)\,\Gamma(m-P)\,\exp(\mathrm{i}\pi P)\,\Phi_m(P)\,. \tag{106}$$

Функция $\Phi_m(P)$ может быть разложена в ряд по $1/\mu$:

$$\Phi_m(P) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^{-n}\Phi_m^n(P)\,, \quad \Phi_m^0(P) = 1\,, \tag{107}$$

при этом коэффициенты $\Phi_m^n(P)$ оказываются полиномами степени $4n$, удовлетворяющими рекуррентному соотношению

$$\Phi^n_m(P) = \sum_{k=1}^{P}(k-1)\,(k-1-m)\times$$
$$\times\left[(k-m)\,\Phi^{n-1}_m(k-1)+(k-2)\,\Phi^{n-1}_{1-m}(k-1-m)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(k-1)\,(k-1-m)\left[(k-m)\,\Phi^{n-1}_m(k-1)+\right.$$
$$\left.+(k-2)\,\Phi^{n-1}_{1-m}(k-1-m)\right],\, \Phi^0_m(P)=1\,, \qquad (108)$$

которое справедливо в силу следующих уравнений дуальности, полученных после подстановки $x\mu \to x$ для определенного выбора фазы $\Phi_m(P)$:

$$\Phi_{1-m}(P+1-m) - \frac{1}{\mu}\,P(P-1)\,(P-m)\times$$
$$\times\,\Phi_{1-m}(P-m) = \Phi_m(P)\,,$$
$$\Phi_m(P+m) - \frac{1}{\mu}\,P(P-1)\,(P+m-1)\times$$
$$\times\,\Phi_m(P+m-1) = \Phi_{1-m}(P)\,. \qquad (109)$$

В самом деле, после замены переменных $P\to P-m$ во втором уравнении и сложении его с первым получим

$$\Phi_m(P)-\Phi_m(P-1) = \frac{1}{\mu}\,(P-1)\,(P-1-m)\times$$
$$\times\left[(P-m)\Phi_m(P-1)+(P-2)\,\Phi_{1-m}(P-m-1)\right],$$

откуда следует рекуррентное соотношение (108).

Подчеркнем, что постоянные $\Phi^n_m(0)$ в этом рекуррентном соотношении антисимметричны:

$$\Phi^n_m(0) = -\Phi^n_{1-m}(0)\,, \qquad (110)$$

что гарантирует справедливость соотношения

$$\Phi^n_m(m) = \Phi^n_{1-m}(0) \qquad (111)$$

как следствия соотношения дуальности. С другой стороны, исходя из предыдущей формулы и принимая во внимание, что функция $r_m = \Phi^n_{1-m}(0)-\Phi^n_m(0)$ антисимметрична, мы можем выбрать $\Phi^n_m(0) = -r_m/2$, так как добавление симметричного вклада приведет к переопределению начального условия $\Phi^0_m(P)=1$. Наиболее общим решением уравнения дуальности является, таким образом, наша функция $\Phi_m(P)$, умноженная на произвольную симметричную константу.

В частности, рекуррентное соотношение дает

$$\Phi_m(1) = \Phi_m(0)\,.$$

Энергия оддерона выражается через $\Phi_m(P)$ следующим образом:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \ln(\mu)+3\gamma+\frac{\partial}{\partial P}\ln\Phi_m(P)+$$
$$+\left(\Phi_m(P)\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}f_k(P-k)\,\Phi_m(P-k)\times$$
$$\times\prod_{r=1}^{k}(P-r)(P-r+1)(P-r-m+1)\,, \qquad (112)$$

и это выражение не зависит от P, поскольку h и B коммутируют.

Ввиду того, что при $P\to 1$ мы будем иметь

$$f_1(P-1)\to\frac{c_0(1)}{P-1} = \frac{m}{2}\,\frac{1}{P-1}\,,\quad (P-1)\,f_k(P-k)\neq\infty$$

и $\Phi_m(1)=\Phi_m(0)$, выражение для энергии можно упростить:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \ln(\mu)+3\gamma+\frac{\Phi'_m(1)}{\Phi_m(1)}+\frac{m(1-m)}{2\mu}\,. \qquad (113)$$

Можно выразить ε через значения функции $\Phi_m(P)$ в других целочисленных точках s:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \ln(\mu)+3\gamma+\frac{\Phi'_m(s)}{\Phi_m(s)}+\frac{(1-m)\,c_0(k)}{\mu^s}\,\frac{\Phi_m(0)}{\Phi_m(s)}\times$$
$$\times\prod_{r=1}^{s-1}(s-r)(s-r+1)(s-r-m+1)+$$
$$+\sum_{k=1}^{s-1}\mu^{-k}f_k(s-k)\,\frac{\Phi_m(s-k)}{\Phi_m(s)}\times$$
$$\times\prod_{r=1}^{k}(s-r)(s-r+1)(s-r-m+1)\,.$$

Это представление эквивалентно предыдущему в силу рекуррентного соотношения для $\Phi_{m,\,1-m}(P)$, следующего из уравнения дуальности.

Действительно, из уравнения на собственные значения интеграла движения следуют рекуррентные соотношения для функции $\Phi_m(P)$,

$$\Phi_m(P+1) = \left[1+\frac{P(P-m)}{\mu}\,(2P-m)\right]\Phi_m(P)-$$
$$-\frac{P(P-1)^2(P-m)^2(P-m-1)}{\mu^2}\,\Phi_m(P-1)\,,$$

и ее производной $\Phi'(P)$,

$$\Phi'_m(P+1) = \left[1+\frac{P(P-m)}{\mu}(2P-m)\right]\Phi'_m(P)-$$
$$-\frac{P(P-1)^2(P-m)^2(P-m-1)}{\mu^2}\,\Phi'_m(P-1)+$$
$$+\frac{1}{\mu}\left[P(P-m)(2P-m)\right]'\Phi_m(P)-$$
$$-\frac{1}{\mu^2}\left[P(P-1)^2(P-m)^2(P-m-1)\right]'\Phi_m(P-1)\,.$$

В частности,

$$\Phi_m(0) = \Phi_m(1)\,,\quad \Phi_m(2) = \left(1+\frac{(1-m)(2-m)}{\mu}\right)\Phi_m(1)\,,$$
$$\Phi'_m(2) = \left(1+\frac{(1-m)(2-m)}{\mu}\right)\Phi'_m(1)+\frac{m^2-6m+6}{\mu}\,\Phi_m(1),$$
$$c_0(2) = -\frac{m(m-1)}{4}\,,\quad f_1(1) = \frac{-6+(13/2)m-(3/2)m^2}{2(2-m)}\,.$$

Поэтому оба выражения для энергии при $s=1,2$ совпадают:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \ln\mu+3\gamma+\frac{\Phi'_m(2)}{\Phi_m(2)}+\frac{2(2-m)}{\mu}\,f_1(1)\,\frac{\Phi_m(1)}{\Phi_m(2)}+$$
$$+\frac{2(1-m)(2-m)}{\mu^2}\,c_0(2)\,\frac{\Phi_m(0)}{\Phi_m(2)} =$$
$$= \ln\mu+3\gamma+\frac{\Phi'_m(1)}{\Phi_m(1)}+\frac{m(1-m)}{2\mu}\,.$$

Далее, без ограничения общности можно положить в соответствии с соотношением дуальности, что

$$\Phi_m(1+m) = \Phi_m(m) = \Phi_m(1) = \Phi_m(0) = 1\,. \tag{114}$$

Для других целочисленных аргументов Φ_m мы приходим к рекуррентным соотношениям, следующим из уравнения на собственные значения для интеграла движения:

$$\Phi_m(2) = \left(1 + \frac{(1-m)(2-m)}{\mu}\right),$$

$$\Phi_m(s+1) = \left[1 + \frac{s(s-m)}{\mu}(2s-m)\right]\Phi_m(s) - \\ - \frac{s(s-1)^2(s-m)^2(s-m-1)}{\mu^2}\,\Phi_m(s-1)\,,$$

$$\Phi_m(2+m) = \left(1 + \frac{(1+m)(2+m)}{\mu}\right),$$

$$\Phi_m(s+1+m) = \left[1 + \frac{(s+m)s}{\mu}(2s+m)\right]\Phi_m(s+m) - \\ - \frac{(s+m)(s+m-1)^2 s^2(s-1)}{\mu^2}\,\Phi_m(s+m-1)\,.$$

Решением этих уравнений служит полином по переменным μ^{-1} и m

$$\Phi_m(s) = \sum_{k=0}^{2(s-1)-1}\sum_{l=0}^{2k} c_{kl}\,\mu^{-k}\,m^l\,.$$

Мы также можем последовательно вычислить производные в этих точках, определяя

$$\Phi'_m(1) = e(m)\,. \tag{115}$$

Именно, получаем

$$\Phi'_m(2) = \left[1 + \frac{(1-m)(2-m)}{\mu}\right]e(m) + \frac{m^2-6m+6}{\mu} \tag{116}$$

и

$$\Phi'_m(s+1) = \left[1 + \frac{s(s-m)}{\mu}(2s-m)\right]\Phi'_m(s) - \\ - \frac{s(s-1)^2(s-m)^2(s-m-1)}{\mu^2}\,\Phi'_m(s-1) + \\ + \frac{1}{\mu}\left[s(s-m)(2s-m)\right]'\Phi_m(s) - \\ - \frac{1}{\mu^2}\left[s(s-1)^2(s-m)^2(s-m-1)\right]'\Phi_m(s-1)\,. \tag{117}$$

Параметр $e(m)$ фиксируется условием, что уравнение дуальности для $\Phi_m(s)$ справедливо при $P \to \infty$. Для того чтобы сформулировать это требование, вернемся к изначальному определению волновой функции

$$\Phi_m(P) = \frac{\varphi_m(P)\exp(\mathrm{i}\pi P)}{\Gamma(-P)\,\Gamma(1-P)\,\Gamma(m-P)\mu^P}\,.$$

Функция $\varphi_m(P)$ представляет собой преобразование Меллина волновой функции в x-представлении

$$\varphi_m(x) \sim -\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{d}P}{2\pi\mathrm{i}}\,x^P\varphi_m(P)$$

и удовлетворяет уравнению дуальности

$$(P+m)\varphi_m(P+m) - (P-1)\varphi_m(P+m-1) = \\ = \frac{\Gamma(1-P-m)\,\mu^m\varphi_{1-m}(P)}{\Gamma(1-P)\exp\left[\mathrm{i}\pi(1+m)\right]}\,.$$

Контур интегрирования по P расположен правее всех сингулярностей $\varphi(P)$ и при $x \to \infty$ сдвигается влево до точек, где имеются полюсы $\varphi_m(P)$. Функция $\varphi_m(x)$, когда $x \to 1$, представляется линейной комбинацией $c + (1-x)\ln(1-x)$ и $(1-x)^m$. Поэтому $\varphi_m(P)$ при $P \to -\infty$ имеет асимптотические члены $\sim P^{-1}$ и P^{-1-m}.

Уравнение дуальности для $\varphi_m(P)$ может быть записано в виде

$$P\,\varphi_m(P) - (P-m-1)\,\varphi_m(P-1) = \\ = \frac{\exp\left[\mathrm{i}\pi(1-m)\right]\Gamma(1-P)}{\Gamma(1-P+m)}\,\varphi_{1-m}(P-m)\,\mu^m.$$

Оно соответствует уравнению

$$x(1-x)\,\partial^{1+m}\varphi_m(x) = -\mu^m\varphi_{1-m}(x)\,,$$

если мы определим $x^{1+m}\,\partial^{1+m}$ как

$$x^{1+m}\,\partial^{1+m} = \exp\left[\mathrm{i}\pi(-1+m)\right]\,\frac{\Gamma(1-P+m)}{\Gamma(-P)}\,.$$

Если бы мы определили эту величину как

$$x^{1+m}\,\partial^{1+m} = \frac{\Gamma(1+P)}{\Gamma(P-m)}\,,$$

то уравнение дуальности имело бы вид

$$P\,\widetilde{\varphi}_m(P) - (P-m-1)\,\widetilde{\varphi}_m(P-1) = \\ = -\frac{\Gamma(P-m)}{\Gamma(P)}\,\widetilde{\varphi}_{1-m}(P-m)\,\mu^m.$$

Очевидно, что правые части этих уравнений отличаются на фактор

$$K_m(P) = \frac{\sin\left[\pi(P-m)\right]}{\sin(\pi P)}\exp(-\mathrm{i}\pi m)\,,$$

который является периодической функцией: $K_m(P) = K_m(P+1)$. Этот фактор равен единице для целых m и несуществен для произвольных m, поскольку, если мы итерируем соотношение дуальности для получения уравнения на собственные значения для интеграла движения, то имеет место соотношение

$$K_m^{-1}(P) = K_{1-m}(P-m)\,.$$

С другой стороны, если искать решение в виде суммы по полюсам, то результаты, следующие из двух форм уравнения дуальности, будут различными для нецелых m. Производя модулярные преобразования $x \to 1/x$ для волновой функции $\varphi_m(x)$, мы можем получить связь между решениями этих двух уравнений:

$$\widetilde{\varphi}_m(P) = \varphi_m(-P+m),\ \mu \to -\mu\,.$$

Это означает, что $\widetilde{\varphi}_m(P)$ имеет полюсы первого порядка при $P=-m$ и при $P=-k$ и второго порядка при $P=-m-k$. Мы можем определить функцию без полюсов

$$\widetilde{\Omega}_m(P) = \frac{\widetilde{\varphi}_m(P)}{\Gamma(P)\,\Gamma(1+P-m)\,\Gamma(P-m)\mu^{m-P}}\,,$$

которая связана с $\Phi_m(P)$ следующим образом:

$$\widetilde{\Omega}_m(P) = \Phi^s_m(m-P)\,.$$

Индекс s означает здесь подстановку $\mu \to -\mu$.

Можно также использовать другие модулярные преобразования в x представлении, например $x \to 1-x$, что даст другие соотношения между решениями φ и $\widetilde{\varphi}$. Возможно, что голоморфные энергии, соответствующие этим новым решениям, будут различными и условие их совпадения приведет к квантованию μ, подобно тому, как это происходит в случае уравнения Бакстера – Склянина, рассматривающегося в разделе 6.

Решая рекуррентные соотношения для $\Phi^n_m(P)$ и подставляя результат в выражение для энергии, мы получаем следующее асимптотическое разложение для $\varepsilon/2$ [16]:

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} &= \ln(\mu) + 3\gamma + \left(\frac{3}{448} + \frac{13}{120}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 - \right.\\ &\quad \left. - \frac{1}{12}\left(m-\frac{1}{2}\right)^4\right)\frac{1}{\mu^2} + \\ &\quad + \left(-\frac{4185}{2050048} - \frac{2151}{49280}\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right)\frac{1}{\mu^4} + \\ &\quad + \left(\frac{965925}{37044224} + \ldots\right)\frac{1}{\mu^6} + \ldots\end{aligned} \qquad (118)$$

Это разложение может быть использовано с определенной точностью даже для наименьшего собственного значения $\mu = 0{,}20526$, которое соответствует энергии основного состояния $\varepsilon = 0{,}49434$ [17]. Для первого возбужденного состояния с таким же конформным весом $m = 1/2$, где $\varepsilon = 5{,}16930$ и $\mu = 2{,}34392$ [9], энергия рассчитывается по полученному асимптотическому ряду с хорошей точностью. Развитый в этом разделе аналитический подход следует сравнить с методом, основанном на использовании уравнения Бакстера [17].

С помощью полученных формул можно построить представление оддеронного гамильтониана в двумерном пространстве $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}2H &= h + h^* = 12\gamma + \ln\left(|x|^4|\partial|^2\right) + \ln\left(|1-x|^4|\partial|^2\right) + \\ &\quad + (x-1)^m\,(x^*-1)^{\widetilde{m}}\left[\ln\left(|\partial|^2\right) + \ln\left(|x|^4|\partial|^2\right)\right]\times \\ &\quad \times\,(x-1)^{-m}\,(x^*-1)^{-\widetilde{m}} + (-x)^m\,(-x^*)^{\widetilde{m}}\,\times \\ &\quad \times\left[\ln\left(|1-x|^4|\partial|^2\right) + \ln\left(|\partial|^2\right)\right](-x)^{-m}\,(-x^*)^{-\widetilde{m}}\,.\end{aligned} \qquad (119)$$

Логарифмы в этом выражении можно представить в виде интегральных операторов, если использовать соотношение

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2p}{2\pi}\exp(\mathrm{i}\mathbf{p}\,\mathbf{y})\left(2\gamma + \ln\frac{(\mathbf{p})^2}{4}\right) = \\ &\qquad = -2\left(\frac{\theta(|y|-\varepsilon)}{|y|^2} - 2\,\pi\,\ln\frac{1}{\varepsilon}\,\delta^2(\mathbf{y})\right).\end{aligned} \qquad (120)$$

Это представление помогает найти собственное значение гамильтониана для собственной функции интегралов движения B и B^* с обращающимися в нуль собственными значениями $\mu = \mu^* = 0$:

$$\varphi_{m,\widetilde{m}}(\mathbf{x}) = 1 + (-x)^m(-x^*)^{\widetilde{m}} + (x-1)^m(x^*-1)^{\widetilde{m}}\,. \qquad (121)$$

Соответствующая волновая функция $f_{m,\widetilde{m}}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3; \boldsymbol{\rho}_0)$ инвариантна относительно циклической перестановки координат $\boldsymbol{\rho}_1 \to \boldsymbol{\rho}_2 \to \boldsymbol{\rho}_3 \to \boldsymbol{\rho}_1$, но симметрична относительно замен $\boldsymbol{\rho}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{\rho}_2$ только для четных значений конформного спина $n = \widetilde{m} - m$, где норма $\|\varphi_{m,\widetilde{m}}\|_1$ расходится из-за сингулярностей при $x = 0, 1, \infty$. Именно по этой причине мы рассматриваем только случай, когда

$$\widetilde{m} - m = 2k+1\,, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (122)$$

Вследствие бозе-симметрии волновой функции это состояние соответствует f-связи и имеет положительную зарядовую C-четность. Оно может отвечать за поведение структурной функции $g_2(x)$ при малых x. Используя для H представление (119), получаем

$$2H\,\varphi_{m,\widetilde{m}}(\mathbf{x}) = E^{\mathrm{p}}_{m,\widetilde{m}}\,\varphi_{m,\widetilde{m}}(\mathbf{x})\,, \qquad (123)$$

где $E^{\mathrm{p}}_{m,\widetilde{m}}$ — собственное значение померонного гамильтониана,

$$E^{\mathrm{p}}_{m,\widetilde{m}} = \epsilon^{\mathrm{p}}_m + \epsilon^{\mathrm{p}}_{\widetilde{m}}\,, \qquad (124)$$

и

$$\epsilon^{\mathrm{p}}_m = \Psi(1-m) + \Psi(m) - 2\Psi(1)\,. \qquad (125)$$

Минимальное значение $E^{\mathrm{p}}_{m,\widetilde{m}}$ достигается при $\widetilde{m} - m = \pm1$ и соответствует $\omega = 0$. В случае нечетных $n = \widetilde{m} - m$ норма $|\varphi|_1$ функции $\varphi_{m,\widetilde{m}}(\mathbf{x})$ конечна:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^2x\,|\varphi_{m,\widetilde{m}}(\mathbf{x})|^2}{3\pi|x(1-x)|^2} &= \mathrm{Re}\,\big(\Psi(m) + \Psi(1-m) + \Psi(\widetilde{m}) + \\ &\quad + \Psi(1-\widetilde{m}) - 4\Psi(1)\big)\,.\end{aligned} \qquad (126)$$

Обратим внимание, что это выражение становится отрицательным при $m = \widetilde{m} = 1/2$. Используя преобразование дуальности, можно получить из решения $\varphi_m(\mathbf{x})$ новое решение для оддерона, симметричное при перестановке $\boldsymbol{\rho}_k$ [18]. Нормировка $|\varphi|_2$ соответствует эрмитовости гамильтониана БФКЛ. Оба решения имеют равные энергии, что связано с предложенной в [18] интерпретацией дуальной симметрии как симметрии при большом N_{c} между реджеонными состояниями с квантовыми числами глюона, но с противоположной сигнатурой [18]. При большом числе цветов также интегрируемы уравнения для аномальных размерностей квазипартонных операторов в расширенной $N = 4$ суперсимметричной теории [19].

6. Представление Бакстера – Склянина

Итак, проблема построения решений уравнения Шрёдингера для взаимодействующих реджезованных глюонов сводится к задаче о нахождении представления матрицы монодромии, удовлетворяющей билинейным соотношениям Янга – Бакстера [12]. Удобно работать в сопряженном пространстве [14], где матрица монодромии параметризуется как

$$\widetilde{t}(u) = \widetilde{L}_n(u)\ldots\widetilde{L}_1(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \qquad (127)$$

а $\widetilde{L}_k(u)$ дается соотношением

$$\widetilde{L}_k(u) = \begin{pmatrix} u + p_k\rho_{k0} & -p_k\rho_{k0}^2 \\ p_k\rho_{k0}^2 & u - p_k\rho_{k0} \end{pmatrix}. \qquad (128)$$

Псевдовакуумное состояние, которое аннигилируется операторами $C(u)$ и $C^*(u)$, имеет вид [14]

$$\Psi^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \ldots, \boldsymbol{\rho}_n; \boldsymbol{\rho}_0) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|\rho_{k0}|^4}. \qquad (129)$$

Для построения n-реджеонного состояния с физическими значениями конформных весов $m, \widetilde{m}$ в рамках анзаца Бете можно использовать подход Бакстера – Склянина [13, 15]. Вначале необходимо ввести функцию Бакстера, которая удовлетворяет уравнению (см. [14, 21, 22])

$$\Lambda^{(n)}(\lambda;\ \boldsymbol{\mu})\, Q(\lambda; m, \boldsymbol{\mu}) = (\lambda + \mathrm{i})^n\, Q(\lambda + \mathrm{i}; m, \boldsymbol{\mu}) + (\lambda - \mathrm{i})^n\, Q(\lambda - \mathrm{i}; m, \boldsymbol{\mu}), \qquad (130)$$

где $\Lambda^{(n)}(\lambda; \boldsymbol{\mu})$ — собственное значение матрицы монодромии,

$$\Lambda^{(n)}(\lambda;\ \boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=0}^{n} (-\mathrm{i})^k\, \mu_k\, \lambda^{n-k},$$
$$\mu_0 = 2, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = m(m-1). \qquad (131)$$

В соответствии с работой [21] мы предполагаем, что собственные значения $\mu_k = \mathrm{i}^k q_k$ интегралов движения вещественны.

Собственные функции голоморфного уравнения Шрёдингера могут быть выражены через функцию Бакстера $Q(\lambda)$ в анзаце Склянина [15]:

$$f(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n; \rho_0) = Q(\widehat{\lambda}_1; m, \boldsymbol{\mu})\, Q(\widehat{\lambda}_2; m, \boldsymbol{\mu})\ldots Q(\widehat{\lambda}_{n-1}; m, \boldsymbol{\mu})\, \Psi^{(0)}, \qquad (132)$$

где $\widehat{\lambda}_r$ — нули матричного элемента $B(u)$ матрицы монодромии:

$$B(u) = -P\prod_{r=1}^{n-1}(u - \widehat{\lambda}_r), \quad P = \sum_{k=1}^{n} p_k. \qquad (133)$$

В работе [21] было осуществлено унитарное преобразование волновой функции связанного состояния n реджезованных глюонов из координатного представления в представление Бакстера – Склянина, в котором операторы $\widehat{\lambda}_r$ диагональны [21] (см. также [22]). Вследствие условия однозначности ядра этого преобразования аргументы функций Бакстера $Q(\lambda)$ и $Q(\lambda^*)$ в голоморфном и в антиголоморфном подпространствах квантуются (см. [21, 22]):

$$\lambda = \sigma + \mathrm{i}\,\frac{N}{2}, \quad \lambda^* = \sigma - \mathrm{i}\,\frac{N}{2}, \qquad (134)$$

где σ — вещественное, а N — целое число. В работе [21] был предложен общий метод решения уравнения Бакстера для n-реджеонного связанного состояния и были определены волновые функции и интерсепты связанных состояний трех и четырех реджеонов. Оказывается [21], что существует набор независимых функций Бакстера $Q^{(t)}$ $(t = 0, 1, \ldots, n-1)$, имеющих кратные полюсы одновременно в верхней и в нижней λ-полуплоскостях в точках $\lambda = \mathrm{i}k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Используя все эти функции, можно построить нормируемую полную функцию Бакстера $Q_{m,\widetilde{m},\boldsymbol{\mu}}(\lambda)$, не имеющую полюсов при $\sigma = 0$ [21],

$$Q_{m,\widetilde{m},\boldsymbol{\mu}}(\lambda) = \sum_{t,l} C_{t,l}\, Q^{(t)}(\lambda; m, \boldsymbol{\mu})\, Q^{(l)}(\lambda^*; \widetilde{m}, \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}}), \qquad (135)$$

где $\mu_r^{\mathrm{s}} = (-1)^r \mu_r$. Это достигается выбором коэффициентов $C_{t,l}$.

Полная энергия $E_{m,\widetilde{m}}$ связана с функцией Бакстера (см. [21]):

$$E = \mathrm{i}\lim_{\lambda,\lambda^*\to i} \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda^*} \times \ln\left[(\lambda - \mathrm{i})^{n-1}(\lambda^* - \mathrm{i})^{n-1}|\lambda|^{2n}\, Q_{m,\widetilde{m},\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\lambda})\right]. \qquad (136)$$

Поскольку функция $Q_{m,\widetilde{m},\boldsymbol{\mu}}(\lambda)$ представляет собой билинейную комбинацию функций $Q^{(t)}(\lambda)$ и $Q^{(l)}(\lambda^*)$ $(t, l = 1, 2, \ldots, n)$, голоморфные энергии для всех решений $Q^{(t)}$ должны совпадать. Это требование приводит к квантованию интегралов движения q_k [21].

Представим уравнение Бакстера для связанного состояния n реджеонов в вещественной форме, для чего введем новую переменную $x \equiv -\mathrm{i}\lambda$,

$$\Omega(x, \boldsymbol{\mu})\, Q(x, \boldsymbol{\mu}) = (x+1)^n\, Q(x+1, \boldsymbol{\mu}) + (x-1)^n\, Q(x-1, \boldsymbol{\mu}), \qquad (137)$$

где

$$\Omega(x, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \mu_k\, x^{n-k} \qquad (138)$$

и

$$\mu_0 = 2, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = m(m-1),$$

предполагая, что собственные значения интегралов движения μ_k $(k > 2)$ вещественны.

Для того чтобы решить уравнение Бакстера, введем набор вспомогательных функций для $r = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$f_r(x, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{\widetilde{a}_l(\boldsymbol{\mu})}{(x-l)^r} + \frac{\widetilde{b}_l(\boldsymbol{\mu})}{(x-l)^{r-1}} + \ldots + \frac{\widetilde{g}_l(\boldsymbol{\mu})}{x-l}\right], \qquad (139)$$

где коэффициенты $\widetilde{a}_l, \ldots, \widetilde{g}_l$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, получающимся при подстановке f_r вместо $Q(x)$ в уравнение Бакстера, но с другими начальными условиями

$$\widetilde{a}_0 = 1, \quad \widetilde{b}_0 = \ldots = \widetilde{g}_0 = 0. \qquad (140)$$

Подчеркнем, что все функции $f_r(x, \boldsymbol{\mu})$ выражены в терминах набора вычетов $\widetilde{a}_l, \ldots, \widetilde{g}_l$ для $f_{n-1}(x, \boldsymbol{\mu})$.

Существует n "минимальных" независимых решений $Q^{(t)}(x, \boldsymbol{\mu})$ $(t = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ уравнения Бакстера, имеющих полюсы t-го порядка при положительных целых x и полюсы $(n-1-t)$-го порядка при отрицательных целых x [21],

$$Q^{(t)}(x,\boldsymbol{\mu}) = \sum_{r=1}^{t} C_r^{(t)}(\boldsymbol{\mu}) f_r(x,\boldsymbol{\mu}) + \\ + \beta^{(t)}(\boldsymbol{\mu}) \sum_{r=1}^{n-1-t} C_r^{(n-1-t)}(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}}) f_r(-x,\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}}), \qquad (141)$$

где мероморфные функции $f_r(x,\boldsymbol{\mu})$ были определены выше. Такая форма решения связана с инвариантностью уравнения Бакстера при подстановке $x \to -x$, $\boldsymbol{\mu} \to \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}}$. Коэффициенты $C_r^{(t)}(\boldsymbol{\mu})$, $C_r^{(n-1-t)}(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}})$ и $\beta^{(t)}(\boldsymbol{\mu})$ получаются, если потребовать выполнения уравнения Бакстера при $x \to \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} x^k\, Q^{(t)}(x,\boldsymbol{\mu}) = 0\,, \quad k = 1,2,\ldots,n-2\,.$$

Это приводит к системе линейных уравнений для коэффициентов $C_r^{(t)}$ с числом уравнений $n-2$. Мы нормируем $Q^{(t)}(x,\boldsymbol{\mu})$, выбирая

$$C_t^{(t)}(\boldsymbol{\mu}) = C_{n-1-t}^{(n-1-t)}(\boldsymbol{\mu}) = 1\,. \qquad (142)$$

Важно заметить, что три последовательных решения $Q^{(r)}$ для $r = 1,2,\ldots,n-2$ связаны линейным преобразованием

$$\left[\delta^{(r)}(\boldsymbol{\mu}) + \pi\,\mathrm{ctg}\,(\pi x)\right] Q^{(r)}(x,\boldsymbol{\mu}) = Q^{(r+1)}(x,\boldsymbol{\mu}) + \\ + \alpha^{(r)}(\boldsymbol{\mu})\, Q^{(r-1)}(x,\boldsymbol{\mu})\,. \qquad (143)$$

В самом деле, левая и правая часть удовлетворяют уравнению Бакстера всюду, включая $x\to\infty$, и имеют одни и те же сингулярности. Поэтому в силу единственности семейства "минимальных" решений величина $\pi\,\mathrm{ctg}\,(\pi x)\, Q^{(r)}(x,\boldsymbol{\mu})$ может быть представлена как $Q^{(r-1)}(x,\boldsymbol{\mu})$, $Q^{(r)}(x,\boldsymbol{\mu})$ и $Q^{(r+1)}(x,\boldsymbol{\mu})$. Кроме того, коэффициент перед $Q^{(r+1)}(x,\boldsymbol{\mu})$ выбран равным единице ввиду нашей нормировки $Q^{(r)}(x,\boldsymbol{\mu})$.

Функция Бакстера во всем **x**-пространстве является билинейной комбинацией голоморфной и антиголоморфной функций $Q^{(r)}$. Вследствие этого голоморфная энергия, выраженная через вычеты $a_0 = 1$, b_0, a_1, b_1 в ближайших к нулю полюсах,

$$\epsilon = \frac{b_1}{a_1} + n = b_0 - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\,, \qquad (144)$$

должна быть одинаковой для всех решений, т.е. $\epsilon^{(0)} = \epsilon^{(1)} = \ldots = \epsilon^{(n)}$. Это приводит к квантованию интегралов движения μ_k и энергии E [21].

Полная энергия связанного состояния n реджеонов дается суммой голоморфной и антиголоморфной энергий

$$E_{m,\tilde m} = \epsilon_m(\boldsymbol{\mu}) + \epsilon_{\tilde m}(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}*})\,.$$

Это имеет место для волновой функции $\varphi_{m,\tilde m}$, удовлетворяющей уравнению Шрёдингера в представлении Бакстера – Склянина в пределе $\lambda, \lambda^* \to \mathrm{i}$ [21]. Можно получить аналогичное выражение

$$E_{m,\tilde m} = \epsilon_m(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}}) + \epsilon_{\tilde m}(\boldsymbol{\mu}^*)\,,$$

взяв другой предел $\lambda, \lambda^* \to -\mathrm{i}$. Эти выражения для энергии были получены из уравнения Шрёдингера с эрмитовым гамильтонианом [21], поэтому они должны совпадать для собственной функции $\varphi_{m,\tilde m}$. Это возможно только тогда, когда выполнено следующее соотношение для квантованных величин $\boldsymbol{\mu}$:

$$\epsilon_m(\boldsymbol{\mu}) + \epsilon_{\tilde m}(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}*}) = \epsilon_m(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{s}}) + \epsilon_{\tilde m}(\boldsymbol{\mu}^*)\,,$$

что дает дополнительное ограничение на спектр интегралов движения. Один из возможных путей разрешить это уравнение связи — потребовать, чтобы $\boldsymbol{\mu}$ был вещественным или чисто мнимым. Однако условия квантования могут быть не столь ограничительными, если волновая функция $Q(\mathbf{x})$ не содержит всех возможных билинейных комбинаций функций Бакстера $Q^{(r)}$ и $Q^{(s)*}$.

7. Реджеонные интерсепты и аномальные размерности квазипартонных операторов

Инклюзивные вероятности $n_i(x, \ln Q^2)$ найти внутри адрона с большим импульсом $|\mathbf{p}| \to \infty$ партон i, несущий долю x полного импульса, зависят от Q^2, и эта зависимость может быть определена из эволюционного уравнения ДГЛАП [3]. Собственные значения соответствующих интегральных ядер, описывающих инклюзивные партонные переходы $i \to k$, совпадают с матричными элементами $\gamma_j^{ki}(\alpha_{\mathrm{s}})$ матрицы аномальных размерностей для операторов O^j твиста 2 с лоренцевыми спинами $j = 2,3,\ldots$

Например, в случае чистой теории Янга – Миллса с калибровочной группой $\mathrm{SU}(N_{\mathrm{c}})$ имеется только один мультипликативно-перенормируемый оператор. Его аномальная размерность сингулярна в нефизической точке $\omega = j-1 \to 0$. В этом пределе можно вычислить аномальную размерность во всех порядках теории возмущений [5]:

$$\gamma_\omega = \frac{\alpha_{\mathrm{s}} N_{\mathrm{c}}}{\pi\omega} - \Psi''(1)\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}} N_{\mathrm{c}}}{\pi\omega}\right)^4 + \ldots\,, \qquad (145)$$

используя собственное значение для ядра уравнения БФКЛ в ЛЛП [1] при $n = 0$:

$$\omega_{\mathrm{BFKL}} = \frac{\alpha_{\mathrm{s}}\, N_{\mathrm{c}}}{\pi}\left[2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1-\gamma)\right]. \qquad (146)$$

Решив уравнение на собственные значения около других сингулярных точек $\gamma = -k$ $(k = 1,2,\ldots)$, из уравнения БФКЛ можно также найти аномальные размерности операторов высшего твиста. Более существенна, однако, проблема вычисления аномальных размерностей для квазипартонных операторов (см. [27]), построенных из нескольких глюонных полей и ответственных за унитаризацию структурных функций при высоких энергиях. Простейшим оператором такого рода является произведение двух операторов твиста 2. В пределе $N_{\mathrm{c}} \to \infty$ этот оператор мультипликативно перенормируем [23].

Рассмотрим высокоэнергетическую асимптотику неприводимой диаграммы Фейнмана, в которой каждый из n реджезованных глюонов при $N_{\mathrm{c}} \to \infty$ взаимодействует только с двумя соседями. В борновском приближении соответствующая функция Грина имеет вид произведения свободных глюонных функций Грина $\prod_{r=1}^{n} \ln|\rho_r - \rho_r'|^2$. При малых α_{s} полная размерность оператора, отвечающего связанному состоянию n реджезованных глюонов, примерно равна положению полюса $(m+\widetilde{m})/2 \approx n/2$ в собственном значении уравнения Шрёдингера для n реджезованных глюонов $\omega(m,\widetilde{m};\mu_3,\ldots,\mu_n)$ (см. [21]):

$$\frac{m+\widetilde{m}}{2}=\frac{n}{2}-\gamma^{(n)}\,,\quad \gamma^{(n)}=c^{(n)}\,\frac{\alpha_s N_c}{\omega}+O\left[\left(\frac{\alpha_s N_c}{\omega}\right)^2\right]. \tag{147}$$

Здесь $\gamma^{(n)}$ — аномальная размерность. Эта формула находится в согласии с результатом вычисления аномальной размерности для диаграмм с обменом несколькими БФКЛ померонами в t-канале [23]. Приведенное соотношение может быть также получено с дважды логарифмической точностью из уравнения для матричных элементов квазипартонных операторов [24]. В частности, для оддерона можно показать, что $c^{(3)}=0$ согласно неопубликованному результату М. Рыскина и А. Шуваева. Этот результат был подтвержден в процессе решения уравнения Бакстера и нахождения полюсной сингулярности около $(m+\widetilde{m})/2=2$ (вместо 3/2, как можно было бы ожидать из общих формул) [21]. Для $n=4$ в соответствии с вышеприведенным соотношением полюсная сингулярность была обнаружена в окрестности $(m+\widetilde{m})/2=2$ (см. обсуждение ниже). Более того, аналогично случаю БФКЛ померона, аномальные размерности γ_3 и γ_4 были вычислены для произвольных α_s/ω (см. [21]), что важно при анализе мультиреджевских вкладов в глубоконеупругие процессы при малых значениях бьеркеновской переменной x. Мы вычислили ω/α_s как функцию $m=\widetilde{m}$ для оддерона и для четырехреджеонного состояния [21].

В оддеронном случае ($n=3$) можно записать линейную комбинацию введенных ранее вспомогательных функций $f_1(x;\,m,\,\mu)$ и $f_2(x;\,m,\,\mu)$ для того, чтобы получить истинные решения уравнения Бакстера, включающие область $x\to\infty$.

Голоморфные энергии выражаются через отношение вычетов для простого и кратного полюсов функций Бакстера в точке $x=1$. Они должны совпадать для независимых функций Бакстера, что обеспечивает квантование μ для данного m [21].

Первые корни были нами найдены для $m=\widetilde{m}=1/2$ численно (см. [21]):

$$\mu_1=0{,}205257506\ldots\,,\quad \mu_2=2{,}3439211\ldots\,,$$
$$\mu_3=8{,}32635\ldots\,,\quad \mu_4=20{,}080497\ldots \tag{148}$$

с соответствующими энергиями

$$E_1=0{,}49434\ldots\,,\quad E_2=5{,}16930\ldots\,,$$
$$E_3=7{,}70234\ldots\,,\quad E_4=9{,}46283\ldots \tag{149}$$

Собственные значения были вычислены как функции m для $0<m<1$ (см. [21]). Энергия монотонно уменьшается от $E=E_1$ при $m=1/2$. Обратим внимание, что лишь $m=0$, 1 и 1/2 являются физическими величинами. Для других m кривая описывает поведение аномальной размерности для соответствующего оператора высшего твиста. Энергия зануляется при $m=0,1$, что следует из выражения, приведенного в [21],

$$E(m,\mu\equiv 0)=\frac{\pi}{\sin(\pi m)}+\Psi(m)+\Psi(1-m)-2\Psi(1)\,.$$

Обратим внимание, что для собственного значения $E(m,\mu\equiv 0)$ функция $Q^{(1)}$ не входит в полную волновую функцию $Q_{m,\widetilde{m},\mu}$ билинейным образом, вследствие чего общий метод квантования не работает.

Численно мы получаем при $m\to 0$

$$E(m)=2{,}152\,m-2{,}754\,m^2+\ldots\,,$$
$$\mu_1(m)=0{,}375\sqrt{m}-0{,}0228\,m+\ldots \tag{150}$$

Поэтому состояние с $m=1$ и $\widetilde{m}=0$ (или наоборот) является основным состоянием оддерона, отвечающим $|n|=1$. Его энергия при $\nu\to 0$ зануляется, и оно оказывается лежащим ниже состояний с $m=\widetilde{m}=1/2$. Подчеркнем, что в общем случае это решение отличается от найденного в [18], поскольку для него μ отлично от нуля.

Обсудим возможное состояние с $n=2$ при $m>1$ (см. [21]). Энергия продолжает уменьшаться. Собственное состояние с $|n|=2$ на этой траектории отсутствует, так как μ чисто мнимое на этом интервале и зануляется только при $m=1$ и $m=2$.

В окрестности $m=2$ энергия обращается в бесконечность, при этом μ исчезает:

$$E(m)=\frac{2}{m-2}+1+(2-m)\,,\quad \mathrm{i}\mu=2-m-\frac{3}{2}\,(m-2)^2\,. \tag{151}$$

Но для физических значений $m=1/2+\mathrm{i}\nu+3/2$, $\widetilde{m}=1/2+\mathrm{i}\nu-3/2$, отвечающих $|n|=3$ и $\nu\to 0$, полная энергия конечна, $E=2$.

Таким образом, мы получаем для аномальной размерности при $\gamma=2-m\to 0$ и $\omega\gg\alpha_s N_c$

$$\gamma=2\,\frac{\alpha_s N_c}{\pi\,\omega}-2\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi\,\omega}\right)^2-2\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi\,\omega}\right)^3+O\left[\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi\,\omega}\right)^4\right].$$

Обратимся теперь к уравнению Бакстера для квартетона (состояние с четырьмя реджезованными глюонами). Для $\mu_4=q_4$ возникает новый интеграл движения. Величины μ и q_4 предполагаются вещественными в соответствии с однозначностью волновой функции в $\boldsymbol{\rho}$-пространстве. Следуя общей процедуре, изложенной в [21], мы ищем решения уравнения Бакстера для квартетона в виде ряда по полюсам. Вначале устанавливаются рекуррентные соотношения для вычетов в полюсах. Затем мы требуем выполнения уравнения Бакстера на бесконечности, что дает дополнительные линейные связи между вычетами.

Беря линейные комбинации вспомогательных функций $f_1(\pm x;\,m,\,\pm\mu,q_4)$, $f_2(x;\,m,\,\mu,q_4)$ и $f_3(x;\,m,\,\mu,q_4)$, мы строим три независимых решения уравнения Бакстера $Q^{(r)}$.

Энергия четырехреджеонного состояния выражается через отношение вычетов в полюсах функции Бакстера при $x=1$ (см. [21]).

Численно находим первые корни обсуждавшихся выше уравнений для случая $m=\widetilde{m}=1/2$

$$\mu=0\,,\quad q_4=0{,}1535892\,,\quad E=-1{,}34832\,,$$
$$\mu=0{,}73833\,,\quad q_4=-0{,}3703\,,\quad E=2{,}34105\,.$$

Для первого собственного значения с $m=0$, $\widetilde{m}=1$ и $|n|=1$ имеем

$$\mu=0\,,\quad q_4=0{,}12167\,,\quad E=-2{,}0799\,.$$

Таким образом, основное состояние квартетона с $|n|=1$ отвечает $m=0$, $\widetilde{m}=1$. Его энергия ниже, чем энергия $E=-1{,}34832$ состояния с $m=\widetilde{m}=1/2$.

Нами была прослежена зависимость положения первого собственного значения от m для $0<m<1/2$ (см. [21]). В отличие от оддеронного случая, собственное значение энергии не зануляется при $m=0$. Энергия уменьшается вместе с m для $0<m<1/2$ и принимает значение $E=-2{,}0799$ при $m=0$.

Наинизшее энергетически состояние четырех реджеонов при $m=2$ уходит на $-\infty$ и q_4 исчезает (q_3 равно нулю для всех m в этом состоянии). Энергия при $m\to 2$ имеет вид

$$E=\frac{4}{m-2}+2+(2-m)+\ldots\,,\quad q_4=\frac{1}{4}(m-2)^2+\ldots \tag{152}$$

Благодаря симметрии относительно замены $m\leftrightarrow 1-m$ мы имеем при $\widetilde{m}\to -1$

$$E=-\frac{4}{\widetilde{m}+1}+3+\widetilde{m}+\ldots$$

Для вычисления энергии состояния с конформным спином $n=3$ мы используем в качестве регулятора предел $\nu\to 0$. Таким образом, получаем

$$E=E_1(m)+E_1(\widetilde{m})=4+O(\nu^2)\,.$$

Мы можем построить аномальную размерность для $\gamma=2-m\to 0$

$$\gamma=4\,\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi\,\omega}+8\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi\,\omega}\right)^2+\ldots$$

Состояние с $m=3/2$ (отвечающее $n=2$, $\nu=0$) может рассматриваться в качестве основного физического состояния для квартетона, поскольку для него собственное значение q_4 вещественно. Оно имеет большую отрицательную энергию $E=-5{,}863$, которая находится ниже, чем энергия $E=-5{,}545$ БФКЛ померона, построенного из двух реджезованных глюонов. Однако для доказательства того, что это состояние является физически реализуемым основным состоянием, необходимо построить билинейные комбинации соответствующих функций Бакстера и убедиться в том, что это решение нормируемо. Большой интерсепт состояния с конформным спином 2 может приводить к таким нефизическим результатам, как отрицательное полное сечение. Известно, однако, что проблема унитаризации амплитуд рассеяния не решается в рамках приближения фиксированного числа реджеонов.

8. Уравнения БФКЛ и ДГЛАП в $N=4$ суперсимметричной модели

В суперсимметричных калибровочных теориях можно вычислить поправки к лидирующему приближению для уравнений БФКЛ и ДГЛАП [25, 26]. Важно, что собственное значение ядра БФКЛ в этом порядке является аналитической функцией конформного спина $|n|$ и обнаруживает свойство эрмитовой сепарабельности [25]. Это дает возможность осуществить аналитическое продолжение к отрицательным значениям $|n|$ и найти аномальные размерности для операторов твиста 2 в соответствии с их непосредственным вычислением из уравнения ДГЛАП [25, 26]. Аномальные размерности получаются в результате процедуры целочисленного сдвига аргумента универсальной функции

$$\hat{Q}(j)=-\frac{4}{3}\,S_1(j)+16\,S_1(j)\,S_2(j)+8\,S_3(j)-\\ -8\,\widetilde{S}_3(j)+16\,\widetilde{S}_{1,2}(j)\,, \tag{153}$$

$$K(j)=\frac{1}{j}\left(\frac{S_1(j)}{j}+S_2(j)+\widetilde{S}_2(j)\right), \tag{154}$$

$$S_k(j)=\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^k}\,,\qquad \widetilde{S}_k(j)=\sum_{i=1}^{j}\frac{(-1)^i}{i^k}\,, \tag{155}$$

$$\widetilde{S}_{k,l}(j)=\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^k}\,\widetilde{S}_l(i)\,. \tag{156}$$

В последнее время был достигнут значительный прогресс в исследованиях $N=4$ суперсимметричной теории Янга – Миллса в рамках AdS/CFT-соответствия [20, 28], при котором предел сильной связи $\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}\to\infty$ описывается классической супергравитацией в пространстве анти-де-Ситтера $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. В частности, было получено [29] очень интересное предсказание, касающееся поведения аномальных размерностей операторов твиста 2 при больших j

$$\gamma(j)=a(z)\,\ln j\,,\quad z=\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi} \tag{157}$$

в пределе сильной связи (см. также [30] и [31], где рассматривается вопрос об асимптотических поправках):

$$\lim_{z\to\infty}a=-\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}\right)^{1/2}+1+O\left[\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}\right)^{-1/2}\right]. \tag{158}$$

Заметим, что в нашей нормировке $\gamma(j)$ содержит дополнительный фактор $-1/2$ по сравнению с нормировкой в [29]. С другой стороны, все аномальные размерности $\gamma_i(j)$ и $\widetilde{\gamma}_i(j)$ совпадают при больших j, и наши результаты для $\gamma(j)$ позволяют найти первые два члена разложения коэффициента a при малых α_{s}

$$\lim_{z\to 0}\widetilde{a}=-\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}+\left(\frac{\zeta(2)}{2}-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}\right)^2+\ldots,$$

где $\zeta(x)$ — ζ-функция Римана. Заметим, что вклад пропорциональный $-1/12$ исчезает при использовании суперсимметричной схемы размерностной редукции [25].

Для того чтобы перейти отсюда в режим сильной связи, мы произведем пересуммирование пертурбативного результата, используя метод, аналогичный приближению Паде, а также учитывая, что при больших N_{c} ряд теории возмущений имеет конечный радиус сходимости. Представим $\tilde{a}$ как решение простого алгебраического уравнения

$$\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}=-\widetilde{a}+\left(\frac{\zeta(2)}{2}-\frac{1}{12}\right)\widetilde{a}^{\,2}\,. \tag{159}$$

Из этого уравнения получаем следующую асимптотику для $\widetilde{a}$ при больших α_{s}:

$$\widetilde{a}\approx-1{,}1632\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}\right)^{1/2}+0{,}67647+O\left[\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{c}}}{\pi}\right)^{-1/2}\right], \tag{160}$$

что хорошо согласуется с результатами, основанными на AdS/CFT-соответствии. Отметим, что если записать для

$\widetilde{a}$ уравнение более общего вида

$$\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi}\right)^n = \sum_{r=n}^{2n} C_r \widetilde{a}^{\,r} \,,$$

то коэффициенты C_r для $n \geqslant 3$ могут быть выбраны так, чтобы включить всю имеющуюся информацию об асимптотике функции $a(z)$.

Кроме того, для $j \to 2$ вследствие сохранения энергии и импульса $\gamma(j) = (j-2)\,\gamma'(2)$, где коэффициент $\gamma'(2)$ может быть извлечен из наших результатов в первых двух порядках теории возмущений. С другой стороны, если фактор $\gamma'(2)$ при больших $z = \alpha_s N_c/\pi$ пропорционален z, можно воспроизвести результат для померонного интерсепта $j = 2 - O(1/z)$, полученный в рамках AdS/CFT-соответствия [33]. Необходимо помнить, что в этом пределе $\gamma = 1/2 + \mathrm{i}\nu + (j-1)/2 \to 1$ для главной последовательности унитарных представлений группы Мёбиуса, фигурирующей в уравнении БФКЛ [1]. Можно предпринять попытку вычисления интерсепта померона, используя его пертурбативное разложение $j - 1 = c_1 z + c_2 z^2$ с коэффициентами $c_{1,2}$, полученными в последней работе [2]. После суммирования по Паде $j - 1 = c_1 z/(1 - c_1 z/c_2)$ мы получаем в режиме сильной связи интерсепт померона в приблизительном согласии с AdS/CFT-оценкой (см. [33]). В то же время обратим внимание, что в высших порядках теории возмущений уравнение БФКЛ должно быть модифицировано путем включения многоглюонных компонент померонной волновой функции.

Я благодарю А.П. Бухвостова, А.В. Котикова, В.Н. Велижанина и Х. де Вега за полезные дискуссии.

Работа поддержана грантом INTAS 2000-366.

Список литературы

1. Липатов Л Н *ЯФ* **23** 642 (1976); Fadin V S, Kuraev E A, Lipatov L N *Phys. Lett. B* **60** 50 (1975); Кураев Е А, Липатов Л Н, Фадин В С *ЖЭТФ* **71** 840 (1976); **72** 377 (1977); Балицкий Я Я, Липатов Л Н *ЯФ* **28** 1597 (1978)
2. Fadin V S, Lipatov L N *Phys. Lett. B* **429** 127 (1998); Ciafaloni M, Camici G *Phys. Lett. B* **430** 349 (1998); Kotikov A V, Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **582** 19 (2000)
3. Грибов В Н, Липатов Л Н *ЯФ* **15** 781, 1218 (1972); Липатов Л Н *ЯФ* **20** 181 (1974); Altarelli G, Parisi G *Nucl. Phys. B* **126** 298 (1977); Докшицер Ю Л *ЖЭТФ* **73** 1216 (1977)
4. Lipatov L N, in *Perturbative Quantum Chromodynamics* (Adv. Ser. on Directions in High Energy Phys., Vol. 5, Ed. A H Mueller) (Singapore: World Scientific, 1989) p. 411; *Phys. Rep.* **286** 131 (1997)
5. Липатов Л Н *ЖЭТФ* **90** 1536 (1986)
6. Brodsky S J et al. *Письма в ЖЭТФ* **70** 161 (1999); **76** 306 (2002)
7. Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **452** 369 (1995)
8. Bartels J *Nucl. Phys. B* **175** 365 (1980); Kwieciǹski J, Praszalowicz M *Phys. Lett. B* **94** 413 (1980)
9. Lukaszuk L, Nicolescu B *Lett. Nuovo Cimento* **8** 405 (1973); Gauron P, Lipatov L, Nicolescu B *Phys. Lett. B* **304** 334 (1993)
10. Lipatov L N *Phys. Lett. B* **251** 284 (1990); **309** 394 (1993)
11. Belavin A A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B *Nucl. Phys. B* **241** 333 (1984)
12. Lipatov L N, hep-th/9311037; DFPD/93/TH/70 (unpublished)
13. Baxter R J *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (London: Academic Press, 1982); Тарасов В О, Тахтаджян Л А, Фаддеев Л Д *ТМФ* **57** 163 (1983)
14. Липатов Л Н *Письма в ЖЭТФ* **59** 571 (1994); Faddeev L D, Korchemsky G P *Phys. Lett. B* **342** 311 (1995)
15. Sklyanin E K, in *Nonlinear Equations in Classical and Quantum Field Theory* (Lecture Notes in Physics, Vol. 226, Ed. N Sanchez) (Berlin: Springer-Verlag, 1985) p. 196
16. Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **548** 328 (1999)
17. Wosiek J, Janik R A *Phys. Rev. Lett.* **79** 2935 (1997); Janik R A, Wosiek J **82** 1092 (1999)
18. Bartels J, Lipatov L N, Vacca G P *Phys. Lett. B* **477** 178 (2000)
19. Lipatov L N, in *Perspectives in Hadronics Physics: Proc. of the Conf. ICTP, Trieste, Italy, 12–16 May 1997* (Eds S Boffi, C C Degliatti, M Giannini) (Singapore: World Scientific, 1998)
20. Maldacena J *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998)
21. de Vega H J, Lipatov L N *Phys. Rev. D* **64** 114019 (2001); **66** 074013 (2002)
22. Derkachov A É, Korchemsky G P, Manashov A N *Nucl. Phys. B* **617** 375 (2001)
23. Gribov L V, Levin E M, Ryskin M G *Phys. Rep.* **100** 1 (1983); Levin E M, Ryskin M G, Shuvaev A G *Nucl. Phys. B* **387** 589 (1992); Bartels J *Z. Phys. C* **60** 471 (1993); Laenen E, Levin E, Shuvaev A G *Nucl. Phys. B* **419** 39 (1994)
24. Shuvaev A, hep-ph/9504341
25. Kotikov A V, Lipatov L N *Nucl. Phys. B* **661** 19 (2003); hep-ph/0208220
26. Kotikov A V, Lipatov L N, Velizhanin V N *Phys. Lett. B* **557** 114 (2003)
27. Bukhvostov A P et al. *Nucl. Phys. B* **258** 601 (1985)
28. Maldacena J *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113 (1998); Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998); Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253 (1998)
29. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **636** 99 (2002)
30. Makeenko Yu *JHEP* **0301** 007 (2003); hep-th/0210256; Axenides M, Floratos E, Kehagias A *Nucl. Phys. B* **662** 170 (2003); hep-th/0210091
31. Frolov S, Tseytlin A A *JHEP* **0206** 007 (2002)
32. Polchinski J, Strassler M J *JHEP* **0305** 012 (2003); hep-th/0209211
33. Brower R C, Tan C-I *Nucl. Phys. B* **662** 393 (2003); hep-th/0207144; Janik R A, Peschanski R *Nucl. Phys. B* **625** 279 (2002)

Integrability properties of high energy dynamics in multi-color QCD

L.N. Lipatov
B.P. Konstantinov Peterburg Institute of Nuclear Physics, Russian Academy of Sciences
Orlova Roshcha, 188350 Gatchina, Leningrad Region, Russian Federation
Tel. (7-812) 714-60 96. *Fax* (7-812) 713-19 63
E-mail: lipatov@thd.pnpi.spb.ru

It is shown that the interaction of the Reggeized gluons in the leading-log approximation (LLA) for multicolor QCD has a number of remarkable mathematical properties, including conformal invariance, holomorphic factorization, and duality symmetry. The Reggeon hamiltonian is identical to that of the integrable Heisenberg model with Moebius group generators as spins. Using the Baxter – Sklyanin representation, the intercepts of colorless states made of three and four reggeized gluons are calculated together with anomalous dimensions of the corresponding high twist operators. To understand the origin of the integrability of high energy dynamics in multicolor LLA QCD beyond LLA, corrections to the BFKL and DGLAP equations of the $N = 4$ supersymmetric gauge theory are calculated.

PACS numbers: 11.15.Pg, **12.38.–t**, 12.40.Nn
Bibliography — 33 references

Received 28 March 2003