

БИБЛИОГРАФИЯ

Что такое математическая физика?

В.И. Арнольд

PACS number: 01.30.Vv

Математическая физика. Энциклопедия. (Под ред. Л.Д. Фаддеева) (М.: Большая Российская энциклопедия, 1998) 692 с. ISBN 5-85270-304-4.

Я узнал много нового из выпущенной издательством "Большая российская энциклопедия" однотомной энциклопедии "Математическая физика".

На с. 237 касательный вектор к многообразию определен так:

это линейный функционал (оператор), сопоставляющий каждой дифференцируемой функции f вектор $v(f)$, удовлетворяющий условиям

$$v(f+h) = v(f) + v(h), \quad v(cf) = c \cdot v(f),$$

$$v(fh) = f \cdot v(h) + h \cdot v(f).$$

Редактор должен бы был воспротивиться смешению операторов с функционалами, даже и не понимая, что речь на самом деле не идет ни об операторе, ни о функционале и что автор называет вектором $v(f)$ то, что на самом деле — просто число (если исправить сейчас ошибочное определение). По-видимому, до меня это определение никто не прочитал. На самом деле касательный вектор к многообразию — это вектор скорости движения вдоль многообразия.

У меня создалось впечатление, что это новаторское безграмотное определение касательного вектора не случайная опечатка, поскольку на следующих страницах я нашел подобные нелепости во многих статьях энциклопедии (и даже в большинстве статей, которые мне удалось прочесть).

На с. 264 имеется такое определение.

Кватернион — это элемент множества \mathbb{H} комбинаций (в статье не определенных) $1, i, j, k$, удовлетворяющих условиям $ji = -j = k$.

Для рядового читателя вроде меня равенство нулю вектора k , противоположного здесь самому себе, очевидно. Гамильтон понимал k иначе, когда изобретал его. В отличие от Гамильтона, описывавшего вращения трехмерного пространства, автор статьи в энциклопедии считает кватернионы формальными символами, а они терпеливо сносят любые аксиомы.

Но и многие другие определения в книге не лучше. На с. 328 унитарность определяется формулой

$$\sum_k u_{ik} u_{ik}^* = \delta_{ij}.$$

Читателю не сообщают, ни что такое символ $*$, ни что такое индекс j , взявшийся откуда-то в правой части.

Читатель, не знающий, что такое унитарность, сохранит свое незнание и прочитав "определение" в этой энциклопедии. Я надеюсь, что реальные читатели на самом деле знакомы с настоящим определением.

Но, заменяя простые идеи (вроде сохранения оператором эрмитова скалярного произведения) сложными формулами, нельзя допускать никаких опечаток, так как для читателя формализованного текста они становятся непреодолимыми препятствиями.

Недостающие кванторы¹ ("для любого i " в предыдущей формуле) создают для читателя такие же трудности.

На с. 679 сказано, будто "энтропией называется полный дифференциал функции состояния". Я был поражен (считая вслед за Гиббсом саму энтропию не дифференциалом, а функцией состояния), но новая энциклопедия вводит новую терминологию.

Линейные неоднородные дифференциальные операторы названы в этой энциклопедии нелинейными. Например, нелинейным считается на с. 193 оператор, отображающий функцию u в функцию $du/dx + 1$: там сказано, будто линейные дифференциальные выражения линейны по отношению к производным функции u , а все остальные выражения называются нелинейными. Этот новый принцип позволяет осуществить огромный и быстрый прогресс в нелинейной математике и физике (достаточно просто использовать формулу суперпозиции возмущений).

Некоторые статьи в энциклопедии говорят о важных фактах так, что понять ничего невозможно. Например, на с. 336: "Пенроуз явно описал неметрические структуры на T_0 , непересекающихся l_∞ ". Понять невозможно хотя бы потому, что автор забыл сообщить, кто не пересекает l_∞ (ни T_0 , ни l_∞ не определялись и не упоминались ранее). Эта ситуация подтвердила мое впечатление, что до меня энциклопедию никто не читал.

Неподалеку от описанного выше места автор упоминает таинственную группу "SL проективных преобразований". Я всегда считал входящие в SL преобразования линейными, а не проективными, тщательно различая группы SL и PSL (следуя примеру Бурбаки), но новая энциклопедия приучает к новой терминологии (алогичной и путающей).

Статья о вращениях твердого тела (на с. 593) сообщает, будто "главный вопрос знаменитой работы С.В. Ковалевской был поставлен и решен Пуанкаре". Жалко, что автор не указал даты: сделал ли это Пуанкаре до С.В. Ковалевской или после. Пуанкаре, во всяком случае, ничего не сказал о своей работе на эту тему, награждая Ковалевскую премией за ее открытие.

На самом деле вопрос был поставлен Вейерштрассом, который предложил своей ученице Ковалевской доказать (методом Пуанкаре) отсутствие новых случаев интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела. Ковалевская опровергла эту идею учителя, открыв новый случай интегрируемости (где метод Пуанкаре как раз не работает). В последнее время ряд московских математиков подтвердил

В.И. Арнольд. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991 Москва, ул. Губкина 8, Российская Федерация
Тел. (095) 938-39-80
Факс (095) 135-05-55

Статья поступила 11 октября 2004 г.

¹ Кванторы — это выражения "существует" и "для всякого". Например, утверждение " $f(x)$ положительно" (без кванторов) является неточным сокращением одного из точных утверждений "существует такое x , что $f(x) > 0$ " и "для всякого x величина $f(x)$ положительна", и без кванторов нельзя угадать, которое из двух имеется в виду. — (Примеч. редактора.)

отсутствие новых (сверх случая Ковалевской) случаев интегрируемости, используя идею Вейерштрасса.

Пуанкаре доказал до этого (в замечательной статье о небесной механике) "неинтегрируемость" задачи трех тел (в ошибочной премированной работе, премию за которую он потратил на то, чтобы заменить ошибочную статью в журнале *Acta Mathematica* исправленным вариантом, выросшим позже в "Новые методы небесной механики").

Вся эта область (включая обсуждение влияния работы Пуанкаре на открытие Ковалевской) была недавно изучена и развита рядом московских математиков, но в статье в энциклопедии необходимая здесь ссылка на современное состояние вопроса отсутствует.

Кстати, *метод Линдштедта*, разработанный Пуанкаре, назван в энциклопедии (на с. 327 и с. 626) методом Линштейна. Линдштедт не был ни москвичом, ни математиком. Но авторы энциклопедии все равно (по непонятным мне причинам) дискриминируют этого замечательного шведского астронома, предвосхитившего "метод усреднения Боголюбова" на много десятков лет. Пуанкаре перенес теорию Линдштедта с общего случая на случай уравнений Гамильтона, а Боголюбов перенес теорию Пуанкаре со случая уравнений Гамильтона на общий случай.

Неожиданные нововведения, подобные перечисленным выше, нередки в энциклопедии, зато некоторые самые важные вопросы математической физики пропущены; простое содержание ряда фундаментальных фактов в лучшем случае заменено длинными списками их следствий и тождеств, основанных на пропущенных теориях (подобно описанной выше попытке обсуждать унитарность матрицы, не упоминая о сохранении оператором эрмитовой структуры).

На с. 223 понятие *линейного оператора* вводится для начинающих словами: "матрица K_{ij} отображает вектор x_j в вектор $y_i = K_{ij}x_j$ ". Эта таинственная фраза не причинит, конечно, зла тому, кто уже знаком с матрицами операторов. Но *понять* из нее, что называется матрицей оператора, не сумеет никто, не знающий этого заранее. Автор статьи не упомянул, что он пользуется соглашением Эйнштейна о суммировании i , по-видимому, не подозревая, что y_i это не вектор, а число (компонента вектора).

Я упомяну только небольшое число примеров *главнейших понятий математической физики*, пропущенных в энциклопедии (вместо них энциклопедия переполнена мелкими деталями менее важных объектов, а, впрочем, действительно важные черные дыры оказались заглавием семи разных статей).

В разделе о дифференциальных уравнениях с частными производными (на с. 193) полностью забыты *характеристики* (а с ними и *двойственность волна-частица*, основанная на них). Отсутствует здесь и ссылка на статью "контактная геометрия" из этой же энциклопедии, в которой (должным образом) описаны эти важные объекты геометрии лучей и волновых фронтов.

Авторы позабыли и о *вектор-потенциале магнитного поля*, и о его экспериментальном наблюдении в (также забытом) эффекте *Ааронова–Бома*, фундаментальном для понимания философских основ принципов квантовой механики. Вместо этого авторы статьи в энциклопедии пишут, будто "*вектор-потенциал магнитного поля является ненаблюдаемой математической абстракцией*", что, как известно, неверно и опровергнуто упомянутыми выше экспериментами. Это старомодное заблуждение авторов энциклопедии подчеркивает абсолютную необходимость обсуждения эффекта Ааронова–Бома в энциклопедии "Математическая физика".

Станным пробелом в энциклопедии является полное отсутствие *вариационной теории собственных чисел*, включая фундаментальные *неравенства Рэлея–Фишера–Куранта*, описывающие поведение собственных частот колебательных систем при увеличении их жесткости и при наложении связей.

Отсутствует и *теорема Вигнера–фон Неймана об оттапливании собственных чисел* (да и вся важная *теория расщепления собственных чисел случайных матриц*).

Вместо этого читатель встретит (на с. 552) неверное утверждение, будто "*комплексная $n \times n$ -матрица всегда имеет*

ровно n комплексных собственных векторов" (причем автор требует здесь зачем-то еще и отличие определителя матрицы от нуля).

Подобная безграмотность не позволила бы студенту закончить второй курс университета, и ее нельзя допускать даже в статьях энциклопедий. Она показывает *абсолютную необходимость в энциклопедии "Математическая физика" статьи о жордановых нормальных формах матриц* (которые сейчас упомянуты в статье о системах Гамильтона без определения).

Фундаментальные *теория Штурма* и *теория колеблемости* решений дифференциальных уравнений полностью отсутствуют в энциклопедии, хотя *настоящая математическая физика без этих теорий невозможна*.

У меня создалось впечатление, что авторы нарочно избегают описывать основные объекты и теории, восполняя это обильным цитированием менее важных эпигонских работ.

Авторы статей широко используют не определенные ими термины (например, "*C*-алгебры*" или "*девиаторы тензоров*"), но, к сожалению, забыли определить и самые нужные объекты, например, *диаграммы Юнга* (отсутствующие вместе с основанной на них *теорией представлений симметрических групп*).

Число сплетения двух представлений группы определено (на с. 567) как размерность пространства сплетающих операторов из одного представления в другое, но определение этих сплетающих операторов остается тайной.

Ни *показатель преломления*, ни *закон преломления Снелла*, ни *оптический вариационный принцип Ферма* (каковые, безусловно, заслуживают трех отдельных статей в энциклопедии "Математическая физика") — ни один из этих трех фундаментальных объектов сейчас в энциклопедии не обсуждается. Нет и *теории трансформации волн* (объясняющей образование волн нового типа при появлении кратного корня у дисперсионного соотношения и необходимой как в физике плазмы, так и в сейсмологии и геофизике).

Явление Гиббса забыто вместе со своими томографическими приложениями (где это явление объясняет замечательные артефакты, показывающие на компьютерных томографических разрезах тела не существующие в нем линии, объясняемые плохой сходимостью использованного компьютером ряда Фурье на граничных контурах изображений костей). Описывая "*векторный анализ*", авторы энциклопедии позабыли упомянуть его *основную формулу гомотопии*

$$L = id + di,$$

выражающую производную Ли L , называемую также производной рыбака², которая гораздо важнее, чем "ковариантная производная", но также позабыта в энциклопедии.

Забытые в энциклопедии основные понятия включают *гомологии* и *гомотопии*, *ориентации многообразий* и *характеристические классы расслоений*, *лист Мёбиуса* и многое другое, без чего современная математическая физика непонятна.

Числа Черна правильно использованы в физической статье о "топологических зарядах", но их определение в энциклопедии не попало, как и определения также фундаментальных в современной математической физике *узлов*, *коэффициентов зацепления*, *кобордизмов* и т.п.

Отсутствие всех этих фундаментальных идей и понятий в энциклопедии может создать у читателей превратное представление, будто уровень математической физики в России столь же убог, как представленный в энциклопедии. К счастью, это пока еще не так.

А. Н. Колмогоров выучился математическому анализу, читая статьи о нем в энциклопедии Брокгауза и Эфрона. Понять математическую физику, читая рецензируемую энциклопедию "Математическая физика" не смог бы никакой гений.

² Производная Ли (по направлению векторного поля) — это производная по времени от тензорного поля, пронесимого фазовым потоком этого поля мимо неподвижного наблюдателя ("рыбака").