

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Распространение электромагнитных волн в случайно-неоднородной среде как задача статистической математической физики

В.И. Кляцкин

В работе рассматриваются основные этапы описания процесса распространения электромагнитных волн (света) в случайных средах за последние 50 лет с точки зрения статистической математической физики. Статистическое описание обсуждается как на основе скалярного параболического уравнения (приближение квазиоптики) для установления определяющих параметров, так и на основе записи решения этого уравнения в виде континуального интеграла для анализа каустической структуры волнового поля.

PACS numbers: 02.50.Ey, 41.20.Jb, 42.25.Dd

Содержание

1. Введение (177).
 2. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия (178).
 - 2.1. Уравнения Максвелла для стационарной задачи. 2.2. Уравнение Гельмгольца (краевая задача). 2.3. Параболическое уравнение квазиоптики.
 3. Статистическое усреднение (182).
 - 3.1. Общий случай произвольной статистики поля $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{R})$.
 - 3.2. Приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{R})$.
 - 3.3. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{R})$.
 - 3.4. Условия применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды и диффузионное приближение для волнового поля.
 - 3.5. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (метод плавных возмущений).
 4. Континуальная запись решения задачи (189).
 - 4.1. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны.
 - 4.2. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде.
 5. Заключение (194).
- Список литературы (194).

1. Введение

В 2003 г. исполнилось 50 лет со дня опубликования широкоизвестной работы А.М. Обухова [1], в которой он впервые учел дифракционные эффекты при распространении волн в случайных средах в рамках теории возмущений. Ранее аналогичные исследования проводились в приближении геометрической оптики (акустики). Методика, предложенная в этой работе А.М. Обухова, не потеряла своей актуальности и в настоящее время. Она является основным математическим аппаратом для различных технических приложений. Однако, как было позднее обнаружено экспериментально в работах [2, 3], флуктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием при распространении волн (света) в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями из-за эффекта многократного рассеяния вперед. Начиная с некоторого расстояния становятся непригодными расчеты по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флуктуаций). В монографиях [4–13] и обзорных статьях [14–18] приведено общее состояние теории распространения волн в случайно-неоднородных средах на момент их выхода в свет. В этих работах приведена обширная библиография. Ниже мы рассмотрим основные этапы описания процесса распространения волн в случайно-неоднородных средах с точки зрения статистической математической физики.

Принципиально важными этапами для описания детерминированных проблем нам представляются:

- переход от векторных уравнений Максвелла к скалярному параболическому уравнению Леонтовича (приближение квазиоптики [19]);
- метод плавных возмущений (МПВ) С.М. Рытова [20] для амплитудно-фазовых флуктуаций с учетом дифракционных эффектов (примененный в упомянутой выше работе А.М. Обухова [1]);

В.И. Кляцкин. Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 119017 Москва, Пыжевский пер. 3, Российская Федерация
Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, 690041 Владивосток, ул. Балтийская 43, Российская Федерация
Tel. (095) 269-12-83
E-mail: klyatskin@yandex.ru

Статья поступила 4 июня 2003 г.

• запись решения параболического уравнения в операторном виде или в виде континуального интеграла [21, 22].

Для статистического описания задачи принципиально важными этапами развития теории с нашей точки зрения являются:

• построение статистической теории описания амплитудно-фазовых флуктуаций в рамках первого приближения МПВ для случайного фазового экрана и случая непрерывно-распределенной случайной среды;

• построение статистической теории описания волнового поля в рамках приближения дельта-коррелированных по направлению распространения волны флуктуаций диэлектрической проницаемости (уравнения для характеристического функционала волнового поля и функций когерентности различных порядков и установление закона распределения вероятностей для флуктуаций интенсивности волнового поля) [13, 23–25];

• анализ каустической структуры волнового поля в случайно-неоднородной среде на основе идеологии статистической топографии [26];

• анализ статистических характеристик отраженных волн в случайных средах [27, 28];

• выход за рамки приближения дельта-коррелированных флуктуаций диэлектрической проницаемости (диффузионное приближение [13], которое для данной задачи эквивалентно локальному методу Чернова [6]).

Краткому изложению этих вопросов и посвящена настоящая работа.

2. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия

2.1. Уравнения Максвелла для стационарной задачи

Распространение монохроматической электромагнитной волны с частотой ω в стационарной неоднородной среде описывается уравнениями Максвелла (см., например, [4])

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i k \mathbf{H}(\mathbf{r}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i k \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \\ \operatorname{div} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — напряженности соответственно электрического и магнитного полей, $\varepsilon(\mathbf{r})$ — диэлектрическая проницаемость среды, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — волновое число (λ — длина волны, а c — скорость распространения волны). Предполагается, что магнитная проницаемость $\mu = 1$, проводимость среды $\sigma = 0$ и временная зависимость всех полей имеет вид $\exp(-i\omega t)$.

Уравнения (1) можно переписать в виде замкнутого уравнения для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

$$[\Delta + k^2 \varepsilon(\mathbf{r})] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r})). \quad (2)$$

Магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ при этом вычисляется с помощью равенства

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Мы рассматриваем распространение электромагнитных волн в среде со слабыми флуктуациями диэлектри-

ческой проницаемости. Положим

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}),$$

где $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости ($\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \rangle = 0$). Малость флуктуаций $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ означает, что $\langle |\varepsilon_1(\mathbf{r})| \rangle \ll 1$. Следовательно, уравнение (2) можно записать в упрощенной форме

$$[\Delta + k^2] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k^2 \varepsilon_1(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla \varepsilon_1(\mathbf{r})). \quad (4)$$

В работах [29, 30] на основе теории возмущений проводилась оценка деполаризации световой волны в условиях реальной атмосферы на длинах порядка 1 км и было показано, что она крайне мала, так что можно пренебречь последним членом в правой части уравнения (4). В результате можно перейти фактически к скалярному уравнению

$$[\Delta + k^2] U(\mathbf{r}) = -k^2 \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Следует сформулировать краевые условия к уравнению (5) и установить источник излучения.

2.2. Уравнение Гельмгольца (краевая задача)

Пусть теперь слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$ и точечный источник находится в точке с координатами $(x_0, \mathbf{R}_0)$, где через $\mathbf{R}$ обозначены координаты в плоскости перпендикулярной оси x . Тогда волновое поле внутри слоя $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$ описывается уравнением для функции Грина

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) &= \\ &= \delta(x - x_0) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \end{aligned} \quad (6)$$

где k — волновое число, $\Delta_{\mathbf{R}} = \partial^2 / \partial \mathbf{R}^2$, а $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon_1(\mathbf{r})$ — отклонение диэлектрической проницаемости от единицы. Из уравнения (6) следует условие на разрыв производной в точке x_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial}{\partial x} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=x_0-0} &= \\ &= \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть вне слоя среды $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$; тогда вне слоя волновое поле описывается уравнением Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 \right\} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = 0.$$

На границах слоя должны выполняться условия непрерывности функций G и $\partial G / \partial x$. Кроме того, для уравнения (6) также должны выполняться условия излучения при $x \rightarrow \pm\infty$. Эти краевые условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Оператор $\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}$, фигурирующий в (8), для безграничного по $\mathbf{R}$ пространства определяется преобразованием Фурье. Его же можно рассматривать как линейный интегральный оператор, ядро которого опреде-

ляется функцией Грина для свободного пространства (см. ниже).

Таким образом, поле точечного источника в неоднородной среде описывается краевой задачей (6), (8). Эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = g_0(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) + \int_{L_0}^L dx' \int d\mathbf{R}' g_0(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \varepsilon(x', \mathbf{R}') G(x', \mathbf{R}'; x_0, \mathbf{R}_0), \quad (9)$$

где $g_0(x, \mathbf{R})$ — функция Грина в свободном пространстве. В трехмерном случае

$$g_0(x, \mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(ikr), \quad r = \sqrt{x^2 + \mathbf{R}^2}, \quad (10)$$

и эта функция описывается интегральным представлением

$$g_0(x, \mathbf{R}) = \int g_0(\mathbf{q}) \exp\{i\sqrt{k^2 - q^2}|x| + i\mathbf{q}\mathbf{R}\} d\mathbf{q},$$

$$g_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{8i\pi^2 \sqrt{k^2 - q^2}}.$$

Действие оператора $\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}$ в данном случае на произвольную функцию $F(\mathbf{R})$ можно представить в виде линейного интегрального оператора

$$\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} F(\mathbf{R}) = \int K(\mathbf{R} - \mathbf{R}') F(\mathbf{R}') d\mathbf{R}',$$

ядро которого определяется равенством (см., например, [13, 31])

$$K(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2i(k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}) g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Соответствующее ядро обратного оператора определяется равенством

$$L(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = (k^2 + \Delta_{\mathbf{R}})^{-1/2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2ig_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Если точечный источник находится на границе слоя $x_0 = L$, то волновое поле внутри слоя при $L_0 < x < L$ описывается уравнением

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = 0 \quad (11)$$

с краевыми условиями, вытекающими из условий (7), (8),

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0).$$

Краевой задаче (11), (12) эквивалентно интегральное уравнение

$$G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = g(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) + \int_{L_0}^L dx' \int d\mathbf{R}' g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \varepsilon(x', \mathbf{R}') G(x', \mathbf{R}'; L, \mathbf{R}_0), \quad (13)$$

соответствующее точке $x_0 = L$ в уравнении (9).

Отметим, что все эти краевые задачи могут быть сведены к задачам с начальными условиями по вспомогательному параметру L на основе так называемого метода погружения (см., например, [13, 31]). При этом основное уравнение для обратно-рассеянного поля будет нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Существенное упрощение достигается для волн в слоистых средах (одномерные задачи), когда уравнения метода погружения превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями, и этот случай допускает достаточно полный статистический анализ (см., например, [13, 31]).

Если на слой среды $L_0 < x < L$ из области $x < L_0$ падает волна $u_0(x, \mathbf{R})$ (в положительном направлении оси x), то волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ внутри слоя удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} U(x, \mathbf{R}) = 0 \quad (14)$$

с краевыми условиями

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L} = 0, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L_0} = 2i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} u_0(L, \mathbf{R}).$$

Поле $U(x, \mathbf{R})$ можно представить в виде

$$U(x, \mathbf{R}) = u_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R}), \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, \mathbf{R}) = ik\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \{u_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R})\},$$

где вместо одной функции $U(x, \mathbf{R})$ мы ввели в рассмотрение две — $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$. Эти функции описывают волны, которые распространяются соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси x и связаны с полем $U(x, \mathbf{R})$ равенствами, вытекающими из (16),

$$u_1(x, \mathbf{R}) = -\frac{i}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}), \quad (17)$$

$$u_2(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}).$$

Дифференцируя (17) по x и используя уравнение (14), получаем систему уравнений для функций $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ с краевыми условиями, вытекающими из (15), вида [32]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) u_1(x, \mathbf{R}) = \frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}), \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) u_2(x, \mathbf{R}) = -\frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}),$$

$$u_1(L_0, \mathbf{R}) = u_0(L, \mathbf{R}), \quad u_2(L, \mathbf{R}) = 0.$$

Функция $u_2(x, \mathbf{R})$ описывает волну, распространяющуюся в направлении, обратном направлению падающей волны, т.е. обратно рассеянное поле.

2.3. Параболическое уравнение квазиоптики

Если пренебречь эффектами, связанными с рассеянием назад, т.е. положить $u_2(x, \mathbf{R}) = 0$ в (18), то получаем обобщенное параболическое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}\right) U(x, \mathbf{R}) = \frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}),$$

$$U(L_0, \mathbf{R}) = u_0(L_0, \mathbf{R}), \quad (19)$$

которое допускает описание рассеяния на произвольные углы (не превышающие, однако, $\pi/2$). При рассеянии на малые углы ($\Delta_{\mathbf{R}} \ll k^2$), подставляя поле $U(x, \mathbf{R})$ в виде

$$U(x, \mathbf{R}) = \exp\{ik(x - L_0)\} u(x, \mathbf{R})$$

в уравнение (19), получаем приближенное параболическое уравнение квазиоптики, справедливое для описания распространения волн в среде с крупномасштабными трехмерными неоднородностями

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad (20)$$

$$u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}),$$

которое нашло успешное применение во многих задачах распространения волн в атмосфере Земли и океанах.

Отметим, что вопросам вывода и обоснования как самого параболического, так и обобщенных параболических уравнений посвящено много работ.

Так как уравнение (20) является уравнением первого порядка по x с начальным условием при $x = 0$, то для этого уравнения выполняется условие причинности по x (координата x играет роль времени), т.е. для вариационной производной имеет место соотношение

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0 \quad \text{при } x' < 0, \quad x' > x. \quad (21)$$

Для вариационной производной при $x = x'$ имеем равенство

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x, \mathbf{R}). \quad (22)$$

В общем случае величина $\delta u(x, \mathbf{R})/\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $0 \leq x' < x$ может быть выражена через функцию Грина уравнения (20) при помощи соотношения

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}').$$

Функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ удовлетворяет при этом интегральному уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') +$$

$$+ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x dx'' \int d\mathbf{R}'' g(x - x'', \mathbf{R} - \mathbf{R}'') \times$$

$$\times \varepsilon(x'', \mathbf{R}'') G(x'', \mathbf{R}''; x', \mathbf{R}'), \quad (23)$$

где функция

$$g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \exp\left\{\frac{i(x - x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}\right\} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') =$$

$$= \frac{k}{2\pi i(x - x')} \exp\left\{\frac{ik(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{2(x - x')}\right\}$$

при $x > x'$ представляет собой функцию Грина для уравнения (20) в отсутствие неоднородностей и соответствует френелевскому разложению функции Грина $g_0(x, \mathbf{R})$ (10). При $x \rightarrow x'$ уравнение (23) переходит в формулу

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \Big|_{x \rightarrow x'} = g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \Big|_{x \rightarrow x'} = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Отметим, что функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ описывает поле сферической волны, распространяющейся из точки $(x', \mathbf{R}')$.

Интегральное уравнение (23) можно записать в эквивалентной форме в виде функционального уравнения в вариационных производных

$$\frac{\delta G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')}{\delta \varepsilon(\xi, \mathbf{R}_1)} = \frac{ik}{2} G(x, \mathbf{R}; \xi, \mathbf{R}_1) G(\xi, \mathbf{R}_1; x', \mathbf{R}')$$

с функциональным "начальным" условием

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \Big|_{\varepsilon=0} = g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля в уравнении (20) по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp\{iS(x, \mathbf{R})\},$$

то уравнение для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = u(x, \mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R})$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad (24)$$

$$I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}).$$

Отсюда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (24) можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей, для которой, как известно, возникает кластерная структура поля примеси (см., например, [13, 33–35]). Следовательно, реализации поля интенсивности волны также должны иметь кластерный характер. Это явление в рассматриваемом случае проявляется в виде каустических структур из-за эффектов случайных фокусировок и дефокусировок волнового поля в случайной среде. Так, на рис. 1 приведены фотографии поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных исследованиях [36] при различных интенсивностях флуктуаций диэлектрической проницаемости. Аналогичные фотографии из работы [15] приведены на рис. 2. Эти фотографии получены путем численного моделирования, выполненного в работах [37, 38]. На этих рисунках ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля. На рисунке 3 приведена фотография бассейна также с четко выраженной каустической структурой волнового поля на его дне. Подобные структуры возникают при преломлении и

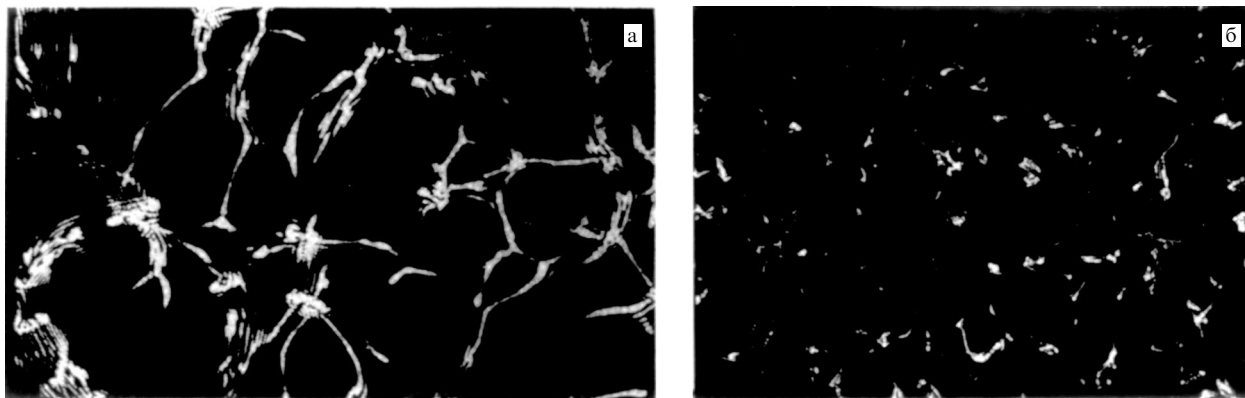


Рис. 1. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (в лабораторных условиях) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных флуктуаций (б).

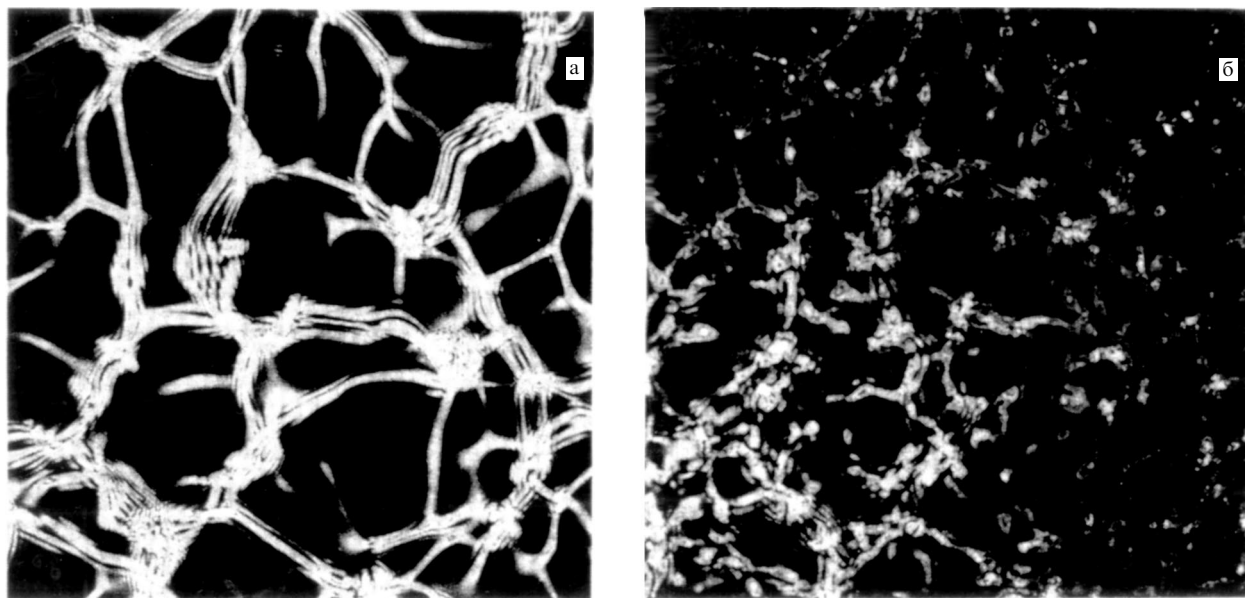


Рис. 2. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (численное моделирование) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных флуктуаций (б).



Рис. 3. Каустики в бассейне.

отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на так называемом фазовом экране.

2.3.1. Континуальная запись решения параболического уравнения. Решение параболического уравнения (20) можно записать в виде континуального интеграла. Для этого вместо уравнения (20) рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) &= \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \\ &+ \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}) + (\mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}}) u(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}),$$

где введена произвольная вектор-функция $\mathbf{v}(x)$. Решение уравнения (25) является функционалом функции $\mathbf{v}(\xi)$, где $0 \leq \xi \leq x$, т.е. $u(x, \mathbf{R}) = u[x, \mathbf{R}, \mathbf{v}(\xi)]$. Тогда

$$u(x, \mathbf{R}) \equiv u[x, \mathbf{R}]|_{\mathbf{v}=0}.$$

Из уравнения (25) следует, что

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \mathbf{v}(x-0)} = \nabla_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}). \quad (26)$$

Следовательно, уравнение (25) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(x)} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}) + (\mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}}) u(x, \mathbf{R}).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} d\xi \right\} w(x, \mathbf{R}), \quad (27)$$

где для функции $w(x, \mathbf{R})$ получаем более простое, чем (25), уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, \mathbf{R}) = \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) w(x, \mathbf{R}) + (\mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}}) w(x, \mathbf{R}), \quad (28)$$

$$w(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}).$$

Таким образом, решение уравнения (20) может быть записано в операторном виде:

$$u(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} d\xi \right\} u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x \mathbf{v}(\xi) d\xi \right) \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x \mathbf{v}(\eta) d\eta \right) d\xi \right\} \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (29)$$

В случае плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = u_0$, и уравнение (29) упрощается:

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} d\xi \right\} \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x \mathbf{v}(\eta) d\eta \right) d\xi \right\} \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}.$$

Уравнение (29) также можно переписать в виде континуального интеграла. Чтобы это осуществить, будем формально считать в уравнении (28) функцию $\mathbf{v}(x)$ стохастическим гауссовым случайным процессом с корреляционной функцией

$$\langle v_{\alpha}(x) v_{\beta}(x') \rangle = \frac{i}{k} \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x'). \quad (30)$$

Затем, усредняя уравнение (28) по ансамблю реализаций случайной функции $\mathbf{v}(x)$ с помощью формулы Фурутцу – Новикова типа (48) и выражения (26) (см. раздел 3.3), получаем замкнутое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle w(x, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{v}} = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle w(x, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{v}} + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \langle w(x, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{v}},$$

$$\langle w(0, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{v}} = u_0(\mathbf{R}),$$

совпадающее с уравнением (20). Следовательно,

$$u(x, \mathbf{R}) = \int D\mathbf{v}(x) u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x \mathbf{v}(\xi) d\xi \right) \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \left[\mathbf{v}^2(\xi) + \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x \mathbf{v}(\eta) d\eta \right) \right] d\xi \right\}, \quad (31)$$

где интегральная мера

$$D\mathbf{v}(x) = \frac{\prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi)}{\int \dots \int \prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi) \exp \left\{ (ik/2) \int_0^x \mathbf{v}^2(\xi) d\xi \right\}}.$$

Две формы записи решения (29) и (31), очевидно, эквивалентны. В самом деле, мы можем, например, переписать выражение (31) в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle w[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi) + \mathbf{y}(\xi)] \rangle_{\mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{y}=0} = \left\langle \exp \left\{ \int_0^x \mathbf{v}(\xi) \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}(\xi)} d\xi \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}} w[x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0} = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{y}^2(\xi)} d\xi \right\} w[x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0},$$

совпадающем с выражением (27).

2.3.2. Уравнение Хопфа. Введем теперь в рассмотрение функционал

$$\varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \varphi[x; v, v^*] = \exp \left\{ i \int [u(x, \mathbf{R}') v(\mathbf{R}') + u^*(x, \mathbf{R}') v^*(\mathbf{R}')] d\mathbf{R}' \right\}, \quad (32)$$

где волновое поле $u(x, \mathbf{R})$ — решение уравнения (20), а $u^*(x, \mathbf{R})$ — комплексно сопряженная функция. Дифференцируя (32) по x и используя динамическое уравнение (20), а также комплексно сопряженное к нему, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v, v^*] = -\frac{1}{2k} \int [v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} u^*(x, \mathbf{R})] \varphi[x; v, v^*] d\mathbf{R} - \frac{k}{2} \int \varepsilon(x, \mathbf{R}) [v(\mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R})] \varphi[x; v, v^*] d\mathbf{R},$$

которое можно записать в виде уравнения в вариационных производных

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v, v^*] = \frac{ik}{2} \int \varepsilon(x, \mathbf{R}) \hat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v, v^*] d\mathbf{R} + \frac{i}{2k} \int \left[v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})} \right] \varphi[x; v, v^*] d\mathbf{R} \quad (33)$$

с эрмитовым оператором

$$\hat{M}(\mathbf{R}) = v(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})},$$

которое является эквивалентным исходному уравнению (20). Следствием уравнения (33) является выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon(x=0, \mathbf{R})} \varphi[x; v, v^*] = \frac{ik}{2} \hat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v, v^*]. \quad (34)$$

3. Статистическое усреднение

Рассмотрим теперь статистическое описание волнового поля.

3.1. Общий случай

произвольной статистики поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$

Будем считать, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является однородным и изотропным случайным полем с характе-

ристическим функционалом

$$\Phi_e[x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \varepsilon(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}') \right\} \right\rangle.$$

Рассмотрим вместо уравнения (33) более общее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v, v^*; \eta] = \\ = \frac{ik}{2} \int [\varepsilon(x, \mathbf{R}) + \eta(x, \mathbf{R})] \hat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v, v^*; \eta] d\mathbf{R} + \\ + \frac{i}{2k} \int \left[v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})} \right] \varphi[x; v, v^*; \eta] d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (35)$$

с произвольной функцией $\eta(x, \mathbf{R})$. Усредним теперь уравнение (35) по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В результате для характеристического функционала решения задачи (20), дополненной произвольной функцией $\eta(x, \mathbf{R})$:

$$\Phi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}'); \eta] = \Phi[x; v, v^*; \eta] = \langle \varphi[x; v, v^*; \eta] \rangle,$$

получаем замкнутое функциональное уравнение в вариационных производных [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*; \eta] = \dot{\Phi}_x \left[x; \frac{\delta}{i \delta \eta(\xi, \mathbf{R}')} \right] \Phi[x; v, v^*; \eta] + \\ + \frac{ik}{2} \int \eta(x, \mathbf{R}) \hat{M}(\mathbf{R}) \Phi[x; v, v^*; \eta] d\mathbf{R} + \\ + \frac{i}{2k} \left\{ \int \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] d\mathbf{R}' \right\} \times \\ \times \Phi[x; v, v^*; \eta], \end{aligned} \quad (36)$$

где функционал

$$\dot{\Phi}_x[x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \frac{d}{dx} \ln \Phi_e[x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] =$$

есть производная от логарифма характеристического функционала случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Хотя уравнение (36) и линейно, в настоящее время решить его не представляется возможным. Полагая теперь $\eta(x, \mathbf{R}) = 0$, получаем уже незамкнутое уравнение для характеристического функционала решения задачи (20) вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = \left\langle \dot{\Phi}_x \left[x; \frac{\delta}{i \delta \varepsilon(\xi, \mathbf{R}')} \right] \varphi[x; v, v^*] \right\rangle + \\ + \frac{i}{2k} \left\{ \int \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] d\mathbf{R}' \right\} \times \\ \times \Phi[x; v, v^*]. \end{aligned} \quad (37)$$

3.2. Приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$

Волновое поле $u(x, \mathbf{R})$ в плоскости x функционально зависит лишь от предшествующих значений $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ в силу принципа динамической причинности. Однако может существовать статистическая связь между $u(x, \mathbf{R})$ и последующими значениями $\varepsilon(x_1, \mathbf{R})$ ($x_1 > x$), так как значения $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $x' < x$ коррелированы со значениями $\varepsilon(\xi, \mathbf{R})$ при $\xi > x$. Ясно, что корреляция поля

$u(x, \mathbf{R})$ с последующими значениями $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ заметна при $x' - x \sim l_{\parallel}$, где $l_{\parallel}$ — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В то же время характерный радиус корреляции поля $u(x, \mathbf{R})$ по продольному направлению имеет величину порядка x . Поэтому в рассматриваемой задаче существует малый параметр $l_{\parallel}/x$, который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении можно положить $l_{\parallel}/x \rightarrow 0$. Это означает переход к приближению дельта-коррелированности по x для случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В этом случае значения полей $u(\xi_i, \mathbf{R}_i)$ при $\xi_i < x$ не только функционально, но и статистически независимы от значений $\varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}_j)$ при $\eta_j > x$, т.е. при $\xi_i < x$ и $\eta_j > x$ имеет место равенство

$$\left\langle \prod_{i,j} u(\xi_i, \mathbf{R}_i) \varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}_j) \right\rangle = \left\langle \prod_i u(\xi_i, \mathbf{R}_i) \right\rangle \left\langle \prod_j \varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}_j) \right\rangle. \quad (38)$$

Для такого приближения все кумулянтные функции случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ имеют структуру (см., например, [13])

$$\begin{aligned} K_n(\mathbf{R}_1, x_1; \dots; \mathbf{R}_n, x_n) = \\ = K_n(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n; x_1) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n), \end{aligned}$$

а для характеристического функционала случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ справедливо равенство

$$\dot{\Phi}_x \left[x; \frac{\delta}{i \delta \varepsilon(\xi, \mathbf{R}')} \right] = \dot{\Phi}_x \left[x; \frac{\delta}{i \delta \varepsilon(x, \mathbf{R}')} \right].$$

Так, если для линейного параболического уравнения (20) считать, что поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ есть однородное дельта-коррелированное по x случайное поле, то уравнение (37) для характеристического функционала $\Phi[x; v, v^*]$ решения задачи принимает вид уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = \left\langle \dot{\Phi}_x \left[x; \frac{\delta}{i \delta \varepsilon(x, \mathbf{R}')} \right] \varphi[x; v, v^*] \right\rangle + \\ + \frac{i}{2k} \left\{ \int \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] d\mathbf{R}' \right\} \times \\ \times \Phi[x; v, v^*], \end{aligned}$$

которое с учетом равенства (34) можно записать в замкнутой операторной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = \dot{\Phi}_x \left[x; \frac{k}{2} \hat{M}(\mathbf{R}') \right] \Phi[x; v, v^*] + \\ + \frac{i}{2k} \left\{ \int \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] d\mathbf{R}' \right\} \times \\ \times \Phi[x; v, v^*]. \end{aligned} \quad (39)$$

Из уравнения (39) для моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$

$$\begin{aligned} M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \left\langle \prod_{p=1}^m \prod_{q=1}^n u(x; \mathbf{R}_p) u^*(x; \mathbf{R}'_q) \right\rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

которые для $m = n$ обычно называются *функциями когерентности* порядка $2n$, следуют уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn} = & \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn} + \\ & + \dot{\Theta}_x \left[x; \frac{1}{k} \left(\sum_{p=1}^m \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_p) - \sum_{q=1}^n \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}'_q) \right) \right] M_{mn}, \end{aligned} \quad (41)$$

что связано с линейностью исходного динамического уравнения (20).

Уравнения (41) для моментных функций волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ для дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды можно получить и другим, физически более наглядным способом. Покажем это на примере вывода уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$. Для этого перепишем исходное стохастическое уравнение (20) в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(x, \mathbf{R}) = & u_0(\mathbf{R}) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) d\xi \right\} + \\ & + \frac{i}{2k} \int_0^x dx \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_\xi^x \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) d\eta \right\} \Delta_{\mathbf{R}} u(\xi, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (42)$$

При усреднении уравнения (42) по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon(\xi, \mathbf{R})$ учтем равенство (38). В результате получаем замкнутое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = & u_0(\mathbf{R}) \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) d\xi \right\} \right\rangle + \\ & + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_\xi^x \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) d\eta \right\} \right\rangle \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(\xi, \mathbf{R}) \rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

Для перехода от интегрального уравнения к дифференциальному заметим, что для дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды имеет место равенство

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) d\eta \right\} \right\rangle = \\ = \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^\xi \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) d\eta \right\} \right\rangle \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_\xi^x \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) d\eta \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

справедливое для любой произвольной точки $0 \leq \xi \leq x$. Поэтому если мы введем функцию

$$\Phi(x, \mathbf{R}) = \left\langle \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) d\eta \right\} \right\rangle,$$

то уравнение (43) можно переписать в виде

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} \int_0^x \frac{\Phi(x, \mathbf{R})}{\Phi(\xi, \mathbf{R})} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(\xi, \mathbf{R}) \rangle d\xi,$$

откуда уже легко можно получить дифференциальное уравнение для $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = & \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle + \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi(x, \mathbf{R}), \\ u(0, \mathbf{R}) = & u_0(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

совпадающее с уравнением (41) при $m = 1, n = 0$. Аналогичным образом, очевидно, можно получить уравнения и для моментов поля $u(x, \mathbf{R})$ произвольного порядка.

3.3. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$

Расщепление корреляций в общем случае зависит от свойств случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Если теперь считать, что поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — однородное гауссово дельта-коррелированное случайное поле с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \delta(x), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) dx, \quad (44)$$

то функционал

$$\begin{aligned} \Theta[x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \iint d\mathbf{R}' d\mathbf{R} A(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \psi(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}), \end{aligned}$$

и уравнение (39) принимает замкнутую операторную форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = \\ = -\frac{k^2}{8} \iint d\mathbf{R}' d\mathbf{R} A(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \hat{M}(\mathbf{R}') \hat{M}(\mathbf{R}) \Phi[x; v, v^*] + \\ + \frac{i}{2k} \left\{ \int \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - \right. \right. \\ \left. \left. - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] d\mathbf{R}' \right\} \Phi[x; v, v^*], \end{aligned}$$

а уравнения (41) для моментных функций волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn} = & \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn} - \\ & - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) M_{mn}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'_j) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}'_j). \end{aligned} \quad (46)$$

Отметим, что для гауссова случайного поля и функционала от него расщепление корреляций можно осуществить на основе так называемой *формулы Фурутцу – Новикова* [41, 42] (см. также [5])

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi[\varepsilon(x', \mathbf{R}')] \rangle = & \int dx' \int d\mathbf{R}' B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \times \\ & \times \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \Phi[\varepsilon(x', \mathbf{R}')] \right\rangle. \end{aligned} \quad (47)$$

Эта формула справедлива для любого функционала $\Phi[\varepsilon(x', \mathbf{R}')] гауссова случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и может рассматриваться как формула интегрирования по частям в функциональном пространстве [43]. В предпо-$

ложении гауссовости, однородности и δ -коррелированности поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с корреляционной функцией (44) формула (47) при $0 < x' \leq x$ принимает вид

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi[\varepsilon(x', \mathbf{R}')] \rangle = \frac{1}{2} \int A(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} \Phi[\varepsilon(x', \mathbf{R}')] \right\rangle d\mathbf{R}'. \quad (48)$$

Выпишем уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$ и функции когерентности второго порядка

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \langle \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') \rangle, \\ \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') &= u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}'), \end{aligned}$$

вытекающие из (45) и (46) при $m = 1$, $n = 0$, $m = n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle &= \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle - \frac{k^2}{8} A(0) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle, \\ \langle u(0, \mathbf{R}) \rangle &= u_0(\mathbf{R}), \\ \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') &= \frac{i}{2k} (\Delta_{\mathbf{R}} - \Delta_{\mathbf{R}'}) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') - \\ &\quad - \frac{k^2}{4} D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}'), \\ \Gamma_2(0, \mathbf{R}, \mathbf{R}') &= u_0(\mathbf{R}) u_0^*(\mathbf{R}'), \end{aligned} \quad (49)$$

где введена новая функция

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}),$$

связанная со структурной функцией случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Уравнения (49) и (50) легко решаются для произвольной функции $D(\mathbf{R})$ и произвольных начальных условий. Так, для среднего волнового поля получаем выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(x, \mathbf{R}) \exp \left(-\frac{\gamma}{2} x \right), \quad (51)$$

где $u_0(x, \mathbf{R})$ — решение задачи при отсутствии флуктуаций параметров среды:

$$u_0(x, \mathbf{R}) = \int g(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') u_0(\mathbf{R}') d\mathbf{R}',$$

функция $g(x, \mathbf{R})$ — функция Грина в свободном пространстве, а величина $\gamma = (k^2/4)A(0)$ — коэффициент экстинкции.

Соответственно для функции когерентности второго порядка в переменных

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}$$

имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) &= \int \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{q} \frac{x}{k} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ i \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x D \left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{q} \frac{\xi}{k} \right) d\xi \right\} d\mathbf{q}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \gamma_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) \exp(-i \mathbf{q} \mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Дальнейший анализ задачи зависит от вида начальных условий для уравнения (20) и от характера флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Для случая плоской падающей волны, когда

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 = \text{const}, \quad \gamma_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2, \quad \gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 \delta(\mathbf{q}),$$

выражения (51) и (52) существенно упрощаются и принимают вид равенств

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \gamma x \right), \quad (53)$$

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 \exp \left(-\frac{1}{4} k^2 x D(\boldsymbol{\rho}) \right),$$

не зависящих от эффекта дифракции плоской волны в случайно-неоднородной среде. При этом в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, появляется новый статистический масштаб $\boldsymbol{\rho}_{\text{cог}}$, определяемый из условия

$$\frac{1}{4} k^2 x D(\boldsymbol{\rho}_{\text{cог}}) = 1 \quad (54)$$

и называемый *радиусом когерентности* для поля $u(x, \mathbf{R})$. Радиус когерентности зависит от длины волны, дистанции, пройденной волной, и статистических параметров среды.

Уравнения для функций когерентности более высокого порядка уже нельзя решить в аналитическом виде, и для их анализа требуются либо численные, либо приближенные методы.

3.4. Условия применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды и диффузионное приближение для волнового поля

Остановимся теперь на условиях применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Теория последовательных приближений, уточняющая функциональную зависимость статистических характеристик волны от поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, может быть построена. Рассмотренное выше приближение дельта-коррелированных флуктуаций является первым шагом в этой теории; следующие приближения учитывают конечность продольного радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и приводят к системе замкнутых интегро-дифференциальных уравнений для моментов волнового поля (см., например, [13]).

Таким образом, легко показать, что приближение дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$ справедливо при выполнении следующих трех условий:

$$l_{\parallel} \ll k l_{\perp}^2, \quad \sigma_e^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1, \quad x \gg l_{\parallel} \quad (A(0) \sim \sigma_e^2 l_{\parallel}), \quad (55)$$

где $l_{\parallel}$, $l_{\perp}$ — соответственно продольный и поперечный радиусы корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, а σ_e^2 — его дисперсия.

Аналогичным образом можно получить и исследовать уравнения второго приближения для функции когерентности $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$. Условия применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для функции $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ в случае плоской падающей волны имеют вид

$$\rho \ll x, \quad kx |\nabla A(\boldsymbol{\rho})| \ll 1. \quad (56)$$

Важно подчеркнуть, что условия (55) и (56) практически независимы, так как накладывают ограничения на различные параметры. В частности, может оказаться, что условия (56) выполняются в том случае, когда условие $\sigma_e^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1$ нарушается. Отметим также, что условия (56) накладывают ограничения только на локальные характеристики флуктуаций $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и поэтому могут быть записаны и для турбулентной среды, в то время как величина $\gamma = k^2 A(0)/4$ определяется наиболее крупномасштабными флуктуациями поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Рассмотрим теперь применение диффузионного приближения для описания статистических свойств решения параболического уравнения (20). Отметим, что это приближение для рассматриваемой задачи близко "по духу" к локальному методу Чернова [6], оно более физично, чем формальное приближение дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, учитывает конечность продольного радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и описывает распространение волн в среде с неоднородностями, вытянутыми вдоль направления распространения [39, 40]. В диффузионном приближении предполагается, что влияние случайных неоднородностей на масштабах порядка $l_{\parallel}$ несущественны. В этом случае уравнения для средних значений произведений волновых полей выписываются точно, а функциональная зависимость всех величин на масштабах $l_{\parallel}$ определяется динамическими уравнениями при отсутствии флуктуаций параметров среды (см., например, [13]).

Так, в диффузионном приближении вариационная производная описывается детерминированным уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0$$

со стохастическим начальным условием

$$\left. \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right|_{x=x'+0} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}),$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \exp \left\{ \frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right\} [\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R})].$$

В рамках диффузионного приближения волновое поле $u(x', \mathbf{R})$ связано с полем $u(x, \mathbf{R})$ с помощью равенства

$$u(x', \mathbf{R}) = \exp \left\{ -\frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right\} u(x, \mathbf{R}),$$

которое есть следствие решения задачи (20) в случае отсутствия флуктуаций. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle &= \frac{ik}{2} \exp \left\{ \frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right\} \times \\ &\times \left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \exp \left\{ -\frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right\} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle \right], \end{aligned}$$

и можно показать, что в диффузионном приближении

$$\begin{aligned} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - \right. \\ &\left. - i \frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^x D(x', \mathbf{q}) dx' \right\}. \end{aligned} \quad (57)$$

При расстояниях, проходимых волной $x \gg l_{\parallel}$, где $l_{\parallel}$ — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, выражение (57) упрощается и принимает вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i \frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} x D(\mathbf{q}) \right\}, \quad (58)$$

где

$$D(\mathbf{q}) = \pi \int \Phi_{\varepsilon} \left(\frac{1}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}), \mathbf{q}' \right) d\mathbf{q}',$$

а $\Phi_{\varepsilon}(q_1, \mathbf{q})$ — трехмерная спектральная функция поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$:

$$B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}(q_1, \mathbf{q}) \exp(iq_1 x + i\mathbf{q}\mathbf{R}).$$

Отметим, что дельта-коррелированному приближению соответствует коэффициент $D(\mathbf{q})$ вида

$$D(\mathbf{q}) = \pi \int \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}') d\mathbf{q}'.$$

Для плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = u_0$, и, следовательно, из равенства (58) получаем не зависящее от $\mathbf{R}$ выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} k^2 x D(0) \right\},$$

$$D(0) = \pi \int \Phi_{\varepsilon} \left(\frac{\mathbf{q}'^2}{2k}, \mathbf{q}' \right) d\mathbf{q}',$$

условие применимости для которого, очевидно, будет условие

$$\frac{k^2}{2} D(0) l_{\parallel} \ll 1.$$

Аналогичным образом можно вывести и уравнения для моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$ более высокого порядка.

Отметим, что как приближение дельта-коррелированного по x поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, так и диффузионное приближение неприменимы в случае $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon(\mathbf{R})$ или слоистых сред $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon(z)$. В этих случаях поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ имеет формально бесконечный радиус корреляции по оси x .

3.5. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (метод плавных возмущений)

Рассмотрим теперь статистическое описание амплитудно-фазовых флуктуаций волны.

Введем амплитуду и фазу волнового поля, а также комплексную фазу волны по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{ iS(x, \mathbf{R}) \} = \exp \{ i\varphi(x, \mathbf{R}) \},$$

где

$$\varphi(x, \mathbf{R}) = \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}),$$

$\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$ — уровень амплитуды волны, а $S(x, \mathbf{R})$ — флуктуации фазы волны относительно фазы

падающей волны kx . Исходя из параболического уравнения (20) можно получить нелинейное уравнение так называемого метода плавных возмущений Рытова (МПВ) для комплексной фазы $\varphi(x, \mathbf{R})$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \varphi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \varphi(x, \mathbf{R})]^2 + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (59)$$

Для случая плоской падающей волны, который и будет рассматриваться в дальнейшем, можно считать, что $u_0(\mathbf{R}) = 1$ и, следовательно, $\varphi(0, \mathbf{R}) = 0$.

Разделяя в уравнении (59) действительную и мнимую части, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})] [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0, \quad (60)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 + \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})]^2 = \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (61)$$

Если функция $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ достаточно мала, то для решения уравнений (60) и (61) можно построить итерационные ряды по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При этом так называемому первому приближению МПВ соответствуют гауссовы поля $\chi(x, \mathbf{R})$, $S(x, \mathbf{R})$, статистические характеристики которых определяются из статистического усреднения соответствующих итерационных рядов. Так, например, вторые моменты (в том числе и дисперсии всех величин) этих полей определяются из линеаризованной системы уравнений (60) и (61), т.е. из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \chi_0(x, \mathbf{R}) &= -\frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S_0(x, \mathbf{R}), \\ \frac{\partial}{\partial x} S_0(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi_0(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (62)$$

а средние значения определяются из непосредственного усреднения уравнений (60) и (61). Такое описание волнового поля в случайно-неоднородной среде впервые и было использовано в работе А.М. Обухова [1].

Линейная система уравнений (62) может быть решена с помощью преобразования Фурье по поперечной координате. Вводя фурье-образы всех полей, а также фурье-образ случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ по формулам

$$\chi_0(x, \mathbf{R}) = \int \chi_q^0(x) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}) d\mathbf{q},$$

$$S_0(x, \mathbf{R}) = \int S_q^0(x) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}) d\mathbf{q},$$

$$\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \int \varepsilon_q(x) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}) d\mathbf{q},$$

получаем решение системы уравнений (62) в виде

$$\chi_q^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x \varepsilon_q(\xi) \sin \frac{q^2}{2k} (x - \xi) d\xi, \quad (63)$$

$$S_q^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x \varepsilon_q(\xi) \cos \frac{q^2}{2k} (x - \xi) d\xi.$$

При вычислении конкретных интегралов, связанных с дельта-коррелированным по x случайным полем $\varepsilon(x, \mathbf{R})$,

легко получить корреляционную функцию случайного гауссова поля $\varepsilon_q(x)$:

$$\langle \varepsilon_{q_1}(x_1) \varepsilon_{q_2}(x_2) \rangle = 2\pi \delta(x_1 - x_2) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}_1). \quad (64)$$

Отметим, что если поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ отлично от нуля только в конечном слое $(0, \Delta x)$, а при $x > \Delta x$ поле $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$, то вместо формулы (64) получаем выражение

$$\langle \varepsilon_{q_1}(x_1) \varepsilon_{q_2}(x_2) \rangle = 2\pi \delta(x_1 - x_2) \theta(\Delta x - x) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}_1).$$

Если рассмотреть флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, вызываемые турбулентными пульсациями температуры в атмосфере Земли, то в значительном интервале волновых чисел трехмерная спектральная плотность имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = AC_\varepsilon^2 q^{-11/3} \quad (q_{\min} \ll q \ll q_{\max}), \quad (65)$$

где $A = 0,033$ — численная постоянная, C_ε^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров среды. В ряде случаев интегралы, описывающие статистические характеристики амплитудно-фазовых флуктуаций волнового поля и содержащие спектральную функцию вида (65), расходятся. В этом случае используется феноменологическая спектральная функция вида

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = \Phi_\varepsilon(q) = AC_\varepsilon^2 q^{-11/3} \exp\left(-\frac{q^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (66)$$

где κ_m — волновое число, соответствующее микромасштабу турбулентности.

Статистические свойства амплитудных флуктуаций в рассматриваемом приближении для среды, занимающей конечную часть пространства Δx , описываются дисперсией уровня амплитуды, т.е. параметром

$$\sigma_0^2(x) = \langle \chi_0^2(x, \mathbf{R}) \rangle,$$

для которого, согласно формулам (63) и (64), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_0^2(x) &= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \langle \chi_{q_1}^0(x) \chi_{q_2}^0(x) \rangle \exp\{i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{R}\} = \\ &= \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty q \Phi_\varepsilon(q) \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 \Delta x} \left[\sin \frac{q^2 x}{k} - \sin \frac{q^2 (x - \Delta x)}{k} \right] \right\} dq. \end{aligned} \quad (67)$$

Чтобы найти среднее значение уровня амплитуды, воспользуемся уравнением (24). Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для плоской падающей волны, получаем равенство

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = 1,$$

которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle &= \langle \exp\{2\chi_0(x, \mathbf{R})\} \rangle = \\ &= \exp\{2\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle + 2\sigma_0^2(x)\} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, в первом приближении МПВ

$$\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_0^2(x),$$

и условиями применимости первого приближения МПВ является, очевидно, условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Что касается дисперсии интенсивности волны, которая называется *индексом мерцания*, то для нее в первом приближении МПВ имеем

$$\beta_0^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \langle \exp \{4\chi_0(x, \mathbf{R})\} \rangle - 1 \approx 4\sigma_0^2(x).$$

Следовательно, одноточечное распределение вероятностей поля $\chi(x, \mathbf{R})$ в этом приближении имеет вид

$$P(x; \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{2}{\beta_0(x)} \left(\chi + \frac{1}{4} \beta_0(x) \right)^2 \right\}.$$

Таким образом, интенсивность волнового поля является логарифмически нормальным случайным полем, и его одноточечная плотность вероятностей определяется выражением

$$P(x; I) = \frac{1}{I\sqrt{2\pi\beta_0(x)}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0(x)} \ln^2 \left(I \exp \left\{ \frac{1}{2} \beta_0(x) \right\} \right) \right\}, \quad (68)$$

и при этом моменты интенсивности волнового поля описываются равенством

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \exp \{2n\chi(x, \mathbf{R})\} \rangle = \exp \{2n(n-1)\sigma_0^2(x)\}.$$

При статистическом анализе обычно рассматриваются два предельных асимптотических случая.

Первый случай соответствует предположению $\Delta x \ll x$ и называется *случайным фазовым экраном*. В этом случае волна после прохождения тонкого слоя флуктуирующей среды распространяется далее в пустом пространстве. В тонком слое среды имеются только фазовые флуктуации волнового поля, которые в дальнейшем трансформируются в амплитудные флуктуации в силу нелинейности уравнений (60), (61).

Второй случай соответствует *непрерывной среде*, т.е. условию $\Delta x = x$.

Рассмотрим эти случаи подробнее для слабых флуктуаций волнового поля.

Случайный фазовый экран ($\Delta x \ll x$). В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается выражением, вытекающим из (67),

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \cos \frac{q^2 x}{k} \right\} dq. \quad (69)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ вызваны турбулентными пульсациями среды, то функция $\Phi_\varepsilon(q)$ описывается формулой (65), и интеграл (69) легко вычисляется. В результате получаем выражение

$$\sigma_0^2(x) = 0,144 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x, \quad (70)$$

и, следовательно, индекс мерцания

$$\beta_0^2(x) = 0,563 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x. \quad (71)$$

Что касается фазовых флуктуаций, то непосредственный физический интерес представляет величина, описы-

вающая угол прихода волны в точку $(x, \mathbf{R})$,

$$\alpha(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}).$$

Для ее дисперсии аналогично выводу формулы (69) получаем формулу

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 + \cos \frac{q^2 x}{k} \right\} dq.$$

Случай непрерывной среды ($\Delta x = x$). В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается формулой

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 x}{2} \int_0^\infty q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\} dq,$$

а параметры $\sigma_0^2(x)$ и $\beta_0^2(x)$ для турбулентных пульсаций среды описываются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_0^2(x) &= 0,077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}, \\ \beta_0^2(x) &= 0,307 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}. \end{aligned} \quad (72)$$

Дисперсия угла прихода волны в точку $(x, \mathbf{R})$ в этом случае описывается формулой

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 x}{2} \int_0^\infty q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 + \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\} dq.$$

Аналогичным образом можно исследовать и дисперсию градиента уровня амплитуды. При этом приходится считать, что спектральная функция $\Phi_\varepsilon(q)$ описывается формулой (66). Для дисперсии $\sigma_q^2(x) = \langle [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 \rangle$ в случае турбулентной среды, занимающей все пространство, при условии, что так называемый волновой параметр $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$, получаем выражение (см., например, [8])

$$\begin{aligned} \sigma_q^2(x) &= \frac{k^2 \pi^2 x}{2} \int_0^\infty q^3 \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\} dq = \\ &= \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x), \end{aligned} \quad (73)$$

где введен естественный не зависящий от параметров среды масштаб длины в плоскости $x = \text{const}$ — размер первой зоны Френеля $L_f(x) = \sqrt{x/k}$, определяющий размер переходной области свет-тень при дифракции на краю непрозрачного экрана (см., например, [8]).

Условием справедливости первого приближения МПВ для амплитудных флуктуаций в общем случае является условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Область флуктуаций амплитуды, в которой выполняется это неравенство, называется *областью слабых флуктуаций*. В области, где $\sigma_0^2(x) \geq 1$ (которая называется *областью сильных флуктуаций*), необходимо изучать полную систему уравнений (60), (61).

Что касается флуктуаций угла прихода волны в точку наблюдения, связанных с флуктуациями величины

$$\alpha(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}),$$

то они хорошо описываются первым приближением МПВ даже для больших значений параметра $\sigma_0^2(x)$.

Отметим, что приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для уравнения (20) практически не накладывает ограничений на амплитудные флуктуации, и, следовательно, уравнения для моментов поля $u(x, \mathbf{R})$, полученные выше, справедливы и в области сильных флуктуаций амплитуды. Анализ статистических характеристик интенсивности волнового поля в этом случае будет проведен в дальнейшем.

4. Континуальная запись решения задачи

Рассмотрим теперь статистическое описание характеристик волнового поля в среде со случайными неоднородностями, основанное на использовании функциональной записи решения задачи (29), (31).

4.1. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны

Рассмотрим статистический момент поля $u(x, \mathbf{R})$

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left\langle \prod_{k=1}^n u(x, \mathbf{R}_{2k-1}) u^*(x, \mathbf{R}_{2k}) \right\rangle. \quad (74)$$

В приближении дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ удовлетворяет уравнению (45) при $n = m$, которое для плоской падающей волны в переменных $\mathbf{R}_k$ записывается в виде уравнения с начальным условием

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} \Delta_{\mathbf{R}_l} \right) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \\ = \frac{k^2}{8} \sum_{l,j=1}^{2n} (-1)^{l+j} D(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}), \end{aligned}$$

где функция $D(\mathbf{R})$ описывается формулой

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}) = 2\pi \int \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}) [1 - \cos(\mathbf{q}\mathbf{R})] d\mathbf{q},$$

а $\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q})$ — трехмерный спектр поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ от двумерного вектора $\mathbf{q}$.

Используя запись поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла (31), усредняя по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем выражение для $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ в виде

$$\begin{aligned} M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \int \dots \int D\mathbf{v}_1(\xi) \dots D\mathbf{v}_{2n}(\xi) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \int_0^x \mathbf{v}_j^2(\xi) d\xi - \frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \times \right. \\ \left. \times \int_0^x D(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_\xi^x [\mathbf{v}_j(x') - \mathbf{v}_l(x')] dx') d\xi \right\}. \quad (75) \end{aligned}$$

Формулу (75) можно записать в операторной форме

$$\begin{aligned} M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \prod_{l=1}^{2n} \exp \left\{ \frac{i}{2k} (-1)^{l+1} \int_0^x \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} d\xi \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \times \right. \\ \left. \times \int_0^x D(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_{x'}^x [\mathbf{v}_j(\xi) - \mathbf{v}_l(\xi)] d\xi) dx' \right\}_{\mathbf{v}=0}. \quad (76) \end{aligned}$$

Если теперь совместить точки $\mathbf{R}_{2k-1}$ и $\mathbf{R}_{2k}$, то функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ перейдет в функцию

$$\left\langle \prod_{k=1}^n I(x, \mathbf{R}_{2k-1}) \right\rangle,$$

описывающую корреляционные характеристики интенсивности волны. Если же теперь положить все $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}$, то функция

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}) = \Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$$

будет описывать n -й момент интенсивности волнового поля.

Прежде чем обсуждать асимптотику функций $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R})$ для случая непрерывной случайной среды, рассмотрим более простую задачу о флуктуациях волнового поля за случайным фазовым экраном.

4.1.1. Случайный фазовый экран. Пусть имеется слой неоднородной среды, толщина которого настолько мала, что волна при прохождении через этот слой приобретает только случайный набег фазы

$$S(\mathbf{R}) = \frac{k}{2} \int_0^{\Delta x} \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) d\xi \quad (77)$$

и не меняет амплитуды. Будем считать, как и ранее, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — гауссово дельта-коррелированное по x поле. После прохождения неоднородного слоя волна распространяется в однородной среде, и ее распространение описывается уравнением, которое получается из (20) при $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$. Решение этой задачи описывается формулами

$$\begin{aligned} u(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ i \frac{x}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right\} \exp \{ i S(\mathbf{R}) \} = \\ = \frac{k}{2\pi i x} \int \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \mathbf{v}^2 + i S(\mathbf{R} + \mathbf{v}) \right\} d\mathbf{v}, \quad (78) \end{aligned}$$

которые являются конечномерным аналогом формул (29), (31).

Рассмотрим функцию $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$. Подставляя (78) в (74) и усредняя, легко получаем формулу

$$\begin{aligned} M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - \right. \\ \left. - \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) \right\}. \quad (79) \end{aligned}$$

Эта формула является аналогом (75).

Прежде всего рассмотрим подробнее случай $n = 2$ при попарно совмещенных точках наблюдения

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' - \mathbf{R}'' = \boldsymbol{\rho}.$$

Тогда функция

$$\Gamma_4(x; \mathbf{R}', \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{R}'') = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$$

— ковариация интенсивностей $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$. Если в (79) (при $n = 2$) ввести новые переменные интегрирования

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{R}_3, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{R},$$

то можно выполнить интегрирование по $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_3$ и получить в результате более простую формулу

$$\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle = \\ = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^2 \iint d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 - \boldsymbol{\rho}) - \right. \\ \left. - \frac{k^2 \Delta x}{4} F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \right\}, \quad (80)$$

где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ и функция $F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ определяется из равенства

$$F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 2D(\mathbf{R}_1) + 2D(\mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \\ D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}).$$

Интеграл (80) имеет асимптотику при $x \rightarrow \infty$:

$$\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle = 1 + \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D(\boldsymbol{\rho}) \right\} + \\ + \pi k^2 \Delta x \int \Phi_e(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right] \times \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} d\mathbf{q} + \\ + \pi k^2 \Delta x \int \Phi_e(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \left(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right) \right] \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} d\mathbf{q} + \dots \quad (81)$$

Отметим, что теперь в задаче, помимо пространственного масштаба $\rho_{\text{cог}}$, появляется второй характерный пространственный масштаб

$$r_0 = \frac{x}{k\rho_{\text{cог}}}. \quad (82)$$

Если теперь в выражении (81) положить $\boldsymbol{\rho} = 0$, то для дисперсии квадрата интенсивности можно получить выражение

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \\ = 1 + \pi \Delta x \int q^4 \Phi_e(\mathbf{q}) \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} d\mathbf{q} + \dots \quad (83)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ в неоднородном слое вызываются турбулентностью, так что $\Phi_e(\mathbf{q})$ описывается формулой (65), то равенство (83) приводит к результату

$$\beta^2(x) = 1 + 0,429 \beta_0^{-4/5}(x), \quad (84)$$

где $\beta_0^2(x)$ — дисперсия, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений для случайного фазового экрана (71).

Изложенные соображения легко обобщаются на более высокие моментные функции поля $u(x, \mathbf{R})$ и, в частности, на функции $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$. Формула (79) в этом случае имеет вид

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \right\},$$

где

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l),$$

откуда легко получить асимптотическую формулу для $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ при $x \rightarrow \infty$

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (85)$$

в которой величина $\beta^2(x)$ определяется выражением (84). Обсуждение полученной формулы мы проведем несколько позднее, после того как рассмотрим распространение волн в непрерывной случайно-неоднородной среде, поскольку получающиеся в обоих случаях результаты аналогичны.

4.1.2. Случай непрерывной случайной среды. Рассмотрим теперь асимптотику высших моментных функций волнового поля $M_m(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$, распространяющегося в случайно-неоднородной среде. Формальное решение этой задачи дается выражениями (75), (76). От рассмотренных выше формул для фазового экрана они отличаются лишь заменой обычного интегрирования на континуальное.

В этом случае для дисперсии интенсивности

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1$$

можно получить асимптотическую формулу при $x \rightarrow \infty$, аналогичную (83):

$$\beta^2(x) = 1 + \pi \int_0^x dx' (x - x') \int d\mathbf{q} q^4 \Phi_e(\mathbf{q}) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2 x'}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}}{k}(x - x')\right) - \right. \\ \left. - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x D\left(\frac{\mathbf{q}}{k}(x - x'')\right) dx'' \right\} + \dots \quad (86)$$

Если рассмотреть случай турбулентной среды, то из (86) получаем

$$\beta^2(x) = 1 + 0,861 (\beta_0^2(x))^{-2/5}, \quad (87)$$

где $\beta_0^2(x)$ — дисперсия интенсивности волнового поля, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений (72).

Рассмотрим теперь высшие моментные функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \Gamma_{2n}(x, 0)$. Аналогично случаю фазового экрана легко получить, что и в случае распространения волн в случайно-неоднородной среде для дисперсии

интенсивности волнового поля имеет место разложение

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (88)$$

совпадающее с выражением (85) для фазового экрана; при этом, разумеется, $\beta^2(x)$ в каждом случае определяется различными формулами.

Формула (88) дает первые два члена асимптотического разложения функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$. Так как $\beta^2(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$, то второе слагаемое в (88) мало по сравнению с первым при достаточно больших $\beta_0^2(x)$. Лишь в том случае, когда

$$n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \ll 1, \quad (89)$$

выражение (88) имеет смысл. Однако при фиксированном $\beta_0^2(x)$ всегда найдутся такие номера n , для которых условие (89) будет нарушаться. Поэтому формула (88) справедлива лишь для не слишком больших n . Следует также отметить, что и выход на асимптотику (88) при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$ может быть достаточно медленным.

Формула (88) приводит к плотности вероятностей для интенсивности с сингулярными особенностями. Чтобы избежать их, можно аппроксимировать эту формулу выражением (см., например, [22])

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \exp \left\{ n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \right\}, \quad (90)$$

которому соответствует плотность вероятностей вида

$$P(x, I) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \times \int_0^\infty \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\} dz. \quad (91)$$

Отметим, что, вообще говоря, распределение вероятностей (91) неприменимо в узкой окрестности $I \sim 0$ (окрестность тем уже, чем больше параметр $\beta_0^2(x)$). Это связано с тем, что из формулы (91) следуют бесконечно большие значения для моментов величины $1/I(x, \mathbf{R})$. Однако для конечного значения $\beta_0^2(x)$ (сколь велико оно не было бы) величины $\langle 1/I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ конечны и, следовательно, должно выполняться равенство $P(x, 0) = 0$. Существование такой узкой окрестности точки $I \sim 0$, конечно, не сказывается на поведении моментов (90) для больших значений параметра $\beta_0^2(x)$.

Асимптотические формулы (90), (91) описывают переход в область насыщенных флуктуаций интенсивности, где $\beta(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$. В этой области соответственно имеем

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = \exp(-I). \quad (92)$$

Экспоненциальное распределение вероятностей (92) означает, что комплексное поле $u(x, \mathbf{R})$ является гауссовым случайным полем. При этом

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{ iS(x, \mathbf{R}) \} = u_1(x, \mathbf{R}) + iu_2(x, \mathbf{R}),$$

где $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ — действительная и мнимая части соответственно. Тогда интенсивность волнового поля

$$I(x, \mathbf{R}) = A^2(x, \mathbf{R}) = u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R}).$$

Гауссовость комплексного поля $u(x, \mathbf{R})$ означает, что случайные поля $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ — также гауссовы статистически независимые поля с дисперсиями

$$\langle u_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle u_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{2}.$$

Естественно считать, что и их градиенты

$$\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_1(x, \mathbf{R}), \quad \mathbf{p}_2(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_2(x, \mathbf{R})$$

также статистически независимы от полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и являются гауссовыми однородными и изотропными полями в плоскости $\mathbf{R}$ с дисперсиями

$$\sigma_p^2(x) = \langle \mathbf{p}_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \mathbf{p}_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle. \quad (93)$$

Следовательно, совместная плотность вероятностей полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и их градиентов $\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R})$, $\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})$ имеет вид

$$P(x; u_1, u_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{\pi^3 \sigma_p^4(x)} \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_p^2(x)} \right\}. \quad (94)$$

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$ и градиента амплитуды

$$\mathbf{z}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) = \frac{u_1(x, \mathbf{R}) \mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R}) \mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})}{\sqrt{u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R})}}.$$

Для нее имеем

$$\begin{aligned} P(x; I, \mathbf{z}) &= \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\mathbf{z}(x, \mathbf{R}) - \mathbf{z}) \rangle_{u_i, \mathbf{p}_i} = \\ &= \frac{1}{\pi^3 \sigma_p^4(x)} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_p^2(x)} \right\} \delta(u_1^2 + u_2^2 - I) \delta\left(\frac{u_1 \mathbf{p}_1 + u_2 \mathbf{p}_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \mathbf{z} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi \sigma_p^2(x)} \exp \left\{ -I - \frac{\mathbf{z}^2}{2\sigma_p^2(x)} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, поперечный градиент амплитуды статистически не зависит от интенсивности волнового поля и является гауссовым случайным полем с дисперсией

$$\langle \mathbf{z}^2(x, \mathbf{R}) \rangle = 2\sigma_p^2(x). \quad (95)$$

Отметим, что поперечный градиент амплитуды также статистически независим от вторых производных по поперечным координатам интенсивности волнового поля.

Функция когерентности второго порядка в области сильных флуктуаций интенсивности не зависит от дифракционных явлений и описывается выражением (53)

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') &= \langle u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \\ &= \langle u_1(x, \mathbf{R}) u_1^*(x, \mathbf{R}') \rangle + \langle u_2(x, \mathbf{R}) u_2^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} k^2 x D \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}' \right) \right\}, \end{aligned} \quad (96)$$

где $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$. И, следовательно, величина $\sigma_p^2(x)$ из (93) определяется выражением

$$\sigma_p^2(x) = \frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} D(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0} = -\frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0},$$

которое для турбулентных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ совпадает, естественно, с формулой (73)

$$\sigma_p^2(x) = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x). \quad (97)$$

Отметим, что представление поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла позволяет исследовать также вопрос о пределах применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для флуктуаций интенсивности волны. При этом оказывается, что все условия применимости дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для вычисления величины $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ совпадают с условиями применимости дельта-коррелированного приближения для величины $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$. Иначе говоря, приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ не изменяет вида распределения вероятностей для интенсивности волнового поля.

Для турбулентных пульсаций температуры в области слабых флуктуаций приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ справедливо при выполнении неравенств

$$\lambda \ll \sqrt{\lambda x} \ll x,$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

В области же сильных флуктуаций условием применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является условие

$$\lambda \ll \rho_{\text{cог}} \ll r_0 \ll x,$$

где $\rho_{\text{cог}}$ и r_0 определяются формулами (54) и (82). Все эти неравенства имеют простой физический смысл. Пока в задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями наименьшим из всех продольных масштабов является радиус корреляции $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ (его роль для турбулентных пульсаций температуры играет размер первой зоны Френеля), справедливо дельта-коррелированное приближение. При распространении волны в область сильных флуктуаций появляется продольный масштаб $\sim \rho_{\text{cог}} \sqrt{kx}$, который постепенно уменьшается, так что при достаточно большом значении параметра $\beta_0^2(x)$ он может стать меньше радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При возникновении такой ситуации уже нельзя пользоваться дельта-коррелированным приближением.

Приведенные выше неравенства можно рассматривать и как ограничения снизу и сверху на величину масштаба функции корреляции интенсивности. При этом дельта-коррелированное приближение справедливо лишь в том случае, когда любые масштабы, возникающие в задаче, остаются малыми по сравнению с длиной трассы.

4.2. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде

Рассмотренные статистические характеристики волнового поля $u(x, \mathbf{R})$, такие, например, как среднее поле и

функция когерентности второго порядка, совершенно не отражают реального поведения волнового поля в отдельных реализациях параметров среды (см. рис. 1–3). Для анализа детальной структуры случайного волнового поля можно воспользоваться методами статистической топографии, которые позволяют понять, как образуется каустическая структура волнового поля, и выяснить, какими статистическими параметрами она описывается. Отметим, что, по-видимому, впервые теория выбросов случайного поля интенсивности была применена для анализа задачи о распространении волн в турбулентной среде в работах [44] (см. также [10]).

4.2.1. Элементы статистической топографии случайного поля интенсивности волны. Для плоской падающей волны в силу пространственной однородности все одно-точечные статистические характеристики (в том числе и плотности вероятностей) не зависят от переменной $\mathbf{R}$. В этом случае можно ввести удельные (приходящиеся на единицу площади) значения ряда физических величин, достаточно полно характеризующих каустическую структуру интенсивности волнового поля. При этом, как указывалось выше, естественным масштабом длины в плоскости $x = \text{const}$, не зависящим от параметров среды, является размер первой зоны Френеля $L_f(x) = \sqrt{x/k}$.

К таким величинам относятся следующие.

- Детерминированная кривая, называемая *типичной реализацией* $I^*(x)$ интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$, которая является медианой его вероятностного распределения $P(x; I)$ и определяется как решение алгебраического уравнения $\int_0^{I^*} P(x; I') dI' = 1/2$. Свойством медианы является то обстоятельство, что на любом отрезке расстояний (X_1, X_2) среднее значение всех отрезков расстояний, где $I^*(x) < I(x, \mathbf{R})$, равно среднему значению всех отрезков расстояний, где $I^*(x) > I(x, \mathbf{R})$, т.е.

$$\langle X \rangle_{I^*(x) < I(x, \mathbf{R})} = \langle X \rangle_{I^*(x) > I(x, \mathbf{R})} = \frac{1}{2} (X_2 - X_1).$$

- Удельная средняя общая площадь областей в плоскости $\{\mathbf{R}\}$, ограниченных линиями уровня, где $I(x, \mathbf{R}) > I$,

$$\langle s(x, I) \rangle = \int_I^\infty P(x; I') dI'.$$

Здесь $P(x; I)$ — плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$.

- Удельная средняя мощность поля, заключенная в этих областях,

$$\langle e(x, I) \rangle = \int_I^\infty I' P(x; I') dI'.$$

- Удельное среднее значение длины этих контуров

$$\langle l(x, I) \rangle = L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} I(x, \mathbf{R})$ — поперечный градиент интенсивности волнового поля.

- Оценка среднего числа разности числа контуров с противоположной ориентацией векторов нормали, приходящихся на первую зону Френеля,

$$\langle n(x, I) \rangle = \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \chi(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $\kappa(x, \mathbf{R}; I)$ — кривизна линии уровня,

$$\kappa(x, \mathbf{R}; I) = \frac{1}{p^3(x, \mathbf{R})} \left[-p_y^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial z^2} - p_z^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y^2} + 2p_y(x, \mathbf{R}) p_z(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y \partial z} \right].$$

Рассмотрим теперь динамику всех этих величин в зависимости от дистанции x , проходимой волной (параметра $\beta_0(x)$).

4.2.2. Область слабых флуктуаций интенсивности. Область слабых флуктуаций интенсивности ограничивается значениями параметра $\beta_0(x) \leq 1$, и в этом случае интенсивность волнового поля имеет логнормальный характер и описывается выражением (68).

Для этого логарифмически-нормального процесса типичной реализацией случайной интенсивности является экспоненциально спадающая с дистанцией кривая

$$I^*(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta_0(x) \right\},$$

в то время как $\langle I(x) \rangle = 1$ и формирование статистики (например, моментных функций $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$) осуществляется за счет больших выбросов процесса $I(x, \mathbf{R})$ относительно этой кривой.

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также различные мажорантные оценки. Так, например, с вероятностью $p = 1/2$ для отдельных реализаций интенсивности волнового поля выполняется неравенство

$$I(x) < 4 \exp \left\{ -\frac{1}{4} \beta_0(x) \right\}$$

на всем интервале расстояний $x \in (0, \infty)$. Все эти обстоятельства указывают на начало образования каустической структуры интенсивности волнового поля.

Как указывалось ранее, полученное описание справедливо при значениях $\beta_0(x) \leq 1$. При дальнейшем увеличении параметра $\beta_0(x)$ метод плавных возмущений становится несправедливым, и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем же увеличении параметра $\beta_0(x)$ ($\beta_0^2(x) \geq 10$) статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения параметра $\beta_0(x)$ называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

4.2.3. Область сильных флуктуаций интенсивности. Из выражения для плотности вероятностей (91) следует, что средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \times \times \int_0^\infty \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\} \frac{dz}{z}, \quad (98)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \times \times \int_0^\infty \left(I + \frac{1}{z} \right) \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\} \frac{dz}{z}. \quad (99)$$

Отметим очень медленную зависимость параметра $\beta(x)$ от $\beta_0(x)$. Так, предельному переходу $\beta_0(x) \rightarrow \infty$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1$, а величине $\beta_0(x) = 1$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1,861$.

Асимптотические формулы (98), (99) описывают переход в область насыщенных флуктуаций интенсивности ($\beta(x) \rightarrow 1$). В этой области соответственно имеем

$$P(I) = \exp(-I), \quad \langle s(I) \rangle = \exp(-I), \quad (100) \\ \langle e(I) \rangle = (I + 1) \exp(-I),$$

и, следовательно, удельные значения средней площади и средней мощности выше линии уровня зависят только от I .

Для удельной средней длины контуров получаем выражение

$$\langle l(x, I) \rangle = L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ = 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\mathbf{z}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ = 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\mathbf{q}(x, \mathbf{R})| \rangle \exp(-I) = \\ = L_f(x) \sqrt{2\pi\sigma_q^2(x)} I \exp(-I), \quad (101)$$

где дисперсия градиента уровня амплитуды в области насыщенных флуктуаций совпадает с дисперсией, вычисленной по первому приближению метода плавных возмущений. Максимальное значение в (101) достигается при $I = 1/\sqrt{2}$.

Для оценки среднего удельного числа контуров в этой области имеем

$$\langle n(x, I) \rangle = \frac{L_f^2(x)}{2\pi} \langle \kappa(x, \mathbf{R}, I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ = -\frac{L_f^2(x)}{2\pi} \sqrt{I} \langle \Delta_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ = \frac{2L_f^2(x) \sigma_q^2(x)}{\pi} \left(I - \frac{1}{2} \right) \exp(-I). \quad (102)$$

Максимальное значение в (102) достигается при $I = 3/2$, а значение уровня, при котором среднее удельное число контуров, ограничивающих область $I(x, \mathbf{R}) > I_0$, совпадает со средним удельным числом контуров, для которых $I(x, \mathbf{R}) < I_0$, в данном случае равно $I_0 = 1/2$.

Отметим, что формула (102) неприменима в узкой окрестности значения $I \sim 0$. Для $I = 0$ должно быть $\langle n(x, 0) \rangle = 0$.

Как видно из выражений (101), (102), в области насыщенных флуктуаций средняя длина линий уровня и среднее число контуров продолжает расти с ростом параметра $\beta_0(x)$, хотя ограниченные ими средние площади и мощности, заключенные в них, остаются

постоянными. Это связано с тем, что определяющую роль в этом режиме играет интерференция парциальных волн, приходящих с разных направлений.

Динамическая картина поведения линий уровня зависит от соотношения между процессами фокусировки и дефокусировки излучения отдельными участками турбулентной среды. Фокусировка на неоднородностях большого масштаба проявляется в появлении высоких пиков на случайном рельефе интенсивности. В режиме максимальных фокусировок ($\beta_0(x) \sim 1$) около половины всей мощности волны концентрируется в узких высоких пиках. При увеличении параметра $\beta_0(x)$ начинает преобладать дефокусировка излучения, приводящая к расплыванию высоких пиков и образованию сильно изрезанного (интерференционного) рельефа с большим числом вершин уровня $I \sim 1$, что и наблюдалось как в лабораторных экспериментах (рис. 1б), так и при численном моделировании (рис. 2б).

Средняя длина уровня и среднее число контуров, кроме параметра $\beta_0(x)$, зависит также от волнового параметра $D(x)$, т.е. растет с уменьшением масштаба неоднородностей. Это связано с тем, что на более крупномасштабный рельеф накладывается мелкая рябь, возникающая вследствие рассеяния на малых неоднородностях.

Таким образом, мы сделали попытку дать качественное объяснение каустической структуры волнового поля плоской световой волны в поперечной плоскости при распространении ее в турбулентной среде и количественно оценить параметры, характеризующие возникновение такой структуры. В общем случае задача является многопараметрической. Однако если ограничиться анализом задачи в фиксированной плоскости, то для плоской волны при постоянном значении волнового параметра решение задачи описывается единственным параметром — дисперсией интенсивности в области слабых флуктуаций $\beta_0(x)$. Мы проанализировали два крайних асимптотических случая, соответствующих слабым и насыщенным флуктуациям интенсивности. Следует заметить, что, скорее всего, пределы применимости асимптотических формул зависят от величины уровня интенсивности I . Естественно думать, что для меньших значений уровня эти пределы расширяются.

Для анализа же наиболее интересного с точки зрения приложений промежуточного случая, соответствующего области развитой каустической структуры, требуется знание плотности вероятностей интенсивности и ее поперечного градиента для произвольного значения дистанции, пройденной волной. Такой анализ можно произвести либо с использованием аппроксимирующих выражений для плотности вероятностей для всех значений параметров, либо на основе численного моделирования.

5. Заключение

Мы рассмотрели основные положения теории распространения волн в случайно-неоднородных средах, развитые за последние 50 лет, и выделили основные параметры, характеризующие процесс распространения волн в турбулентной атмосфере. Конечно, при этом вне рамок данной работы осталось множество вопросов, которые мы не обсуждали вообще или только кратко упомянули. Из возможных направлений работы нам

представляется перспективным статистический анализ пространственной каустической структуры волнового поля. Кроме того, по нашему мнению, необходимо вернуться к вопросу о деполяризации электромагнитного поля в случайных средах. Как упоминалось в разделе 2.1, дисперсии величин, характеризующие эти эффекты, достаточно малы (например, среднее значение вектора Умова – Пойнтинга). Однако при этом вне рамок исследований остались вопросы о пространственной структуре корреляционных зависимостей векторных полей, описываемых уравнениями Максвелла (3), (4), в области сильных флуктуаций волнового поля. Изучить эти вопросы можно, переходя от уравнения (3) к векторному параболическому уравнению с дальнейшим использованием приближения дельта-коррелированности поля диэлектрической проницаемости по оси x .

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проекты 04-05-64044, 02-05-64375) и была завершена в Университете г. Падуя при поддержке Итальянского GNFM-INdAM. Автор признателен Дж.А. Асебруну и Р. Спиглеру, обратившим его внимание на вопросы, связанные с деполяризацией электромагнитного поля в случайно-неоднородной среде.

Список литературы

1. Обухов А М *Изв. АН СССР. Сер. Геофиз.* (2) 155 (1953); *Турбулентность и динамика атмосферы* (Л.: Гидрометиздат, 1988)
2. Грачева М Е, Гурвич А С *Изв. вузов. Радиофиз.* 8 717 (1965)
3. Грачева М Е и др. *Изв. вузов. Радиофиз.* 17 105 (1974)
4. Татарский В И *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1967)
5. Кляцкин В И *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами* (М.: Наука, 1975); *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1980) [*Ondes et Équations Stochastiques dans les milieux Aléatoirement non Homogènes* (Besançon – Cedex: Les Éditions de Physique, 1985)]
6. Чернов Л А *Волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1975)
7. Гурвич А С и др. *Распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1976)
8. Рыгов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И *Введение в статистическую радиофизику* Т. 2 (М.: Наука, 1978)
9. Ишимару А *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* Т. 1, 2 (М.: Мир, 1981)
10. Гочелашвили К С, Шишов В И *Волны в случайно-неоднородных средах* (Итоги науки и техники. Сер. Радиофизика. Физические основы электроники. Акустика, Т. 1, Под ред. Н Д Устинова) (М.: Изд-во ВИНТИ, 1981)
11. Furutsu K *Random Media and Boundaries: Unified Theory, Two-Scale Method, and Applications* (Berlin: Springer-Verlag, 1993)
12. Manning R M *Stochastic Electromagnetic Image Propagation and Adaptive Compensation* (New York: McGraw-Hill, 1993)
13. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения* (М.: Физматлит, 2001)
14. Tatarskii V I, Zavorotny V U, in *Progress in Optics* Vol. XVIII (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1980) p. 204
15. Kravtsov Yu A *Rep. Prog. Phys.* 55 37 (1992)
16. Charnotskii M I et al., in *Progress in Optics* Vol. XXXII (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1993) p. 203
17. Tatarskii V I et al., in *Wave Propagation in Random Media (Scintillation)* (Eds V I Tatarskii, A Ishimaru, V U Zavorotny) (Bellingham, Wash.: SPIE, 1993) p. 383
18. Beran M J, Oz-Vogt J, in *Progress in Optics* Vol. XXXIII (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1994) p. 321
19. Леонтович М, Фок В А *ЖЭТФ* 16 557 (1946)

20. Рытов С М *Изв. АН СССР. Сер. Физ.* **2** 223 (1937)
21. Кляцкин В И, Татарский В И *ЖЭТФ* **58** 624 (1970)
22. Dashen R J. *Math. Phys.* **20** 894 (1979); *Opt. Lett.* **9** 110 (1984)
23. Татарский В И *ЖЭТФ* **56** 2106 (1969); Tatarskii V I *Waves Random Media* **4** 511 (1994)
24. Кляцкин В И *ЖЭТФ* **57** 952 (1969)
25. Заворотный В У, Кляцкин В И, Татарский В И *ЖЭТФ* **73** 481 (1977)
26. Кляцкин В И, Якушкин И Г *ЖЭТФ* **111** 2044 (1997)
27. Кравцов Ю А, Саичев А И *УФН* **137** 501 (1982); Kravtsov Yu A, Saichev A I *J. Opt. Soc. Am. A* **2** 2100 (1985)
28. Varabanenkov Yu N et al., in *Progress in Optics* Vol. XXIX (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1991) p. 67
29. Татарский В И *Изв. вузов. Радиофиз.* **10** 1762 (1967)
30. Кравцов Ю А *Изв. вузов. Радиофиз.* **13** 281 (1970)
31. Кляцкин В И *Метод погружения в теорию распространения волн* (М.: Наука, 1986); Klyatskin V I, in *Progress in Optics* Vol. XXXIII (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1994) p. 1; Кляцкин В И *Динамика стохастических систем* (М.: Физматлит, 2002)
32. Малахов А Н, Саичев А И *Изв. вузов. Радиофиз.* **22** 1324 (1979)
33. Кляцкин В И, Саичев А И *ЖЭТФ* **111** 1297 (1997)
34. Кляцкин В И, Гурарий Д *УФН* **169** 171 (1999)
35. Кляцкин В И *Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана* **36** 177 (2000); *УФН* **173** 689 (2003)
36. Гурвич А С, Каллистратова М А, Мартвель Ф Е *Изв. вузов. Радиофиз.* **20** 1020 (1977)
37. Flatté S M, Wang G-Y, Martin J J. *Opt. Soc. Am. A* **10** 2363 (1993)
38. Flatté S M, Bracher C, Wang G-Y. *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 2080 (1994)
39. Саичев А И, Славинский М М *Изв. вузов. Радиофиз.* **28** 75 (1985)
40. Вировлянский А Л, Саичев А И, Славинский М М *Изв. вузов. Радиофиз.* **28** 1149 (1985)
41. Furutsu K J. *Res. NBS D: Rad. Sci.* **67** 303 (1963)
42. Новиков Е А *ЖЭТФ* **47** 1919 (1964)
43. Donsker M D, in *Proc. of the Conf. on Theory and Applications of Analysis in Functional Space* (Boston, Mass.: M.I.T. Press, 1964) p. 17 [*Математика* **11** 128 (1967)]
44. Бункин Ф В, Гочелашвили К С *Изв. вузов. Радиофиз.* **11** 1864 (1968); **12** 875 (1969)

Electromagnetic wave propagation in a randomly inhomogeneous medium as a problem in mathematical statistical physics

V.I. Klyatskin

A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per. 3, 119017 Moscow, Russian Federation

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Russian Academy of Sciences (Far East Division), Baltiiskaya ul. 43, 690041 Vladivostok, Russian Federation

Tel. (7-095) 269-1283

E-mail: klyatskin@yandex.ru

The major stages of how mathematical statistical physics has been used, in the last fifty years, to describe random medium electromagnetic wave (light) propagation are outlined. The statistical description is discussed either in terms of the scalar parabolic equation (quasi-optical approximation) — when the governing parameters are needed; or by writing its functional integral solution — if the caustic structure of the wave field is to be analyzed.

PACS numbers: 02.50.Ey, 41.20.Jb, 42.25.Dd

Bibliography — 44 references

Received 4 June 2003