

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Двухчастотный маятник на вращающейся платформе: моделирование оптических явлений

Б.Я. Зельдович, М.Дж. Суало

Преподавание оптики может быть подкреплено использованием аналогий с поведением двухчастотного маятника. В заметке описываются демонстрации, адресованные четырем группам, различающимся возрастом и образованием: от младших школьников до выпускников средней школы; от школьников 7–10 классов до третьекурсников вузов; от первокурсников до аспирантов по специальностям "Физика", "Оптика", "Техника"; от старшекурсников вузов до научных работников. Основное различие между целевыми группами авторы видят в уровне математической подготовки, требуемой для привязки демонстраций к оптическим явлениям. Большинство физических идей могут быть поняты и оценены на уровне школьников 6–8 классов и стимулируют интерес к изучению математики и физики.

PACS numbers: 01.50. – i, 42.25. – p, 42.65. – k

Содержание

1. Введение (1337).
2. Устройство (1338).
3. Первый уровень: от младших школьников до выпускников средней школы (1338).
 - 3.1. Принцип суперпозиции как следствие постоянства периода.
 - 3.2. Резонанс.
 - 3.3. Поляризация.
 - 3.4. Зависимость периода колебаний T от длины маятника L .
 - 3.5. Биения в двухчастотном маятнике.
 - 3.6. Цвета деформированной пластмассы, помещенной между скрещенными поляризаторами.
4. Второй уровень: от 7-го класса школы до 3-го курса вуза (1340).
 - 4.1. Измерение и вычисление периода биений T_B .
 - 4.2. Фигуры Лиссажу, маятник Фуко и одноосные кристаллы.
 - 4.3. Сохранение направления поляризации при быстром повороте платформы.
 - 4.4. Адиабатическое следование.
 - 4.5. Как работает жидкокристаллический дисплей.
 - 4.6. Понятия несущей и огибающей.
5. Третий уровень: от 3-го курса вуза до последнего года аспирантуры (1343).
 - 5.1. Резонансная кривая и сдвиг фазы при перестройке частоты возбуждающей силы.
 - 5.2. Нарушение принципа суперпозиции и нелинейная самопрецессия эллипса.
 - 5.3. Вращательный эффект Доплера.
 - 5.4. Магнито-оптическое вращение поляризации.
 - 5.5. Параметрический резонанс.
6. Четвертый уровень: от старшекурсников вузов до научных работников (1345).

- 6.1. Устройство для моделирования электромагнитно индуцированной прозрачности и математика связанных осцилляторов с затуханием.
 - 6.2. Противоречащее интуиции движение, моделирующее ЭИП.
 - 6.3. Второй закон Ньютона для системы, моделирующей ЭИП.
 - 6.4. Нулевая поляризуемость и полное подавление скалярного рассеяния света.
 - 6.5. Нулевая поляризуемость и электростатически индуцированная прозрачность.
 - 6.6. Электромагнитно индуцированная прозрачность: спектральный подход.
 - 6.7. Почему теперь, а не в 1920-х?
 - 6.8. Несущая и огибающая, x/y -биения и спин $1/2$ в квантовой механике.
 - 6.9. Электромагнитно индуцированная прозрачность: временной подход.
 - 6.10. Теорема Вигнера – фон Неймана о непересечении уровней.
 - 6.11. Нелинейная самопрецессия эллипса: количественное рассмотрение.
 - 6.12. Генерация второй гармоники.
7. Заключение (1353).
 8. Приложения (1353).
 - 8.1. Фигуры Лиссажу и маятник Фуко (к разделу 4.2).
 - 8.2. Приложение к разделу 4.2.
 - 8.3. Адиабатическое/неадиабатическое следование (к разделу 4.4).

Список литературы (1354).

1. Введение

Преподавание различных оптических явлений и объяснение их связи с физикой и техникой — трудная и в то же время благодарная задача. Наряду с большим числом замечательных учебников вузовского уровня [1–5] имеются многочисленные книги с обсуждениями на популярном уровне оптических явлений в природе и в рукотворных устройствах [6–10]. Аналогия с механическим движением помогает лучше понять фундаментальные идеи как в оптике, так и в механике.

Широко используемая механическая демонстрация — распространение поперечных волн вдоль веревки или струны, растянутых с определенной силой; см., например, [6, с. 18]. Качественное наблюдение волнового

Б.Я. Зельдович, М.Дж. Суало. University of Central Florida, College of Optics and Photonics/CREOL, 4000 Central Florida Blvd, Orlando, FL 32816-2700, USA
Tel. (407) 823-68-31, (407) 823-55-38
Fax (407) 823-68-80
E-mail: boris@creol.ucf.edu, mj@mail.ucf.edu

Статья поступила 2 апреля 2004 г.,
после доработки 8 августа 2004 г.

движения сопровождается демонстрацией поперечного характера волн как механических (в данном случае), так и световых. Последнее хорошо иллюстрируется прохождением света через поляризационные насадки для очков; этот опыт хорошо воспринимается даже на уровне детского сада, а необходимые для него реквизиты сравнительно недороги. Количественные измерения скорости распространения волн на веревке и зависимости скорости от натяжения вполне доступны школьникам; особенно удобны измерения времени пробега с многократными отражениями от жестких границ.

Данная статья посвящена описанию другого устройства: двухчастотного маятника. Этот простой и весьма универсальный прибор можно использовать для демонстрации механических движений и их аналогов в оптике для аудитории самых разных уровней: от младших школьников до научных работников.

2. Устройство

Предмет нашего рассмотрения — маятник, который может колебаться в двух направлениях (x и y — в последующем изложении). Колебания в направлениях x и y по большей части будут иллюстрировать поляризационные направления колебаний в световой волне.

Маятник с единственной точкой подвеса обладает идентичными периодами для колебаний в обоих направлениях, x и y ; следовательно, тот же период будет и для любой суперпозиции этих колебаний. Рассматриваемые ниже опыты основаны на том, что представленная на рис. 1 конструкция отвечает несколько разным длинам от груза до эффективной точки подвески: $L_x < L_y$ для малых колебаний в направлениях x и y . Маятник, подвешенный к двум гвоздям, вбитым в дверную раму (рис. 1а), весьма удобен для тех опытов, которые не требуют вращения платформы. Типичная длина шнура от 1 до 2 м соответствует периоду колебаний $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$ от 2 до 3 с, что вполне удобно для измерений. Малое изменение эффективной длины на n процентов ведет к изменению периода на $n/2$ процентов. Поэтому разница длин $L_y - L_x$ порядка 0,1 м приводит для 1-метрового маятника к разности частот $f_x - f_y = (1/T_x) - (1/T_y)$ порядка 0,025 Гц. Это дает период биений около 40 с, предоставляя достаточно времени

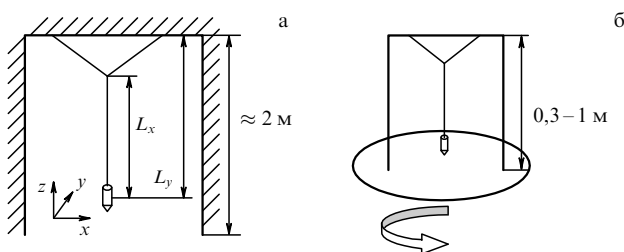


Рис. 1. Двухчастотный маятник. (а) Сравнительно тяжелый строительный отвес $\sim 140 - 230$ г (5–8 унций) обеспечивал довольно малое затухание. Дверной проем с двумя гвоздями, вбитыми в верхнюю поперечину, служит отличным подвесом. (б) Поднос для пиццы с подшипником внизу (традиционное американское название — "ленивая Сюзанна") диаметром около 50 см хорош в качестве вращающейся платформы. Мы обычно использовали $L_x \approx L_y \approx 1$ м, $L_x - L_y \approx 0,1$ м, так что $T_0 \approx 2$ с, $T_{\text{биений}} \approx 40$ с. Модели с меньшей массой груза и с высотой $L \sim 0,3$ м тоже работали, хотя затухание иногда оставляло желать лучшего.

для наблюдения постепенной смены "состояний поляризации" (см. ниже). Строительный отвес в качестве груза хорош тем, что позволяет закрепить шнурок точно по оси симметрии, а сравнительно большой вес от 140 до 230 г обеспечивает достаточно слабое затухание. Круглый деревянный поднос диаметром около 55 см с подшипником внизу, традиционно называемый в США "ленивая Сюзанна", оказался очень удобным в качестве вращающейся платформы. Железные водопроводные трубы (1/2 дюйма) с уголковыми или Т-образными сочленениями служили сборно-разборной рамой. К основанию труб привинчивались фланцы большего диаметра, которые в свою очередь жестко крепились винтами к платформе. Трубы высотой около 1 м можно жестко свинчивать из двух полуметровых труб, что дополнительно облегчало перевозку. Мы использовали также модели меньшего размера с длиной $L \approx 0,3$ м на основе вращающегося диска "Здоровье" советского производства. Такие модели легче перевозить, но затухание было сильнее желаемого.

Мы демонстрировали возбуждение колебаний маятника внешней силой, используя микровентиляторы (исходно предназначенные для охлаждения микросхем); направление и частота приложенной силы легко и точно регулировались. Подводимое к вентиляторам напряжение — от 12 до 26 В, а ток управлялся с помощью транзистора (мы использовали MOSFET Radio Shack's IFR-510). Слаботочный управляющий сигнал отпирал и запирал прохождение тока между истоком и стоком транзистора; напряжение сигнала порядка нескольких вольт прикладывалось между базой и коллектором. Источником строго периодического сигнала мог служить генератор стандартных сигналов. В последующей практике мы целиком перешли на использование управляющего сигнала, генерируемого компьютером через стандартную (и, следовательно, не требующую дополнительных затрат) звуковую карту. В конкретном воплощении этого подхода использовалась специальная программа "Square pulse" [11], позволявшая получать на выходе звуковой карты прямоугольные импульсы переменного напряжения с огибающей порядка 1,5 В. Мостиковая схема с удвоением напряжения выпрямляла этот сигнал переменного тока. При использовании дополнительного смещения 3 В от батареи вся схема обеспечивала стабильное управление периодическим потоком воздуха от вентиляторов. Два маленьких вентилятора позволяли получить более быстрый отклик на меняющийся ток, нежели один большой, что существенно в нашем случае, так как частота прикладываемой силы составляла 0,5 Гц и выше.

Последующие разделы статьи посвящены описанию различных демонстраций с маятником и тому, какие оптические явления ими иллюстрируются.

3. Первый уровень: от младших школьников до выпускников средней школы

3.1. Принцип суперпозиции как следствие постоянства периода

Маятник с единой точкой подвеса на неподвижной платформе вполне подходит для ряда важных опытов. Измерим сначала период колебаний 1-метрового маятника для амплитуды 1 см (отклонение от равновесия в

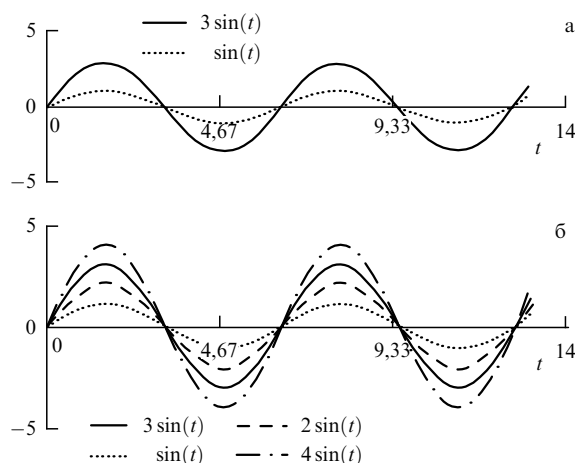


Рис. 2. Иллюстрация принципа суперпозиции. (а) Колебания с амплитудами 1 см и 3 см обладают одним и тем же периодом. Преподавателю следует сделать правдоподобное заключение, что соответствующие графики движения $x_1(t)$ и $x_3(t)$ отличаются лишь вертикальным масштабом (множителем 3). (б) Можно складывать (1 см + 3 см = 4 см), вычитать (3 см – 1 см = 2 см) и умножать на число (1 см $\times$ 3 = 3 см) различные функции $x(t)$, описывающие движения, каждый раз получая при этом тоже возможные функции движения.

одну сторону). Период колебаний составляет около 2 с; точное значение зависит от деталей груза и подвески. Измерение времени 10 или 20 колебаний дает хорошую точность, если начало и конец отсчета соответствуют одной и той же фазе колебаний, а счет начинается с восклицания "нуль" по прошествии одного или двух начальных колебаний. Больше чем 20 число качаний может привести к заметному уменьшению амплитуды, а это противоречит самой цели опыта. Следующий шаг — измерение периода для 3-сантиметрового отклонения. Период и характер движения, будучи представленными приближенным графиком $x(t)$, оказываются теми же, что и для 1-сантиметрового отклонения (рис. 2а). Затем тот же опыт проводится с амплитудами 2 и 4 см (рис. 2б). Преподаватель делает правдоподобный вывод: можно складывать (1 см + 3 см = 4 см), вычитать (3 см – 1 см = 2 см) и умножать на число (1 см $\times$ 3 = 3 см) различные функции движения $x(t)$, каждый раз получая при этом правильные функции возможных движений. Следует объявить слушателям, что тем самым установлен "принцип суперпозиции".

3.2. Резонанс

Попросим ученика отклонить маятник, дуя на него с постоянной силой. Маятник довольно тяжел, от 150 до 250 г, и поэтому отклонение весьма мало. Следующий шаг — спросить учеников, могут ли они придумать, как добиться большего отклонения. Довольно скоро они приходят к идее дуть "в резонанс". Двое учеников, дующих на маятник по очереди с противоположных сторон, могут раскачать маятник особенно сильно.

3.3. Поляризация

Используя маятник с единой точкой подвеса, учитель может предложить ученикам обобщить принцип суперпозиции на явления, для которых опыты еще не были проведены: например, суперпозиция x - и y -колебаний с одинаковыми амплитудами. Складывая $x(t)$ и $y(t)$ "в фазе", получим "(+45°)-поляризацию". Складывая $x(t)$

и $y(t)$ в противофазе, т.е. со сдвигом фаз 180°, получим "(-45°)-поляризацию". Задержка по времени на $+T/4$ или $-T/4$ между исходными $x(t)$ и $y(t)$ приводит к правой круговой и левой круговой поляризациям. Эллиптические поляризации с разнообразными количественными параметрами составляют естественное обобщение этих наблюдений.

Занятия с поляризаторами доставляют массу удовольствия, они обязательно должны сопровождать механические опыты с маятником и волнами на веревке или струне. В США большие листы поляризационной пленки можно недорого купить (например, через *Edmund Scientific*) и затем разрезать для использования пары поляризаторов каждым учеником. Хороши также поляризационные очки или поляризационные насадки для очков, стоимостью в США около 10 долларов. Комбинация поляризационных очков (или насадок) и второго поляризатора в одной руке особенно удобна, поскольку в этом случае вторая рука держит объект, и две руки позволяют вращать как объект между поляризаторами, так и "выходной" поляризатор. Голубое свечение неба и зеркальные отражения от диэлектрических поверхностей (не обязательно от прозрачных) являются естественными источниками поляризованного света (явление Брюстера). Последнее следует сравнить с отражением от металла, с диффузным отражением и с белым светом, идущим от облаков, — все эти источники дают неполяризованный свет.

3.4. Зависимость периода колебаний T от длины маятника L

Вполне традиционные (однако важные) опыты — измерения зависимости периода колебаний T от длины маятника L . Качественный характер этой зависимости и рост периода с увеличением длины легко наблюдается и понимается уже на уровне детского сада. График зависимости квадрата периода, T^2 , от длины L должен давать прямую линию; это позволяет оценить погрешности опытов.

После вводного экскурса в предмет и развлечений с одноподвесным маятником возвратимся к двухчастотному маятнику.

3.5. Биения в двухчастотном маятнике

Основополагающий опыт: возбудим колебания маятника в направлении +45°. Относительная задержка фазы между y - и x -колебаниями медленно нарастает. Когда она достигает $\pi/2$, наблюдается "поляризованное по кругу" движение. Эволюция движения к этому моменту аналогична действию четвертьволновой пластинки на монохроматическую световую волну. Когда задержка фазы достигнет π , наблюдаются колебания, аналогичные свету с поляризацией -45°; это эквивалентно действию полуволновой пластинки в оптике. Процесс развивается и дальше, проходя через стадии эллиптической поляризации к круговому движению противоположного знака при сдвиге фаз $3\pi/2$. Полный период биений T_B знаменуется возвращением к исходному "(+45°)-му движению". Эффект хорошо наблюдается, когда период биений T_B существенно длиннее (от 30 до 50 раз), чем период T колебаний маятника. В таких условиях легче оценить красоты "мгновенного вида" состояния поляризации, как если бы оно переходило от одной дискретной стадии к другой (рис. 3).

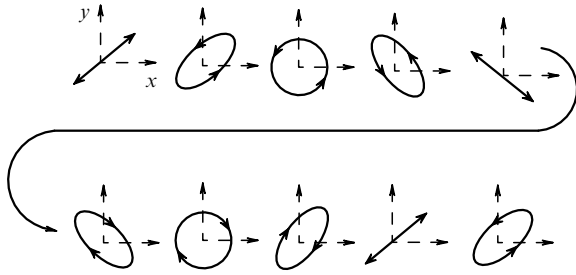


Рис. 3. Последовательность картин двумерного движения двухчастотного маятника. Мы представили "мгновенный вид" состояния поляризации, как если бы это состояние дискретно переходило из одной стадии в другую (реальный переход, разумеется, непрерывен). Верхняя левая картина отвечает начальному состоянию $x(t=0) = y(t=0) = a$, $dx/dt|_0 = dy/dt|_0 = 0$, т.е. линейной поляризации в направлении $+45^\circ$, т.е. с нулевой разностью фаз x - и y -колебаний. Каждая следующая картина отвечает приращению разности фаз на $\pi/4$, так что последняя стадия (нижняя правая картина) отвечает разности фаз $2\pi + \pi/4$.

3.6. Цвета деформированной пластмассы, помещенной между скрещенными поляризаторами

Для этой демонстрации требуется кусок пластмассы, в которой сильная оптическая анизотропия была наведена либо в процессе горячего прессования при изготовлении, либо приложением изгибающей силы. Коробочка от магнитофонной кассеты или прозрачная пластмассовая линейка обычно имеют подходящую анизотропию. Поместим этот кусок пластмассы между скрещенными поляризаторами. Лучший способ наблюдать результирующие цветные картины (как правило, очень красивые и причудливые) — смотреть на пространственно-протяженный источник белого света, например, на белый потолок или на белую флюоресцентную лампу с рассеивателем. Следует не пожалеть времени на рассмотрение получающихся цветных картин при независимых изменениях ориентации как куска пластмассы, так и поляризатора. Использование голубого света неба в качестве довольно хорошо поляризованного источника освежает знание свойств рэлеевского рассеяния (хотя и лишает радости восприятия цветовой гаммы); в этом случае достаточно одного поляризатора. Другой широко доступный источник поляризованного света — френелевское отражение от диэлектрика (стекла, глянцевой бумаги или краски, линолеума и т.п.).

Учителю следует остановиться на временной задержке одной поляризационной компоненты по отношению к другой. Эта задержка практически одна и та же для всех цветов видимого диапазона, поскольку дисперсия незначительна. Однако одна и та же задержка времени составляет различные доли периода оптических колебаний для разных длин волн, в чем и состоит объяснение симпатичных цветных картин.

4. Второй уровень: от 7-го класса школы до 3-го курса вуза

4.1. Измерение и вычисление периода биений T_B

Сначала нужно измерить периоды x - и y -колебаний по отдельности, и притом с наилучшей возможной точностью. Использование большого числа периодов (почти до полной остановки маятника) здесь вполне

уместно, поскольку факт изохронизма малых колебаний уже был установлен. Важное напоминание: проверьте, что пуск секундомера сопровождается восклицанием "нуль" (а не "один", как это обычно делается при счете). Следующий шаг — измерение периода биений T_B , т.е. времени, через которое поляризация возвращается к исходному состоянию.

Вот рассуждения, которые будут понятны даже ученикам, наименее склонным к математике. Один лишний период совершается x -колебаниями по сравнению с y -колебаниями за период биений T_B :

$$T_B = NT_y = (N+1)T_x.$$

Следовательно,

$$N(T_y - T_x) = T_x$$

и, следовательно,

$$T_B = \frac{T_x T_y}{T_y - T_x}.$$

Это означает, что частота биений f_0 равна

$$f_B = \frac{1}{T_B} = f_x - f_y.$$

Важная часть всего этого упражнения — сравнить измеренный период биений со значением, получаемым из приведенных выше вычислений. Стоит также обсудить формулу

$$T_B \approx \frac{T_0^2}{T_y - T_x}.$$

Любая другая формула, претендующая на лучшую точность, бессмысленна, поскольку T_B не имеет четкого экспериментального определения для несоизмеримых периодов T_x и T_y ¹.

Следует также объяснить ученикам, какие измерения нужно делать с наилучшей точностью, а для каких требования на точность можно и ослабить. Значения эффективной длины для x - и y -колебаний по отдельности невозможно измерить точно: положение центра тяжести отвеса, во-первых, трудно угадать без специальных опытов, и, во-вторых, оно не прямо связано с периодом колебаний (нужно вычислить момент инерции и т.п.). Напротив, малая разность ΔL между L_y и L_x может и должна быть измерена с хорошей точностью.

4.2. Фигуры Лиссажу, маятник Фуко и одноосные кристаллы

Старшие участники во время демонстрационных опытов часто заявляют: "О, это маятник Фуко!", или: "О, это фигуры Лиссажу!" Обратим внимание преподавателя на то, что *оба* эти утверждения неправильны; см. комментарии в приложении 8.1. Кроме того, приложение 8.2 содержит замечание о возможной аналогии свойств оптически одноосного кристалла со свойствами нашего

¹ Говорят, что Л.Д. Ландау мог простить человеку конкретную ошибку в работе, но считал "превышение точности" (т.е. учет не всех членов данного порядка малости) смертным грехом.

двухчастотного маятника. Эта последняя аналогия, однако, чисто зрительная, без сходства уравнений.

Последующие разделы 4.3 и 4.4 посвящены двум механическим опытам, нацеленным на объяснение того, как работает жидкокристаллический дисплей.

4.3. Сохранение направления поляризации при быстром повороте платформы

Этот опыт следует начать, например, с чистой y (низкочастотной) моды. Быстрый поворот платформы на 90° сохраняет поляризацию неизменной "в абсолютном пространстве", и, таким образом, движение переключается на высокочастотную моду: на x -моду с точки зрения наблюдателя на платформе. Такое поведение в литературе называют "антиадиабатическим". Сохранение поляризации "в абсолютном пространстве" имеет место и при быстром повороте на произвольный угол, но тогда результирующее движение сопровождается биениями, типичными для суперпозиции мод и проиллюстрированными на рис. 3.

4.4. Адиабатическое следование

Теперь следует начать медленное вращение платформы: медленнее чем на 90° за время, равное периоду биений. Здесь аудиторию ждет неожиданный результат, а именно исходная линейная поляризация остается линейной, или, иначе говоря, *следует адиабатически* за текущей ориентацией платформы. Заметим, что здесь нужно отвергнуть какие-либо воспоминания учителей и учеников, связанные с использованием термина "адиабатический" в молекулярной физике. Тот же результат демонстрируется и в поведении другого собственного линейно-поляризованного колебания (моды). Плавное начало и окончание вращения важны для успеха демонстрации. В процессе вращения поляризация становится слегка эллиптической, но под конец восстанавливается до своего исходного линейного состояния, до исходной собственной моды.

Дополнительные опыты помогают подготовить аудиторию к пониманию режима адиабатического следования. Начнем с линейно-поляризованного (например, низкочастотного) собственного y -колебания и быстро повернем платформу на небольшой угол (например, 15°). Демонстратору следует обратить внимание аудитории на то, что в результате слегка возбудилась другая мода (x). Это возбуждение, даже будучи слабым, ясно проявляется возникновением эллиптического движения, проиллюстрированного ранее рис. 3. Снова запустим чистую собственную y -моду в этом новом положении платформы и снова быстро повернем ее на такой же, как и ранее, угол с тем же результатом.

Адиабатическое следование может быть понято на основе нижеследующих рассуждений, которые, являясь научно правильными, могут в то же время быть понятными на самых низких уровнях знания математики. В процессе медленного вращения платформы наше устройство непрерывно пытается возбудить чужую моду (см. выше). Оно пытается возбудить высокочастотную моду, используя для этой цели низкочастотную силу имеющихся в наличии колебаний. Однако мы уже убедились (см. опыт в разделе 3.2), что возбуждение вне резонанса неэффективно. Поэтому-то чужая мода и не возбуждается сколько-нибудь сильно. Этот момент нелегок для понимания, и требуется время для того, чтобы "пере-

варить" сказанное. На самом деле можно установить однозначное соответствие между этим вроде бы примитивным объяснением и приближением для медленно меняющейся огибающей решения уравнений Максвелла в закрученной анизотропной среде (укороченными уравнениями — по терминологии, которую Б.Я.З. перенял от своих неформальных учителей Р.В. Хохлова и С.А. Ахманова). Поэтому мы считаем важным освоение этого объяснения учащимися; оно вводит общее понятие адиабатического следования.

Еще один опыт с маятником важен для объяснения того, как работает жидкокристаллический дисплей. Сильно потянув пару поддерживающих маятник нитей в противоположные стороны, демонстратор превращает маятник в устройство с единой точкой подвеса. По симметрии эта точка подвеса оказывается на оси платформы. Тогда вращение платформы, будь оно быстрым или медленным, не влияет на колебания маятника в "абсолютной" (т.е. лабораторной) системе координат. Объяснение этому с точки зрения наблюдателя, вращающегося вместе с платформой, таково: у маятника с единой точкой подвеса обе моды имеют идентичные частоты, т.е. вырождены; поэтому возбуждение чужой моды (кстати сказать, за счет силы Кориолиса) всегда в резонансе.

Приложение 8.3 содержит житейскую аналогию для описания качественной разницы адиабатического и антиадиабатического режимов. Эта аналогия, однако, не основана на похожести уравнений, описывающих явления.

4.5. Как работает жидкокристаллический дисплей

Переход от режима адиабатического следования к режиму сохранения плоскости движения для маятника помогает объяснить принцип действия жидкокристаллических (ЖК) дисплеев, используемых в часах, калькуляторах и во множестве других устройств. Существует обширная литература с превосходным описанием механизма работы ЖК дисплеев; см., например, монографии [12, 13]. Прежде всего следует продемонстрировать наличие у дисплея входного поляризатора, наблюдая дисплей через другой поляризатор, например, через поляризующие солнечные очки. Как оказывается, большинство слушателей воспринимают это с удивлением. Далее следует дать краткое описание нематического жидкого кристалла (НЖК), в котором анизотропные палочкообразные молекулы создают заметное различие скоростей распространения световых волн двух ортогональных линейных поляризаций. Нежесткое поведение ориентации директора НЖК в объеме и технология натирки стенок ячейки (а точнее, тонкого полимерного слоя на стенках) позволяет объяснить устройство ЖК дисплея на скрученном нематике (Twisted Nematic LCD). За этим следует рассказ о втором поляризаторе, работающем в скрещенной с первым позиции и служащим в качестве анализатора. Далее следует упомянуть матированную алюминиевую фольгу, которая отражает свет диффузно в широком угле, но сохраняет поляризацию при отражении. Наконец, следует обсудить плоские миниатюрные электроды, удивительно совмещающие электропроводность с прозрачностью для видимого света.

ЖК дисплей на скрученном нематике работает следующим образом. Когда напряжение на электроды не

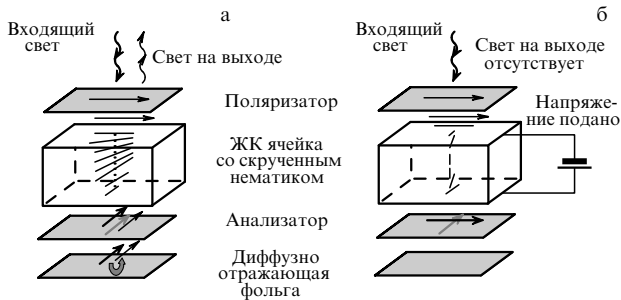


Рис. 4. Как работает дисплей на жидких кристаллах. (а) Входной поляризатор поглощает половину интенсивности падающего света, делая прошедший свет линейно поляризованным. В процессе распространения электрический вектор световой волны адиабатически следует ориентации закрученного нематика. В результате свет проходит через скрещенный со входом анализатор, диффузно (но с сохранением поляризации) отражается алюминиевой фольгой и проходит обратно к наблюдателю. Так формируется светлое поле дисплея. (б) Прикладываемое к прозрачным электродам напряжение приводит к вертикальной, т.е. оптически изотропной, ориентации нематика. В результате распространение не меняет направления вектора поляризации, и скрещенный со входом анализатор поглощает свет. Так формируются черные элементы дисплея.

подано, нематический ЖК, закрученный на 90° , адиабатически поворачивает поляризацию именно на этот угол, пара из скрещенных поляризатора и анализатора пропускает свет туда и обратно, и в результате мы видим "светлое поле" дисплея (рис. 4а). Когда к определенной группе электродов приложено напряжение, электрическое поле в соответствующей части ячейки ориентирует директор НЖК вертикально подобно тому, как растяжение нитей подвеса делает маятник изотропным. В этом случае поляризация не меняется "в абсолютном пространстве" при распространении, и скрещенный анализатор блокирует пропускание света — это темный элемент буквы или цифры (рис. 4б). Обычно в дисплеях используется переменное напряжение, чтобы подавить процессы электролиза на электродах.

Два предельных случая помогают усвоить и запомнить приведенную выше информацию. Если батарейка разрядилась или совсем вынута из устройства, то режим адиабатического следования реализуется по всему полю дисплея, и вся его поверхность "светлая". Если ЖК материал вытек из части ячейки, то соответствующая часть дисплея "темная" за счет действия скрещенных поляризатора и анализатора, независимо от того, есть батарейка или нет.

4.6. Понятия несущей и огибающей

Запуск колебаний в направлении $+45^\circ$ означает возбуждение обеих мод, x и y , с равными амплитудами. Наблюдатель может встать в такую позицию относительно маятника, чтобы видеть только $(+45^\circ)$ -ю проекцию суммарных колебаний. В этом случае сигнал $S_{45}(t)$ равен

$$S_{45}(t) = 0,5A_0 [\cos(2\pi t f_x) + \cos(2\pi t f_y)] \equiv A_0 \cos \left[\frac{2\pi t(f_x - f_y)}{2} \right] \cos \left[\frac{2\pi t(f_x + f_y)}{2} \right]. \quad (1)$$

Первый из сомножителей в выражении (1) соответствует огибающей и описывает биения. Второй сомножи-

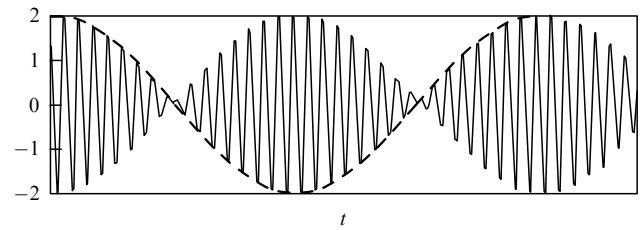


Рис. 5. Биения, наблюдаемые в виде проекции на направление $+45^\circ$. Колебания на несущей частоте умножаются на амплитудную огибающую. Удивительным образом знак огибающей восстанавливается лишь после двух полных циклов биений интенсивности.

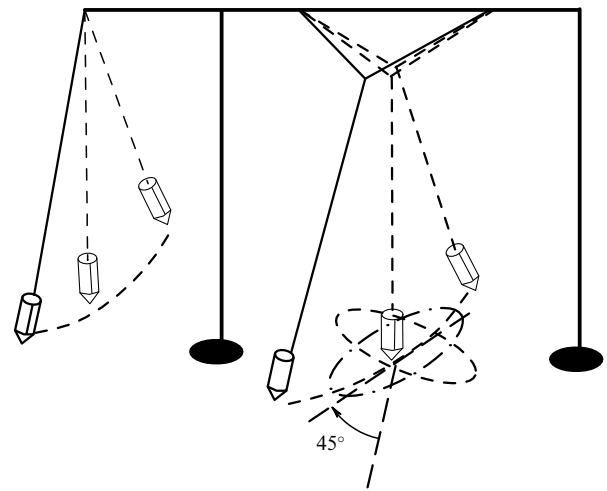


Рис. 6. Визуализация смены знака огибающей. Дополнительный маятник настроен на частоту "несущей", т.е. на арифметическое среднее $(f_x + f_y)/2$ частот колебаний вдоль x и вдоль y .

тель — колебания на частоте несущей. Как уже было объяснено, период биений равен

$$T_B = \frac{1}{f_x - f_y}.$$

Между тем огибающая воспроизводит себя лишь после двух полных циклов биений, $2T_B$ (рис. 5). В то же время интенсивность, т.е. квадрат огибающей, колеблется со стандартным периодом биений T_B . Наблюдатель не различает невооруженным глазом знак огибающей, т.е. фазу несущей. Для выявления этой смены знака следует приделать второй маятник к той же самой раме (рис. 6) и потратить некоторое время на то, чтобы настроить его частоту на частоту несущей, т.е. на среднее арифметическое $(f_x + f_y)/2$. После этого следует запустить оба маятника, и исходный двухчастотный, и вспомогательный, в одном и том же направлении $+45^\circ$ и с одной и той же начальной фазой. Наблюдая исключительно за этой $(+45^\circ)$ -й проекцией, мы обнаруживаем визуально удивительный результат, описываемый довольно прозаической формулой (1): огибающая биений меняет знак после одного цикла биений; знак восстанавливается лишь после двух полных циклов биений.

По крайней мере два явления в физике сопровождаются сменой знака после одного цикла и полным восстановлением после двух циклов (они обсуждаются в разделах 6.8 и 6.9).

5. Третий уровень: от 3-го курса вуза до последнего года аспирантуры

5.1. Резонансная кривая и сдвиг фазы при перестройке частоты возбуждающей силы

Запишем уравнение второго закона Ньютона для гармонического осциллятора без трения, собственная частота которого f_0 и к которому приложена монохроматическая внешняя сила $A \cos(2\pi ft)$:

$$m \left[\frac{d^2 x}{dt^2} + (2\pi f_0)^2 x(t) \right] = A \cos(2\pi ft). \quad (2)$$

В общем случае частота f внешней силы не равна собственной частоте осциллятора f_0 . Стационарное состояние и соответствующее ему решение достигаются, если учесть бесконечно слабое трение; однако само решение остается конечным, даже когда затухание стремится к нулю:

$$x(t) = \frac{A}{(2\pi)^2 m} \frac{\cos(2\pi ft)}{f_0^2 - f^2}. \quad (3)$$

График этой простой, но важной функции $1/(f_0^2 - f^2)$ приведен на рис. 7. Получить эту кривую в количественном опыте с маятником довольно трудно. Для этого нужно было бы менять частоту f прикладываемой силы, поддерживая ее амплитуду A постоянной, и этому последнему требованию особенно трудно удовлетворить. Можно, однако, поставить опыт, демонстрирующий характер этой замечательной кривой. Отклик находится в фазе с приложенной силой, когда частота f этой силы ниже резонанса, $f < f_0$; отклик находится в противофазе, т.е. со сдвигом фазы на 180° по отношению к силе, когда внешняя сила приложена с частотой f выше резонанса, $f > f_0$. Вблизи резонанса удобно воспользоваться приближением

$$\frac{1}{f_0^2 - f^2} = \frac{1}{(f_0 - f)(f_0 + f)} \approx \frac{1}{2f_0(f_0 - f)}. \quad (4)$$

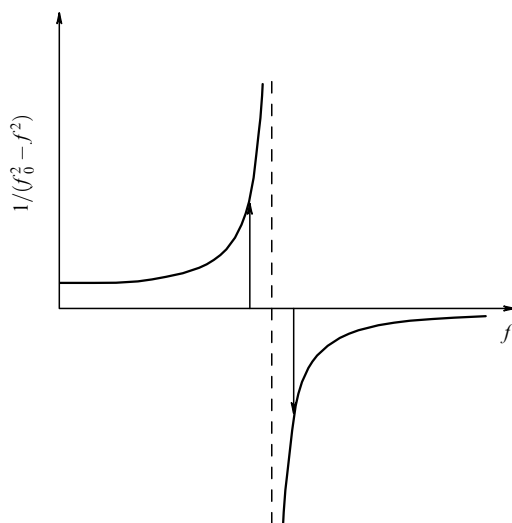


Рис. 7. Стандартная резонансная кривая: зависимость амплитуды отклика гармонического осциллятора без трения от частоты f приложенной силы. В обсуждении с учащимися следует подчеркнуть изменение фазы отклика на 180° при проходе через резонанс.

В этом приближении малые значения отстройки $|f_0 - f|$ выше и ниже резонанса дают одинаковый модуль отклика, но сдвинутые друг относительно друга на 180° значения фазы отклика (см. рис. 7).

Именно здесь впервые используется установка с микровентиляторами, управляемыми от генератора стандартных сигналов или от звуковой карты компьютера. Моменты времени, когда сила достигает положительного максимума, легко определяются по максимально громкому звуку, издаваемому микровентиляторами.

Кстати, конечное значение отклика и сдвиг его фазы на 90° по отношению к силе получаются лишь при учете трения. Этот 90° -й сдвиг фазы тоже легко демонстрируется с помощью описанного выше устройства возбуждения.

Некоторая изобретательность требуется для демонстрации равных модулей, но сдвинутых на 180° фаз отклика при возбуждении с небольшими отстройками ниже и выше резонанса (уравнение (4)). Здесь удобно воспользоваться двухчастотным маятником. Приложение силы в направлении $+45^\circ$ означает, что и модули, и фазы x - и y -компонент силы совпадают. Между тем, если частота приложенной силы f совпадает со средним арифметическим двух собственных частот, $f = (f_x + f_y)/2$, то модули x - и y -откликов совпадают, но фазы сдвинуты на 180° . В результате направление стационарных колебаний в пространстве оказывается под углом -45° . Такое поведение маятника, на первый взгляд, противоречит интуиции и поэтому стимулирует интенсивное обдумывание.

После этих демонстраций уместно обсудить с учащимися ряд электромагнитных и оптических явлений. Показатель преломления стекла и большинства оптических материалов, прозрачных в видимой области, определяется вкладами сильных резонансных переходов в ультрафиолетовом диапазоне. Это объясняет, почему отклик среды *положителен*, а относительная диэлектрическая постоянная ϵ/ϵ_0 и показатель преломления n больше единицы.

Напротив, для плазмы (например, для свободных электронов в ионосфере) характерна нулевая собственная частота эквивалентных осцилляторов, поскольку для свободных электронов нет возвращающей силы. Поэтому отклик среды *отрицателен*. Диэлектрическая постоянная ϵ/ϵ_0 и показатель преломления n меньше своего вакуумного значения 1. Кроме того, поляризуемость, пропорциональная $\epsilon/\epsilon_0 - 1$, *отрицательна* почти в любом материале, если длина волны падающего излучения находится в рентгеновском диапазоне.

5.2. Нарушение принципа суперпозиции и нелинейная самопрецессия эллипса

Будучи исключительно важным, принцип суперпозиции выглядит довольно пресным и скучным до тех пор, пока не предъявлен пример его нарушения. Возьмем, например, циркулярно поляризованное движение 1-метрового маятника с отклонением около 0,5 м, т.е. с углом $\varphi = 30^\circ$ относительно вертикальной оси. Попытка осуществить суперпозицию двух таких движений, т.е. получить 60° -ное движение, приводит к заметно убыстренному вращению: $T_\varphi = T_0(\cos \varphi)^{1/2}$, так что $T_{30} = 0,931 \cdot T_0$, $T_{60} = 0,707 \cdot T_0$. Нетрудно получить столь высокую частоту вращения (столь малый период T_φ), какую

только позволяют соображения безопасности, если угол φ приближается к 90° . Более короткий шнурок удобнее для этого опыта.

Нарушение принципа суперпозиции для линейно-поляризованного движения можно вывести "теоретически", через приближенное представление линейного движения в виде суперпозиции двух циркулярных, правого и левого, с равными амплитудами. Тем не менее прямая демонстрация нелинейности предпочтительна.

Для этого можно взять изотропный маятник, т.е. маятник с единственной точкой подвеса на неподвижной раме. Линейно поляризованное движение остается таковым при любой амплитуде. Аналогичная ситуация имеет место и для циркулярного движения. Качественно отличный характер движения наблюдается для эллиптического движения конечной амплитуды. Общий размер эллипса сохраняется; это эквивалентно закону сохранения энергии. Сохраняется и форма эллипса, т.е. отношение малой полуоси к большой; это эквивалентно сохранению углового момента. Однако ориентация большой оси эллипса постепенно поворачивается (в другой терминологии — прецессирует), проявляя тем самым нелинейность. В самом деле, эта медленная прецессия не может быть представлена как результат суперпозиции линейно поляризованных колебаний с фиксированными направлениями, хотя именно такое представление отлично работало в случае весьма малых значений амплитуды. Прецессия фактически происходит в том же направлении, в котором грузик вращается в своем движении по эллипсу, однако заметный угол прецессии достигается лишь за большое число колебаний маятника, если амплитуда движения заметно меньше 1 рад.

Нелинейно-оптическим аналогом этой прецессии является эффект самовращения плоскости поляризации, обнаруженный в 1964 г. в работе [14]. Темп вращения (радиан на метр распространения) в работе [14] был пропорционален выражению, весьма сходному с результатом, описываемым уравнениями (28)–(30) из раздела 6.11 настоящей статьи.

5.3. Вращательный эффект Доплера

В этой демонстрации используется вращающаяся платформа, но маятник должен быть с единой точкой подвеса, т.е. изотропным. Запустим линейно поляризованное движение и затем закрутим платформу с постоянной угловой скоростью $\Omega = e_z \Omega$. В той мере, в какой единая точка подвеса расположена точно на оси вращения, поляризация остается неизменной "в абсолютном пространстве", т.е. в лабораторной системе координат. Таким образом, плоскость линейно поляризованного движения проворачивается относительно платформы, и, следовательно, это движение не является собственной модой с точки зрения наблюдателя на платформе. В то же время круговые движения в лабораторной системе остаются круговыми и для наблюдателя на платформе. Таким образом, круговые движения являются собственными модами изотропного маятника так же и в системе координат вращающейся платформы. Этот опыт должен сопровождаться следующим важным наблюдением. Если маятник вращается в ту же сторону, куда вертится платформа (попутное вращение), то наблюдатель на платформе воспринимает это вращение происходящим с уменьшенной частотой $\omega(\text{попутное вращение}) = \omega_0 - \Omega$, где $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Наоборот, противовращение

платформы и маятника воспринимается как круговое движение с большей частотой $\omega(\text{противовращение}) = \omega_0 + \Omega$. Тем самым мы получаем аналог эффекта Доплера для вращательного движения. Этот в сущности чисто кинематический эффект описывается во вращающейся системе координат довольно громоздкими динамическими уравнениями. Именно, следует сложить три вектора: обусловленную гравитацией возвращающую силу (от шнурка), центробежную силу инерции и силу инерции Кориолиса, и затем составить второй закон Ньютона, т.е. приравнять эту сумму произведению массы на вектор центростремительного ускорения.

5.4. Магнито-оптическое вращение поляризации

Понятие вращательного эффекта Доплера имеет важное приложение в оптике среды, помещенной во внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$. Рассмотрим сначала случай малой угловой скорости платформы, $\Omega \ll \omega_0$. Тогда можно пренебречь центробежной силой как величиной порядка Ω^2 и учесть лишь основную, т.е. линейную часть силы инерции — силу Кориолиса $\mathbf{F}_C = 2m[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}]$. Следует подобрать такие направления и величину вектора $\boldsymbol{\Omega}$, чтобы сила Кориолиса в точности скомпенсировала силу Лоренца $\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$, с которой внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$ воздействует на движение электронов. Здесь m и $q = -|e|$ — масса и заряд электрона соответственно. Сделанное выше утверждение составляет знаменитую теорему Лармора, и соответствующий вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_{\text{Лармор}}$ характеризует ларморовскую прецессию электронов в слабом (были опущены члены Ω^2) магнитном поле $\mathbf{B}$:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{Лармор}} = -\frac{q\mathbf{B}}{2m}. \quad (5)$$

Анри Беккерель использовал картину ларморовской прецессии, чтобы оценить и даже рассчитать силу фарадеевского эффекта вращения поляризации средой при приложении магнитного поля. Рассмотрим электромагнитную волну, обладающую в лабораторной системе угловой частотой $\omega_0 \equiv 2\pi c/\lambda_0$ и распространяющуюся вдоль приложенного извне магнитного поля $\mathbf{B}$; здесь λ_0 — длина волны света в вакууме. Среда в ларморовски вращающейся системе координат "воспринимает" волну с правой круговой поляризацией, как если бы частота волны была сдвинута: $\omega_R = \omega_0 + \Omega_{\text{Лармор}}$. Аналогично, волна с левой круговой поляризацией воспринимается вращающейся средой, как если бы имел место вращательный эффект Доплера противоположного знака: $\omega_L = \omega_0 - \Omega_{\text{Лармор}}$. Поскольку силы Лоренца и Кориолиса скомпенсировали друг друга, можно считать, что эффективные показатели преломления для этих двух волн, n_R и n_L , ничего "не знают" ни об одной из этих сил, $\mathbf{F}_C$ и $\mathbf{F}_L$. Поэтому следует воспользоваться невозмущенным показателем преломления n , но на частотах, сдвинутых из-за вращательного эффекта Доплера:

$$n_R = n(\omega_0 + \Omega_{\text{Лармор}}), \quad n_L = n(\omega_0 - \Omega_{\text{Лармор}}).$$

Линеаризованное приближение дает

$$\begin{aligned} n_{R,L} &= n(\omega_0 \pm \Omega_{\text{Лармор}}) \approx n(\omega_0) \pm \frac{dn}{d\omega} \Omega_{\text{Лармор}} \equiv \\ &\equiv n(\lambda_0) \pm \pi c \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{qB}{m\lambda_0^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Темп фарадеевского вращения плоскости поляризации (в радианах на метр распространения) тем самым равен

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{\pi(n_R - n_L)}{\lambda_0} = \frac{\Omega_{\text{Лармор}}}{c} \omega_0 \frac{dn}{d\omega_0} = \\ &= -\frac{\Omega_{\text{Лармор}}}{c} \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} = -qB\lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{1}{2m_e c}. \end{aligned} \quad (7)$$

Формула (7) есть приближенная формула А. Беккереля, связывающая постоянную эффекта Фарадея (так называемую постоянную Верде) с дисперсией $\lambda_0 dn/d\lambda_0$ материала. Точность этой формулы (по крайней мере не в непосредственной близости от УФ резонансов) удивительно хорошая: обычно 20 % или лучше для большинства прозрачных материалов. Это означает, что приближение невзаимодействующих бесспиновых изотропных атомов (к которым собственно и применима теорема Лармора) довольно хорошо описывает эффект Фарадея. Это в свою очередь хорошо коррелирует с приближенным правилом: рефракция $n - 1$ среды приблизительно равна сумме рефракций составляющих среду атомов.

Отметим простой способ запомнить знак постоянной Верде в уравнении (7). Магнитное поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ можно создать потоком электронов в проводнике, когда последний намотан в форме соленоида. Электроны в прозрачной среде, помещенной внутри соленоида, начинают прецессировать с ларморовской частотой в момент постепенного "включения" магнитного поля. По правилу Ленца знак этой прецессии таков, что возникает частичная (хотя и очень слабая) компенсация возрастания потока магнитного поля через соленоид. Это значит, что прецессия направлена *противоположно* круговому движению электронов в проводах и, следовательно, *совпадает* с направлением электрического тока в проводах. Поляризация света частично "увлекается" прецессирующими электронами, чем и определяется знак эффекта Фарадея, т.е. вращение поляризации света при приложении к среде внешнего магнитного поля. Поучительно также упоминание о том, что эффект Фарадея должен иметь противоположный знак для антивещества, на что указывает нечетная степень заряда q в уравнении (7).

5.5. Параметрический резонанс

Слушатели часто задают этот вопрос во время демонстраций. В самом деле, будем тянуть за шнурок (и тем самым менять длину маятника) с периодом, в два раза меньшим периода линеаризованных колебаний. Если трение и отстройка по частоте достаточно малы (и/или) если амплитуда модуляции длины шнурка достаточно велика, то наступает параметрическая неустойчивость. К сожалению, этот конкретный опыт с маятником имеет по крайней мере два недостатка. Во-первых, малое затухание маятника обычно достигается, если грузик достаточно тяжелый. В этих условиях трудно менять длину маятника на заметную величину и с точной периодичностью. Во-вторых, самые интересные приложения параметрических генераторов в оптике связаны с возможностью перестройки выходных частот f_1 и f_2 , так что $f_1 + f_2 = f(\text{накачки})$, т.е. $1/\lambda(\text{накачки}) = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2$. Авторы настоящей статьи пока не знают хорошего способа продемонстрировать невырожденный параметрический генератор или хотя бы невырожденный параметрический усилитель.

6. Четвертый уровень: от старшекурсников вузов до научных работников

6.1. Устройство для моделирования электромагнитно индуцированной прозрачности и математика связанных осцилляторов с затуханием

Ниже мы представляем механическое устройство, которое используем для моделирования электромагнитно индуцированной прозрачности (ЭИП) — одного из наиболее интересных явлений современной нелинейной оптики. Это устройство — модификация двухчастотного маятника, и вращение платформы не требуется. Маятник, изображенный на рис. 8, обладает двумя различными длинами для двух ортогональных колебаний, так что *в пренебрежении затуханием* (трением) оси x и y отвечают собственным направлениям незатухающих мод, имеющих различающиеся частоты: $f_y < f_x$.

Механика подвеса основана на заостренных винтах, привинчиваемых на регулируемой высоте к алюминиевым планкам. Вертикальный стержень привинчен к нижней планке так, что вращение вокруг вертикальной оси полностью исключено. Это позволяет приделать к стержню внизу своего рода "парус" из жесткого материала. Назначение "паруса" — создавать сильное аэродинамическое трение, т.е. затухание по отношению к движению, *перпендикулярному* плоскости "паруса". Рисунок 8 иллюстрирует альтернативную конструкцию маятника с "парусом"; она использует микроподшипники.

В то же время трение по отношению к движению *в направлении* плоскости "паруса" предполагается весьма малым. Конкретный выбор ориентации "паруса" таков, что движение в направлении $+45^\circ$ (относительно оси x) дает сильное затухание, в то время как движение в направлении -45° предположительно не вносит затухания. Если пренебречь x/y -расщеплением частот, то направления $+45^\circ$ и -45° отвечают собственным векторам оператора затухания.

Можно считать, что движения в направлениях x и y связаны друг с другом благодаря анизотропному ($+45^\circ$ против -45°) трению. В то же время можно считать, что движения в направлениях $+45^\circ$ и -45° связаны друг с другом благодаря анизотропной (x против y) возвращающей силе. Чтобы уяснить свойства рассматриваемой системы, мы представим здесь точку зрения на то, как следует формулировать теорию связанных осцилляторов с затуханием.

Содержательная информация о системе в линейном приближении сводится к трем положительно-определенным квадратичным формулам: матрица массы M_{ik} , матрица возвращающей силы (упругости) E_{ik} , матрица трения R_{ik} . С помощью этих матриц определяются соответственно: кинетическая энергия

$$0,5 M_{ik} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_k}{dt},$$

потенциальная энергия

$$0,5 E_{ik} q_i q_k$$

и диссипативная функция (половина темпа диссипации энергии; Дж с⁻¹)

$$0,5 R_{ik} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_k}{dt}.$$

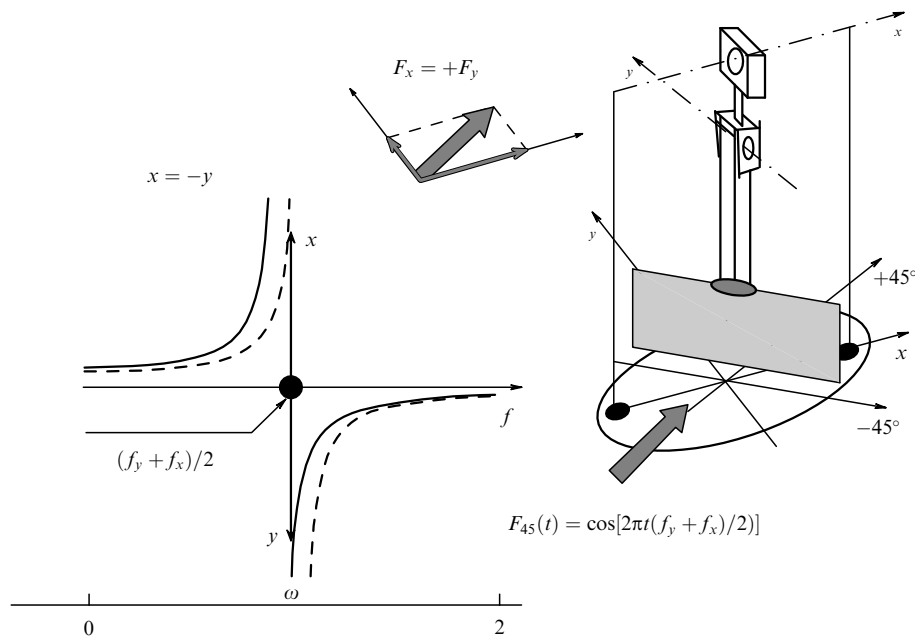


Рис. 8. Конструкция двухчастотного маятника с замороженным вращением "паруса" вокруг вертикальной оси. К вертикальному металлическому стержню прикреплен жесткий "парус". Аэродинамическое сопротивление движению этого паруса в направлении $+45^\circ$ было довольно сильным, а при движении в направлении -45° почти отсутствовало. Приложение силы в направлении $+45^\circ$ на частоте $(f_x + f_y)/2$ после установления стационарного состояния приводит к колебаниям в направлении -45° . В результате диссипация энергии маятником практически исчезает.

Как и принято, во всех трех выражениях подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Можно воспользоваться положительно-определенной квадратичной формой M_{ik} для того, чтобы ввести определение скалярного произведения в линейном пространстве обобщенных координат q_i . Иными словами, можно выбрать такие комбинации x_i исходных координат q_i , т.е. $x_i = \alpha_{ik} q_k$, что матрица массы станет единичной матрицей в новых координатах x_i , а исходное линейное пространство общего типа становится евклидовым линейным пространством со скалярным произведением $x_j x_j$. Следующий шаг — перейти к комбинациям новых координат $x'_i = \beta_{ik} x_k$, но не к произвольным комбинациям, а к таким, в которых скалярное произведение сохраняет свой вид $x'_j x'_j = x_k x_k$. Иначе говоря, β_{ik} есть матрица ортогональных преобразований (вращений), $\beta_{ik} \beta_{jk} = \delta_{ij}$. Таким образом, матрица массы остается единичной и в новых координатах x'_j . Вращения в вещественном евклидовом линейном пространстве позволяют привести произвольную симметричную матрицу к диагональному виду. Важно, однако, что диагонализацию удастся сделать для одной матрицы: либо для E_{ik} , либо для R_{ik} . Если матрицы E_{ik} и R_{ik} не коммутируют, то привести их одновременно к диагональному виду невозможно.

Именно такой оказывается ситуация с механическим устройством, представленным на рис. 8. Собственные оси для возвращающей силы (для матрицы потенциальной энергии) суть x и y . Напротив, собственные оси для силы трения (для матрицы диссипативной функции) суть $+45^\circ$ и -45° . Диагонализация обеих этих матриц путем вращения системы координат x_i невозможна. Можно формально определить моды движения как такие комплексные комбинации x - и y -амплитуд, для которых эволюция во времени происходит по экспоненциальному закону $\propto \exp(-\lambda^k t)$, $\lambda^k \equiv \text{Re}(\lambda^k) + i \text{Im}(\lambda^k)$. Эти

моды не совпадают ни с чистыми x - и y -движениями, ни с чистыми движениями в направлениях $+45^\circ$ и -45° . Более того, эти моды уже не ортогональны ни в каком из смыслов. Для них уже нельзя утверждать, что полная диссипируемая мощность есть сумма мощностей, диссипируемых каждой модой в отдельности. Напротив, в выражении для диссипации появляются интерференционные члены, и в некотором смысле именно эти интерференционные члены и ответственны за явление ЭИП.

6.2. Противоречащее интуиции движение, моделирующее ЭИП

Сделаем предположение, законность которого будет оправдана результатами окончательного расчета. Предположим, что эта система с *сильным затуханием обеих мод* в определенных условиях *вообще не чувствует затухания*. Тогда можно воспользоваться противоречащим интуиции результатом из раздела 5.1, а именно тем, что стационарное движение будет чисто линейным в направлении -45° . Но ведь движение в направлении -45° действительно не сопровождается трением в нашей конкретной системе.

Это утверждение приводит к двум важным следствиям. Во-первых, мы оправдали "странное предположение". Второе следствие требует более подробного разъяснения. Сила была приложена в направлении самого сильного трения, и движение в этом "диссипативном" направлении действительно наблюдается в течение переходного процесса. Однако в конце концов система приходит к противоречащему интуиции стационарному состоянию, в котором диссипация отсутствует. Мощность, передаваемая от силы к устройству, равна нулю, поскольку вектор скорости все время перпендикулярен вектору силы. Существует весьма близкая аналогия между этим движением, противоречащим интуиции, и ЭИП (см. ниже в разделе 6.6).

Обсуждение математики и физики процесса не должно отвлекать внимание читателя от наиболее важных педагогических фактов. Во-первых, устройство, использующее заостренные винты, действительно было изготовлено на уровне домашней мастерской из подручных материалов и, таким образом, может быть воспроизведено учениками и учителями средней школы. Во-вторых, это устройство надежно и воспроизводимо демонстрировало (и продолжает демонстрировать) противоречащие интуиции свойства движения, описанного выше.

6.3. Второй закон Ньютона для системы, моделирующей ЭИП

В этом разделе разобраны уравнения второго закона Ньютона для нашего устройства. Декартовы оси x и y выбраны в направлении плоскости рамы и перпендикулярно к ней соответственно. Выбор единиц измерения позволяет считать массу равной единице. Движение маятника в направлениях x и y представим в виде

$$x(t) = 0,5[a_x(t) \exp(-i\omega_0 t) + a_x^*(t) \exp(+i\omega_0 t)], \quad (8)$$

$$y(t) = 0,5[a_y(t) \exp(-i\omega_0 t) + a_y^*(t) \exp(+i\omega_0 t)]. \quad (9)$$

Здесь $\omega_0 = (\omega_x + \omega_y)/2 \equiv 2\pi(f_x + f_y)/2$ — "несущая" угловая частота, а амплитуды $a_x(t)$, $a_y(t)$ и комплексно сопряженные к ним числа $a_x^*(t)$, $a_y^*(t)$ предполагаются медленно меняющимися функциями времени. Введем также обозначение $\Delta = (\omega_x - \omega_y)/2$ для половины разности угловых частот между модами x и y . Мы воспользуемся следующим способом "вывода" уравнений, справедливых с требуемой степенью точности: найдем приближенные уравнения, описывающие каждый из предельных случаев в отдельности, а затем сложим все различные члены в правой части уравнений.

Если пренебречь затуханием, то в качестве уравнений для медленно меняющихся амплитуд $a_x(t)$, $a_y(t)$ можно принять

$$\frac{da_x(t)}{dt} = -i\Delta a_x(t), \quad \frac{da_y(t)}{dt} = +i\Delta a_y(t). \quad (10)$$

Вместо того чтобы "выводить" эту приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, можно положиться на тот факт, что уравнения (10) дают точные решения при отсутствии затухания и внешних сил:

$$a_x(t) = a_x(0) \exp(-i\Delta t), \quad a_y(t) = a_y(0) \exp(+i\Delta t), \quad (11)$$

$$x(t) = |a_x(0)| \cos[\omega_x t - \psi_x], \quad (12)$$

$$y(t) = |a_y(0)| \cos[\omega_y t - \psi_y].$$

Что же касается затухания, то мы уже предположили, что для движения в направлении $+45^\circ$ трение будет сильным, с постоянной затухания Γ (с^{-1} , по амплитуде), а движение в направлении -45° дает заметно меньшее трение с постоянной γ , так что $\gamma \ll \Gamma$. Таким образом, если пренебречь x/y -различием возвращающей силы, но учесть затухание, эти предположения приводят к следующим уравнениям и их решениям:

$$a_{45}(t) = \frac{a_x(t) + a_y(t)}{\sqrt{2}}, \quad a_{-45}(t) = \frac{a_x(t) - a_y(t)}{\sqrt{2}}, \quad (13)$$

$$\frac{da_{45}(t)}{dt} = -\Gamma a_{45}(t), \quad \frac{da_{-45}(t)}{dt} = -\gamma a_{-45}(t), \quad (14)$$

$$a_{45}(t) = a_{45}(0) \exp(-\Gamma t), \quad a_{-45}(t) = a_{-45}(0) \exp(-\gamma t). \quad (15)$$

Мы представим внешнюю силу (вещественную функцию времени) в виде

$$\mathbf{F}_{\text{real}}(t) = 0,5[\mathbf{F}(t) \exp(-i\omega_0 t) + \mathbf{F}^*(t) \exp(+i\omega_0 t)]. \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{F}(t) = \{F_x(t), F_y(t)\}$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда силы. Система уравнений второго закона Ньютона для движения частотно-вырожденного маятника без трения под влиянием близкой к резонансу силы из уравнения (9)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \mathbf{F}_{\text{real}}(t) \quad (17)$$

может быть приведена к уравнениям первого порядка для медленно меняющихся комплексных амплитуд:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \approx \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{f}(t) = \frac{i\mathbf{F}(t)}{2\omega_0}. \quad (18)$$

Наконец, вывод системы уравнений с учетом всех указанных эффектов: расщепления угловых частот Δ , затуханий Γ и γ и внешней силы $\mathbf{F}$ производится в предположении, что все указанные эффекты действуют *медленно*, т.е. сравнительно слабо воздействуют на мгновенное значение амплитуды, и их эффект накапливается лишь на протяжении многих колебаний. В этом случае можно просто сложить соответствующие члены в уравнениях эволюции медленно меняющейся векторной амплитуды $d\mathbf{a}/dt$. Последующее рассмотрение удобно вести в осях $(+45^\circ)/(-45^\circ)$:

$$\begin{aligned} \frac{da_{45}(t)}{dt} + \Gamma a_{45}(t) + i\Delta a_{-45}(t) &= f_{45}(t), \\ \frac{da_{-45}(t)}{dt} + \gamma a_{-45}(t) + i\Delta a_{45}(t) &= f_{-45}(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Если монохроматическая сила приложена точно на частоте "несущей", то

$$f_{45}(t) = \text{const}_1, \quad f_{-45}(t) = \text{const}_2,$$

и стационарное решение принимает вид

$$\begin{aligned} a_{45} &= \frac{1}{\Delta^2 + \Gamma\gamma} (i\gamma f_{45} + \Delta f_{-45}), \\ a_{-45} &= \frac{1}{\Delta^2 + \Gamma\gamma} (\Delta f_{45} + i\Gamma f_{-45}). \end{aligned} \quad (20)$$

Представляет интерес усредненная по периоду колебаний мощность P , рассеиваемая маятником:

$$P = 0,5\omega_0^2 [i(f_{45}a_{45}^* + f_{-45}a_{-45}^*)] + \text{компл. сопр.} \quad (21)$$

Подстановка полученных выше решений в выражение для P дает

$$P = \frac{m\omega_0^2}{\Delta^2 + \Gamma\gamma} (\gamma|f_{45}|^2 + \Gamma|f_{-45}|^2). \quad (22)$$

Мы получили весьма интересный результат (22) в предположении частоты силы, равной "несущей", т.е. арифметическому среднему двух собственных частот. Именно сила в направлении $+45^\circ$ приводит к диссипируемой мощности, пропорциональной *малой* постоянной трения $\gamma \equiv \gamma_{-45}$, и, наоборот, сила, приложенная в направлении -45° , приводит к диссипации, пропорциональной *большой* постоянной трения $\Gamma \equiv \Gamma_{45}$. Уместно подчеркнуть, что в противоречии с интуитивными представлениями *слабая диссипация* возникает при приложении силы *в направлении сильного трения*. Именно это утверждение о неожиданно слабой диссипируемой мощности столь похоже на то, что происходит при ЭИП.

Уравнения (19) достаточно просты, так что можно найти явные аналитические решения для любого направления и любой частоты приложенной силы: решения как для стационарного состояния, так и для переходного процесса. Сравнение аналитического и численного решений может быть неплохим упражнением для учащихся. Приведенные выше укороченные уравнения для комплексных амплитуд a_x , a_y совпадают (с точностью до переобозначения параметров) с уравнениями для матричных элементов матрицы плотности трехуровневой системы в приближении слабого сигнала на резонансной частоте.

6.4. Нулевая поляризуемость и полное подавление скалярного рассеяния света

Можно ввести тензор восприимчивости α_{ik} механической системы, изображенной на рис. 8: стационарный отклик i -й компоненты вектора $\mathbf{a}$ на k -ю компоненту вектора монохроматической силы $\mathbf{f}$. Результаты опытов из разделов 5.1, 6.2 и расчетов из раздела 6.3 в самом деле противоречат интуиции. Их можно представить так: если постоянная $\gamma \equiv \gamma_{-45}$ пренебрежимо мала, а сила приложена точно на частоте несущей, $\omega = \omega_0 = (\omega_x + \omega_y)/2$, то компонента $\alpha_{(+45),(+45)}$ тензора восприимчивости равна нулю. Этот факт имеет простое объяснение. В самом деле, сила на частоте несущей ω_0 имеет одинаковую отстройку: ниже x -резонанса и выше y -резонанса, так что соответствующие положительный и отрицательный вклады этих резонансов точно компенсируют друг друга (ср. с рис. 7). Компонента $\alpha_{(+45),(-45)}$ тензора восприимчивости не равна нулю, но эта компонента не приводит к диссипации энергии.

Похожая ситуация имеет место в резонансной оптике щелочных металлов. Возьмем, например, резонансный дублет в натрии (рис. 9). Вблизи резонанса можно записать выражение для скалярной части поляризуемости в виде

$$\alpha(\omega) = \text{const} \cdot \left\{ \frac{f_{1/2}}{\omega_{1/2} - \omega} + \frac{f_{3/2}}{\omega_{3/2} - \omega} \right\}. \quad (23)$$

Здесь $f_{1/2} = 1/3$ и $f_{3/2} = 2/3$ суть силы осцилляторов соответствующих переходов $\{s \leftrightarrow p\}$. Если выбрать частоту ω между этими линиями переходов и к тому же взять ω в два раза ближе к переходу $\{s \leftrightarrow p(1/2)\}$, чем к переходу $\{s \leftrightarrow p(3/2)\}$, то скалярная часть поляризуемости обращается точно в нуль. Этот четкий и красивый эффект был предсказан и обнаружен экспериментально около 30 лет назад [15]. Флуктуационная антисимметричная часть поляризуемости по-прежнему остается, поскольку основное состояние имеет спин $1/2$; эта часть приводит к так называемому "антисимметричному"

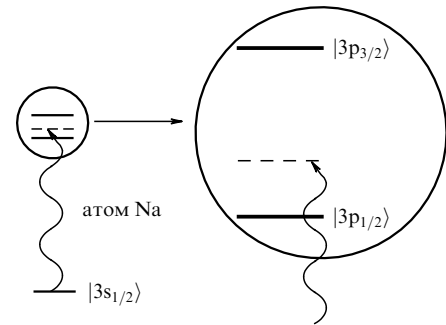


Рис. 9. Облучение атомов натрия резонансным светом на частоте, промежуточной между двумя резонансными линиями. Конкретный выбор этой частоты $f = (2/3)f(s \rightarrow p_{1/2}) + (1/3)f(s \rightarrow p_{3/2})$ позволяет обратить в нуль скалярную часть поляризуемости за счет компенсации вкладов двух переходов. В результате скалярная часть резонансного рэлеевского рассеяния оказывается полностью подавленной и, таким образом, прозрачность паров натрия возрастает [15].

рассеянию света и тем самым к некоторому ослаблению светового пучка.

6.5. Нулевая поляризуемость и электростатически индуцированная прозрачность

Рассмотрим переход Лайман- α в атоме водорода (рис. 10а) и для целей настоящего раздела пренебрежем спином электрона [16].

Если пренебречь внешним электростатическим полем (пренебречь линейным эффектом Штарка), то $|2s\rangle$ и $|2p\rangle$ суть собственные состояния оператора затухания (рис. 10б). В самом деле, состояние $|2s\rangle$ метастабильно, с очень большим временем жизни (порядка 0,1 с). Между тем состояние $|2p\rangle$ является короткоживущим за счет спонтанного излучения на переходе $|2p\rangle \rightarrow |1s\rangle$, так что время жизни составляет около 10^{-9} с.

Напротив, если пренебречь затуханием, но учесть внешнее электростатическое поле, то собственными состояниями гамильтониана будут $(|2s\rangle + |2p\rangle)/\sqrt{2}$ и $(|2s\rangle - |2p\rangle)/\sqrt{2}$, а собственные значения расщеплены симметрично относительно исходного невозмущенного вырожденного значения энергии пары состояний $|2s\rangle$ и $|2p\rangle$ за счет линейного эффекта Штарка.

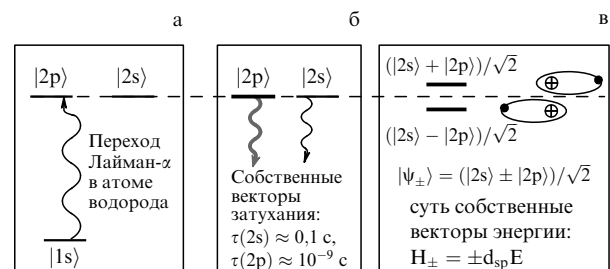


Рис. 10. (а) Резонансное рассеяние (поглощение) света на переходе Лайман- α атомом водорода в слабом внешнем электростатическом поле. (б) Если пренебречь электростатическим полем, то собственные состояния оператора затухания суть $|2s\rangle$ и $|2p\rangle$. (в) Если пренебречь затуханием, то собственные состояния гамильтониана суть $|\psi_{+}\rangle = |2p\rangle + |2s\rangle$ и $|\psi_{-}\rangle = |2p\rangle - |2s\rangle$. Энергия падающих квантов лежит точно посередине между двумя собственными значениями, симметрично отщепленными за счет линейного эффекта Штарка. В результате компенсации вкладов от $|\psi_{+}\rangle$ и $|\psi_{-}\rangle$ поляризуемость зануляется, и рассеяние/ослабление света полностью подавляется — электростатически индуцированная прозрачность.

Следует напомнить читателю, что не существует ортогонального базиса, в котором одновременно и гамильтониан, и оператор затухания были бы диагональны. Ситуация здесь весьма схожа с задачей из раздела 6.1. Модовые комбинации с поведением $\exp(-\lambda^k t)$ не совпадают ни с одним из упомянутых выше состояний. Более того, обе эти модовые комбинации затухают, $\text{Re}(\lambda^k) > 0$, и они не ортогональны друг к другу.

Так же, как и в разделе 6.2, предположим, что для этой системы с сильным затуханием в некоторых конкретных условиях можно полностью пренебречь затуханием. Тогда можно воспользоваться ортогональным базисом штарковски-расщепленных уровней $(|2s\rangle + |2p\rangle)/\sqrt{2}$ и $(|2s\rangle - |2p\rangle)/\sqrt{2}$. В общем случае эти состояния не являются "модами" системы. Поскольку "вес" дипольно-активного $|2p\rangle$ -состояния одинаков в обоих указанных состояниях, соответствующие им силы осцилляторов переходов из $|1s\rangle$ тоже одинаковы. Если настроить частоту падающего точно на середину между двумя штарковски-расщепленными переходами, то поляризуемость обратится в нуль за счет точной компенсации вкладов двух переходов.

Равенство поляризуемости нулю приводит по крайней мере к двум важным следствиям. Во-первых, исчезновение наведенного дипольного момента на световой частоте означает, что шрёдингеровская амплитуда $|2p\rangle$ -состояния не возбуждена в стационарном состоянии. Это оправдывает предположение о возможности пренебречь затуханием, поскольку последнее вносилось лишь $|2p\rangle$ -состоянием. Во-вторых, нуль поляризуемости означает отсутствие поглощения, т.е. прозрачность, что и требовалось доказать.

6.6. Электромагнитно индуцированная прозрачность: спектральный подход

Стандартная Λ -схема ЭИП изображена на рис. 11 (см., например, [17, 18], детали и ссылки в них). Слабый пробный (сигнальный) световой пучок настроен в резонанс с сильным дипольно-активным переходом $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ и поэтому обычно поглощается средой очень сильно. Сильный световой пучок так называемой накачки также направляется в среду; эта накачка настроена на точный резонанс с другим сильным переходом, $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Накачка не поглощается средой, так как состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ исходно не заселены. Состояние $|0\rangle$ предполагается стабильным в отсутствие полей; состояние $|2\rangle$ метастабильно.

Если пренебречь затуханием, то поле накачки вызывает осцилляции Раби. Если накачка точно резонансна с частотой перехода ω_{12} , то собственные состояния гамильтониана суть $(|2\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ и $(|2\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, а собственные значения эффективной энергии отщеплены симметрично по отношению к исходному положению уровня $|1\rangle$: линейный эффект Штарка в переменном поле — совсем как в случае линейного эффекта Штарка в электростатическом поле.

Если пренебречь эффектом Штарка в переменном поле, то собственные состояния оператора затухания суть $|1\rangle$ и $|2\rangle$, с сильным затуханием для $|1\rangle$ и пренебрежимо малым затуханием для $|2\rangle$. Не существует ортогонального базиса, в котором были бы одновременно диагональны и оператор затухания, и гамильтониан. Модовые комбинации, характеризующие временной

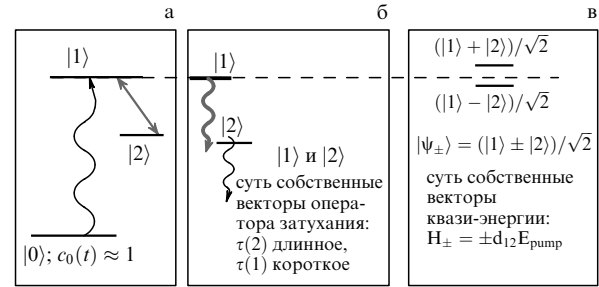


Рис. 11. ЭИП: электромагнитно индуцированная прозрачность. (а) Так называемая Λ -конфигурация, используемая для одной из возможных реализаций ЭИП. (б) Если пренебречь полем накачки на частоте перехода между уровнями 1 и 2, то собственные состояния оператора затухания суть $|1\rangle$ и $|2\rangle$. (в) Если пренебречь затуханием состояния $|1\rangle$, то собственные состояния квазиэнергии суть $|\psi_+\rangle = |1\rangle + |2\rangle$ и $|\psi_-\rangle = |1\rangle - |2\rangle$, а энергия кванта входного сигнала лежит точно посередине между собственными значениями квазиэнергии для этих состояний. В результате поляризуемость равна нулю для слабого сигнала на переходе 0–1 благодаря точной компенсации двух вкладов: от состояний $|\psi_+\rangle$ и $|\psi_-\rangle$ соответственно. Таким образом, резонансное поглощение сигнала на переходе 0–1 подавлено за счет присутствия накачки на переходе 1–2.

зависимостью $\exp(-\lambda^k t)$, не совпадают ни с одним из упомянутых выше состояний. Более того, обе такие модовые комбинации затухают во времени, $\text{Re}(\lambda^k) > 0$, и взаимно не ортогональны.

Так же, как и в примере из раздела 6.5, предположим, что эта система с сильным затуханием обеих "мод" может в определенных условиях полностью игнорировать затухание. Тогда можно использовать базис, отвечающий расщеплению Раби: $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ и $(|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$. Поскольку вес дипольно-активного состояния $|1\rangle$ одинаков в каждом из двух указанных состояний, то одинаковы и соответствующие силы осциллятора из состояния $|0\rangle$. Если настроить частоту падающей сигнальной (пробной) волны точно посередине между частотами расщепленных по Раби переходов, то поляризуемость зануляется за счет точной компенсации двух вкладов противоположных знаков.

Равенство поляризуемости нулю приводит по крайней мере к двум важным следствиям. Во-первых, исчезновение наведенного дипольного момента на частоте пробной световой волны означает, что шрёдингеровская амплитуда состояния $|1\rangle$ не возбуждена в стационарном состоянии. Это оправдывает предположение о возможности пренебречь затуханием, поскольку последнее вносилось лишь состоянием $|1\rangle$. Во-вторых, нуль поляризуемости означает отсутствие поглощения, т.е. прозрачность.

6.7. Почему теперь, а не в 1920-х?

Доктор Х. Шлоссберг задал одному из нас весьма интересный вопрос: "Почему столь простое и ясное по своему механизму явление (как, например, в атоме водорода) не было предсказано творцами квантовой механики в 1920-х?" Авторам потребовалось около полутора лет, чтобы осмыслить вопрос. Ответ можно разделить на две части, относящиеся каждая к своему предельному случаю.

Первый случай: расщепление 2Δ вещественных частей собственных значений частоты примерно в 10 раз больше ширины линии дипольно-активного перехода. В этом

случае подавленное поглощение на длине волны λ_0 "старого резонанса" ничуть не удивительно. Наивная сумма двух отстроенных на Δ лоренцевских кривых дает коэффициент поглощения, подавленный фактором $4(\Gamma/\Delta)^2 = 1/25$. Современная теория предсказывает уменьшение поглощения не до 4% от исходного, а до точного нуля. По-видимому, творцы квантовой механики имели много других забот в 1920-х, нежели предсказывать 4-процентные поправки к интуитивно ясному ответу.

Второй случай: расщепление 2Δ вещественных частей собственных значений частоты примерно в 10 раз меньше ширины линии Γ . Здесь переход от поглощения к прозрачности на "старой" резонансной длине волны λ_0 совершенно драматический: 100-процентно подавленное поглощение, до точного нуля (если состояние $|2\rangle$ в самом деле метастабильное). Это следует сравнить с наивным суммированием двух слабо сдвинутых (т.е. сильно перекрывающихся) лоренцевских контуров; процедура наивного суммирования практически не меняет поглощения. Так почему же творцы квантовой механики не заметили такой драматически сильный эффект? Вот наша гипотеза.

Лишь в 1900-х годах А. Майкельсон продемонстрировал своими опытами, что спектральные линии атомов обладают конечной шириной и структурой. В те годы люди и представить себе не могли², что когда-нибудь можно будет исследовать особенности спектра, более узкие, чем радиационная ширина: ведь и последняя еще не была прямо измерена вплоть до первых опытов с эффектом Ханле [18]. Между тем творцы квантовой механики очень гордились своим пониманием *принципа спектроскопической устойчивости* и всячески пропагандировали его в литературе. Этот принцип в нашем (Б.Я.З. и М.Дж.С.) примитивном понимании (и/или изложении) звучит так: малые возмущения в системе могут значительно изменить спектральную и поляризационную структуру линии поглощения, но интеграл от коэффициента поглощения β по частоте $\int \beta(\omega) d\omega$ не меняется, если возмущения малы. И в самом деле, уже небольшое спектральное "размазывание" ЭИП-профиля с его глубоким, но очень узким провалом полностью "убивает" это драматическое явление, ЭИП, при $\Delta \ll \Gamma$. Таким образом, в пределах спектрального разрешения своего времени творцы квантовой механики подсознательно чувствовали правильный результат: малое расщепление ($2\Delta \ll \Gamma$) не должно ни на что влиять.

6.8. Несущая и огибающая, x/y -биения и спин $1/2$ в квантовой механике

В разделе 4.6 мы продемонстрировали явление, на первый взгляд неожиданное: огибающая биений меняет знак после одного периода биений T_B и возвращается к исходному значению лишь после $2T_B$, т.е. после двух полных периодов биений. Ряд других физических систем демонстрируют такое же поведение.

Первый пример — частица со спином $1/2$. Рассмотрим волновую функцию состояния, соответствующего z -проекции m_z углового момента. Вращение системы координат на угол φ вокруг оси z приводит к умножению указанной волновой функции на фактор $\exp(im_z\varphi)$.

Поскольку $m_z = +1/2$ или $m_z = -1/2$ для частицы со спином $1/2$, то вращение на угол $\varphi = 360^\circ$ меняет знак волновой функции, и лишь после вращения на 720° волновая функция возвращается к своему исходному значению.

Второй пример — так называемый 2π -импульс, который можно рассматривать как вращение вокруг определенной оси координат в пространстве эквивалентного спина. Этот 2π -импульс, хорошо известный в магнитном резонансе, а впоследствии и в оптике двухуровневых систем, описывается следующим решением уравнения Шрёдингера для амплитуд $c_1(t)$ и $c_2(t)$:

$$c_1(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2}, \quad c_2(t) = i \sin \frac{\varphi(t)}{2},$$

$$\varphi(t) = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (24)$$

Элементы матрицы плотности

$$\rho_{11}(t) = |c_1(t)|^2, \quad \rho_{22}(t) = |c_2(t)|^2,$$

отвечающие заселенностям, а также "поляризация"

$$\rho_{21}(t) = c_2(t)c_1^*(t)$$

приходят к исходным значениям по воздействию 2π -импульса, т.е. импульса с $\varphi(\infty) = 2\pi$. Между тем сами амплитуды $c_1(t)$ и $c_2(t)$ обе меняют знак при $\varphi = 2\pi$; их знак восстанавливается лишь после двух полных 2π -импульсов. Эта смена знака не наблюдаема, если иметь дело с действительно двухуровневой системой. Именно присутствие других уровней (как присутствие маятника сравнения на несущей частоте в разделе 4.6) позволяет обнаружить наблюдаемые эффекты, включая столь важный эффект ЭИП.

6.9. Электромагнитно индуцированная прозрачность: временной подход

Рассмотрим снова простейшую схему ЭИП, показанную на рис. 11. Сильная вспомогательная волна накачки возбуждает быстрые осцилляции Раби с угловой частотой $\Omega_{12} = d_{12}E_{12}/\hbar$ между уровнями 1 и 2. Исходно, однако, эти уровни не заселены, и потому накачка легко проникает в среду на всю ее глубину. Исходно заселенность в системе имеется только в состоянии $|0\rangle$. Поле слабого сигнала направляется в среду на частоте сильного перехода ω_{01} , и если бы накачки не было, то этот переход приводил бы к сильному поглощению поля $E(\omega_{01})$.

Если сигнальное поле резко включено в момент $t = 0$, а исходная шрёдингеровская амплитуда $c_0(0) = 1$, то амплитуда $c_1(t)$ начинает нарастать как $id_{01}E_{01}t/(2\hbar)$. Именно этот фактор i определяет (в случае без накачки) положительную мнимую часть наведенного диполя и тем самым сильное поглощение на ω_{01} . Однако эта амплитуда c_1 с ее фазой $i = \exp(i\pi/2)$, будучи подвержена действию накачки E_{12} , меняет знак после одного цикла осцилляций Раби через уровень $|2\rangle$ и обратно на уровень $|1\rangle$; см. выше раздел 6.8. Это значит, что поглощение сменяется стимулированным излучением после одного цикла осцилляций Раби. Поглощение точно компенсируется излучением после усреднения по многим периодам осцилляций Раби.

² Цитируя известную в русском языке формулировку: а что такое квадратный трехчлен, я и представить себе не могу.

Конкретная демонстрация этой идеи с использованием модели, рассмотренной в разделе 6.1 (и реализованной в опытах), может служить иллюстрацией метода Рамзи с разделенными полями в магнитном резонансе и в атомных часах. Следует начать с маятником в состоянии покоя и "включить" силу в направлении $+45^\circ$ на частоте несущей. Эту силу надо включить лишь на короткий промежуток времени $\delta t \ll T_B$ и затем выключить. После этого следует дождаться полного цикла биений $t = T_B$ и снова включить ту же силу в направлении $+45^\circ$ на той же несущей частоте. Важно, чтобы сигнал-генератор продолжал выдавать монохроматическое напряжение на той же частоте несущей и с той же фазой; нужно лишь не подводить этот сигнал к микро-вентильаторам в промежутке между первым и вторым импульсами. Этот второй импульс монохроматической силы оказывается с такой фазой по отношению к имеющимся осцилляциям, что в результате маятник почти точно останавливается.

6.10. Теорема Вигнера – фон Неймана о непересечении уровней

Квантовомеханическая теорема о непересечении молекулярных термов с одинаковой симметрией, сформулированная в 1929 г. Вигнером и фон Нейманом, может быть проиллюстрирована с помощью двухчастотного маятника на вращающейся платформе.

Возьмем сначала маятник с единой точкой подвеса, центрированной по оси платформы, и начнем эту платформу вращать. С точки зрения наблюдателя, в этой вращающейся системе координат каждое из двух циркулярно поляризованных движений является собственной модой (см. раздел 5.3). Попутное вращение маятника и платформы приводит к отрицательному "вращательному эффекту Доплера": частота вращения по отношению к платформе равна

$$\omega_{\text{попутное}} = \omega_0 - \Omega,$$

где Ω — угловая скорость вращения платформы по отношению к неподвижной лаборатории. Противовращение воспринимается как положительный "вращательный эффект Доплера"

$$\omega_{\text{противо}} = \omega_0 + \Omega.$$

Рассмотрим теперь двухчастотный маятник, обладающий ненулевым расщеплением собственных частот,

$$\omega_x - \omega_y = 2\Delta > 0,$$

т.е. $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Delta$ при нулевой угловой скорости платформы, т.е. при $\Omega = 0$. Если, однако, платформа вращается достаточно быстро, $\Omega \gg \Delta$, то ситуация снова должна быть практически той же, что и для маятника с единой точкой подвеса. Возникает вопрос: пересекутся ли две кривые, представляющие собственные значения, $\omega_1(\Omega, \Delta)$ и $\omega_2(\Omega, \Delta)$? Теорема из квантовой механики говорит нам, что они, наверное, не пересекутся.

Здесь, как и ранее в разделе 6.3, мы не будем выводить укороченные уравнения для медленных комплексных амплитуд из второго закона Ньютона, а "подберем" их в такой форме, чтобы они давали правильные решения в предельных случаях.

Мы ожидаем, что одноподвесный маятник, рассматриваемый во вращающейся (Ω) системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}$,

должен описываться решениями вида

$$\tilde{a}_x(t) = \tilde{a}_x(0) \cos(\Omega t) - \tilde{a}_y(0) \sin(\Omega t),$$

$$\tilde{a}_y(t) = \tilde{a}_x(0) \sin(\Omega t) + \tilde{a}_y(0) \cos(\Omega t).$$

Следующая элементарная система уравнений действительно дает такое решение:

$$\frac{d\tilde{a}_x}{dt} = -\Omega \tilde{a}_y(t), \quad \frac{d\tilde{a}_y}{dt} = \Omega \tilde{a}_x(t).$$

В результате система уравнений для $\tilde{a}_x(t), \tilde{a}_y(t)$ с учетом и расщепления $2\Delta = \omega_x - \omega_y$, и вращения (силы Кориолиса) приобретает вид

$$\frac{d\tilde{a}_x}{dt} + i\Delta \tilde{a}_x + \Omega \tilde{a}_y = 0,$$

$$\frac{d\tilde{a}_y}{dt} - i\Delta \tilde{a}_y - \Omega \tilde{a}_x = 0.$$

Собственные решения этой системы, т.е. решения с временной зависимостью $\exp(-i\mu t)$, дают два собственных значения, $\mu_{12} = \pm(\Delta^2 + \Omega^2)^{1/2}$. С учетом того, что радиус-вектор $\tilde{\mathbf{r}}$ в плоскости $(\tilde{x}, \tilde{y})$ записывается в форме

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = 0,5[\tilde{\mathbf{a}}(t) \exp(-i\omega_0 t) + \tilde{\mathbf{a}}^*(t) \exp(i\omega_0 t)],$$

мы получаем две собственные частоты,

$$\omega = \omega_0 + (\Delta^2 + \Omega^2)^{1/2}, \quad \omega = \omega_0 - (\Delta^2 + \Omega^2)^{1/2}.$$

Справедливость этой теоремы демонстрируется с помощью адиабатического перехода модового состояния маятника от $\Omega = 0$ к $\Omega \gg \Delta$. Соответствующий опыт прост, но требует весьма плавного углового ускорения от нулевой угловой скорости до ее конечного значения. Начинаем, например, с возбужденной низкочастотной моды при $\Omega = 0$; постепенное угловое ускорение платформы оставляет моду низкочастотной же, но при $\Omega \gg \Delta$ эта мода отвечает попутному вращению маятника и платформы. И наоборот, начиная с высокочастотной моды при $\Omega = 0$, демонстратор постепенно ускоряет вращение платформы, и результатом является высокочастотная же мода, которая при $|\Omega| \gg \Delta$ отвечает противовращению. Возможность предсказать, что в конце получится круговое движение, и притом заранее предписанного знака, обычно вызывает положительные эмоции среди слушателей; в особенности среди искушенных любителей математики и квантовой механики.

6.11. Нелинейная самопрецессия эллипса: количественное рассмотрение

Мы воспользуемся обозначениями из уравнений (8), (9) для малых отклонений в x - и y -направлениях. Запишем уравнение для медленно меняющегося комплексного вектора огибающей $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ с учетом нелинейности в первом неисчезающем порядке, т.е. в третьем порядке по амплитуде:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -i\omega_0 \left(\frac{1}{8L^2} \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*) \mathbf{a} + i\omega_0 \left(\frac{3}{16L^2} \right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^* + O(a^4). \quad (26)$$

Существуют различные способы вывода этого уравнения. Метод, которым мы сейчас воспользуемся, весьма

типичен для теоретической нелинейной оптики. Запишем уравнение в третьем порядке феноменологически, с неизвестными коэффициентами и с наиболее общей структурой, допускаемой аксиальной симметрией и инвариантностью относительно сдвига по времени:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = c_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*)\mathbf{a} + c_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}^* . \quad (27)$$

Рассмотрим теперь частные случаи.

1. Движение в плоскости; например, $a_y(t) \equiv 0$, $a_x(t) \neq 0$. Плоское движение маятника с учетом нелинейности является стандартной задачей классической механики (см., например, [19]). Максимальный угол отклонения $\varphi_{\max}$ (амплитуда в одну сторону) связан с комплексной амплитудой a_x соотношением

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{|a_x|}{L} \approx \frac{|a_x|}{L} .$$

Уравнение движения плоского маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 , \quad (28)$$

и, как показано в многочисленных учебниках по механике, частота слабо нелинейных колебаний уменьшается с амплитудой:

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{\varphi_{\max}^2}{16} + O(\varphi_{\max}^4) \right] \approx \omega_0 \left[1 - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*}{16L^2} + O(\varphi_{\max}^4) \right] . \quad (29)$$

Отметим, что использование комплексных медленно меняющихся амплитуд из уравнений (8), (9) значительно облегчает получение результата (29) из уравнения (28). Вот как выглядит этот путь. В первом исчезающем по нелинейности приближении уравнение сводится к

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi \approx \frac{\omega_0^2 \varphi^3}{3!} .$$

Представим вещественную функцию $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = 0,5[\psi(t) \exp(-i\omega_0 t) + \psi^*(t) \exp(i\omega_0 t)] ,$$

где $\psi(t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, $\varphi_{\max} = |\psi|$. Тогда "укороченное" уравнение для $d\psi/dt$ получается, если пренебречь членами $d^2\psi/dt^2$, и приобретает вид

$$-2i\omega_0 \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_0^2}{6} 2\langle \varphi^3(t) \exp(i\omega_0 t) \rangle_t ,$$

где $\langle \rangle_t$ означает усреднение по многим периодам $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Подстановка выражения φ через ψ и усреднение как раз и дает

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{i\omega_0 |\psi|^2 \psi}{16} .$$

2. Движение частицы на нитке по кругу рассматривается в школьном курсе физики. Вращению маятника по конусу с углом $\varphi_{\max}$ от вертикали отвечает

$$a_x = L\varphi_{\max} , \quad a_y = \pm iL\varphi_{\max} ,$$

так что

$$\varphi_{\max}^2 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*}{2L^2} , \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 .$$

Частота такого конического вращения равна

$$\begin{aligned} \omega_{\text{конич. вращ.}} &= \omega_0 (\cos \varphi_{\max})^{-1/2} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\varphi_{\max}^2}{4} \right) = \\ &= \omega_0 \left\{ 1 + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*}{8L^2} \right\} , \end{aligned} \quad (30)$$

так что $c_1 = -i\omega_0/(8L^2)$, откуда вместе с уравнением (29) и следует уравнение (26).

Возвращаясь к эффекту самопрецессии эллипса, обозначим через x_1/L и x_2/L максимальный и минимальный углы отклонения маятника от вертикали соответственно при эллиптически поляризованном движении. Тогда нетрудно убедиться с помощью прямой подстановки, что следующий зависящий от времени комплексный вектор $\mathbf{a}(t)$ является решением векторного уравнения (26):

$$\mathbf{a}(t) = \exp(i\mu t) [x_1 \mathbf{e}_1(t) + ix_2 \mathbf{e}_2(t)] , \quad (31)$$

$$\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{e}_x \cos(\Omega t) + \mathbf{e}_y \sin(\Omega t) , \quad (32)$$

$$\mathbf{e}_2(t) = -\mathbf{e}_x \sin(\Omega t) + \mathbf{e}_y \cos(\Omega t) ,$$

$$\mu = \frac{\omega_0}{16} \frac{x_1^2 + x_2^2}{L^2} , \quad \Omega \equiv \Omega_{\text{прецессии}} = \frac{3\omega_0}{8} \frac{x_1 x_2}{L^2} . \quad (33)$$

Задача о движении по сфере (т.е. о сферическом маятнике) имеет хорошо известное аналитическое решение, которое находится с использованием законов сохранения энергии и z -компоненты углового момента. Следует заметить, однако, что задача *не сводится* к какой бы то ни было эквивалентной задаче о движении частицы в слабонегармоническом потенциале. Причина несводимости состоит в том, что для сферического маятника нелинейность возникает не только из-за члена потенциальной энергии в лагранжиане (или гамильтониане); член кинетической энергии также содержит неустраняемую нелинейность. В этом, по-видимому, и состоит причина того любопытного факта, что весьма простые выражения (31)–(33) отсутствуют в учебниках по классической механике; по крайней мере, нам нигде не удалось их найти.

6.12. Генерация второй гармоники

И для этого важного оптического процесса можно найти аналог в движении нашего маятника. Прежде всего, следует очень точно настроить маятник на отношение $\omega_x/\omega_y = 2$, т.е. $L_x/L_y = 1/4$; без этого слабое нелинейное взаимодействие не сможет преодолеть даже умеренную невязку частот $\delta = 2\omega_y - \omega_x$. Здесь положение весьма схоже с необходимостью добиваться фазового синхронизма в кристаллах, используемых для генерации второй гармоники света.

Далее, необходимо создать нелинейность такого типа, которая была бы несимметричной по отношению к замене $x \rightarrow -x$ или $y \rightarrow -y$, подобно требованию нецентросимметричности кристалла для $\chi^{(2)}$ -нелинейности в оптике. Для сравнения, в разделах 5.2. и 6.11 мы рассматривали эффекты, аналогичные оптическим нелинейностям $\chi^{(3)}$; последние не приводят к генерации второй гармоники света. Простейший способ организовать $\chi^{(2)}$ -нелинейность в маятнике — подставить палец (или карандаш, или нож) вблизи вертикального положения равновесия шнура. Тогда для одной половины периода, например, для $y > 0$, "период" отвечает полной длине маятника (от точки подвеса до грузика), а для

другой половины "период" отвечает укороченной длине (от пальца до грузика). К сожалению, хотя такая геометрия и приводит к появлению компоненты силы на частоте $2\omega_y$, проекция этой силы на направление x -моды (для которой $\omega_x = 2\omega_y$) равна нулю. Это напоминает необходимость выбрать в оптике такую компоненту $\chi^{(2)}$, которая требуется для осуществления синхронного взаимодействия o - и e -волн. Мы для этого помещали два небольших препятствия с противоположных сторон шнурков, соединяющих раму с центральным узлом.

Вот, что при этом удается наблюдать. При малой амплитуде y -колебаний на частоте накачки ω_y перекачки энергии в x -моду ($\omega_x = 2\omega_y$) не было заметно за все время наблюдения, порядка 4 мин, вплоть до практически полного затухания y -колебаний. При амплитуде накачки $y \approx 0,2L$ (φ , около 0,2 рад) было видно заметное возбуждение x -моды, т.е. второй гармоники, за время быстрее 30 с. К сожалению, сам опыт был сравнительно трудным: требовалось перевязать узел на шнурке в новое положение и точно настроить отношение $\omega_x/\omega_y = 2$. К тому же, результат опыта вызывал энтузиазм лишь у тех, кто профессионально имел дело с генерацией второй гармоники света.

7. Заключение

Мы полагаем, что рассмотренные выше опыты с маятником позволяют лучше понять и представить себе многочисленные явления в физике, в теории колебаний и в особенности в оптике. На наш взгляд, это инструмент с весьма широким образовательным диапазоном: он позволяет учителю доставить нечто интересное, доступное пониманию и доставляющее положительные эмоции на почти любом уровне кривой обучения³, от младших школьников до научных работников. Авторы успешно использовали этот маятник в обучении на протяжении многих лет. Microsoft Power Point презентацию, описывающую этот прибор в картинках, можно получить по адресу: http://admin.optics.ucf.edu/Soileau_Zeldovich_pendulum.ppt. Предложения по дальнейшим модификациям и опытам будут встречены с признательностью.

Благодарности

Двухчастотный маятник, привязанный к паре гвоздей в дверном проеме, был частью обучения детей физике в семье покойного Я.Б. Зельдовича, где в 1950-х один из авторов (Б.Я.З.) и подхватил основную идею. Такая же подвеска использовалась, как выяснилось из дискуссий в 1990-х, в некоторых университетах США и Израиля и, вероятно, в других странах. Целый ряд идей из оптики, которые впоследствии были проиллюстрированы с помощью маятника, Б.Я.З. почерпнул от И.И. Собельмана и его коллег В.А. Алексеева, А.В. Виноградова, Т.Л. Андреевой, а также от С.Г. Раутиана. Идея вращающейся платформы возникла во время работы Б.Я.З. в Лаборатории нелинейной оптики ИЭФ УРО РАН и Челябинского политехнического института (ныне ЮУрГУ); Б.Я.З. глубоко признателен Г.П. Вяткину, Г.А. Месяцу, Н.Д. Кундиковой, В.П. Кривошекову,

Ю.Е. Капицкому и В.П. Бескачко за творческую атмосферу и конкретную помощь. Мы благодарны профессорам, сотрудникам и аспирантам Колледжа оптики и фотоники КРЕОЛ Университета центральной Флориды в Орlando за поддержку и помощь в дальнейшей разработке этого инструмента обучения; вот имена части из них: М.А. Болштынский, А.А. Гун, О.М. Ефимов, Э. Парк, А.Ю. Савченко, Э.В. ван Страйланд, Дж. Мохарам, П. Копенхавер.

8. Приложения

8.1. Фигуры Лиссажу и маятник Фуко (к разделу 4.2)

Старшие участники опытов часто заявляют, что это маятник Фуко и что наблюдаемые движения *суть* фигуры Лиссажу⁴. Вниманию учителя: *оба* эти утверждения не верны. Маятник Фуко был предназначен для демонстрации факта вращения Земли без наблюдения за Солнцем, Луной или звездами. Будучи установленным на Северном или Южном полюсе, маятник Фуко должен сохранять плоскость колебаний в системе координат удаленных звезд. В результате для наблюдателя на Земле плоскость колебаний медленно проворачивается: один проворот за 24 ч. Менее тривиальным является факт, продемонстрированный Фуко: подобное же вращение должно наблюдаться и в любой другой точке Земли, но угловая скорость прецессии уменьшается (умножается на фактор $\sin \theta$, где θ — географическая широта; $\theta = \pm 90^\circ$ на Северном и Южном полюсах соответственно⁵). С нашей точки зрения, этот результат гораздо легче получить, разложив полный вектор угловой скорости Земли $\Omega = \Omega_{\text{Земли}} \mathbf{e}_z$ на две компоненты: нормальную и тангенциальную по отношению к локальной поверхности Земли:

$$\Omega = \Omega_{\text{Земли}}(\mathbf{n} \sin \theta + \mathbf{t} \cos \theta).$$

Вслед за этим нужно сказать, что в линейном по Ω приближении срабатывает лишь нормальная компонента, $\Omega_{\text{Земли}} \sin \theta \mathbf{n}$, и свести задачу к очевидному случаю Северного полюса. То же можно сказать и об эффекте фарадеевского вращения плоскости поляризации средой, когда магнитное поле наклонено по отношению к направлению $\mathbf{n}$ распространения света: в линейном по $\mathbf{B}$ приближении срабатывает лишь продольная компонента $\mathbf{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})$.

Для того чтобы маятник мог использоваться в опыте Фуко, он должен удовлетворять по крайней мере двум условиям. Во-первых, будучи возбужден, свободные колебания должны продолжаться по меньшей мере четверть часа; в противном случае нечего будет наблюдать (напомним, что $\Omega_{\text{Земли}} = 15$ град ч^{-1}). Обычно для

⁴ Согласно легендам, покойный академик Шальников, делая вид, что нечто выше его понимания, шутил: "Ну, это уже фигуры Лиссажу" (т.е. фигуры высшего пилотажа).

⁵ К сожалению, вывод этого простого фактора затуманен в большинстве учебников избыточным употреблением векторного произведение для силы Кориолиса. Цитата из книги В.И. Арнольда "Математические методы классической механики", 3-е изд., раздел 45.Г, примечание: "Почти во всех учебниках, даже в лучших, этот принцип [Мопертюи] представлен так, что его нельзя понять" (Якоби К. Лекции по динамике. 1842–1843. — М.–Л.: ОНТИ, 1936). В.И. Арнольд продолжает: "Не решаюсь нарушить традицию".

³ "А как у вас с кривой проституции?" — с надеждой в голосе спросил Остап. "Неуклонно снижается", — ответил неумолимый экскурсовод.

этого маятник Фуко делают очень тяжелым (> 50 кг) и с длиной подвеса $L > 10$ м. Во-вторых, конструкция подвеса должна гарантировать сохранение поляризации, если бы можно было пренебречь вращением Земли. Наш маятник не проходит ни по одному из этих критериев: малый габарит и вес приводят к сравнительно большому затуханию и к почти полной остановке маятника примерно после 7 мин колебаний; кроме того, по самой конструкции плоскость колебаний нашего маятника периодически меняется примерно каждые полминуты, без какого-либо влияния вращения Земли или платформы.

Фигуры Лиссажу — это параметрические кривые, для которых координаты x и y меняются во времени как синусоидальные функции *соизмеримых* частот. Наше механическое устройство не предоставляет удобной возможности запомнить сложную траекторию; его преимущество как раз в том и состоит, что в каждый данный момент времени видна простая картина: эллипс определенной ориентации с определенным отношением полуосей. Для демонстрации фигур Лиссажу удобнее использовать электронный осциллограф или компьютерную графику.

8.2. Приложение к разделу 4.2

Аналогия маятника с распространением света в одноосных кристаллах. Следует наклонить раму, так что концы шнура окажутся привязанными к двум точкам разной высоты. Внимательное рассмотрение показывает, что "высокая" частота f_x не меняется (аналогично обыкновенной волне), в то время как "низкая" частота f_y несколько уменьшается при отклонении рамы от горизонтальности (аналогично необыкновенной волне в одноосном кристалле). Вычисление $f_y(\theta)$ является неплохим упражнением по классической механике; нам оно в учебниках не попадалось. К сожалению, эта аналогия поверхностна, так как соответствующие уравнения в механике и в оптике решительно отличаются.

8.3. Адиабатическое/неадиабатическое следование (к разделу 4.4)

Вот весьма примитивный пример различия между быстрыми (антиадиабатическими) и медленными (адиабатическими) процессами: движение автомобиля в двух различных условиях. В первом случае машина быстро едет по льду, где поворот дороги обозначен неглубокими

канавками колеи. Инерция не позволяет машине повернуть, т.е. изменить направление вектора скорости, поскольку сцепление со льдом плохое, колеса проскальзывают; в результате машина продолжает двигаться прямо "в абсолютном пространстве", игнорируя мелкую колею. В другом случае машина медленно едет по разбитой полевой дороге с глубокой колеей. Здесь машина следует повороту дороги "адиабатически", даже если шофер (водитель) пытается крутить баранку в прямом направлении. К сожалению, эта аналогия тоже поверхностна, без сходства определяющих уравнений.

Список литературы

1. Ландсберг Г С *Оптика* 5-е изд. (М.: Наука, 1976)
2. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* 2-е изд. (М.: Наука, 1973)
3. Ахманов С А, Никитин С Ю *Физическая оптика* (М.: Изд-во МГУ, 1998)
4. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* 2-е изд. (М.: Наука, 1990)
5. Сивухин Д В *Общий курс физики* Т. 4 *Оптика* 2-е изд. (М.: Наука, 1980)
6. Hecht E *Optics* 3rd ed. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1998)
7. Ландсберг Г С *Элементарный учебник физики* Т. III, 13-е изд. (М.: Наука, 2003)
8. Minnaert M G J *Light and Color in the Outdoors* (New York: Springer-Verlag, 1993) [Минарт М Г *Свет и цвет в природе* (М.: Наука, 1969)]
9. Пикин С А, Блинов Л М *Жидкие кристаллы* (Библиотечка "Квант", Вып. 20) (М.: Наука, 1982)
10. Горелик Г С *Колебания и волны* (М.: Физматгиз, 1959)
11. Зельдович К Б, программный продукт "freeware SQUARE PULSE", © К.Б.З., может быть получен бесплатно по запросу, адресованному на zeld@polly.phys.msu.ru
12. Блинов Л М *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов* (М.: Наука, 1978); Blinov L M, Chigrinov V G *Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials* (New York: Springer-Verlag, 1994)
13. Yeh P, Gu C *Optics of Liquid Crystal Displays* (New York: Wiley, 1999); Wu S-T, Yang D-K *Reflective Liquid Crystal Displays* (Chichester: Wiley, 2001)
14. Maker P D, Terhune R W, Savage C M *Phys. Rev. Lett.* **12** 507 (1964)
15. Tam A C, Au C K *Opt. Commun.* **19** 265 (1976)
16. Hakuta K, Marmet L, Stoicheff B P *Phys. Rev. Lett.* **66** 596 (1991)
17. Harris S E, Field J E, Imamoglu A *Phys. Rev. Lett.* **64** 1107 (1990)
18. Scully M O, Zubairy M S *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997) Ch. 7
19. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* 5-е изд. (М.: Наука, 2004); Goldstein H *Classical Mechanics* 2nd ed. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1980) [Голдстейн Г *Классическая механика* (М.: Наука, 1975)]

Bi-frequency pendulum on a rotary platform: modeling various optical phenomena

B.Ya. Zeldovich, M.J. Soileau

University of Central Florida, College of Optics and Photonics/CREOL,
4000 Central Florida Blvd, Orlando, FL 32816-2700, USA
Tel. (407) 823-68 31, (407) 823-55 38. Fax (407) 823-68 80
E-mail: boris@creol.ucf.edu, mj@mail.ucf.edu

The teaching of optical phenomena can be enhanced through the use of analogies to the motion of a bi-frequency pendulum. In this text we target demonstrations to four groups of students and scientists: kindergarten students to high school seniors; high school freshmen to university seniors; university sophomores to 5th year graduate students of Physics, Optics and Engineering; 2nd year graduate students to research scientists. The main difference between the groups is in the level of mathematics required to make the analogy to optical phenomenon. Most of the physical ideas may be understood and appreciated even in middle school and serve as a motivation for deeper study of mathematics and science.

PACS numbers: **01.50. -i**, **42.25. -p**, **42.65. -k**

Bibliography — 19 references

Received 2 April 2004, revised 8 August 2004