

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Физические интерпретации элементов алгебры изображения

В.А. Утробин

*Рассматриваются физико-математические аспекты базовых преобразований алгебры изображения, ее элементов и групп, позволяющие обосновать некоторые процессы врожденных механизмов системы зрительного восприятия.*

PACS numbers: 02.10.-v, 42.30.Tz

### Содержание

1. Введение (1089).
2. Постановка задачи (1091).
3. Полевые представления на планигоне (1094).
4. Функциональные пространства в алгебре изображения (1096).
5. Пространственные свойства элементов алгебры (1099).
6. Симметрические свойства элементов алгебры (1103).
7. Заключение (1104).

Список литературы (1104).

### 1. Введение

Основной объем информации об окружающей среде мы как наблюдатели получаем с помощью системы зрительного восприятия. Считается, что последняя не является объектом физических исследований, поскольку оптические свойства глаза полностью определены еще Г. Гельмгольцем, а что происходит со зрительной информацией далее — продукт "нефизических" исследований. Такой формальный подход не позволяет раскрыть общую проблему отображения внешнего физического мира с его законами на "внутренний мир" системы восприятия, без которой мы (наблюдатели) не сможем не только понимать видимое, но и ходить и ориентироваться во внешнем для нас пространстве. Поэтому система зрительного восприятия, понимаемая в целом, необходимо должна быть адекватной внешней среде, т.е. удовлетворять физике пространства и времени с их законами сохранения (симметрии). Далее, зрительное восприятие, понимаемое в целом, должно быть достаточным для того, чтобы правильно судить об увиденном и выживать во внешней среде. Последнее означает, что

система зрительного восприятия (в составе с другими — система восприятия) по сложности не должна уступать сложности среды, в которую мы погружены. Отсюда следуют два положения, накладываемые на систему зрительного восприятия и определяющие ее необходимые и достаточные свойства.

Во-первых, изображение — объект исследования, соответствующий физическим объектам с их объективными законами и свойствами пространства и времени.

Во-вторых, сложность системы зрительного восприятия как системы идентификации не должна уступать "физическими сложности" объекта исследования.

Именно врожденность механизмов зрительного восприятия (без обучения) обуславливает общность законов преобразований в зрительной системе — продукте природы [1]. Поэтому известные физические законы природы — это законы, которым подчинена организация (с позиций информационных преобразований) системы зрительного восприятия. Познав ее, следует ожидать получения новых закономерностей и информационных технологий обработки изображений. Необходимость последних обусловлена возросшей сложностью решаемых задач, требующих анализа не столько одномерных сигналов, сколько различного рода скалярных и векторных полей. Такие поля легко представимы изображениями в заданной двумерной области определения (поле зрения). Однако большинство задач обработки изображений относятся к классу некорректных. Например, выделение границы объекта с использованием пространственной фильтрации проблематично, поскольку эта операция усиливает любой высокочастотный шум и тем самым затрудняет принятие правильного решения о границе.

Если для линейных задач существуют методы регуляризации (например, регуляризация по Тихонову [2]), то для нелинейных общие подходы неизвестны [3]. Однако хорошо известен метод решения задачи анализа формы объекта изображения с использованием метода переменного разрешения [4]. Яркий исторический пример — загадка Сатурна, решенная Х. Гюйгенсом с использованием телескопа с большей разрешающей способностью, чем у телескопа Галилея, и достаточным увеличением. Последний принял кольца Сатурна за два боковых

В.А. Утробин. Нижегородский государственный технический университет  
603600 Нижний Новгород, ул. Минина 24,  
Российская Федерация  
Тел. (8312) 36-82-28. Факс (8312) 36-23-11  
E-mail: utrobin-va@yandex.ru

Статья поступила 11 апреля 2003 г.,  
после доработки 15 февраля 2004 г.

придатка, "поддерживающих" Сатурн, а когда кольца стали видны как тонкая линия, их не заметил и более о них не упоминал [5]. В физике данный метод — это описание сред и процессов как грубой системы с последующим более тонким ее анализом.

Нами предлагается новая технология обработки изображений, исключающая проблему регуляризации благодаря использованию "глубокого" интегрального преобразования ( $Q$ -преобразования), отображающего все изображение в целом в абсолютно гладкое многообразие с последующим "многомерным" пространственным дифференцированием, выявляющим на многообразии дифференциальные структуры описания объектов изображения и их связей. Уточнение деталей изображения (при необходимости) реализуется на пирамиде переменного разрешения [6]. На рисунке 1 схематично показано действие метода при решении задачи анализа формы Сатурна.

В статье рассматриваются физико-математические операции реализации предлагаемого метода.

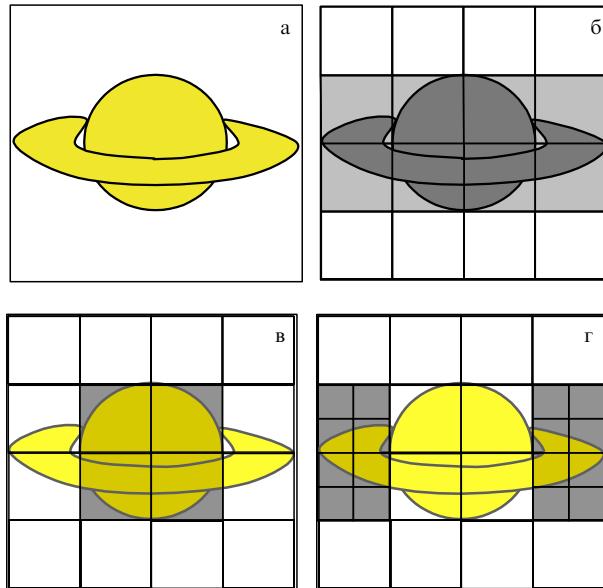
Для большинства задач, решаемых при анализе изображений, совершенно непригодны модели классификации, используемые в теории распознавания образов и машинном восприятии, так как они не позволяют учитывать априорную структурированность изображения как объекта исследования. Именно структура (форма) позволяет описывать изображения. Например, при анализе фотографий следов частиц в пузырьковой камере требуется не просто классификация, а описание картины [7]. Такое описание должно содержать информацию как об отдельных частях картины, так и о связях между ними. Сходные проблемы возникают при анализе знаков, фигур, форм для их идентификации и возможной классификации в смысле упорядочения в пределах класса. В теории восприятия подобные описания называются *композиционным анализом сцены* (картины). Именно

анализ видимой сцены, важный для автоматов типа роботов с их системами технического зрения, важен и при решении задач, связанных, например, с анализом поверхностей в разных отраслях промышленности и в научных исследованиях, при анализе результатов аэрофотосъемок поверхности Земли и других планет.

Не менее актуальна данная задача в биомедицинских исследованиях препаратов с помощью микроскопа либо других технических средств (рентгеновские, томографические установки и т.п.). Однако поставленная задача оказалась практически неразрешимой в условиях ограниченных вычислительных и временных ресурсов. Для описания структур были предприняты попытки заимствования понятий из теории формальных языков с построением лингвистических моделей [8]. Проблема модельного описания изображений оказалась значительно шире, чем предполагалось ранее. Она в определенном смысле аналогична существующей проблеме в физике нелинейных сред, где перечень открытых систем, наделенных при определенных условиях свойством самоорганизации, постоянно расширяется (вихри Тейлора, ячейки Бенара и Марангони в жидкостях,  $T$ -слои,  $E$ -и  $H$ -волокна в низкотемпературной плазме и т.п.) [9, 10]. Модельное описание таких систем необходимо требует решения вопроса о существовании относительно простых методов анализа форм. При этом важен набор простейших форм, позволяющих формировать описание сложных структур. Примером такого подхода является использование собственных функций нелинейной среды, полный набор которых обеспечен локализацией изначально непрерывного процесса (например, горения) в конечной области определения. Проблема заключается в построении многомерных собственных функций нелинейной среды для задач управления процессами в таких средах (особенно в реальном масштабе времени) и разработке законов объединения последних в более сложные структуры [10].

Излагаемый нами метод формирования структурных описаний на базе алгебры изображений, в которой существует полный набор простых форм (операторов), выступающих в роли врожденных эталонов, и правил их объединения, позволяет решать отмеченные и подобные им задачи достоверно (в смысле грубости системы) и относительно точно (на заданном уровне разрешения). Такое "грубо-точное" представление — это отражение естественной потребности упрощения изображения до относительно малого, но максимально информативного числа его частей с последующим их объединением в осмысленное образование [7].

К методическим результатам работы следует отнести также доказательство полноты элементов алгебры изображений с позиций симметрии (групп Ли и законов сохранения), обоснование вариационных принципов анализа визуально наблюдаемых сред с последующим принятием решения в пространстве эталонов и подходы к раскрытию проблемы восстановления формы объекта изображения по единственному двумерному изображению (такое восприятие для системы зрения человека называется *моностереовосприятием*). Теоретические подходы к данной проблеме (а именно задача представления непрерывных функций трех переменных суперпозицией непрерывных функций двух переменных) рассматривались А.Н. Колмогоровым и В.И. Арнольдом еще в 50-х годах прошлого века [11].



**Рис. 1.** Пример анализа формы Сатурна: (а) Сатурн и его кольца в поле зрения; (б) область определения объекта; (в) подобласть сегментации планеты; (г) подобласти уточнения геометрии колец с большой разрешающей способностью на планиграфе.

## 2. Постановка задачи

Проблематике раскрытия априорной неопределенности изображения как объекта исследования посвящена теория активного восприятия, математической базой которой является алгебра изображения [6, 12–16]. Выделим необходимые для дальнейшего изложения положения развивающейся технологии и алгебры. Во-первых, определим объект исследования.

Пусть существует наблюдатель, погруженный в среду и не искажающий эту среду. Тогда изображение  $M$  — функция наблюдателя (возникающая на сетчатке глазного яблока), удовлетворяющая следующим естественным ограничениям. Изображение — множество  $M$ , каждый элемент которого в фиксированый момент времени  $t$  есть неотрицательная действительная функция действительных аргументов (свойство наблюдаемости):

$$M_t = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{если } (x, y) \in \overline{G}, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \overline{G}, \end{cases}$$

определенная на конечном множестве точек замкнутой двумерной области  $\overline{G}$  евклидова пространства, суммируемая и квадратично интегрируемая на этом множестве (свойство измеримости), наделенном свойствами упорядоченности, структурированности и дискретности в пространстве и времени.

Таким образом, изображение в силу ограниченности области определения — это двумерный сигнал, который в фиксированный момент времени представлен функцией  $\mu(x, y)$  либо множеством точек (пикселов), где каждая координатно упорядочена и "помечена" значением этой функции.

В соответствии с принятым определением имеем два понятия изображения:

пространственное, вневременное ("пространственноподобное", статическое изображение) — функция  $\mu(x, y)$ , определенная в момент  $t \in T_N \subset T$ , где  $T_N$  — интервал наблюдения из множества  $T$ ;

пространственно-временное ("времениподобное", динамическое изображение) — функция

$$M_d = f(t, M_t), \quad 0 \leq t \leq T_N.$$

Из свойства измеримости и наблюдаемости  $M$ , (далее — просто  $M$ ) следует конечность множества  $M$ , имеющего мощность

$$k_{\max} = P^{N \times M},$$

где  $N \times M$  — размер области  $G$  (использовано свойство пространственной дискретности), а  $P$  — число градаций яркости.

Поскольку объект исследования конечен и принадлежит множеству положительных действительных чисел  $R^+$ , то множество его точек сходится в среднем квадратичном, т.е. как все изображение в целом, так и любая его подобласть определения  $G_i \subseteq G$  допускают преобразование проектирования (рис. 2)

$$m(G_i) = \iint_{(x,y) \in G_i} \mu(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Преобразование (1) определено  $Q$ -преобразованием в силу следующих свойств.

1. Преобразование применимо к любому объекту исследования любой размерности и в любом диапазоне

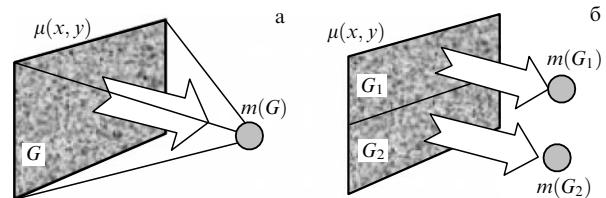


Рис. 2. Реализация  $G$ -преобразования по всей области изображения (а) и по двум ее подобластям (б).

частот, удовлетворяющем относительно слабым ограничениям определения на изображение.

2. Оно реализует отображение в действительное абсолютно гладкое пространство ( $C^\infty$ -многообразие) и допускает два модельных представления (функция (1) — средняя функция):

а) с учетом гармоничности в  $\overline{G}$  (или  $\overline{G}_i \subseteq \overline{G}$ ) имеем

$$\varphi(A) = m(B) \quad \forall A \in \overline{G};$$

б) с учетом гармоничности в  $G$  (или  $G_i \subseteq G$ ) имеем

$$\varphi(A) = m(B) \lg r,$$

где  $\varphi(A)$  — потенциал, создаваемый в произвольной точке  $A$  "зарядом" (или "массой")  $m(B)$ , определенным преобразованием (1);  $r$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

3. Преобразование фундаментально (в силу фундаментальности последовательности Коши, существующей в  $M$ ), достаточно и реализуемо. Поскольку (1) — преобразование интегрирования ( $\int$ ), то существует обратное ему — преобразование внешнего дифференцирования (d). Вместе они образуют композицию (названную нами  $U$ -преобразованием)  $U = d \circ \int$ , раскрывающую неопределенность объекта исследования — изображения  $M$  в поле зрения  $G$ .

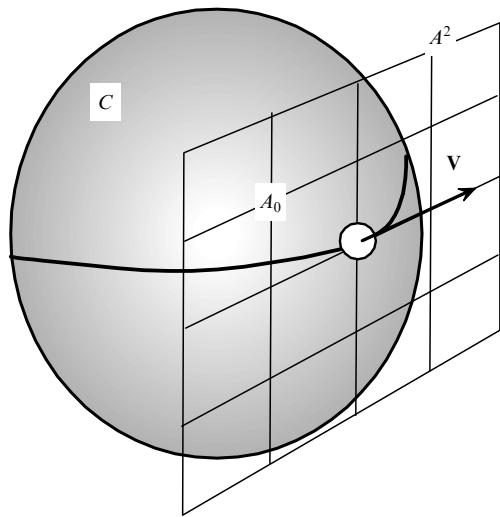
Поскольку множество  $M$  конечно, то его представление в пространстве  $N \times N \times P$  (здесь и далее для удобства принята квадратная форма области  $G$ ) определяет последнее генеральной совокупностью элементарных событий. Поэтому любое изображение из ("времениподобного") множества  $M$  равновероятно так же, как равновероятна любая точка на изображении  $M$ , а отношение между этими точками (или изображениями) — отношение эквивалентности. Поэтому любой фильтр  $F$  как покрытие  $M$  (т.е. фильтр, реализующий операцию  $d$  после реализации  $Q$ -преобразования) — это маска, построенная на разбиениях (дихотомиях) области  $G$  на гладко склеенные подобласти  $G_i$ .

С позиций римановой геометрии такой фильтр (и конечно множество таких фильтров в силу конечности  $G$ ) принадлежит касательному пространству  $A^n$  в точке  $A_0$  (рис. 3). В  $\varepsilon$ -окрестности точки касания каждому вектору из  $A^n$  соответствует дифференциальный оператор

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

на множестве направлений  $x^i$ . При этом вектор  $\nabla$  однозначно определен на разности

$$\Delta m(G) = m(G_j) - m(G_i), \quad (2)$$

Рис. 3. Планигон  $A^2$  относительно многообразия  $C$ .

где  $G = G_i \cup G_j$  — дихотомия области  $G$  на пару непересекающихся подобластей, для которых значения  $m(G_i)$  определены по (1) (см. рис. 2).

Отношение (2) позволяет выявить положение математической точки на отрезке прямой общего для подобластей направления  $x^k$  (так как касательное пространство  $A^n$  евклидово, то  $x^k = x_k$ , а поскольку оно применено к объектам из  $E^3$ , то  $n = 2$ ). Для того чтобы выявить все бинарные отношения между парой точек в области определения  $G \subset E^2$ , используя (2), необходимо изучить 16 вариантов дихотомии  $G$ , включая нулевой — единицу множества. В результате имеем:

— канонический базис векторного пространства, представляющего  $M$ :

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \quad \dots$$

$$\dots, \mathbf{e}_{15} = (0, 0, \dots, 1)^T,$$

где  $(\cdot)^T$  — транспонирование;

— множество фильтров  $\{F_i\}$ , реализующих  $\partial/\partial x^i$  по 15 направлениям  $x^i$  с получением 15-мерного вектора  $\mu = \mu_i \mathbf{e}_i$ , конструктивно определенных на двумерной функции Уолша системы Хармута<sup>1</sup> и упорядоченных на двумерной решетке  $V(x, y)$ .

Во-первых, использование функций Уолша в силу их бинарности обеспечивает простоту анализа отношений на множестве  $\{m(G_i)\}$ , упорядоченном на матрице  $[m_{ij}]_{4 \times 4}$ , так как используются простейшие операции — сложение (1) и вычитание (2). Поэтому  $U$ -преобразование имеет минимально возможную вычислительную сложность, в отличие от стандартных преобразований, требующих реализации свертки, а на уровне весовых коэффициентов — операции арифметического умножения. (Схема информационных преобразований на операциях (1), (2) приведена на рис. 5 и может использоваться по любой подобласти изображения. Например, на рис. 6 число уровней пирамиды переменного разрешения определяется необходимой точностью решения, а вариант

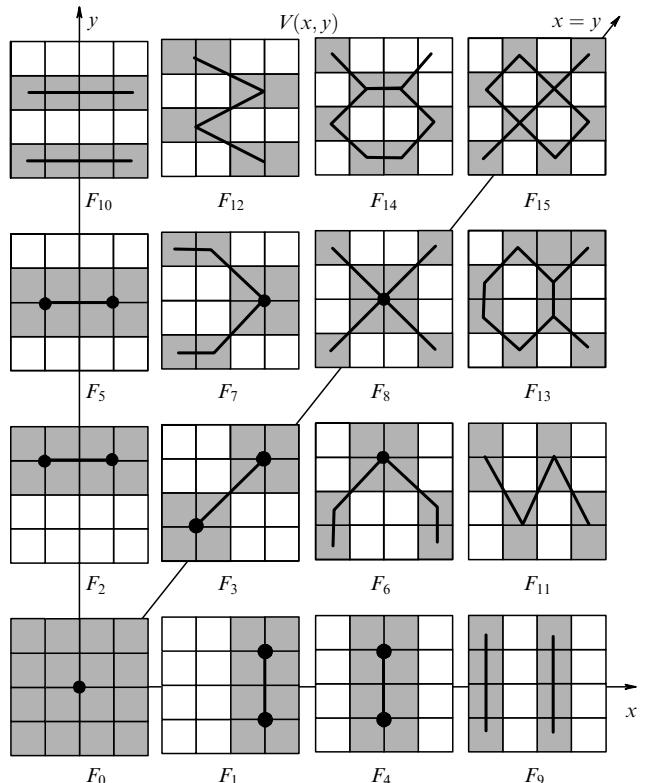
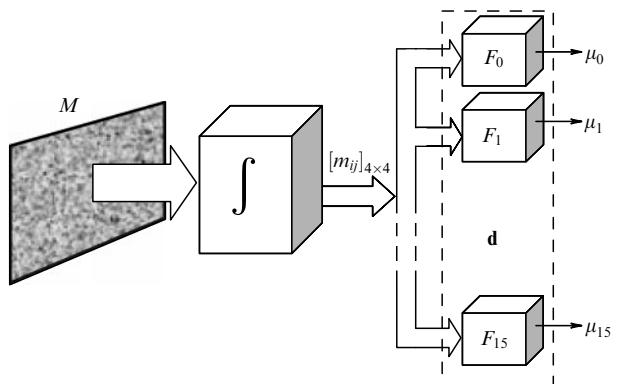
Рис. 4. Фильтры  $\{F_i\}$  и эквивалентные им операторы  $\{V_i\}$  на решетке  $V(x, y)$ .

Рис. 5. Схема информационных преобразований.

выделения необходимой подобласти — стратегией восприятия; см. рис. 1.)

Во-вторых, преобразования (1), (2) — это операции с целыми числами, и поэтому исчезает проблема накопления ошибки при округлениях.

В-третьих, преобразование (1) отображает изображение как функцию в действительное (а не мнимое) пространство, где и реализуются все остальные операции анализа.

В-четвертых, начиная анализ с верхних уровней пирамиды (см. рис. 6), где разрешающая способность нижних уровней мала, мы учитываем только низкочастотные компоненты изображения, которые и есть объекты (например, дома). В этом случае детали мелки, а шумы и помехи как бы исчезают.

Фильтры (их нумерация условна) построены на квадратном клеточном пространстве (см. рис. 4), которое

<sup>1</sup> На рисунке 4 темной области соответствует весовой коэффициент +1, а светлой — коэффициент -1.

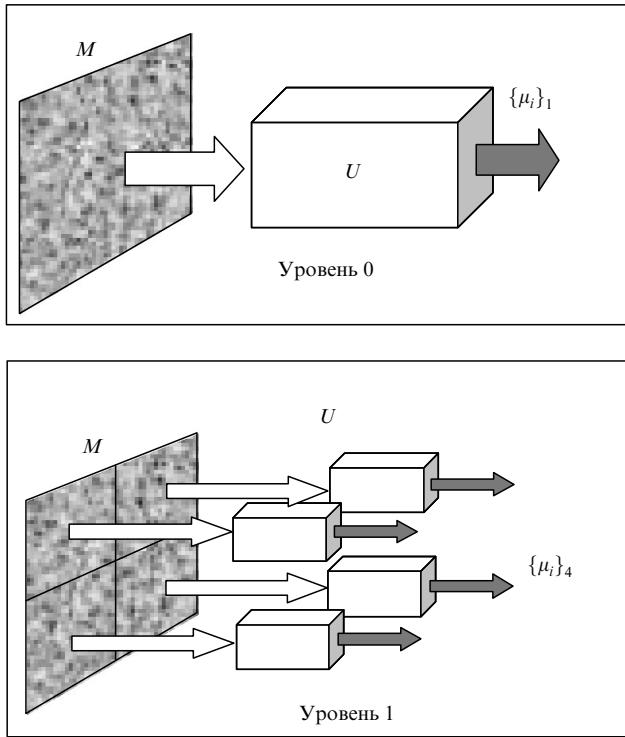


Рис. 6. Пирамида переменного разрешения.

определим планигоном с центральной точкой  $A_0$ . Если в области определения  $G$  задать декартову прямоугольную систему координат  $(x, y)$ , то можно показать, что множеству фильтров соответствует множество преобразований, являющихся коэффициентами в ряде Тейлора (функциями чувствительности ряда при решении задачи активной идентификации):

$$(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15}) \sim \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2}, \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3}, \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} \right). \quad (3)$$

Если переопределить подобласти однородности фильтров, т.е., сохранив их конструкцию, принять веса  $+1 \rightarrow 1$ ,  $-1 \rightarrow 0$ , то получим множество бинарных операторов  $\{V_i\}$ , для которых допустимы теоретико-множественные операции объединения (сложения) и пересечения (умножения). В результате получим алгебру изображения  $A_V = \langle \{V_i\}: +, \times \rangle$  (рис. 7).

Если множество  $\{F_i\}$  применимо на этапе разложения изображения  $M$  и его анализа, то  $\{V_i\}$  в алгебре  $A_V$  применимо на этапе синтеза и формирования описания образа изображения. Можно показать, что в алгебре  $A_V$  существуют группы алгебры:

— полные (алгебраические) группы  $P_{ni}$ , образованные на тройках операторов  $(V_i, V_j, V_k)$ , для которых справедливы соотношения:  $V_i + V_j + V_k \equiv e_1$  — единица;  $V_i V_j V_k$  — образ (на операции умножения) на планигоне и описание группы  $P_{ni}$  (рис. 8);

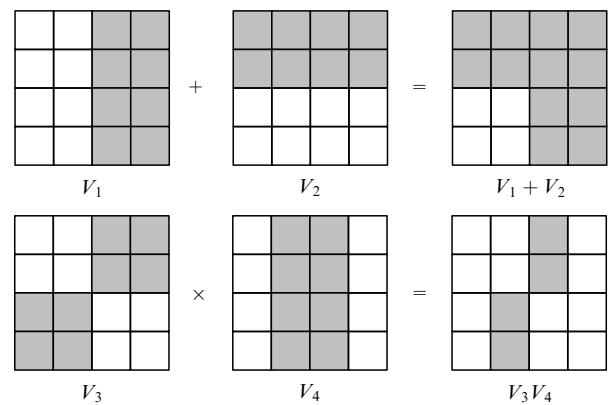


Рис. 7. Примеры взаимодействия операторов.

— замкнутые (алгебраические) группы  $P_{si}$ , образованные на четверках операторов  $(V_i, V_j, V_p, V_m)$ , где

$$(V_i, V_j, V_k) \in P_{ni}, \quad (V_p, V_m, V_k) \in P_{nj},$$

с описанием  $P_{si} = V_i V_j + V_p \bar{V}_m$  (где необходимое число инверсий операторов нечетно) и единицей  $V_i + V_j + V_p + \bar{V}_m \equiv e_1$  (рис. 9).

Множества  $\{P_{ni}\}$ ,  $\{P_{si}\}$  конечны и имеют мощности 35 и 105 соответственно (отметим, что 36-м элементом множества полных групп является оператор  $V_0$ ).

Рассмотрим пример анализа знака, например, буквы А, помещенной в поле зрения. Пусть имеем несколько вариантов изображения знака, включая "созвездие" точек (рис. 10а). Пусть для удобства значения  $m_{ij}$  бинарны и соответствуют рис. 10б. Тогда значения компонент вектора разложения имеют вид рис. 10в. Если их отобразить на решетке операторов (рис. 10г), то получим графы полной и замкнутой групп, где размер кружочков соответствует значению компоненты вектора разложения, а полуточковое заполнение — инверсии

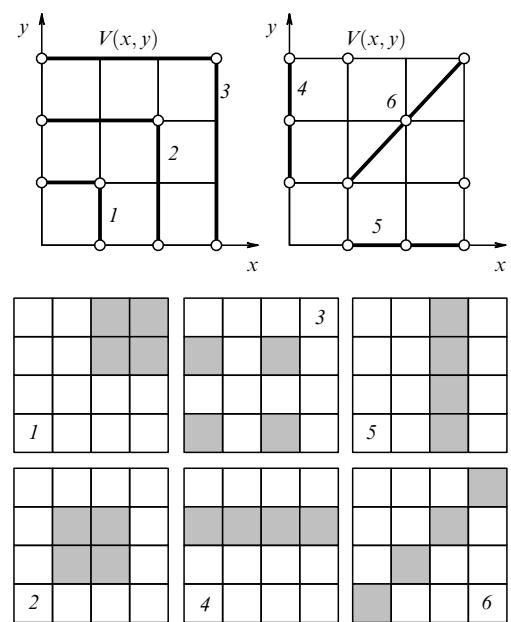


Рис. 8. Примеры полных групп, представленных графами на решетке операторов, и один из их образов.

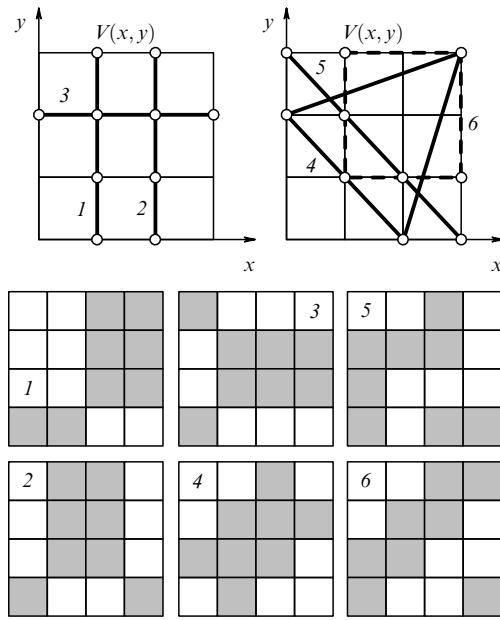


Рис. 9. Примеры замкнутых групп, представленных графами на решетке операторов, и один из их образов.

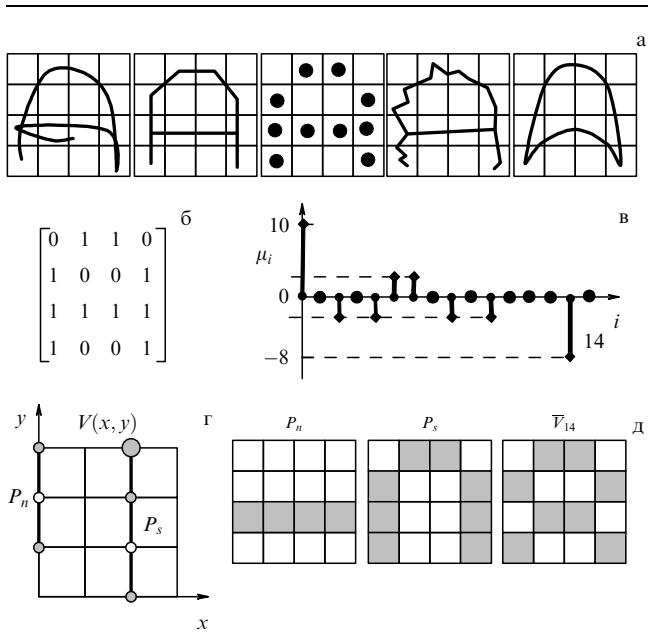


Рис. 10. Пример формирования описания знака.

оператора. Эти группы и являются описанием анализируемого изображения знака, а точнее его образом  $O(M) = P_n + P_s$ . Оператор  $\bar{V}_{14}$ , имеющий максимальное долевое участие через значение своей компоненты, есть выработанный эталон знака на представленных его написаниях.

Цель работы — раскрыть возможности элементов  $\{F_i\}$ ,  $\{V_i\}$  и групп  $\{P_{ni}\}$ ,  $\{P_{si}\}$  алгебры изображения с позиций хорошо отработанного физико-математического аппарата для задач анализа структур.

### 3. Полевые представления на планигоне

Пусть  $\mu(i, j) \subset R^+$  — значение ограниченной функции  $\mu(A)$  в точке  $A$  конечной области определения  $G$  из  $E^2$ .

Тогда существует функция области

$$F(G) = \sum_G \mu(A)$$

с плотностью функции области в точке

$$\varphi(A) = \lim_{G \rightarrow A} \frac{F(G)}{\omega(G)},$$

где  $\omega(G)$  — площадь области  $G$ .

Пусть область  $G$  разбита на две непересекающиеся подобласти:  $G = G_1 \cup G_2$ . Тогда в силу аддитивности  $\{\mu(A)\}$  справедливо свойство аддитивности для функции области:

$$F(G) = F(G_1) + F(G_2).$$

Поэтому как всей области  $G$ , так и ее непересекающимся подобластям  $G_i$  можно поставить в соответствие функции области. Так как соотношения между функцией и плотностью не зависят от размерности области, то они справедливы для любого пространственного представления  $E^n$ . Существование плотности по любой  $G_i \subseteq G$  позволяет определить функцию области интегральной характеристикой этой области (мерой):

$$F(G) = \int_G \varphi(A) d\omega,$$

допускающей интерпретацию "массы" области (для изображения — визуальная масса [6]). Отсюда следует, что исходное изображение после реализации (1) и представления на матрице масс  $[m_{ij}]_{4 \times 4}$  суть множество функций областей, координатно упорядоченных в области определения. Такие области (пятна) — объекты в поле зрения, максимально устойчивые к помехам (если только помехи меньше размеров объекта в области определения; в противном случае они также становятся объектами) и не содержащие малосущественных элементов. Таким образом, решается проблема регуляризации. Выделенные пятна с "метками" значений визуальных масс — структурные элементы изображения, отношение между которыми выявляется следующим образом.

Пусть каждое разбиение — выявление отношения между функциями области, имеющими физический смысл масс. Тогда эти массы представимы своими центрами  $A_0$ , а значит, их отношение определяется по евклидовой линии  $l$  направления  $x^i = x_i$ , связывающей эти центры и проходящей через  $A_0 \in G$ . Поэтому, используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_{A_0 \in G_2}^{A_0 \in G_1} \frac{\partial \varphi(A)}{\partial x^i} dx_i = F(G_2) - F(G_1) = \int_l \frac{\partial \varphi}{\partial l} ds,$$

где  $ds$  — элемент линии  $l$ . Так как орт  $e_i$  совпадает с направлением единичного вектора  $t$ , касательного к евклидовой линии  $l$ , то справедливо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} e_i = \text{grad}_{x^i} \varphi \quad (4)$$

в точке  $A_0 \in G$  — центре планигона, где  $\varphi$  — плотность и гладкая функция на  $\{x^i\}$ ,  $e_i$  — орт направления  $x^i$ .

Множеству вариантов разбиения области  $G$  соответствует множество  $\{F_i\}$ , где любой фильтр реализует операцию пространственного дифференцирования. Поэтому представление (4) справедливо по любому  $F_i$ . Если на  $C^\infty$ -многообразии определена функция  $\varphi(x_1, \dots, x_5)$

в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A_0$  (центре координатной системы и центре планигона), то множество  $\{F_i\}$  на преобразованиях (4) представляет первый полный дифференциал  $d\varphi = (\partial\varphi/\partial x^i) dx_i$  в точке  $A_0$  или 15-мерный вектор градиента в этой точке

$$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \mathbf{e}_i,$$

где  $\{\mathbf{e}_i\}$  — базис пространства  $E^{15}$ ;  $\nabla$  — линейный оператор.

Таким образом, используя множество  $\{F_i\}$ , мы решаем задачу выявления компонент градиента на матрице визуальных масс, полученных в результате преобразования (1), и задачу восстановления функции области по ее плотности. В качестве примера рассмотрим вариант восстановления некоторого произвольного оцифрованного сигнала (рис. 11). Такой сигнал можно рассматривать как профиль поверхности (срез, слой по координате  $z = \text{const}$  для изображения, где  $z$  — ось полутонов, яркостей). В соответствии с излагаемой технологией разделим одномерную область наблюдения  $G$  сигнала на четыре интервала (на рис. 11 масштабы не выдержаны). Для каждого найдем визуальную массу  $m_i$  по (1) и отношение между элементами множества  $\{m_i\}$  по (2). В результате получаем варианты "бинарного" (так как рассматриваются только отношения между двумя) описания сигнала. Если этот сигнал — срез горного массива, то имеем описание такого массива в целом (т.е. на заданном уровне разрешения). Пусть на множестве  $\{m_i\}$  выполняются условия  $\mu_1 > 0, \mu_4 > 0, \mu_9 > 0$ ; тогда описанием массива является тройка операторов  $V_1, V_4, V_9$ , образующая полную группу с описанием  $V_1 V_4 V_9$ , которое сегментирует область экстремума. Сам восстановленный сигнал (на данном уровне разрешения), если использовать модель средних функций, это четыре полутоновых ступеньки высоты  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), а с учетом градиентного представления — аппроксимация линиями первого порядка. Для задачи быстрого узнавания (например, рельефа местности) такое грубое описание часто бывает достаточным. Отметим, что высоту по  $m_i$  можно масштабировать либо, априори зная высоту вершины, привязать к ней значение  $m_3$ . Важно, что отношение между структурными элементами  $m_i$  сохраняется (именно так мы и видим пространственные отношения между объектами).

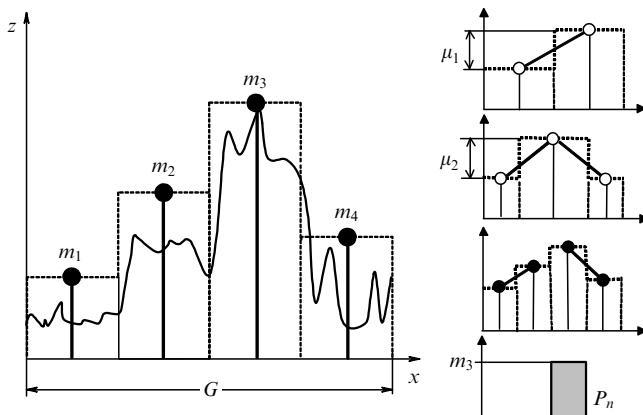


Рис. 11. Модель восстановления сигнала на заданном уровне разрешения.

Необходимо отметить, что функциональные возможности фильтров (точнее, преобразований, ими реализуемых) по обнаружению изменений в поле зрения очень высоки, и это можно подтвердить простым примером. Пусть изображение в поле зрения однородно (например, наблюдения проводятся ночью). Пусть "исчез" один пиксель изображения (где-то появился огонек сигареты). Тогда "сработают" фильтры, позволяющие установить факт изменений на изображении и локализовать его.

Существование 15-мерного вектора градиента однозначно определяет векторное поле  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(A_0)$  гладким полем потенциала  $\varphi(A_0)$ , для которого (в соответствии с формулой Остроградского) в замкнутой области  $G$  с границей  $\gamma(G)$  функции области

$$F(G) = \int_{\gamma(G)} \mathbf{R} \mathbf{n} d\sigma$$

может быть поставлена в соответствие ее плотность, т.е.

$$\text{div } \mathbf{R} = \text{divgrad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\gamma(G)$ , а  $d\sigma$  — элемент поверхности. Существование дивергенции означает наличие потока векторного поля через границу от источников (стоков), существующих в  $G$ . Любой оператор — ступенчатая функция, изменяющаяся от 0 до 1, т.е. область определения для конкретного оператора сужается до подобласти  $G_1 \subset G$ , для которой и определен коэффициент 1. Это означает, что вся масса (или весь заряд) локализована в этой подобласти с соответствующей плотностью.

Таким образом, фильтры и операторы, имея одинаковое конструктивное устройство, различны по реализуемым преобразованиям. Если фильтры из  $\{F_i\}$  решают задачу выявления градиента по направлению максимальной чувствительности из  $\{x^i\}$ , то операторы из  $\{V_i\}$ , с помощью которых решается задача оценки плотности источников (стоков), наделяются свойством инвариантности и сохранения изменений в сигнале (в пределах покрытия). Поэтому  $\{F_i\}$  — множество элементов чувствительности при решении задач управления по выявлению  $\mathbf{R} = \text{grad } \varphi$ , а элементы из  $\{V_i\}$  в составе функционала

$$\int_G \text{div } \mathbf{R} d\omega = F(G)$$

— инварианты к вращениям и параллельным переносам в пределах своих покрытий.

Свойство инвариантности операторов к тем или иным преобразованиям определяют их мерами (функциями качества) при оценке объекта изображения. Такие меры — эталоны (для системы зрительного восприятия — врожденные эталоны). Поэтому задача принятия решения реализуется в пространстве эталонов по правилу: объект принадлежит эталону, если существует минимум между эталоном и объектом ( $\mu_{i\text{эт}} - \mu_{i\text{изо}}$ ) по  $i$ ; аналогично для групп и описаний в алгебре  $A_V$ . Более того, можно показать (см. [6]), что если  $\{V_i\}$  — модельные представления простых нейронов, существующих в зрительной коре, то  $\{P_m\}$  — сложные, а  $\{P_{si}\}$  — сверхсложные нейроны.

Рассмотрим примеры. Пусть необходимо навести на объект, например, столб, видеокамеру. При автоматическом повороте камеры в плоскости горизонта факт появления (или исчезновения) объекта в поле зрения

зафиксируется срабатыванием фильтра  $F_1$  (или  $\bar{F}_1$ ), а факт попадания в перекрестье камеры — фильтром  $F_4$  ( $\mu_4 = \mu_0$ , если в поле зрения отсутствуют мешающие факторы). Если необходимо навести на объект две камеры, то алгоритм их наведения идентичен, а поскольку основными операциями являются простейшие, то вычислительная сложность алгоритма относительно известных методов минимальна. Поскольку при решении задачи управления используется уровень с минимальным разрешением, но достаточным, чтобы выделить необходимый объект, то возможные помехи не будут влиять на результат управления. Так решается проблема наведения на объект двух камер при решении задачи стереовосприятия.

Пусть в поле зрения наблюдается квадрат (рис. 12). Его описанием является образ полной группы

$$P_n = \bar{V}_4 + \bar{V}_5 + \bar{V}_8$$

с визуальной массой  $\mu_0 = 12$  (условных бинарных единиц). Пусть в следующий момент времени квадрат "исчез", а точнее, одна его сторона оказалась стертой либо загороженной. На планигоне в этом случае две клетки стали белыми. В результате общая визуальная масса изображения стала равной 10, а в описании вместо группы  $P_n$  появились еще две,  $P_{n1}$  и  $P_{n2}$ , и одна замкнутая группа

$$P_s = \bar{V}_5 \bar{V}_7 + \bar{V}_8 V_{11}.$$

Поскольку наблюдатель априори знает, что в поле зрения был квадрат, то он легко принимает решение о частичном загораживании объекта. Если же наблюдатель априори знает, что в поле зрения имеется некоторый геометрический объект (форма), два элемента которого загорожены, то по результату наблюдения объекта с массой 10 он предполагает (прогнозирует) три возможных варианта, соответствующих образам трех полных групп —  $P_n$ ,  $P_{n1}$ ,  $P_{n2}$ . Более того, образ замкнутой группы  $P_s$  — образ, объединяющий все эти прогнозируемые формы.

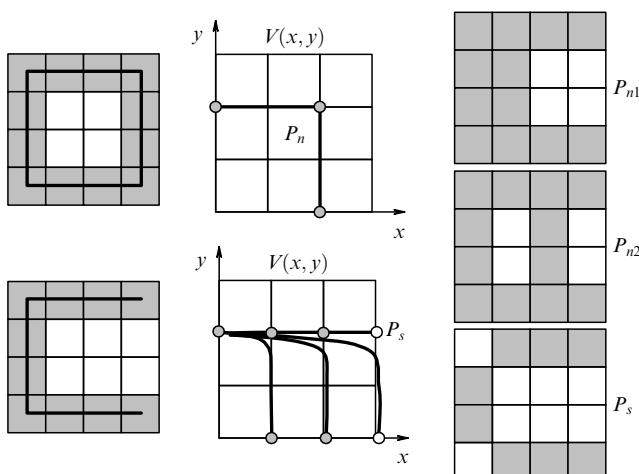


Рис. 12. Пример восприятия формы при возможных ее нарушениях.

#### 4. Функциональные пространства в алгебре изображения

Пусть планигон — касательная плоскость к гладкому многообразию (см. рис. 3), на которой относительно

абсолютной (внешней) системы координат, связанной с наблюдателем, задана своя декартова система координат. Такое представление естественным образом определяет планигон связанный системой. Поскольку множество  $\{m_{ij}\}$  — результат отображения (1) реального наблюдаемого процесса из  $E^3$  в многообразие, а фильтры  $\{F_i\}$  выявляют распределение масс по условиям

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \{0; > 0; < 0\},$$

то:

— многообразие, представленное на планигоне, — сплошная среда;

— каждому  $F_i$  соответствует состояние такой среды относительно исходного состояния, соответствующего "единичному" фильтру  $F_0$ ;

— каждое состояние среды  $F_i$  связано с другим состоянием  $F_j$  (речь идет об образах фильтров, отражающих состояние) параллельным переносом и деформацией сдвига масс одной подобласти планигона в другую.

Поэтому каждой паре  $(F_i, F_j)$  состояний среды планигона, связанной отношением времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , соответствует свой вариант движения сплошной среды. Относительно внешней системы координат имеем: 1) перемещения из точки  $A_0$  — возможные перемещения в плоскости планигона; 2) движения из произвольной точки  $A$  в  $B$  — кинематически возможные движения; 3) истинное движение выявляется через отклонение от кинематически возможных, представленных на множестве  $\{V_i\}$  в алгебре изображения на планигоне (такой подход к анализу движений — вариационное решение задачи механики).

Таким образом, анализ процесса на планигоне в фиксированный момент времени и на временных срезах, связанных отношением  $\Delta t$ , — построение возможных перемещений и возможных движений на образах операторов  $\{V_i\}$  в алгебре  $A_V$ .

Например, если наблюдаются переходы типа

$$V_3 \rightarrow \bar{V}_3 \rightarrow V_3 \rightarrow \bar{V}_3 \rightarrow \dots,$$

то имеем вращение в поле зрения относительно координатной оси  $z$ , ортогональной плоскости планигона и соединяющей две системы координат. Если априори известно, что наблюдаемый объект — тело (оболочка), то, например, переходы

$$V_1 \rightarrow \bar{V}_1 \rightarrow V_1 \rightarrow \bar{V}_1 \rightarrow \dots$$

отражают вращение вокруг оси  $y$  планигона (аналогично по остальным образам операторов).

С другой стороны, для образа оператора  $V_1$ , рассматриваемого как твердое тело, вращение вокруг оси  $x$  (оси чувствительности одноименного фильтра) определяет его объектом, инвариантным к повороту; и это верно по всем операторам в силу антисимметричности соответствующих им фильтров, т.е. условие

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0,$$

где

$$\varphi(x) \equiv \varphi(x^1, \dots, x^{15}),$$

означает инвариантность функции  $\varphi(x)$  относительно переменной  $x^i = x_i$  (в  $E^{15}$ ).

Общим решением данного уравнения является любая произвольная функция, не зависящая от  $x^i$ . Поэтому инвариантность по данному условию — симметрия относительно всех ортогональных  $x^i$  координатных осей из  $\{x^i\}$  (например, на рис. 10 равенство нулю компоненты  $\mu_i$  — отражение симметрии по направлению  $x^i$ ).

Обратное условие

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \neq 0$$

— это факт наличия в анализируемой функции  $\varphi(x)$  по оси  $x^i$  антисимметрии, а значит, существования разности потенциалов по этой оси, т.е. наличие "тока". В результате с точки зрения существования циркуляции имеем выполнение соотношения для векторного поля  $\mathbf{R}$  в произвольной точке  $A$  области  $G$

$$\int_G \operatorname{rot} \mathbf{R} d\omega = -\mathbf{I}(G),$$

и это верно для любого фильтра.

Пусть образ оператора  $V_i$  — упорядоченное клеточное пространство, состоящее из точек — "черных атомов" на белом планиграфе. Такие атомы связаны между собой и образуют "конструкцию" этого оператора. Следовательно, каждому оператору соответствует геометрическое описание, называемое оствомом (скелетом). Это описание — изобразительное описание образов на планиграфе, верное и для образов полных и замкнутых групп (например, на рис. 4 и рис. 12 линия — остав образа).

Пусть каждый атом — точка, имеющая массу. Тогда пара соседних атомов связана линией, удовлетворяющей разложению Тейлора для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

в окрестности точки  $A$ :

$$y(x) \approx y(A) + y^{(1)}(A) x,$$

где

$$y(A) = y_0.$$

Определяя эти прямые касательными поля направлений на  $F_i$ , получаем, что распределению атомов по каждому  $F_i$  соответствует интегральная кривая решения данного дифференциального уравнения (рис. 13).

Действительно, преобразование, реализуемое фильтром, применяется к гладкому многообразию, которое допускает определение на множестве интегральных кривых, определенных в  $\varepsilon$ -окрестности точки касания  $A_0$  с планиграфом, на котором задана система координат  $(x, y)$  с центром в  $A_0$ . Результатом действия фильтров является вектор разложения, для которого условия

$$\mu_0 = \mu_i, \quad \mu_j = 0 \quad \forall j \neq i$$

— это принадлежность наблюдаемой функции подобласти покрытия фильтра  $F_i$  (аналогично для зеркального  $F_i$  фильтра, если  $\mu_0 = \mu_i < 0$ ).

Так как множество  $\{F_i\}$  — множество функций (3) в ряде Тейлора, то в уравнении  $dy/dx = f(x, y)$  левая часть противопоставляется соответствующей функции из этого ряда. Последнее означает следующее: уравнение

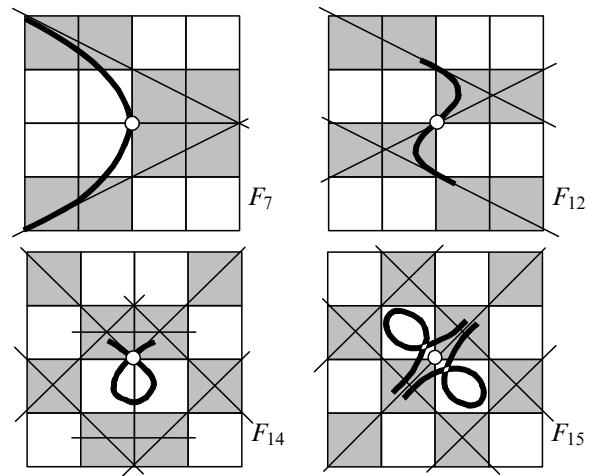


Рис. 13. Интегральные кривые на образах фильтров.

устанавливает зависимость между координатами точки (в пределах покрытия) и угловым коэффициентом касательной к графику решения в этой точке. Поэтому любой фильтр  $F_i$  задает поле направлений, а значит, позволяет найти интегральные кривые (либо семейство интегральных прямых, на базе которых определяется огибающая), касательные к которым в каждой точке (на каждом атоме) совпадают с направлением поля. Нужно отметить, что получаемое решение уравнения  $dy/dx = f(x, y)$  (аналогично известной теореме существования и единственности) только достаточно, поскольку не учитывается специфика точки  $A_0$  (центра планиграфа), которая, например, для фильтра  $F_3$  может быть огибающей для пучка интегральных прямых либо является точкой перегиба для кубической параболы, либо покрывает пару равносторонних и зеркальных гипербол, для которых  $A_0$  — точка пересечения асимптот (координатных осей  $x, y$ ). Поэтому получаемое решение на множестве  $\{F_i\}$  — гипотеза, требующая подтверждения через анализ на следующих уровнях разложения с большим разрешением.

Поскольку  $\{V_i\}$  и алгебра на этом множестве определены на планиграфе, для которого допустимо представление на связанную систему, то планиграф на этом множестве — функциональное пространство, а каждый оператор  $V_i$  в пределах своего образа — семейство вариационно близких функций в функциональном пространстве (например, варианты изображений знака на рис. 10, покрываемые одним и тем же образом, допускают определение на такое семейство). Поэтому множества  $\{V_i\}, \{P_{ni}\}, \{P_{si}\}$ , определенные на планиграфе как функциональном пространстве, "решают" в этом пространстве вариационные задачи вида

$$\int_a^b F(x, y, y^{(1)}) dx$$

в пределах подобластей покрытий по всему покрытию образа из этих множеств.

Назовем эту задачу *внутренней вариационной задачей*, поскольку ее "решение" (здесь под решением понимается приближение к интегральным линиям на образах операторов и групп операторов) — нахождение функциональной зависимости  $f(x, y)$  в пределах покрытия образом на планиграфе (напомним, что для повышения точности

решения необходимо в пределах подобласти покрытия перейти на следующий уровень разложения с применением той же технологии анализа). Внешней вариационной задачей является анализ образа изображения на планигоне в целом.

Пусть образ  $V_i$  — характеристика данного состояния объекта в поле наблюдения. Тогда переход от  $V_i$  к  $V_j$  определяет некоторый тензор деформаций через сопоставление двух состояний объекта, а их произведение  $V_i V_j$  — полную группу  $P_{nl}$  такого перехода. Аналогично для переходов

$$P_{ni} \rightarrow P_{nj}, \quad P_{si} \rightarrow P_{sj}$$

в пределах своих множеств. Такие переходы во времени — деформации наблюдаемого объекта в поле планигона.

Пусть деформации объекта отсутствуют; тогда переходы

$$V_i \rightarrow \bar{V}_i \rightarrow V_i, \quad P_{si} \rightarrow \bar{P}_{si} \rightarrow P_{si}$$

во времени — движения. Если  $\{V_i\}$  как эквивалент  $\{F_i\}$  — базис для  $E^{15}$ , то для описания движения на планигоне базовым множеством является  $\{P_{ni}\}$ . Действительно, для  $\{V_i\}$ ,  $\{P_{si}\}$  образ на планигоне занимает его половину, а движение — "качание" образа от прямого к инверсному и обратно. Тогда для любой группы  $P_{ni}$  образом (на операции пересечения) является компакт (четыре связанные образом группы клетки планигона)<sup>2</sup>, не обязательно склеенные топологически), движение которого на планигоне — эквивалент движения твердого тела, представленного своим центром масс. Для этого достаточно рассмотреть любую полную группу на четырех ее образах из восьми, например, для группы  $(V_1, V_2, V_3)$  имеем

$$V_1 V_2 V_3, \quad V_1 \bar{V}_2 \bar{V}_3, \quad \bar{V}_1 V_2 \bar{V}_3, \quad \bar{V}_1 \bar{V}_2 V_3$$

(рис. 14).

Пусть траектория движения центра масс — непрерывная кривая, например, окружность, представленная на планигоне как на картинной плоскости. Пусть движущийся объект по размерам порядка четверти планигона (т.е. условно занимает квадрант; если это не так, то необходимо перейти на другой уровень разрешения в ту или иную сторону). Пусть форма объекта на рассматриваемом уровне разрешения близка к квадрату (если это не так, то необходимо либо изменить форму планигона, адаптировав ее под объект, либо "достроить" до квадрата). Тогда на непрерывной траектории и на множестве  $\{t_i\}$  за интервал  $T_N$  получим последовательность "картинок" типа рис. 14, но с дополнительным участием полных групп  $(V_1, V_5, V_7), (V_2, V_4, V_6)$ , когда центр масс объекта попадает на координатные оси  $x, y$  соответственно. И это так, если скорость движения центра масс  $v$  за интервал  $\Delta t$  между двумя соседними наблюдениями удовлетворяет условию на длину пути

$$\Delta l = v \Delta t > \frac{1}{2} S,$$

где  $S$  — пространственный размер клетки планигона.

Если интервал  $\Delta t$  задан таким, что  $\Delta l > (2/3) S$ , то для наблюдения за объектом достаточно группы  $(V_1, V_2, V_3)$ .

<sup>2</sup> Такую связность мы называем *p-связностью* — связностью в пределах образа полной группы, в отличие от известной связности в цепном кодировании.

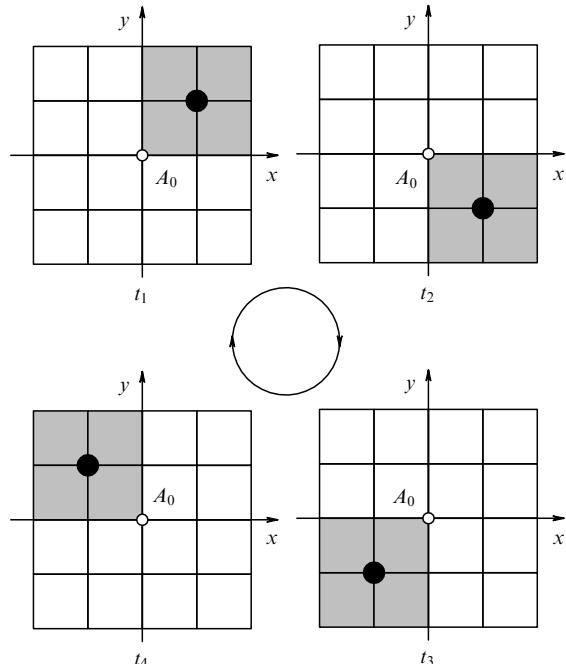


Рис. 14. Движение компакта полной группы  $(V_1, V_2, V_3)$ , представленного центром масс (точка) относительно центра планигона  $A_0$ .

Таким образом, множество  $\{P_{ni}\}$  — необходимое и достаточное множество, описывающее движения на планигоне центра масс объекта относительно  $A_0$  (на априори заданном уровне разрешения и в заданные моменты времени  $t_i$  на интервале наблюдения  $T_N$ ).

Ярким примером решения задач наблюдения за заданным объектом является (нерешенная в настоящее время стандартными подходами) бионическая задача "лягушка и муха": лягушка следует за летящей мухой и успешно ее ловит. На другие объекты, по габаритам не соответствующие мухе либо находящиеся в покое, лягушка не реагирует, даже если муха "сидит у нее под носом". Более того, используя излагаемую методику, можно в пределах семейства вариационно близких функций решать задачи прогноза траектории движения объекта.

Пусть на планигоне наблюдается движение, траектория которого не выходит из области покрытия  $V_i, P_{ni}, P_{si}$ , а значит, допускает описание в пределах семейства вариационно близких функций (внутренняя вариационная задача). Поскольку траектория движения и линии тока совпадают (независимо от стационарности процесса) тогда и только тогда, когда скорости движения в данной точке пространства изменяются во времени только по величине, но не по направлению, то область однородности образов операторов и групп — область инвариантности к возможным изменениям и область линий тока. Поэтому каждый образ в алгебре  $A_V$  инвариантен к возможно нестационарному процессу, представленному в исходном пространстве, и каждому соответствуют линии тока. Так как каждый образ в алгебре представлен только подобластью однородности и вне ее "ничего нет", то такой образ — эквивалент твердого тела. При поступательном движении последнего (т.е. таком движении, при котором любой отрезок прямой, взятый на теле, перемещается параллельно самому себе) независимо от изменений скорости (при

сохранении ее направления) линии тока — траектории. Аналогично при вращении тела вокруг неподвижной оси либо при произвольных винтовых движениях в пространстве. Поэтому для твердого тела как целого его траектория движения — линии тока. Отсюда, если наблюдаются линии тока, то такова же траектория движения твердого тела.

## 5. Пространственные свойства элементов алгебры

Пусть на образах элементов алгебры в области их определения существуют линии тока. Поскольку планигон — двухкоординатная область, то всегда можно линиям тока поставить в соответствие линии  $l$ , не являющуюся линией тока, а являющуюся образующей в пространстве  $E^3$ , в которое вложен планигон. Тогда  $l$  и линии тока — векторная поверхность.

Пусть уравнение образующей  $l$  в  $E^3$  имеет вид

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z}{1},$$

где  $a, b, 1$  — направляющие координаты;  $\alpha, \beta, 0$  — координаты следа образующей на плоскости  $xy$  (в общем случае). Тогда для произвольной линейной направляющей, переносимой параллельно себе по образующей, получаем уравнение поверхности вида

$$a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1.$$

Если образующая  $l$  замкнута, то имеем векторную (или вихревую) трубку. Например, для образа оператора  $V_4$  линии тока — линии семейства  $y = y(x, C)$ , где  $C$  — const. Образующая к ним в силу цилиндрической симметрии образа (например, окружность) не обязательно замкнута в плоскости  $xz$ . В результате имеем цилиндрическую поверхность (не обязательно круговую) с точностью до ее положения на оси глубины  $z$  (и знака кривизны) относительно планигона как картинной плоскости (рис. 15). Аналогичный результат можно получить, рассматривая уравнение

$$\frac{\partial^i \varphi(x, y)}{\partial x^k \partial y^m} = \text{const},$$

в котором левая часть соответствует преобразованиям (3) в декартовой системе координат планигона. Решением уравнения является соответствующая поверхность  $z = \varphi(x, y)$ .

Поэтому образ каждого фильтра допустимо рассматривать как результат ортогонального проектирования некоторой поверхности с учетом ее расположения над плоскостью планигона. Например, образу фильтра  $F_8$ , интегральным представлением которого в плоскости  $xy$  являются гиперболы, можно поставить в соответствие гиперболический параболоид (см. рис. 15), а  $F_6$  (или  $F_7$ ) — коническое сечение. Важно априори знать необходимые начальные и граничные условия, которые трудно получить по одному изображению (для того чтобы проверить правильность увиденной формы, человек должен ее коснуться). Тем не менее с точностью до знака кривизны и координаты дальности по лучу зрения система зрительного восприятия может достаточно быстро восстановить

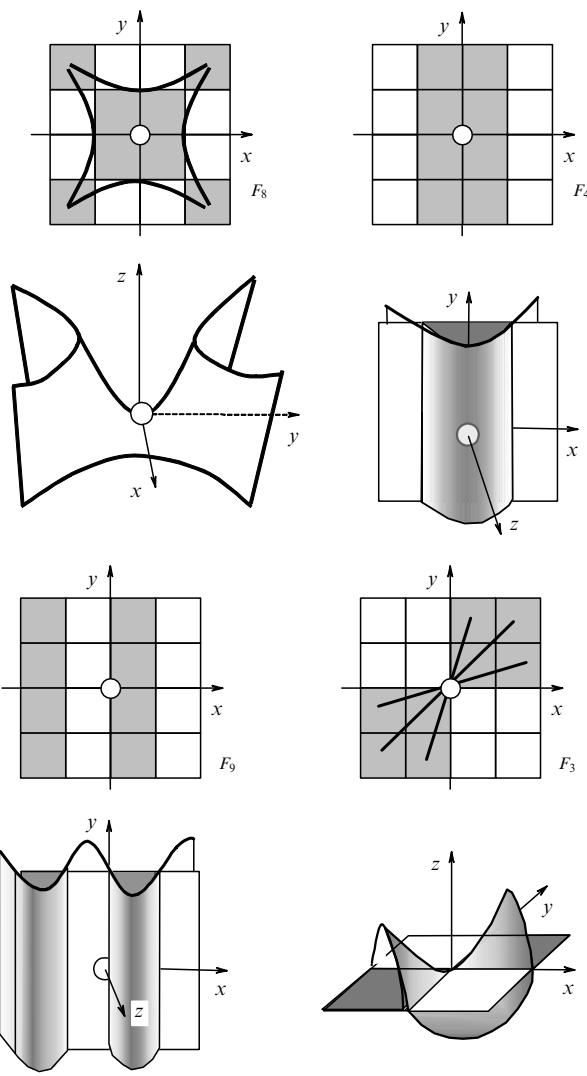


Рис. 15. Пример пространственной интерпретации образов на планигоне.

форму оболочки объекта. Алгоритм примерно такой же, как и в случае восстановления сигнала (см. рис. 11).

Пусть наблюдается столб (труба, ствол дерева) и решена задача его выделения (сегментации). В результате имеем образ оператора  $V_4$  на заданном уровне разрешения (отметим, что в этом случае выполняется необходимое условие на существование экстремума — равенство нулю первых производных, т.е.  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  для  $F_1$  и  $F_2$ ). Если теперь наложить на этот образ полуточновую матрицу  $[m_{ij}]_{4 \times 4}$  (но с уровнем большего разрешения), то мы увидим изменение полуточнов (яркостей) по линии образующей. Априори принимая условие "то, что ближе, темнее" (либо наоборот в зависимости от состояния окружающей среды — день, ночь и т.п.), можно восстановить форму поверхности. Аналогичный результат можно получить, если, например, на поверхности столба нанесен регулярно повторяющийся рисунок (текстура); тогда можно использовать более сложный по реализации алгоритм анализа размеров клеток (текселов) текстуры по образующей (но с точностью до знака кривизны поверхности).

Такой анализ — решение вариационной задачи обнаружения экстремума функционала: если каждому образу

оператора в  $E^3$  соответствует векторная поверхность  $z = z(x, y)$ , то существует экстремум функционала

$$v(z(x, y)) = \int_G F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

с заданными граничными условиями покрытия  $V_i$ . В частности, если в области  $G$  покрытия  $V_i$  проходят непересекающиеся кривые семейства  $y = y(x, C)$ , где  $C$  — const, то семейство кривых в  $G$  — собственное поле. Например, для  $V_4$  линий тока параллельные оси  $y$  — собственное поле.

Если в области  $G$  покрытия  $V_i$  существует точка, через которую проходят кривые семейства  $y = y(x, C)$ , далее непересекающиеся, то такое поле — центральное поле пучка кривых. Например, для  $V_3$  имеем центральное поле, для которого точка  $A_0$  — центр пучка прямых, далее непересекающихся (см. рис. 15).

Собственное или центральное поле семейства экстремалей вариационной задачи для элементов алгебры изображения — поле экстремалей, для которого угловой коэффициент касательной к кривой семейства собственного поля в точке  $(x, y)$  — наклон поля в этой точке. Аналогично для поверхности в  $E^3$ .

В силу изложенного плоская задача — это нахождение формы кривой семейства вариационно близких функций, решаемая в первом приближении на уровне касательных. С другой стороны, определяя экстремали линиями равного уровня (по значениям масс на матрице  $[m_{ij}]_{4 \times 4}$ ), на множестве  $\{V_i\}$  можно перейти к решению пространственной задачи на поиск экстремума для двумерной поверхности в  $E^3$ . Для этого достаточно априори знать, какого типа задача подлежит решению — плоская или пространственная. В практике зрительного восприятия приоритет за последней, так как в нормальном состоянии взгляд человека устремлен в даль (в несобственную точку евклидова пространства). В этом случае изображение, плоское в силу отображения трехмерной сцены на двумерную поверхность сетчатки глаза, восстанавливается по законам перспективы с модельным представлением в виде трехмерных объектов и последующим уточнением их формы.

Рассмотрим вопрос пространственного восстановления образов полных и замкнутых групп. Если множеству  $\{F_i\}$  соответствует конечное множество базисных направлений, то и множеству  $\{V_i\}$  в силу эквивалентности их элементов можно поставить в соответствие множество ортов  $\{\mathbf{e}_i\}$ , которые в алгебре  $A_V$  являются полиадными произведениями:  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$  — диады,  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$  — триады. Поэтому любому оператору из  $\{V_i\}$  в  $E^3$  можно поставить в соответствие тензорную поверхность

$$T_{11}(dx^1)^2 + T_{22}(dx^2)^2 + T_{33}(dx^3)^2 = \text{const},$$

где допустимо вырождение по одной из составляющих.

Действительно, поскольку любой оператор как компонента дивергенции — скаляр, а в составе планигона (как касательного пространства) определен на полигеодезических, то любому  $V_i$  в ортогональной системе координат  $x^1, x^2, x^3$  соответствует тензорная поверхность

$$T_{11}(dx^1)^2 + T_{22}(dx^2)^2 + T_{33}(dx^3)^2 = \text{const},$$

где  $T_{ij}$  — главные компоненты по главным осям тензора

$$T = T_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

в системе координат  $\{x^i: i = 1, 2, 3\}$  с центром в точке  $A_0$  планигона, для которого

$$x^3 \equiv z, \quad z(A_0) = 0.$$

В этом случае любой полной группе  $P_{ni}$  из  $\{P_{nj}\}$ , образованной на тройке  $(V_i, V_j, V_k)$ , соответствует триада  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ . В силу групповой полноты  $P_{ni}$  и наличия базиса  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$  такая группа операторов — линейное векторное пространство  $E_i^3$ . В результате на множестве полных групп имеем 35 трехмерных пространств.

Поскольку для описания группы достаточно двух любых ее операторов, то каждая полная группа представима на диаде своего базиса  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  либо  $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ , либо  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$ . Такой базис в криволинейной координатной системе  $(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ , где  $u, v$  — криволинейные координаты группы  $P_{ni}$ , определяет кусок поверхности (на множестве описаний имеем множество кусков)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

с точностью до ее положения во вмещающем пространстве — в пространстве этой группы.

Любая группа  $P_{ni}$  принадлежит своему евклидову пространству  $E_i^3$  с базисом  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$ . Соответствующая поверхность в  $E_i^3$ , планигон к которой — касательная плоскость в точке  $(0,0)$ , определена квадратичными формами, а так как пространство  $E_i^3$  группы  $P_{ni}$  "приспособлено к своему" базису, то для нее квадратичные формы имеют канонический вид (см. рис. 15).

Далее, любая замкнутая группа  $P_{si}$  — суперпозиция двух полных групп

$$P_{ni} = (V_i, V_j, V_k), \quad P_{nj} = (V_n, V_m, V_k),$$

связанных общим оператором  $V_k$  (т.е. общим координатным направлением); например,

$$P_{si} = V_i V_j + V_n \bar{V}_m.$$

Поскольку каждой полной группе соответствует  $E_i^3$ , то замкнутая группа — топологическая склейка двух таких пространств по их общему координатному направлению (с точностью до знака). Поэтому любая замкнутая группа допускает представление вида

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_k$$

(с точностью до инверсии направлений). Если каждая полная группа (по одному своему описанию) определяет кусок поверхности, то две склеенные группы определяют два координатно связанных куска поверхностей.

Пусть фильтр  $F_3$  задает направление (положительное)  $x_1$  в подобласти инвариантности (т.е. в подобласти сохранения весового коэффициента +1; рис. 16а). Тогда фильтр  $F_8$  с преобразованиями

$$\frac{\partial^4}{\partial^2 x \partial^2 y} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

задает новую систему координат  $(x_1, y_1)$  с центром  $A_0$  на планигоне и  $B_0 \equiv F_8$  на решетке  $V(x, y)$ , совмещенной с планигоном (рис. 16б). Назовем такой планигон  $PV$ -планигоном. При этом факт переноса центра масс в точку  $A_0$  отражается двумя правыми в (5) преобразованиями (т.е. фильтрами  $F_4, F_5$ ), а факт вращения, свойственный  $F_3$ , — композицией его преобразований в (5). Поэтому фильтр  $F_8$  в своей центральной части (в ближайшей окрестности точки  $A_0$  его образа на плани-

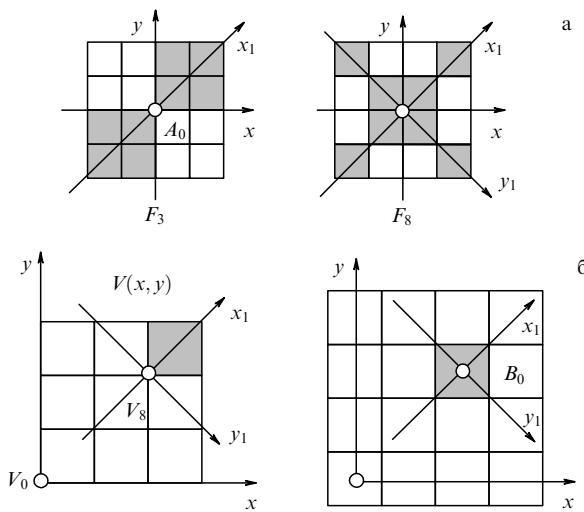


Рис. 16. PV-планигон.

гоне; рис. 16а) через действие  $F_4, F_5$  отражает концентрацию источников (масс) в этой части, а через действие композиции преобразований фильтра  $F_3$  отражает концентрацию вихрей, центры которых разнесены по осям  $x_1, y_1$ . Если направление осей  $x_1, y_1$  представить так, как показано на рис. 16, то системы координат  $(x, y), (x_1, y_1)$  с общим центром  $A_0$  нельзя совместить поворотом в плоскости планигона.

Две системы координат на PV-планигоне (и решетке операторов)  $K_1 = (x, y)$  и  $K_2 = (x_1, y_1)$  естественным образом выделяют пять полных групп:

$$P_{nx} = (V_1, V_4, V_9), \quad P_{ny} = (V_2, V_5, V_{10})$$

— группы, операторы которых упорядочены в системе координат  $K_1$ ;

$$P_{nx1} = (V_3, V_8, V_{15}), \quad P_{ny1} = (V_8, V_{11}, V_{12})$$

— группы, операторы которых упорядочены в системе координат  $K_2$ ;

$$P_{n0} = (V_4, V_8, V_5)$$

— группа связи (отображения) двух систем координат.

Пусть планигон — касательная плоскость в точке  $A_0$  к поверхности из гладкого многообразия ( $z(A_0) = 0$ ), в которой заданы две системы координат, связанные направлением  $z$ :

$$K_1 = (x, y), \quad K_2 = (x_1, y_1).$$

Тогда любая полная группа  $P_{ni} = (V_i, V_j, V_k)$  на своих описаниях — это представление тензорной поверхности в той или иной системе координат из  $\{K_1, K_2\}$ .

Действительно, любая полная группа в алгебре  $A_V$  на множестве из трех переменных имеет восемь образов: четыре на операции  $+$ , четыре — на  $\times$ . Так как каждому оператору  $V_i$  соответствует орт направления  $e_i$  в точке  $A_0$ , а множеству  $\{V_i, V_j, V_k\} \in P_{ni}$  соответствует множество ортогональных реперов  $\{e_i, e_j, e_k\}$ , то они образуют семейство сопровождающих реперов и позволяют анализировать геометрию сложно устроенной поверхности в  $E^3$ . Поскольку любая полная группа определена в касательной плоскости, то для описания геометрии

поверхности достаточно представления

$$T_{11}(dx^1)^2 + T_{22}(dx^2)^2 = \text{const}$$

на паре операторов из тройки, где первый дает оценку одной компоненте, а второй — другой. Так как все множество операторов упорядочено на паре систем координат  $(K_1, K_2)$ , то:

объединения  $V_i + V_j, V_i + V_k, V_j + V_k$  — представления

$$T_{11}(dx^1)^2 + T_{22}(dx^2)^2 = \text{const},$$

где  $dx^i$  — дифференциал по  $x^i$  из  $(K_1, K_2)$ ;

любое из пересечений  $V_i V_j, V_i V_k, V_j V_k$  — представление тензора

$$T = T^{nm} e_n e_m,$$

где  $n, m$  выбираются из  $(i, j, k)$ , и поверхности типа

$$T_{11}(dx^1)^2 + T_{22}(dx^2)^2 = \text{const}.$$

Такие пересечения определяют образы полной группы "новыми" тензорными поверхностями.

Таким образом, каждое описание для любой полной группы — каноническое представление на паре координатных систем  $(K_1, K_2)$ , где в роли коэффициентов выступают собственные числа. При этом: каждый оператор  $V_i$  выявляется по  $e_i$  "свою" поверхность; каждая полная группа — более сложно организованная на операторах поверхность, а замкнутая — топологическая склейка пары поверхностей, увеличивающая тем самым размерность анализируемого многообразия.

Наличие пары  $(K_1, K_2)$  позволяет расширить функциональные возможности элементов алгебры по восстановлению пространственных отношений между объектами, включая перспективные отношения.

Пусть гладкое многообразие — одномерное многообразие, представленное линией. Тогда двумерный планигон с образами из  $\{F_i\}$  — естественный "объект", представленный как расслоенное пространство для одномерного многообразия. Во-первых, на плоском планигоне допустима естественная система координат  $(x, y)$ . Во-вторых, для линии, ориентированной, например, по  $x$ , координата  $x$  — это координата по каждому слою. Например, для фильтра  $F_5$  такой линией является прямая (остов), проходящая по  $x$  через точку  $A_0$ . Эта прямая — база расслоенного пространства, а  $y$  — координата внутри слоя, по которой строится касательная типичного слоя, переносимая параллельно по базе от слоя к слою (либо наоборот, например для  $F_4$ ). Тогда вектор  $\mathbf{V}$  в произвольной точке  $A$  базы внутри планигона представлен в базисе:

$$\mathbf{V} = y \frac{\partial}{\partial x},$$

где  $y$  — компонента вектора  $\mathbf{V}$ .

Свойство слоения на образах фильтров справедливо не только по направлениям  $x, y$  декартовой системы координат с центром  $A_0$ , но и для направления  $z$  абсолютной системы координат наблюдателя. В этом случае планигон можно рассматривать как картинную плоскость. Такое слоение по координате  $z$  легко реализует система зрительного восприятия. Если мы фокусируем взгляд на объекте, то пространство по направлению глубины разделяется картинной плоскостью на переднее

и заднее. Реализуя разные точки фокусировки, получаем информацию о глубине по разным слоям.

Свойство восстановления глубины пространства — врожденное свойство зрительной системы. Поскольку множество преобразований, реализуемых фильтрами, принадлежит пятимерному пространству (подробнее ниже), то выделенные полные группы

$$P_{nx}, P_{ny}, P_{nx1}, P_{ny1}, P_{n0}$$

допускают определение на базисные группы множества  $\{V_i\}$ . В этом случае, учитывая свойство слоения, можно представить планигон "окном", через которое мы смотрим (рис. 17а): "рама" окна — область периферийного зрения, "стекло" окна — область ясного видения. С учетом наличия базисных групп имеем следующую интерпретацию такого окна на PV-планигоне:  $K_1$  — абсолютная система координат;  $K_2$  — система координат, привязанная к наблюдаемому объекту.

Для того чтобы отобразить объекты многомерного пространства, например, четырехмерного, в виде правильных тел трехмерного пространства, параллельная проекция не используется, а применяется модель несобственного пространства [17]. В этом случае модельное представление по рис. 17а определяет точку  $A_0$  планигона несобственной точкой (точкой горизонта); это так при взгляде вдали: если мы смотрим на близкий объект, то "рама" периферийного зрения и область ясного видения поменяются местами). Аналогично для варианта по рис. 17б. Если этот вариант соответствует видению одним глазом (или видеокамерой), то, склеивая два планигона, получим панораму видения для двух глаз с левой и правой системами координат. На рисунке 17в показан вариант взаимодействия на общем планигоне четырех систем координат (и им соответствующих четырех склеенных планиголов) для системы из четырех видеокамер.

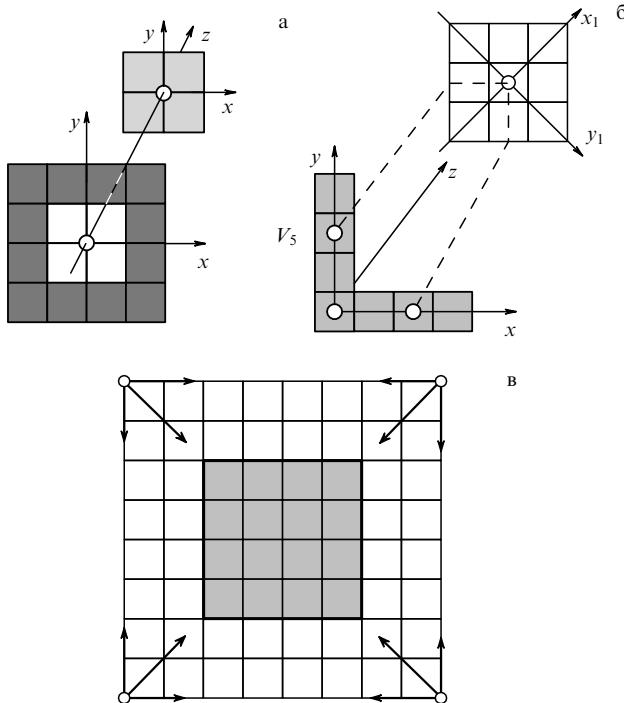


Рис. 17. Разнесение элементов планигона по оси глубины.

Рассмотрим примеры. Известной моделью четырехмерного куба является гиперкуб, который в проекции на плоскость со стороны грани представляется в виде двух кубов, вложенных друг в друга и связанных по вершинам. Такой проекции на планигоне соответствует образ оператора  $V_8$ , являющийся центром  $B_0$  модели по рис. 16б, если считать квадрат планигона первым квадратом, второй, внутренний — квадратом образа  $V_4 V_5 V_8$ , а "ушки" оператора — покрытием линий связи вершин. Если определить центр планигона точкой горизонта, то получим модель пятимерной системы координат, для которой одна координата — направление глубины (рис. 18).

Пусть на планигоне наблюдается образ замкнутой группы

$$P_s = V_4 V_6 + V_8 \bar{V}_{14}$$

(см. рис. 9). Каждой замкнутой группе можно поставить в соответствие полную группу, операторы которой наделены переключательными свойствами [6]. Для рассматриваемой замкнутой группы таковой является  $P_{n0} = (V_2, V_5, V_{10})$ . Свойство переключения (или коммутации) заключается в выделении пар полных групп, составляющих образ замкнутой группы:

для оператора  $V_2$  получаем

$$V_2 V_4 V_6, \quad \bar{V}_2 V_8 \bar{V}_{14};$$

для  $V_5$  получаем

$$V_5 V_4 V_8, \quad \bar{V}_5 V_6 \bar{V}_{14};$$

для  $V_{10}$  получаем

$$V_{10} V_6 V_8, \quad \bar{V}_{10} V_4 \bar{V}_{14}.$$

Если на образ замкнутой группы наложить полуточновую матрицу и принять условие, что темные объекты (однородные в пределах компакта) по глубине ближе к наблюдателю, то коммутирующие операторы "разнесут" выделенные на образе замкнутой группы компакты

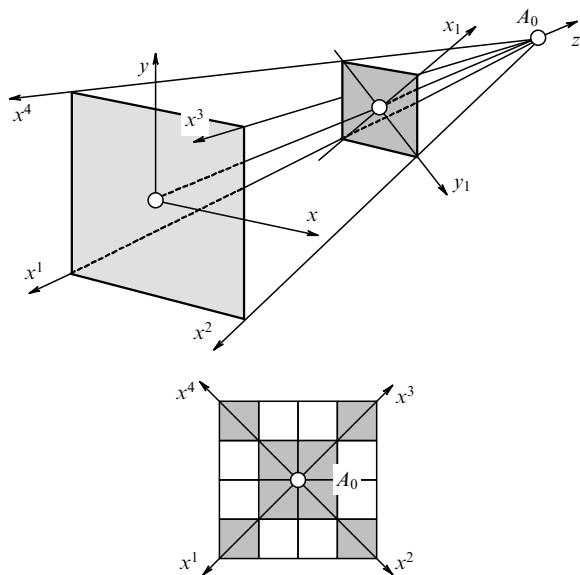


Рис. 18. Гиперкуб в проекции на планигон и конус "перспективы" с точкой горизонта  $z$ .

по оси  $z$  (рис. 19). Число вариантов равно числу коммутирующих операторов.

В рассмотренном примере априори необходимо принять следующие условия. Во-первых, объекты наблюдаются в пространстве  $E^3$ . Во-вторых, наблюдение ведется на пределе разрешения, т.е. на уровне с низкой разрешающей способностью, где влияние помех минимально. В-третьих, необходимо принять решение, что считать за ближний объект на планиграфе — темный или светлый.

В живописи перспективы отражается "уходящей вдаль дорогой", сходящейся к горизонту (аналогично — в компьютерной графике). Нагляднее это реализуется по

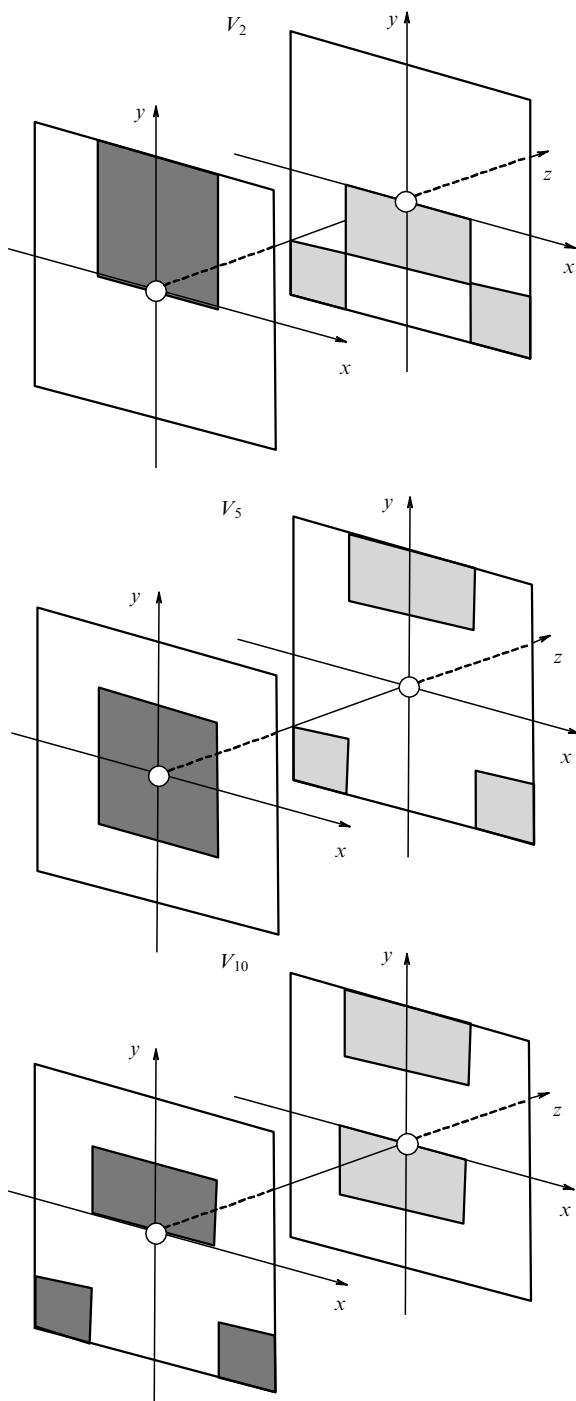


Рис. 19. Пример слоения по оси  $z$  образа замкнутой группы.

виду сбоку (по сравнению с видом сверху), т.е. по диагонали картинной плоскости. Такой диагональю на  $PV$ -планиграфе является направление  $x = y$ , на котором упорядочены операторы  $V_3, V_8, V_{15}$  полной группы  $P_{nx1}$ . Поэтому планиграф в модельном представлении по рис. 17 — это естественный объект, на котором допустимы перспективные отображения.

## 6. Симметрические свойства элементов алгебры

Пусть  $\{\mathbf{e}_i\} \equiv \{\partial/\partial x^i\}$  — координатный базис векторного поля градиента, определенного на множестве  $\{F_i\}$ . Так как для любого  $F_i$  существует база (линия  $l$ ) расслоенного пространства, то  $l$  — геодезическая на многообразии. Поэтому множество  $\{F_i\}$ , определяя ортогональное множество  $\{\mathbf{e}_i\}$ , естественным образом задает ортогональное множество геодезических с базисом  $\{\mathbf{e}_i\}$  на многообразии. Отсюда следует, что множество  $\{F_i\}$  с координатным базисом  $\{\mathbf{e}_i\} \equiv \{\partial/\partial x^i\}$  определяет векторные поля Киллинга, максимально симметричное многообразие и базис алгебры Ли векторных полей Киллинга в  $E^{15}$ .

Так как мощность множества  $\{F_i\}$  равна 15 (без учета единицы), то имеем 15 векторов Киллинга, определяющих 5-мерное многообразие, вложенное в  $E^6$ . Поэтому множество  $\{F_i\}$  с базисом  $\{\partial/\partial x^i\}$  позволяет анализировать симметрию такого многообразия, а также определяет 15 независимых уравнений движения на множестве из 15 нормальных координат.

Таким образом, имеем 15 законов сохранения для пространства  $E^5$ . Модель такого пространства (гиперкуб) представлена на рис. 18 (на образе оператора  $V_8$ ). Она естественным образом определяет необходимую систему координат при решении задач восстановления геометрии внешнего пространства, позицию наблюдателя в этом пространстве и его ориентацию по наблюдениям "через" планиграф (см. рис. 17).

Покажем полноту системы преобразований (3) с позиций законов сохранения [18]. Поскольку планиграф — связанный конечная система, то она консервативна и для нее справедливы интегральные вариационные принципы механики с соответствующими законами сохранения и эквивалентностью полной энергии и массы. Так как в поле планиграфа анализируется процесс, представленный массой области (1), то 16-й закон сохранения (сохранения массы) на множествах фильтров и операторов отражен элементами  $F_0 \equiv V_0$ .

Пусть на планиграфе наблюдается процесс, представленный функцией области  $F(G)$ . Тогда можно показать, что условие

$$\frac{dm(G)}{dt} = 0$$

необходимо и достаточно для сохранения наблюдаемого процесса во времени. Данное условие — инвариантность (однородность) наблюдаемого изображения на шагах  $\Delta t$  в интервале наблюдения по всем преобразованиям (3). Входящая в него конвективная производная отражает сохраняемость структуры на изображении, а локальная производная — стационарность наблюдаемого процесса.

Поскольку любой фильтр реализует преобразование  $\partial/\partial x^i$ , то, во-первых, условие  $\text{grad } \varphi = 0$  — условие одно-

родности процесса в пространстве  $E^{15}$ . Во-вторых, условие  $\operatorname{divgrad} \varphi \neq 0$  по любой одной компоненте (т.е. по любому значению  $\mu_i$ , которому можно поставить в соответствие  $V_i$ ) — следствие "действия уравновешенных сил" по направлениям  $x, y$  системы координат, заданной на планигоне, и отражение закона сохранения импульса к параллельным переносам в пределах покрытия  $V_i$ .

Отметим, что пара условий

$$\operatorname{grad} \varphi = 0, \quad \operatorname{divgrad} \varphi \neq 0$$

естественным образом позволяют анализировать текстурированные (регулярные) изображения, например, кристаллические структуры, диссипативные среды, отпечатки пальцев и т.п. Алгоритм относительно прост. Если на рассматриваемом уровне разрешения  $\mu_0 \neq 0$ , а  $\mu_i = 0$  по всем  $i$ , то существует такой уровень (по разрешающей способности), на котором  $\operatorname{divgrad} \varphi \neq 0$ . При этом, поскольку преобразование (1) реализует отображение в (абсолютно) гладкое многообразие, то планигоны всех уровней гладко склеены (планигон уровня с низким разрешением — атлас, а последующие гладко склеенные планигоны — карты).

Последний для механических замкнутых систем закон сохранения, связанный с изотропией пространства, — закон сохранения момента импульса. Так как любой оператор  $V_i$ , рассматриваемый как твердое тело на двух системах координат  $(x, y)$ ,  $(x_1, y_1)$ , связанных по направлению  $z$  (по нормали к планигону), имеет ось вращения, относительно которой это эквивалентное тело инвариантно к повороту, то данный закон выполняется.

Итак, множество  $\{V_i\}$  (включая  $V_0$ ) на планигоне как связанной системе отражает все три закона сохранения. Если  $V_0$  достаточен с позиций сохранения полной энергии (массы), то операторы  $V_1, V_2$  достаточны с позиций закона сохранения импульса для недеформированной механической системы (тела) по направлениям  $x, y$  декартовой системы координат; остальные операторы учитывают ту или иную деформацию, а через нее — инвариантность на параллельных переносах. Закон сохранения момента импульса необходимо требует введения системы координат и выделения центра масс (с позиций механики). Поэтому именно с позиций этого закона реализуется дифференциация операторов на разных системах координат —  $(x, y)$ ,  $(x_1, y_1)$ . В результате имеем:

$\{V_1, V_4, V_9, V_2, V_5, V_{10}\}$  — подмножество, определенное в координатах  $x, y$  и имеющее цилиндрическую симметрию;

$\{V_3, V_8, V_{15}\}$  — подмножество, определенное в координатах  $x_1, y_1$  и имеющее сферическую симметрию;

$\{V_6, V_7, V_{13}, V_{14}\}$  — подмножество, определенное в координатах  $x, y$  и имеющее коническую симметрию;

$\{V_{11}, V_{12}\}$  — подмножество, определенное в координатах  $x, y$  и имеющее винтовую симметрию (на цилиндре).

## 7. Заключение

Рассмотрены возможные физические интерпретации элементов алгебры изображения, расширяющие их понимание и позволяющие раскрыть проблему восстановления трехмерности (формы оболочки) по единственному двумерному изображению. Изложены подходы к решению задачи восстановления геометрии пространства с позиций перспективных свойств отображения на плоскость. С использованием вариационных принципов показаны пути решения задач обнаружения, слежения и описания объекта и его движения с возможным прогнозом позиции в следующий момент времени.

Разработанный метод обладает относительно низкой вычислительной сложностью и высокой достоверностью в смысле наличия объекта наблюдения при заданной точности.

Исследования по данному направлению работ поддержаны РФФИ (проекты 01-01-00452, 01-01-00459).

## Список литературы

1. Вавилов С И *Глаз и Солнце* (М.: Изд-во АН СССР, 1961)
2. Тихонов А Н, Арсенин В Я *Методы решения некорректных задач* (М.: Радио и связь, 1979)
3. Адамар Ж *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа* (М.: Наука, 1978)
4. Чэй Ш К *Принципы проектирования систем визуальной информации* (М.: Мир, 1994)
5. Кудрявцев П С *Курс истории физики* (М.: Просвещение, 1974)
6. Утробин В А *Информационные модели системы зрительного восприятия для задач компьютерной обработки изображений* (Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2001)
7. Дуда Р, Харт П *Распознавание образов и анализ сцен* (М.: Мир, 1976)
8. Фу К *Структурные методы в распознавании образов* (М.: Мир, 1977)
9. Бломберген Н, в сб. *Нелинейная спектроскопия* (Под ред. Н Бломбергена) (М.: Мир, 1979)
10. Курдюмов С П и др., в сб. *Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание* (Под ред. А А Самарского) (М.: Наука, 1988)
11. Колмогоров А Н *Теория информации и теория алгоритмов* (М.: Наука, 1987)
12. Кондратьев В В, Утробин В А *Доклады РАН* 347 316 (1996)
13. Кондратьев В В, Утробин В А *Доклады РАН* 350 315 (1996)
14. Кондратьев В В, Утробин В А *Доклады РАН* 356 178 (1997)
15. Kondrat'ev V V, Utrobin V A *Pattern Recogn. Image Anal.* 7 55 (1997)
16. Kondrat'ev V V, Utrobin V A *Pattern Recogn. Image Anal.* 7 250 (1997)
17. Гильберт Д, Кон-Фоссен С *Наглядная геометрия* (М.: Наука, 1981)
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1965)

## Physical interpretation of the elements of image algebra

V.A. Utrobin

Nizhny Novgorod State Technical University  
ul. Minina 24, 603600 Nizhniy Novgorod,  
Tel. (7-8312) 36-8228. Fax (7-8312) 36-2311. E-mail: utrobin-va@yandex.ru

The physical and mathematical aspects of image algebra transformations, elements and groups are reviewed, allowing some processes involved in innate visual perception mechanisms to be justified.

PACS numbers: 02.10.-v, 42.30.Tz

Bibliography — 18 references

Received 11 April 2003, revised 15 February 2004