Февраль 2004 г. **Том 174, № 2**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Порождает ли знаковая корреляция квазипериодических колебаний с иррационально связанными частотами детерминированный хаос?

С.Н. Владимиров

PACS numbers: **05.45.–a**, 05.45.Jn

Содержание

1. Постановка задачи

Нелинейная динамика — междисциплинарное научное направление, включающее в себя теорию детерминированного хаоса и синергетику. Хаотические колебания обнаружены в объектах самой различной природы, начиная от грубых механических систем и заканчивая высокоорганизованными биологическими системами. В настоящее время исследования активно продолжаются, все более смещаясь в практическую плоскость. Так, на основе систем с хаотическими типами колебаний создаются системы радиопротиводействия и радиомаскировки, конфиденциальной связи, шумовой радиолокации, медико-биологической направленности. Поэтому весьма актуальна задача поиска путей построения источников детерминированных хаотических колебаний для различного рода практических приложений.

В июльском номере журнала *УФН* за 2001 г. [1] появилась статья Н.В. Евдокимова, В.П. Комолова, П.В. Комолова "Интерференция динамического хаоса гамильтоновых систем: эксперимент и возможности радиофизических приложений". В этой работе как раз и предлагался интереснейший, на первый взгляд, способ создания источников динамического хаоса. В отличие от приводимого авторами [1] громоздкого и сложного варианта практической реализации способа, просматривались очень простые варианты его схемной реализации на основе только цифровых устройств. Именно поэтому, хоть и с опозданием, мы обратили на указанную работу самое пристальное внимание. Однако проведенные численные и натурные эксперименты убедили нас в неверности как исходных предпосылок цитируемой статьи, так и, естественно, в невозможности создания на базе этих предпосылок реально функционирующих систем.

Целью настоящей работы является необходимость поделиться с читателями результатами своих экспериментов, которые, возможно, предотвратят неоправданные затраты труда и времени других исследователей. Поскольку работа носит дискуссионный характер, некоторые ее фрагменты изложены, может быть, излишне тщательно и подробно. Однако мы пытались полностью исключить возможность любых неточностей и разночтений, из-за которых дискуссия могла бы приобрести формальный характер.

2. Краткое изложение основных идей анализируемой работы

Анализируемая работа [1] объемна (21 с.), поэтому мы не станем анализировать изложенные в ней гипотетические возможности радиофизических приложений колебаний с несоизмеримыми частотами, а обратимся к изучению возможности получения динамического хаоса на основе предлагаемого подхода.

Суть этого подхода сводится к следующему.

1. Пусть имеются два периодических колебания прямоугольной формы "меандр" с круговыми частотами ω_1 и ω_2 соответственно.

2. Пусть эти частоты находятся в иррациональном соотношении $\omega_2/\omega_1 = \alpha$.

3. Пусть $\alpha \in \left[\sqrt{2}-1, \ldots, (\sqrt{5}-1)/2, \ldots, \sqrt{3}-1\right]$. Наилучшим значением α является "сильное" иррациональное число $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ — "золотое сечение".

4. Сложим эти два колебания по модулю 2, т.е. совершим над ними операцию исключающее ИЛИ. Тогда результатом такого сложения будет дискретный пуассоновский поток прямоугольных импульсов случайной длительности, возникающих в случайные моменты времени.

3. Критический анализ результатов работы

Вначале несколько общих замечаний.

В аннотации к работе авторы утверждают, что "знаковая корреляция квазипериодических колебаний с близкими

С.Н. Владимиров. Томский государственный университет, кафедра радиоэлектроники
634050 Томск, просп. Ленина 36, Российская Федерация
Факс (3822) 41-25-73
E-mail: vsn@ic.tsu.ru

Статья поступила 13 августа 2003 г., после доработки 19 ноября 2003 г.

иррационально связанными частотами образует динамический хаос...". Однако пуассоновский поток представляет собой не динамический хаос, а абсолютно случайный стационарный процесс [2]. Что это: наши разночтения в терминологии? Но в первом же предложении введения к своей работе авторы отмечают, что "динамический хаос, как детерминированное нерегулярное движение...", т.е. вполне осознают различия между случайными процессами и динамическим хаосом.

Далее. Из названия работы следует, что в ней рассматривается динамический хаос в гамильтоновых системах. И это позволяет авторам пространно рассуждать о КАМторах, отображении Арнольда, числе вращения Пуанкаре и т.д. Однако вскоре выясняется, что источником колебаний с иррационально связанными частотами в эксперименте является двухконтурный параметрический генератор. Конечно, при определенных условиях рассеяние энергии в таком генераторе достаточно мало. Но оно всегда есть, т.е. это не консервативная, а диссипативная система. Но хорошо известно, что даже исчезающе малая диссипация коренным образом изменяет свойства как линейных, так и нелинейных осцилляторов! Если авторы имели какие-то свои особые соображения по этому поводу, то следовало бы поделиться ими с читателями.

В терминологическом и смысловом аспектах работа написана крайне запутанно и неаккуратно. При ее прочтении возникает множество вопросов. Например, почему из бесконечного числа возможных движений на торе выбрано и рассматривается только одно, порождаемое отображением Арнольда (многие другие отображения не приводят к перемешиванию!)? что такое "динамический хаос отображений, получаемых из квазипериодических колебаний"? что такое "взаимное отображение двух прямоугольных волн"? почему, наконец, колебание прямоугольной формы авторы называют прямоугольной волной? Подобные примеры можно долго продолжать, однако ограничимся приведенными и перейдем к главному.

Итак, авторы [1], не приводя каких-либо доказательств, совершенно необоснованно указывают на пуассоновские свойства полученного по их алгоритму импульсного потока. Если бы это соответствовало истине, можно было бы полагать, что поставленная цель достигнута, поскольку и спектр, и автокорреляционная функция пуассоновского потока вычисляются аналитически [2]. Пуассоновский поток имеет экспоненциально спадающую автокорреляционную функцию и сплошной спектр, что делает его привлекательным для различного рода приложений.

Дальнейшее изложение нашей позиции поделим на две части. В первой части ответим на вопрос: есть ли на выходе сумматора по модулю 2 (знакового коррелятора) двух колебаний прямоугольной формы с несоизмеримыми частотами пуассоновский поток? Во второй части рассчитаем фурье-спектр и автокорреляционную функцию импульсного потока на выходе фазового коррелятора и тем самым установим наличие или отсутствие детерминированного хаоса.

3.1. Порождает ли знаковая корреляция пуассоновский поток?

Условия, при которых импульсный поток удовлетворяет распределению Пуассона, очень корректно изложены в [2]. Этих условий три: стационарность, отсутствие последействия и ординарность. Самые жесткие из них — второе и третье. Отсутствие последействия означает, что отдельные события в потоке происходят независимо друг от друга, а ординарность позволяет пренебречь вероятностью наступления одновременно двух и более событий за достаточно малый интервал времени наблюдения. Без выполнения этих двух условий пуассоновское распределение не имеет места.

Рассмотрим математическую модель следующего вида:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{sign}(\cos\omega_1 t)\,, \\ y(t) &= \operatorname{sign}\big(\cos(\omega_2 t + \varphi_0)\big)\,, \\ z(t) &= x(t) \oplus y(t)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\operatorname{sign}(.)$ — функция, возвращающая знак своего аргумента, $\oplus$ — операция исключающее ИЛИ, иначе знаковый коррелятор. При совпадении знаков $x(t)$ и $y(t)$ функция $z(t)$ равна нулю, при разных знаках — единице. Частоты ω_1 и ω_2 могут иметь произвольное соотношение, φ_0 — начальная разность фаз, изменением которой можно задавать различные начальные условия. Нетрудно видеть, что модель (1) функционирует в полном согласии с описанным в [1] алгоритмом получения пуассоновского потока. Все приводимые ниже численные результаты получены на основе анализа этой модели при $\omega_1 = 2\pi$ и отношении частот $\omega_2/\omega_1 = (\sqrt{5}-1)/2$, равном "золотому сечению".

Порождаемая моделью (1) импульсная последовательность полностью совпадает с последовательностью, изображенной на рис. 1 анализируемой работы. Действительно, на первый взгляд, как моменты возникновения импульсов, так и их длительности выглядят совершенно независимыми. Но так ли это?

Зададимся достаточно длительным интервалом наблюдения $T = 5000$ и в соответствии с (1) построим зависимость $z(t)$. Расчеты показывают, что за выбранное время генерируется $N = 8090$ импульсов, следовательно, плотность потока импульсов составляет $\lambda = 1{,}618$. Изменяя произвольно начало и конец интервала подсчета числа импульсов, убеждаемся, что λ остается неизменным, — значит, анализируемый поток $z(t)$ стационарный. На интервале наблюдения T фиксируем моменты возникновения и окончания импульсов $\{t_k, t_{k+1}\}_{k=1}^{2N-1}$ и их длительности $\{\tau_k = t_{k+1} - t_k\}_{k=1}^{N}$. Полученные данные могут быть подвергнуты различного рода статистической обработке.

Рассмотрим случайность длительностей импульсов, их независимость от момента наблюдения. Нами была исследована зависимость длительности k-го импульса τ_k от его номера k. Обнаружено, что зависимость $\tau_k(k)$ не является периодическим процессом, но ни в коем случае не является случайным процессом. Следует однозначно признать эту зависимость почти периодической.

Еще более наглядное представление о статистических свойствах исследуемого импульсного потока можно получить, рассматривая нормализованную автокорреляционную функцию $R_\tau(k)$, характеризующую изменение статистической связи между длительностями импульсов с течением дискретного времени k:

$$R_\tau(k) = \frac{\langle \tau_n \tau_{n+k}\rangle - \langle \tau_n\rangle\langle \tau_{n+k}\rangle}{\langle \tau_n^2\rangle - \langle \tau_n\rangle^2}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{2}$$

Во избежание разночтений в терминологии отметим, что в статистической радиотехнике функция (2) называется коэффициентом корреляции [2]. Она также оказалась почти периодической. $R_\tau(k)$ не только не убывала, что характерно для пуассоновского процесса, но и на длительных интервалах ее с трудом можно было отличить от периодической. Например, на интервале $k \in [7-27]$ установить слабое нарушение периодичности позволил только тщательный численный анализ.

Аналогичным образом анализировалась и последовательность моментов возникновения импульсов $\{t_k\}_{k=1}^{2N-1}$. На результатах этого исследования не станем задерживаться, поскольку они полностью идентичны

результатам, изложенным для последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^N$. Установлена крайне высокая степень корреляции значений $\{t_k, t_m\}$ для k и m, отличающихся на произвольно большие значения.

Поскольку установлена стационарность процесса $z(t)$, мы вправе рассматривать его свойства с произвольного момента времени. Выберем начало отсчета таким образом, чтобы моменты возникновения первых импульсов в процессах $x(t)$ и $y(t)$ совпали. Для этого достаточно положить $\varphi_0 = 0$. В этом случае анализ потока $z(t)$ особенно прост и позволяет установить, что все t_k и τ_k есть целочисленные комбинации от длительности импульсов $\tau_x = \pi/\omega_1$ процесса $x(t)$ и длительности импульсов $\tau_y = \pi/\omega_2$ процесса $y(t)$. Эта связь выражается следующим образом:

$$\tau_k = |m\tau_x - n\tau_y|\,, \qquad t_k = m\tau_x, \qquad t_k = n\tau_y\,, \tag{3}$$

где m, n — произвольные целые числа, и однозначно указывает на отсутствие какой-либо случайности как в моментах возникновения импульсов на выходе знакового коррелятора, так и в длительностях этих импульсов.

Таким образом, установлено, что импульсный поток, порождаемый знаковой корреляцией колебаний с иррационально связанными частотами, не является пуассоновским случайным процессом.

3.2. Порождает ли знаковая корреляция динамический хаос?

Отсутствие у потока $z(t)$ пуассоновских свойств еще не означает, что он не является источником детерминированного хаоса, поэтому анализ, проведенный в разделе 3.2, нельзя считать законченным. Самый надежный критерий хаотичности любого процесса — положительность энтропии Колмогорова – Синая, которую в нашем случае вычислить достаточно сложно. Однако, чтобы отличить хаотический процесс от регулярного, можно воспользоваться более простыми способами. Для этого достаточно рассмотреть фурье-спектр процесса или его автокорреляционную функцию. Спектр детерминированного хаотического движения обязательно должен иметь непрерывную компоненту, а автокорреляционная функция или ее огибающая обязательно убывает, стремясь к нулю по мере роста своего аргумента.

Рассчитаем спектральную плотность процесса $z(t)$. Очевидно, что спектральная плотность одиночного импульса прямоугольной формы и единичной амплитуды, возникшего в момент времени t_k и имеющего длительность τ_k, может быть описана следующим образом:

$$S_k(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}}{\omega}\left[\exp\left(-\mathrm{j}\omega\tau_k\right) - 1\right]\exp\left(-\mathrm{j}\omega t_k\right), \quad \mathrm{j} = \sqrt{-1}\,. \tag{4}$$

Спектральная плотность $S(\mathrm{j}\omega)$ серии из N импульсов в силу известной теоремы о сложении спектров получается простым суммированием всех $S_k(\mathrm{j}\omega)$. Проведя подобное суммирование и выделив вещественную и мнимую части, запишем выражение, позволяющее рассчитать модуль спектральной плотности:

$$S(\omega) = \frac{1}{\omega}\sqrt{P^2(t_k, \tau_k, \omega) + Q^2(t_k, \tau_k, \omega)}\,, \tag{5}$$

где

$$P(t_k, \tau_k, \omega) = \sum_{k=1}^{N} \cos\omega(t_k + \tau_k) - \cos\omega t_k\,,$$

$$Q(t_k, \tau_k, \omega) = \sum_{k=1}^{N} \sin\omega(t_k + \tau_k) - \sin\omega t_k\,.$$

Для проведения численных расчетов необходимо раскрыть неопределенность, возникающую при $\omega \to 0$. Разложим тригонометрические члены в степенны́е ряды и ограничимся слагаемыми первого порядка малости. Тогда

$$S(0) = \sum_{k=1}^{N} \tau_k\,. \tag{6}$$

Поскольку с увеличением N спектральная плотность растет, то уместно ввести в рассмотрение ее нормированное значение $S(f)/S(0)$, $f = \omega/2\pi$. Именно эта величина и приведена на рис. 1, из которого следует, что спектральная плотность представляет собой набор узких, неперекрывающихся спектральных линий. Непрерывная компонента в спектре отсутствует, следовательно, процесс на выходе знакового коррелятора имеет вполне регулярный, а не хаотический характер. Частоты спектральных составляющих однозначно соответствуют неэквидистантным комбинационным частотам вида

$$|mf_1 \pm nf_2|\,, \qquad f_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{2\pi}\,, \tag{7}$$

где m, n — целые числа.

В силу известной теоремы Винера – Хинчина автокорреляционная функция $R_z(\tau)$ процесса $z(t)$ однозначно связана с его спектральной плотностью (5), однако для законченности изложения она была рассчитана численно с использованием соотношения (2), записанного для непрерывных значений аргументов:

$$R_z(\tau) = \frac{\langle z(t)z(t+\tau)\rangle - \langle z(t)\rangle\langle z(t+\tau)\rangle}{\langle z^2(t)\rangle - \langle z(t)\rangle^2}\,, \quad t \in [0 - T]\,, \tag{8}$$

и представлена на рис. 2.

Автокорреляционная функция имеет почти периодический характер и не спадает с ростом τ, следовательно, энтропия Колмогорова – Синая равна нулю. Поэтому $z(t)$ также является почти периодическим, вполне регулярным процессом, но ни в коей мере не детерминированным хаотическим.

С точки зрения фундаментальных основ нелинейной динамики, полученные нами результаты представляются совершенно естественными. Любая динамическая система с хаотическим поведением должна непрерывно воспроизводить информацию. Рассматриваемая же система только осуществляет функциональное преобразование над двумя периодическими процессами. Очевидно, что никакой новой информации она не воспроизводит, и поэтому ее энтропия

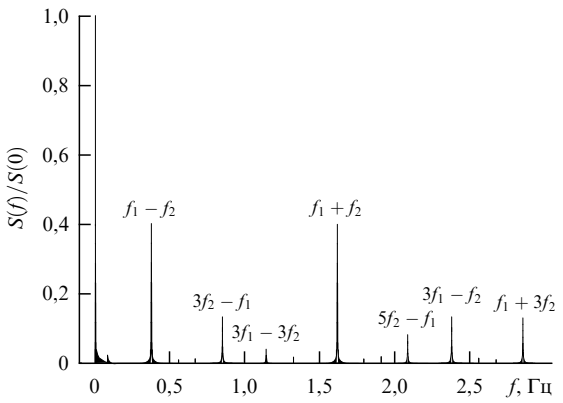

Рис. 1. Фрагмент нормированной спектральной плотности $S(f)$ импульсного потока на выходе знакового коррелятора.

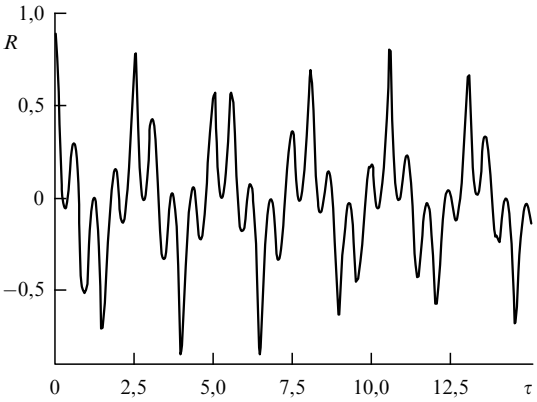

Рис. 2. Нормализованная автокорреляционная функция импульсного потока на выходе знакового коррелятора.

Колмогорова – Синая равна нулю на любом достаточно большом интервале наблюдения.

3.3. Натурный эксперимент

В чем может состоять неадекватность модели (1) по отношению к реально функционирующей динамической системе? Только в том, что в условиях натурного эксперимента принципиально нельзя избавиться от различного рода флуктуационных процессов, которые постоянно вносят в условия эксперимента неопределенность. При некоторых условиях эта неопределенность может привести и к потере предсказуемости состояния динамической системы.

Здесь уместны два замечания. Во-первых, для существования в динамической системе режима детерминированного хаоса совершенно не требуется внешних или внутренних флуктуаций, так как хаос порождается свойствами самой системы. Во-вторых, неопределенность всегда существует и в численном эксперименте, в нашем случае она неизбежно вызвана ограниченностью разрядной сетки вычислительной машины и конечным значением шага выборок решений модели (1). Тем не менее влияние погрешностей в физическом и численном экспериментах может приводить к несопоставимым результатам. Поэтому дополним численный анализ результатами натурного эксперимента.

Разработанная нами экспериментальная установка состояла только из цифровых элементов и представляла собой два RC-автогенератора, два делителя частоты и сумматор по модулю 2. Первый из автогенераторов работал на фиксированной частоте $f_1 = 100$ кГц, второй перестраивался в пределах $f_2 \in 40-80$ кГц. Таким способом достигались рекомендуемые в [1] соотношения между частотами. Далее частоты колебаний автогенераторов делились на 2 двумя D-триггерами, приобретая форму "меандра". После деления частот прямоугольные импульсы поступали на сумматор по модулю 2, на выходе которого и формировался желаемый импульсный поток.

Результаты эксперимента можно сформулировать очень кратко. Ни при каких соотношениях между частотами f_1, f_2 не наблюдались нерегулярные импульсные последовательности. Спектр имел линейчатую форму, представлял собой набор неэквидистантных гармонических составляющих с частотами, определенными соотношением (7).

Для примера на рис. 3 представлен фотоснимок с экрана анализатора спектра, полученный при соотношении частот, равном "золотому сечению". Очевидна его полная идентичность со спектром, рассчитанным по соотношению (5).

Авторы [1] также приводят свои экспериментальные результаты, в частности они регистрируют близкую к

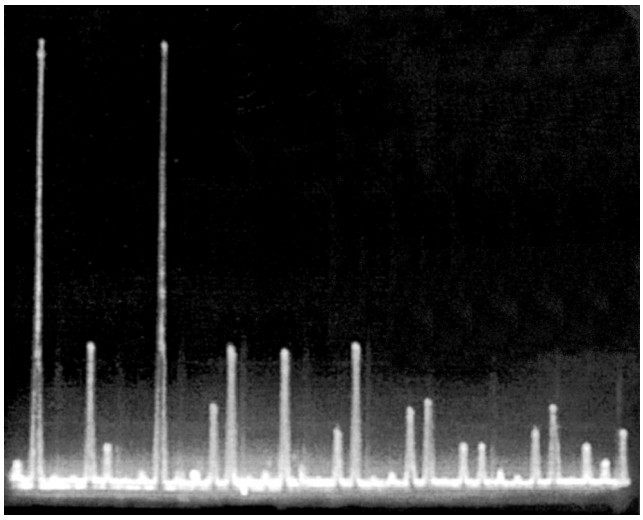

Рис. 3. Спектр импульсного потока на выходе знакового коррелятора при $f_2/f_1 \cong (\sqrt{5}-1)/2$. При сопоставлении с рис. 1 следует учитывать отсутствие на данном рисунке постоянной составляющей. Две гармоники с наибольшими амплитудами соответствуют частотам $f_1 - f_2$ и $f_1 + f_2$.

δ-образной автокорреляционную функцию (рис. 6в из [1]), хотя более желателен был бы снимок с экрана физического прибора — анализатора спектра. Мы далеки от мысли, что представленные в статье результаты в действительности не были получены, скорее имеет место ошибочная интерпретация этих результатов. С большой долей уверенности можно предположить, что хаотический процесс явился результатом внешнего периодического воздействия на нелинейную колебательную систему, обладающую пятимерным фазовым пространством (два RLC-колебательных контура, связанных нелинейной емкостью). С учетом внешнего воздействия общая размерность фазового пространства равняется шести. Заметим, что динамический хаос обнаруживался и в более простых системах, содержащих нелинейную емкость. В этом случае соотношения между резонансными частотами RLC-контуров не имеют существенного значения. Но такому представлению препятствуют утверждения авторов [1] о периодическом характере колебаний, снимаемых с первого и второго контуров параметрического генератора.

4. Заключение

В настоящей работе с использованием численного и физического экспериментов показано, что знаковая корреляция двух колебаний с иррационально связанными частотами не может привести к порождению ни пуассоновского потока, ни потока, обладающего свойствами динамического хаоса. Радикальное расхождение наших результатов с результатами работы [1] не имеет разумного объяснения и может рассматриваться только как глубокое заблуждение одной из сторон и приглашение читателей к дальнейшей дискуссии.

Автор выражает признательность рецензенту, точные комментарии и замечания которого позволили повысить уровень настоящей работы.

Список литературы

1. Евдокимов Н В, Комолов В П, Комолов П В *УФН* **171** 775 (2001)
2. Тихонов В И *Статистическая радиотехника* (М.: Сов. радио, 1966) с. 50