

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Решеточная SU(2)-теория в проекции на скалярные частицы

В.И. Захаров

Решеточные измерения представляют уникальную возможность непосредственного изучения анатомии вакуумных флуктуаций, прежде всего их действия и энтропии. В обзоре обсуждаются свойства непертурбативных флуктуаций, которые естественно называть магнитными монополями, или частицами со спином нуль. Магнитные монополи наблюдаются как замкнутые траектории. Основное утверждение состоит в том, что характерные длины этих траекторий измеряются в физических единицах (ферми) и не зависят от шага решетки a . Толщина же их, определенная в терминах распределения неабелева действия, порядка a . Более того, бесконечно тонкие (в пределах доступного разрешения) траектории объединяются в бесконечно тонкие поверхности.

PACS numbers: 11.15.Na, 11.15.Tk, 12.38.Aw

Содержание

1. Введение (39).
 2. Топологические дефекты в решеточных теориях поля (39).
 - 2.1. Два масштаба: a и L_{QCD}^{-1} . 2.2. Топологические дефекты. 2.3. Баланс энергии и энтропии. 2.4. Почему вообще монополи?
 3. Решеточные данные о магнитных монополях и вихрях (41).
 - 3.1. Максимально-абелева проекция. 3.2. Монопольные кластеры. 3.3. Тонкая подстройка параметров. 3.4. Тонкие и тяжелые поверхности.
 4. Интерпретация, следствия (45).
 - 4.1. Природа тонких поверхностей. 4.2. Ассоциация монополей с поверхностями. 4.3. Стандартная проблема Стандартной модели. 4.4. Решение проблемы квадратичной расходимости.
 5. Заключение (47).
- Список литературы (47).

1. Введение

В этом году отмечается 90-летие со дня рождения академика И.Я. Померанчука (1913–1966). Исаака Яковлевича я увидел впервые более сорока лет назад, на его лекции в Московском инженерно-физическом институте. Хотя я участвовал позже во многих обсуждениях физики в присутствии Исаака Яковлевича, не могу сказать, что многое понимал в этих обсуждениях. Однако Исаак Яковлевич оказывал огромное эмоциональное влияние на окружающих, и я прекрасно помню атмосферу тех лет.

В.И. Захаров. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
Тел. (095) 123-83-93. Факс (095) 129-96-49
E-mail: xxz@mppmu.mpg.de
Max-Planck Institut für Physik, München

Статья поступила 27 марта 2003 г.

Чувство трагедии, вызванное его безвременной кончиной, не притупляется с годами.

Тему настоящего обзора определить не так просто. Если сказать, что обзор посвящен магнитным монополям, то это будет звучать завлекательно, но на самом деле малосодержательно: тема слишком обширна. Если сказать, что речь пойдет об описании и интерпретации результатов численных экспериментов на решетке, выполненных недавно (в основном силами сотрудников и студентов ИТЭФ), то легко отпугнуть читателя слишком частной постановкой вопроса.

Содержание обзора, можно сказать, представляет собой компромисс между этими крайностями: экспериментальные данные действительно совсем недавние, но затронутые физические вопросы достаточно фундаментальны, просты.

Принятый стиль изложения подразумевает, что обзор можно читать, не обращаясь ни к каким другим источникам. Это впечатление должно быть верным для читателя, знакомого в общих чертах с физикой монополей, решеточными формулировками теории поля. Мы надеемся, что в любом случае общая картина и логика изложения окажутся достаточно ясными. В списке литературы приведены обзоры, в которых можно найти более детальное изложение вопросов, известных хотя бы в общих чертах (как, например, решеточная формулировка неабелевых теорий).

В значительной степени обзор основан на оригинальных работах [1–6].

2. Топологические дефекты в решеточных теориях поля

2.1. Два масштаба: a и L_{QCD}^{-1}

Для понимания последующего необходимо помнить, что на решетке измеряемые величины могут зависеть от двух

параметров: a и A_{QCD}^{-1} . Шаг решетки a предполагается малым ($a \rightarrow 0$). Он служит ультрафиолетовым обрезанием. Характерный адронный размер¹ A_{QCD}^{-1} возникает при описании низкоэнергетической, или инфракрасной, физики. На решетке можно менять величину a , тогда малым безразмерным параметром служит произведение aA_{QCD} .

Различные типы вакуумных флуктуаций по-разному чувствительны к a и A_{QCD}^{-1} . Наиболее известны, по-видимому, инстантоны (см., например, обзор [7]). Классическое действие инстантонов

$$S_{\text{cl}} = \frac{8\pi^2}{g^2}, \quad (1)$$

где g — константа связи. Вероятность найти инстантон размером ρ_{inst} есть

$$W \propto \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2(\rho_{\text{inst}})}\right), \quad (2)$$

где мы уже учли бег константы связи. Очевидно, что вероятность (2) растет с увеличением ρ и характерный размер инстантонов

$$\rho_{\text{inst}} \sim A_{\text{QCD}}^{-1}. \quad (3)$$

Иными словами, инстантоны представляют собой вакуумные флуктуации в инфракрасном пределе.

Другим, не менее известным примером являются нулевые колебания вакуума. Плотность энергии вакуума примерно равна

$$\epsilon \approx \frac{1}{2} \sum_{\omega} \hbar \omega \approx \frac{\text{const}}{a^4} \quad (4)$$

и сильно расходится в ультрафиолете.

Позже мы обсудим вакуумные флуктуации, в которых параметры a и A_{QCD}^{-1} сосуществуют (в отличие от приведенных выше общеизвестных примеров).

2.2. Топологические дефекты

Общеизвестный пример топологических солитонов в $SU(2)$ -теории — инстантоны. Топологический заряд определяется как интеграл

$$Q_{\text{top}} = \frac{g^2}{32\pi^2} \int G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4r, \quad (5)$$

где $G_{\mu\nu}^a$ — неабелев тензор напряженности глюонного поля. Инстантоны являются естественными топологическими дефектами в случае $SU(2)$ -теории в том смысле, что для ненулевого топологического заряда (5) существует нетривиальный нижний предел на действие

$$S_{\text{cl}} \geq |Q_{\text{top}}| \frac{8\pi^2}{g^2}. \quad (6)$$

Если перейти к $U(1)$ -подгруппе $SU(2)$ -теории, то естественным объектом становятся магнитные моно-

поли (см., например, обзоры [8, 9]). В пространстве размерности $d = 4$ монополи представляют собой замкнутые траектории и характеризуются длиной $\mathcal{L}$. Нижний предел на действие имеет вид

$$S_{\text{mon}} \geq \text{const} \cdot \frac{\mathcal{L}}{a} |Q_M|^2. \quad (7)$$

В силу условия квантования Дирака магнитный заряд Q_M обратно пропорционален электрическому заряду ($|Q_M| \propto 1/e$), а общая константа зависит от деталей регуляризации.

Соотношение (7) нетрудно понять. Действительно, топологическим зарядом служит магнитный поток

$$Q_M = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \, ds. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{H}$ — радиальное магнитное поле монополя, $\int ds$ — интеграл по поверхности сферы. Магнитный поток не зависит от радиуса сферы в силу тождеств Бианки для тензора напряженности электромагнитного поля ($\partial_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0$).

Масса монополя

$$M_{\text{mon}} = \frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \mathbf{H}^2 d^3r \sim \frac{1}{e^2} \int_a^\infty \frac{1}{r^4} d^3r \sim \text{const} \cdot \frac{1}{e^2 a}, \quad (9)$$

где из-за расходимости интеграла по r на малых расстояниях необходимо ввести обрезание на малых расстояниях a . При заданном магнитном потоке минимум массы (9) отвечает, очевидно, сферической симметрии поля.

Для Z_2 -калибровочной теории естественным топологическим дефектом служат замкнутые поверхности (см. обзор [10]). У нас нет возможности обсуждать здесь подробно случай Z_2 -калибровочной инвариантности, и мы ограничимся формулировкой результатов. В этом случае связанное с топологическими дефектами действие

$$S_{\text{vortex}} = \text{const} \cdot \frac{A}{a^2}, \quad (10)$$

где A — площадь поверхности.

В заключение этого раздела подчеркнем, что в $SU(2)$ -теории верно только ограничение (6). Что касается (7) и (10), то в полной $SU(2)$ -теории нет никаких нижних пределов на действие, связанных с монополярными траекториями или Z_2 -поверхностями. Соотношения (7) и (10) имеют место, только если ограничиться инвариантностью по отношению к соответствующим подгруппам $SU(2)$ -теории, а именно $U(1)$ и Z_2 .

2.3. Баланс энергии и энтропии

Обратимся к более подробному обсуждению монополей в абелевой модели. Первый же взгляд на нижний предел для действия (7) порождает уверенность, что монополи не могут играть никакой динамической роли в непрерывном пределе $a \rightarrow 0$. Действительно, в этом пределе масса монополя стремится к бесконечности и фактор $\exp(-S_{\text{mon}})$, казалось бы, приводит к абсолютному подавлению монополей.

Однако мы не учли еще энтропию. Это нетрудно сделать для точечных монополей. В данном случае энтропия есть число траекторий $N_{\mathcal{L}}$ одинаковой длины $\mathcal{L}$. Без решеточной регуляризации вычисление $N_{\mathcal{L}}$ поставило бы в тупик любого теоретика. На решетке же это сделать совсем нетрудно. Монополи занимают центры

¹ Под A_{QCD} понимается масштаб, на котором бегущая константа порядка единицы. Вместо A_{QCD} можно выбрать другую физическую единицу, скажем, fm^{-1} .

кубов. Каждый куб в четырехмерном пространстве ($d = 4$) соседствует с восемью иными, так что на каждом шаге есть возможность выбора одного из восьми направлений. Число шагов равно $\mathcal{L}/a$, поэтому

$$\tilde{N}_{\mathcal{L}} = 8^{\mathcal{L}/a}. \quad (11)$$

По поводу (11) уместно сделать два замечания. Во-первых, мы использовали приближение точечного монополя. На самом деле магнитное поле монополя протяженно: $|\mathbf{H}| \sim 1/er^2$. Приближение точечного монополя оправдано тем, что собственная энергия монополя расходуется на малых расстояниях (см. (9)). Во-вторых, соотношение (11) относится к нейтральным точечным частицам. Сохранение же монопольного заряда означает, что монопольная траектория не может кончиться в "пустом месте", т.е. траектории замкнуты. Более того, если один и тот же участок траектории проходится в обоих возможных направлениях, такой участок вовсе не регистрируется как принадлежащий монопольной траектории. На теоретико-полевым языке это отвечает сокращению между зарядами монополя и антимонополя.

Вместо (11) для числа монопольных траекторий следует использовать соотношение

$$N_{\mathcal{L}} = 7^{\mathcal{L}/a}. \quad (12)$$

Вычислив энтропию (12), можно найти теперь вероятность наблюдения монопольной траектории длиной $\mathcal{L}$:

$$W(\mathcal{L}) = \frac{c_1}{\mathcal{L}^3} \exp \left[\left(-\frac{c_2}{e^2} + \ln 7 \right) \frac{\mathcal{L}}{a} \right], \quad (13)$$

где $c_{1,2}$ — константы. Фактор $1/\mathcal{L}^3$ связан на самом деле с необходимостью учета замкнутости траекторий. Приведенные выше рассуждения (см. (9), (12)) позволяют установить только экспоненциальный фактор в (13). Вывод фактора $1/\mathcal{L}^3$ можно найти, например, в [11].

Для нас важнее всего то, что константа c_2 в формуле (13) известна точно для решеточной регуляризации (хотя не аналитически, а только численно). Тогда можно найти такое значение заряда

$$e_{\text{cr}}^2 \equiv \frac{\ln 7}{c_2}, \quad (14)$$

при котором отсутствует экспоненциальное подавление для любой длины траектории $\mathcal{L}$. Это есть точка конденсации монополей, или фазового перехода.

Основной результат настоящего раздела заключается в том, что при $a \rightarrow 0$ только бесконечно узкая полоса значений e^2 является физической:

$$e_{\text{cr}}^2 - \text{const} \cdot a \leq e_{\text{phys}}^2 \leq e_{\text{cr}}^2 + \text{const} \cdot a. \quad (15)$$

Действительно, если мы переступаем верхний предел в (15), то монополей очень много: они занимают конечную часть четырехмерного объема решетки V_4 . Если же значение e^2 меньше нижнего предела в (15), то монополей практически нет. Выбор значения e^2 , удовлетворяющего (15), можно назвать тонкой подстройкой (fine tuning) параметров.

2.4. Почему вообще монополи?

Читатель, следящий за нашим изложением, в какой-то момент должен, наверное, задать вопрос, поставленный в заголовке настоящего раздела. Действительно, все, что

мы рассказали о теории монополей в неабелевом случае (для определенности, SU(2)), является скорее аргументом против того, чтобы полагать, будто монополи имеют отношение к динамике SU(2).

Приведем еще раз эти аргументы.

- Монополи не являются естественными топологическими возбуждениями в SU(2)-теории. Иными словами, нет нижнего предела на действие монополей в SU(2). Реально это означает, что любому топологическому определению монополя в SU(2)-теории можно удовлетворить, подобрав соответствующую калибровочную копию тривиального поля $A_\mu \equiv 0$.

- Даже в случае U(1)-группы, для которой монополи могут быть определены топологически, необходимо выбрать (так сказать, "руками") значение константы e^2 , почти точно совпадающее с неким фиксированным значением e_{cr}^2 (см. (15)).

Отметим поэтому, что первоначальный интерес к монополям был связан с ясной физической идеей. Речь идет о модели "дуального сверхпроводника" для объяснения конфайнмента кварков (см., например, обзор [9]). Чтобы пояснить эту модель, напомним, что магнитное поле не проникает внутрь обычного сверхпроводника. Если же наложить такое поле внешним образом, то разрушается сверхпроводник, т.е. конденсат куперовских пар исчезает там, где присутствует сильное магнитное поле.

Количественным образом описанная выше картина реализуется, как струна Абрикосова, т.е. классическое решение для магнитного поля в сверхпроводнике при условии, что два противоположных полюса магнита помещены на большом расстоянии друг от друга. (Полюсы магнита можно представлять себе, как концы длинного тонкого соленоида.) Магнитное поле устремляется в трубку, соединяющую полюсы, и энергия системы растет линейно с расстоянием между полюсами.

Представим теперь, что в вакууме неабелевых теорий конденсируются магнитно-заряженные частицы: $\langle 0|\varphi_M|0\rangle \neq 0$. Тогда при внесении в вакуум внешних тяжелых кварков их (цветное) поле тоже устремится в трубку и возникнет линейный потенциал для пары $Q\bar{Q}$, что отвечает конфайнменту кварков.

Центр нашего интереса к монополям лежит в выяснении их свойств как объектов ("эффективной") теории поля. Своеобразие же ситуации состоит в том, что в силу трудностей, изложенных в начале раздела, мы не можем начать с микроскопической теории монополей, но должны обратиться к их феноменологии. Она оказывается удивительно богатой и требует теоретического осмысления.

Иначе говоря, теоретический пессимизм (см. начало раздела) "проигрывает" физической идее вакуума КХД как дуального сверхпроводника. Таков итог феноменологических исследований. Создание же адекватной теоретической картины является по существу делом будущего.

3. Решеточные данные о магнитных монополях и вихрях

3.1. Максимально-абелева проекция

Отправная точка феноменологии монополей — их определение. Идея такого определения достаточно проста.

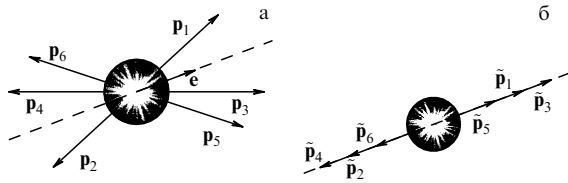


Рис. 1. Импульсы частиц $\mathbf{p}_i$ и ось $\mathbf{e}$, на которую сумма модулей проекций импульсов максимальна (а), и ближайшая одномерная конфигурация импульсов (б).

Поскольку монополи являются естественными топологическими дефектами в абелевом случае, конфигурацию $SU(2)$ -полей следует заменить (или спроецировать) на "ближайшую" к ней конфигурацию абелевых полей и определить монополи "внутри" этой абелевой конфигурации. Остается пояснить, что понимается под "ближайшей" абелевой конфигурацией.

Приведем вначале простую аналогию. Пусть в центральном столкновении рождаются две струи (jets) частиц (рис. 1а). Определим "ближайшую" коллинеарную конфигурацию импульсов частиц в два шага. Используя симметрию относительно вращений, выберем ось (или единичный вектор $\mathbf{e}$), на которую сумма модулей проекций импульсов максимальна:

$$\max \sum_i |\mathbf{p}_i \mathbf{e}|.$$

В качестве второго шага заменим импульсы на их проекции:

$$\mathbf{p}_i \rightarrow \tilde{\mathbf{p}}_i \equiv \mathbf{e} |\mathbf{p}_i \mathbf{e}| \text{sign}(\mathbf{p}_i \mathbf{e}).$$

Спроецированные таким образом импульсы можно назвать коллинеарной конфигурацией импульсов, "ближайшей" к начальной (рис. 1б).

В случае калибровочной теории основным объектом является вектор-потенциал A_μ^a , где a — цветовой индекс. В рассматриваемом случае $SU(2)$ -группы $a = 1, 2, 3$. Объявим A_μ^3 электромагнитным полем, а $A_\mu^{1,2}$ — полем заряженных глюонов. В качестве первого шага (по аналогии с приведенным выше примером) воспользуемся калибровочной инвариантностью, чтобы найти максимальную проекцию A_μ^3 :

$$\max \sum_{i,\mu} |A_\mu^3(x_i)|^2,$$

где x_i — положения узлов решетки. В качестве второго шага для выбранной калибровки положим $A_\mu^{1,2} \equiv 0$.

В итоге начальная конфигурация неабелевых полей $A_\mu^{1,2,3}$ замещается "ближайшей" конфигурацией абелевых полей $\tilde{A}_\mu^3$. Теперь наши монополи есть не что иное, как дираковские монополи в терминах спроецированного поля $\tilde{A}_\mu^3$. Дираковские монополи отвечают сингулярным полям, и монополярный ток определяется в терминах нарушения тождеств Бианки:

$$\partial_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \tilde{A}_\sigma \equiv j_\nu. \quad (16)$$

Точнее говоря, используется решеточный аналог определения (16), так что все сингулярности доопределяются явным образом дискретностью решетки.

Итогом описанной процедуры является набор монополярных траекторий. Вначале генерируется репрезентативный набор конфигураций неабелевых полей (обзор решеточных формулировок теории поля см., например, в [12]). На этом этапе не используется ничего, кроме лагранжиана неабелевой $SU(2)$ -теории. Затем каждая конфигурация замещается ближайшей к ней абелевой конфигурацией, внутри которой определяются монополярные траектории — исходный пункт нашего анализа.

Анализ может быть повторен для различных значений шага решетки a .

3.2. Монополярные кластеры

Совокупность монополярных траекторий, определенных для каждой конфигурации полей, распадается на кластеры. Важно различать перколирующий (или "бесконечный") кластер и кластеры конечной длины. Под перколирующим кластером в реальных измерениях следует, конечно, понимать кластер, простирающийся от границы до границы объема решетки V_4 (индекс 4 указывает размерность пространства). Очевидно, что длина траектории перколирующего кластера пропорциональна V_4 :

$$\mathcal{L}_{\text{perc}} \equiv \rho_{\text{perc}} V_4, \quad (17)$$

где ρ_{perc} — плотность монополей. Перколирующий кластер наблюдается для каждой конфигурации полей и притом в единственном экземпляре [13].

Одной из важнейших характеристик кластеров конечной длины является распределение $N(L)$ по длинам. Экспериментально

$$N(L) \sim \frac{1}{L^3}. \quad (18)$$

Видно, что основную массу кластеров конечной длины составляют небольшие кластеры размером в несколько шагов решетки. Можно ввести соответствующую плотность монополей конечной длины:

$$\mathcal{L}_{\text{uv}} \equiv \rho_{\text{uv}} V_4,$$

где $\mathcal{L}_{\text{uv}}$ — полная длина конечных кластеров и индекс uv указывает на то, что доминируют "ультрафиолетовые" (или короткие) кластеры.

До сих пор мы обсуждали в основном определения. Замечательным фактом является наблюдение простых скейлинговых свойств² ρ_{perc} и ρ_{uv} . Плотность монополей ρ_{perc} не зависит от шага решетки a :

$$\rho_{\text{perc}} \approx 0,62 \sigma_{\text{SU}(2)}^{3/2} \approx c_{\text{perc}} A_{\text{QCD}}^3. \quad (19)$$

Здесь $\sigma_{\text{SU}(2)}$ — натяжение струны в случае $SU(2)$ -глюодинамик, c_{perc} — константа. Что касается ρ_{uv} , то плотность кластеров конечной длины расходится линейно при $a \rightarrow 0$:

$$\rho_{\text{uv}} \approx \frac{c_{\text{uv}}}{a} A_{\text{QCD}}^2, \quad (20)$$

где c_{uv} (как и c_{perc} выше) — константа.

Наиболее поразительно то, что соотношения (19) и (20) сформулированы исключительно в терминах кали-

² Мы цитируем последние данные [14]; там же можно найти ссылки на более ранние работы.

бровочно-инвариантных величин a и Λ_{QCD} . В то же время само определение монополей связано с выбором проекции SU(2) на определенную U(1)-подгруппу. Поэтому соотношения (19) и (20) наводят на мысль, что выбор проекции есть лишь способ детектирования некоторых объектов, которые имеют SU(2)-инвариантный смысл.

3.3. Тонкая подстройка параметров

Соотношение (19) означает, что вероятность того, что в заданном кубе решетки находится монополярный кластер, определяется соотношением

$$W_{\text{мон}} \approx \exp\left(-\frac{9(4\pi)^2}{44} \frac{1}{g^2(a)}\right) \propto (a\Lambda_{\text{QCD}})^3, \quad (21)$$

где $g^2(a)$ — бегущая константа связи, нормированная на шаге решетки a , коэффициент перед $1/g^2(a)$ выражается через β -функцию.

Сравнивая (21) с (2), замечаем, что в отличие от случая инстантона вероятность найти монополярный кластер явно зависит от шага решетки a . Можно было бы думать, что это различие связано исключительно с определениями. По определению монополярная траектория представляет собой бесконечно тонкую линию. Если отождествить инстантон исключительно с его центром, то вероятность найти инстантон имела бы вид, подобный (21).

Коренное различие между монополями и инстантонами раскрывается измерением неабелева действия, ассоциированного с монополями. Соответствующие данные приведены на рис. 2 [1]. Эти результаты играют очень важную роль для нашего изложения, и мы обсудим их подробнее.

Процедура измерения действия монополей выглядит следующим образом. Сначала с помощью максимально-абелевой проекции для данной конфигурации неабелевых полей определяется положение монополей. Монополи занимают центры кубов. Затем измеряется действие на гранях куба. Грани куба представляют собой так называемые плакетты, которые играют центральную роль в решеточной формулировке теории (см., например, [12]). Из среднего значения действия на ближайших к центру монополярного куба плакеттах вычитается среднее

по всей решетке. Эта разница и отложена на рис. 2 как функция шага решетки.

Очень важно, что полученная разница представлена в так называемых "решеточных единицах" действия S_{lat} . В непрерывном пределе "решеточная единица" действия расходится в ультрафиолете:

$$S_{\text{plaq}} \sim \frac{1}{a^4} = \text{const} \cdot S_{\text{lat}}. \quad (22)$$

Иными словами, масштаб "решеточной единицы" действия соответствует вкладу нулевых колебаний (см. (4)).

Наконец, теоретико-полевую массу монополя можно оценить по формуле

$$M(a) \sim a^3 (\langle S_{\text{plaq}}^{\text{мон}} \rangle - \langle S_{\text{plaq}}^{\text{лат}} \rangle). \quad (23)$$

Если сравнить (23) со стандартной формулой непрерывного предела (9), то множитель a^3 отвечает объему (или $\int d^3r$), а действие на монополярных плакеттах соответствует $\mathbf{H}^2$. Только теперь значение поля не предсказывается, а непосредственно измеряется на решетке.

На рисунке 2 представлены отдельно измерения излишка действия для монополей из перколирующего и конечных кластеров. Видно, что действие для перколирующих монополей выше. Это согласуется с тем, что конденсируются монополи с меньшим действием.

Однако самым главным для нас является то, что в "решеточных единицах" действие монополей близко к константе. Иными словами, на имеющихся решетках верна оценка

$$M_{\text{мон}}(a) \sim \frac{1}{a},$$

как и для точечных, или дираковских, монополей! Как подробно обсуждалось выше, для того чтобы такие монополи выживали на решетке, необходимо почти точное сокращение подавления, связанного с расходимостью в массе — с усилением благодаря большой энтропии.

Сравнивая с (21), получаем оценку того, насколько точно происходит сокращение:

$$M_{\text{мон}}(a) - \frac{\ln 7}{a} \sim \frac{\text{const}}{g^2(a)}, \quad (24)$$

где " $\ln 7$ " представляет собой энтропию (см. (12)). Мы поставили $\ln 7$ в кавычки, поскольку соотношение (12) получено в пренебрежении взаимодействием с соседями и при оценке массы монополя (см. (23)) учитывается действие только на плакеттах, "ближайших" к центру куба, занятого монополями. Величина " $\ln 7$ " приведена (для ориентировки) и на рис. 2. Видно, что величина " $\ln 7$ "/ a действительно близка к экспериментальному значению массы монополя (как функции a).

В заключение этого раздела можно сказать, что действие и энтропия для SU(2)-монополей удовлетворяют соотношению, сходному с (15), которое мы вывели в случае U(1)-симметричного лагранжиана. Однако в случае U(1) соотношение (15) может быть выполнено только путем специального выбора константы e^2 . В неабелевом случае значение константы g^2 вообще нельзя фиксировать, поскольку константа зависит от масштаба. Тем не менее соотношение (24) выполняется, причем "само собой", без фиксации каких-либо параметров.

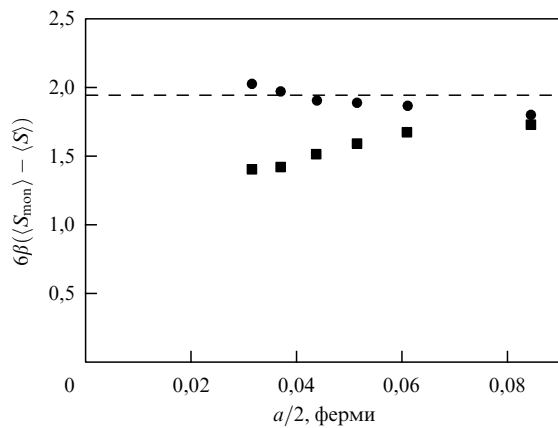


Рис. 2. Неабелево действие, ассоциированное с монополями в перколирующем кластере (квадратики) и в среднем для всех монополей (кружки). Штриховая линия отвечает монополярному действию " $\ln 7$ " $\times L/a$ [1].

3.4. Тонкие и тяжелые поверхности

Выше уже упоминалось, что в случае калибровочной Z_2 -группы естественным топологическим дефектом являются замкнутые поверхности. В $SU(2)$ -калибровочной теории поверхность можно определить, используя проекцию конфигурации $SU(2)$ -полей на ближайшую к ней Z_2 -конфигурацию полей. Оказывается, что поверхности, определенные в спроецированных конфигурациях, обладают замечательными свойствами и в терминах начальной $SU(2)$ -теории. В настоящем разделе мы кратко опишем соответствующие результаты, при этом наше изложение будет отчасти схематичным (многие детали пояснены в обзоре [10]).

На первом шаге калибровочная инвариантность используется для того, чтобы максимально приблизить $SU(2)$ -поля, генерированные на решетке с помощью обычного неабелева действия, к матрицам $\pm I$. Реально проекция на Z_2 -теорию проводилась в два шага. Вначале строилась максимально-абелева проекция (см. выше). На втором шаге остающаяся свобода $U(1)$ -калибровочных преобразований использовалась для максимального приближения абелевых полей к Z_2 -полям. Затем абелевы поля заменялись на соответствующие Z_2 -поля. Замкнутые поверхности представляют собой объединение всех отрицательных плакетов, вычисленных в Z_2 -проекции.

Определенные таким образом поверхности являются бесконечно тонкими по построению. Это еще не означает, однако, что можно говорить о физических поверхностях.

Чтобы выяснить физическую природу поверхностей, были проведены измерения неабелева действия, ассоциированного с поверхностями, и их полной площади как функции шага решетки a [3]. Напомним, что в случае монополей аналогичные измерения открыли удивительно простую картину: действие монополей примерно постоянно в решеточных единицах (см. рис. 2 и соотношение (24)), а длина монопольных траекторий постоянна в физических единицах (т.е. измеренная в ферми).

История повторилась и в случае поверхностей! А именно, плотность действия на единицу площади расхо-

дится квадратично в ультрафиолете:

$$S_{\text{vortex}} \approx 0,5 \frac{A}{a^2}, \quad (25)$$

где A — площадь поверхности. Соответствующий график представлен на рис. 3а.

Что касается площади, то она растет пропорционально объему решетки и примерно постоянна в физических единицах:

$$A_{\text{vortex}} \approx 4(\text{фм})^{-2} V_4. \quad (26)$$

Соответствующие данные воспроизведены на рис. 3б.

То обстоятельство, что действие на единицу площади поверхности стремится к бесконечности в пределе $a \rightarrow 0$ (см. (25)), означает сильное подавление вероятности образования такой поверхности:

$$\exp(-S) \propto \exp\left(-\text{const} \cdot \frac{A}{a^2}\right).$$

Тот же факт, что сама площадь A удовлетворяет простому скейлинговому закону (26), означает, что подавление, связанное с действием, компенсируется усилением, связанным с энтропией, которая тоже должна расти экспоненциально с площадью.

Теоретически, по поводу энтропии бесконечно тонкой поверхности известно, что она действительно может расти как экспонента $\exp(\text{const} \cdot A/a^2)$. Механизм роста энтропии с уменьшением шага решетки a тот же, что и в случае монополей: поверхность на решетке состоит из граней размером a^2 , и соседние грани могут быть ориентированы друг по отношению к другу несколькими способами. К сожалению, вычислить энтропию точно не удастся, существуют только оценки. Поэтому нельзя убедиться непосредственно, что значение действия (25) отвечает тонкой подстройке действия и энтропии. Можно, однако, утверждать, что на опыте поверхности действительно очень "ломаные", т.е. плакетты, принадлежащие поверхности, постоянно меняют ориентацию. Это наблюдение означает, в свою очередь, что

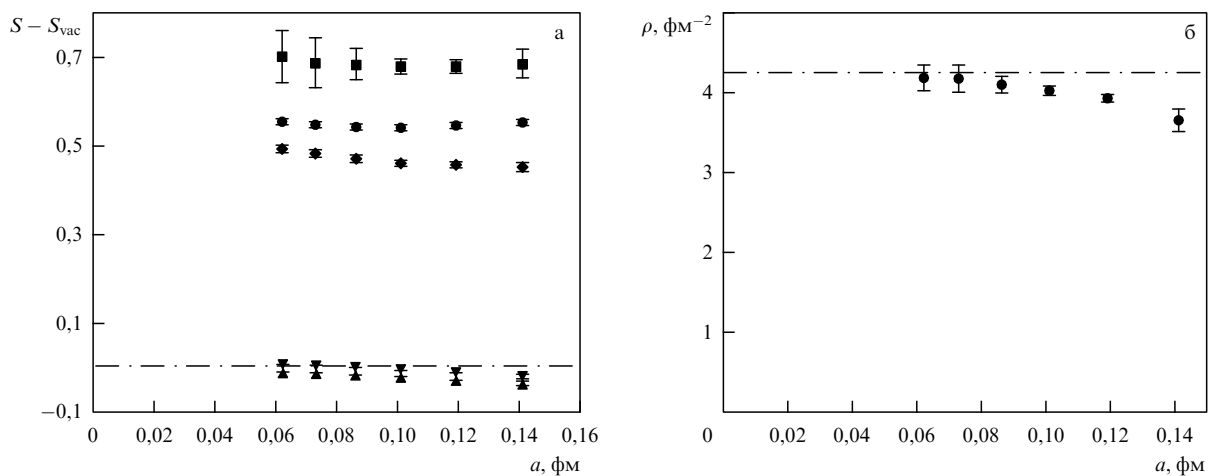


Рис. 3. (а) Неабелево действие, ассоциированное с поверхностью, в среднем по поверхности (кружки), для монополей, лежащих на поверхности (квадратики), для плакеттов на поверхности, но не принадлежащих монополям (ромбики), для плакеттов, соседних с поверхностью (треугольники); геометрически существуют два разных типа соседних плакеттов. (б) Средняя площадь, занимаемая двумерной поверхностью в единице четырехмерного объема [3].

энтропия поверхностей растет экспоненциально с площадью A .

Таким образом, в вакууме SU(2)-глюодинамики присутствуют двумерные поверхности. Толщина поверхности определяется в терминах избытка неабелева действия и на существующих решетках меньше экспериментального разрешения, т.е. шага решетки a . Площадь же поверхности не зависит от шага решетки a и дается в физических единицах. По нашему мнению, наблюдение таких поверхностей является одним из наиболее удивительных открытий, сделанных посредством измерений на решетках.

4. Интерпретация, следствия

4.1. Природа тонких поверхностей

Открытие бесконечно тонких и тяжелых поверхностей совсем недавнее, и никаких подробных работ об их интерпретации нет. В этом разделе мы все же предложим некоторую простую картину, которая может служить для целей ориентации.

Представим магнитные монополи, наблюдаемые на решетке, как дираковские. Поскольку монополи действительно связаны с сингулярными полями (см. (24)), такое приближение кажется разумным. Более того, воспользуемся калибровкой, в которой монопольные поля связаны с третьей компонентой потенциала в цветовом пространстве A_μ^3 . Тогда потенциал, описывающий дираковский монополь, имеет вид

$$A_r^3 = A_\theta^3 = 0, \quad A_\varphi^3 = \frac{Q_M}{4\pi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta}. \quad (27)$$

Здесь r, θ, φ — сферические координаты, а Q_M — магнитный заряд; в нашем случае $Q_M = 4\pi/g$.

Обратим внимание на сингулярность в потенциале (27) при $\theta = 0$. Разумеется, сингулярность отвечает дираковской струне. При оценках для решеточных монополей естественно ввести замену

$$r \sin \theta \rightarrow a \quad (28)$$

(в том, что касается сингулярности).

Обратимся к неабелеву действию

$$S = \frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a)^2, \quad (29)$$

где $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(a) \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. Тогда характерные пертурбативные поля

$$A_\mu^a \sim \frac{1}{a}. \quad (30)$$

Множитель $1/a$ отвечает ультрафиолетовой расходимости, обсуждавшейся в разделе 2.1.

Если $g(a)$ мало, то обычно в действии (29) остается только абелева часть: $S_{Ab} \sim (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2$. Теперь следует учесть еще эффект дираковской струны. Особенность решеточной регуляризации состоит в том, что сама по себе струна не вносит вклада в действие. Однако остается интерференционный член

$$S_{\text{int}} \sim g^2(a) A_\mu^+ A_\nu^- A_\mu^3 A_\nu^3 \sim \frac{1}{a^4}. \quad (31)$$

Здесь константа g^2 сокращается, поскольку потенциал струны содержит $1/g$ (см. (27)), а вместо $A_\mu^\pm$ мы подставили оценку по нулевым колебаниям: $A_\mu^\pm \sim 1/a$.

Таким образом, ультрафиолетовая расходимость в действии, связанном с поверхностями, объясняется в данной модели, как взаимодействие нулевых колебаний полей заряженных глюонов с дираковскими струнами, которые "заметают" поверхности, населенные монополями. Подчеркнем, что интерпретация может меняться в зависимости от выбора калибровки. Однако нетрудно сформулировать и некоторые калибровочно-инвариантные предсказания модели.

4.2. Ассоциация монополей с поверхностями

Очевидным следствием описанной выше модели является предсказание того, что поверхность заселена монополями. Действительно, поверхность замечается дираковскими струнами, а струны заканчиваются на монополях. Это следствие модели прекрасно согласуется с данными измерений [10, 3]: а именно, 90–97 % всех монополей попадает на поверхности. И наоборот, примерно 1/3 всех плакетов, составляющих поверхности, одновременно принадлежат кубам, содержащим монополи.

Можно далее утверждать, что распределение неабелева действия монополей не должно быть сферически-симметричным. Действительно, вдоль поверхности к монополям подходят струны, которые теперь тоже дают вклад в неабелево действие. Это следствие модели также подтверждается в измерениях. Таким же образом находят естественное объяснение нулевая (в пределах разрешения) толщина поверхностей и ультрафиолетовая расходимость действия.

Вместе с тем нельзя, конечно, утверждать, что наша модель наверняка правильна. Во всех упомянутых выше случаях речь шла только о качественном согласии модели с опытом, количественные предсказания не формулировались.

4.3. Стандартная проблема Стандартной модели

Вернемся к соотношениям (13) и (14), позволяющим найти в случае U(1)-теорий значение электрического заряда, при котором происходит конденсация магнитных монополей. Взглянем на эти соотношения с несколько иной точки зрения. А именно, свойства монополей определяются одним параметром $M(a)$, так что действие монополя $S_{\text{мон}} = M(a)\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ — длина траектории. Но такое действие в точности равно классическому действию частицы с массой $M(a)$! Конденсация же монополей очевидным образом отвечает нулевой массе скалярного поля: $m^2 = 0$.

На первый взгляд, мы пришли к неразрешимому противоречию. С одной стороны, согласно (14) конденсация начинается, когда $M(a) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 0$. С другой стороны, мы знаем, что конденсация наступает, когда масса равна нулю. Разрешение парадокса состоит в том, что массу $M(a)$ следует отождествить с затравочной массой, а физическая (или перенормированная) масса отличается от $M(a)$ (см., например, [11]).

Приведем более полную формулировку этого важного для нас утверждения. Определим пропагатор частицы как сумму по путям (*a la* Фейнман):

$$\tilde{D}(x, x') = \sum_{\text{пути}} \exp(-S_{\text{cl}}(x, x')). \quad (32)$$

Здесь $S_{cl}(x, x')$ — классическое действие, соответствующее выбору определенного пути:

$$S_{cl} = M(a) \mathcal{L}(x, x'), \quad (33)$$

где $\mathcal{L}(x, x')$ — длина рассматриваемой траектории, соединяющей точки x, x' (в евклидовом пространстве-времени). Тогда оказывается, что пропагатор $\tilde{D}$, определенный в (32), пропорционален обычному пропагатору частицы с массой $m_{\text{проп}}$, причем

$$m_{\text{проп}}^2 = \frac{8}{a} \left(M(a) - \frac{\ln 7}{a} \right). \quad (34)$$

Подчеркнем, что (34) представляет собой общее соотношение теории поля, никак не связанное со спецификой монополей. Более того, зная (14), можно восстановить (34) с точностью до общего множителя. Действительно, зануление правой части (33) означает фазовый переход к конденсированным монополям. На языке теории поля это означает момент перехода к тахионной массе скалярного поля, или $m_{\text{проп}}^2 = 0$. Более того, в релятивистски-инвариантной формулировке должно возникать соотношение именно для квадрата массы $m_{\text{проп}}^2$, и это соображение фиксирует степень a в правой части (34).

Самое замечательное в соотношении (34) — это то, что оно выглядит аналогично известному соотношению для массы хиггсовской частицы в Стандартной модели элементарных частиц:

$$m_{\text{Higgs}}^2 = M_{\text{рад}}^2 - M_0^2. \quad (35)$$

Здесь $M_{\text{рад}}^2$ — радиационная поправка к массе, которая расходится квадратично при больших виртуальных импульсах, а M_0^2 — так называемый контрчлен. Сравнение формул (35) и (34) показывает, что стандартное выражение для радиационной массы $M_{\text{рад}}^2$ совершенно такое же, как для $M_{\text{мон}}(a)/a$. Это и понятно: оба они описывают один и тот же эффект. Роль же контрчлена M_0^2 в формуле (34) играет $8 \ln 7 / a^2$. Иными словами, введение решеточной регуляризации позволяет фиксировать в нашем случае величину контрчлена.

Таким образом, тонкая подстройка параметров, которая обсуждалась в разделе 3.3, на самом деле представляет собой пример решения стандартной проблемы Стандартной модели: как удержать массу хиггсовской частицы много меньше абсолютной величины каждого из двух слагаемых в (35).

Поскольку этот вывод очень важен для нас, повторим его еще раз в нескольких иных выражениях. Мы начали с SU(2)-калибровочной теории Янга–Миллса, затем определили алгоритм нахождения траекторий магнитных монополей. В итоге оказалось, что неабелево действие, связанное с монополями, расходится (на современных решетках) в ультрафиолете, причем расходимость такая же, как для точечных частиц. Спин монополей нулевой, поэтому можно говорить, что мы построили проекцию SU(2)-теории на точечные скалярные частицы.

Вместе с тем мы наследовали и главную проблему теорий с заряженными скалярными частицами: квадратичную расходимость в массе. Данные о монополях однозначно указывают, однако, что эта проблема как-то решается в возникшей эффективной теории скалярных

полей. Действительно, скейлинговые свойства, подобные (19), демонстрируют, что инфракрасный параметр Λ_{QCD} непротиворечиво сосуществует с масштабом шага решетки a , характеризующим размер скалярных частиц.

Интересно выяснить механизм тонкой подстройки параметров, который осуществляется в эффективной теории скалярных частиц. Мы можем сделать только некоторые предварительные предположения по этому поводу.

4.4. Решение проблемы квадратичной расходимости

Для того чтобы понять, как для монополей решается проблема квадратичной расходимости, нужно перевести решеточные данные о плотности монополей (см. (19) и (20)) на более привычный язык теории поля. Поясним, как это делается.

Начнем с классического действия (34). Тогда очевидно, что средняя длина траектории получается дифференцированием статсуммы Z :

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{\partial}{\partial M} \ln Z. \quad (36)$$

Используя соотношение (34), дифференцирование по затравочной массе M можно заменить на дифференцирование по "обычной" (теоретико-полевой) массе $m_{\text{проп}}$:

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{8}{a} \frac{\partial}{\partial m_{\text{проп}}^2} \ln Z. \quad (37)$$

Производная от статсуммы по $m_{\text{проп}}^2$ сводится к вакуумному ожиданию $\langle |\varphi|^2 \rangle$:

$$\langle |\varphi|^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial m_{\text{проп}}^2} \ln Z, \quad (38)$$

где φ — комплексное скалярное поле, описывающее монополи. Действительно, стандартный лагранжиан скалярного поля содержит $m_{\text{проп}}^2$ в виде произведения $m_{\text{проп}}^2 |\varphi|^2$.

Наконец, средняя длина монопольных траекторий выражается через плотность монополей чисто феноменологическим образом:

$$\langle |\varphi|^2 \rangle = \frac{a}{8} (\rho_{\text{perc}} + \rho_{\text{uv}}) \propto c_{\text{perc}} a \Lambda_{\text{QCD}}^3 + c_{\text{uv}} \Lambda_{\text{QCD}}^2, \quad (39)$$

где $c_{\text{perc}, \text{uv}}$ — константы, входящие в выражения для плотностей монополей (19) и (20). Данные о плотностях монополей означают, что в вакуумном ожидании $\langle |\varphi|^2 \rangle$ нет никаких ультрафиолетовых расходимостей.

Тут возникает, конечно, следующий вопрос: а как объяснить поведение плотности $\rho_{\text{uv}} \propto 1/a$? Ответ на этот вопрос заключается в том, что такая зависимость плотности малых кластеров от шага решетки a связана с тем, что монополи живут на поверхности ($d = 2$), а не на всем четырехмерном пространстве ($d = 4$). Это утверждение фактически очевидно из размерных соображений.

Таким образом, решение стандартной проблемы теории скалярных частиц заключается в том, что монополи ассоциированы с поверхностями. Насколько нам известно, это совершенно новая возможность решения проблемы тонкой подстройки параметров (fine tuning). Является ли подобное решение универсальным, сейчас судить трудно.

5. Заключение

Мы представили данные решеточных расчетов, которые свидетельствуют в пользу новой и необычной картины вакуума теорий Янга–Миллса в евклидовом пространстве-времени. А именно, в вакууме присутствуют тонкие линии (монопольные траектории) и поверхности (так называемые вихри). Толщина определяется в терминах распределения неабелева действия и оказывается меньше экспериментального разрешения, или шага решетки a . В свою очередь, доступное минимальное значение a составляет примерно $a \approx (3 \text{ ГэВ})^{-1}$. Что же касается средних значений длины линий и площади поверхностей, то они не зависят (с хорошей точностью) от шага решетки a и измеряются в фм и фм² соответственно. Существование двух разных параметров (a и A_{QCD}^{-1}) в вакуумных флуктуациях естественно назвать тонкой подстройкой параметров (fine tuning).

Более того, мы убедились, что понимаемая таким образом подстройка параметров совпадает с явлением, обсуждавшимся впервые в связи со Стандартной моделью, точнее, в связи со скалярными хиггсовскими частицами. В случае Стандартной модели проблема заключается в том, что масса скалярной частицы может быть много меньше обратного радиуса частицы. В случае монополей решение стандартной проблемы скалярных частиц заключается в том, что монополи ассо-

циированы на самом деле с поверхностями (вихрями), а не со всем четырехмерным пространством.

С точки зрения возможных последствий для теории самым важным представляется наблюдение объектов, явно выходящих за рамки теории поля. Речь идет о бесконечно тонких поверхностях. Теорию этих объектов еще предстоит создать.

Список литературы

1. Bornyakov V G et al. *Phys. Lett. B* **537** 291 (2002)
2. Boyko P Yu, Polikarpov M I, Zakharov V I "Geometry of percolating monopole clusters", hep-lat/0209075
3. Gubarev F V et al. *Phys. Lett. B* **574** 136 (2003); hep-lat/0212003
4. Zakharov V I "Hidden mass hierarchy in QCD", hep-ph/0202040
5. Chernodub M N, Zakharov V I *Nucl. Phys. B* **669** 233 (2003); hep-th/0211267
6. Gubarev F V, Zakharov V I "Interpreting the lattice monopoles in the continuum terms", hep-lat/0211033
7. Вайнштейн А И и др. *УФН* **136** 553 (1982)
8. Коулман С *УФН* **144** 277 (1984)
9. Поликарпов М И *УФН* **165** 627 (1995)
10. Greensite J *Prog. Part. Nucl. Phys.* **51** 1 (2003); hep-lat/0301023
11. Polyakov A M *Gauge Fields and Strings* (Contemporary Concepts in Physics, Vol. 3) (Chur: Harwood Acad. Publ., 1987)
12. Макеенко Ю М *УФН* **143** 161 (1984)
13. Hart A, Teper M *Phys. Rev. D* **58** 014504 (1998)
14. Bornyakov V, Müller-Preussker M *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.* **106–107** 646 (2002); hep-lat/0110209

Scalar particle projection of the lattice SU(2) theory

V.I. Zakharov

*Institute of Theoretical and Experimental Physics,
B. Cheremushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 123-83 93. Fax (7-095) 129-96 49
E-mail: xxz@mpmu.mpg.de
Max-Planck Institut für Physik, München*

Lattice measurements offer a unique possibility for directly studying the anatomy — primarily action and entropy — of vacuum fluctuations. In this review, the properties of nonperturbative fluctuations which can naturally be called magnetic monopoles, or scalar particles, are discussed. Magnetic monopoles are defined as closed trajectories on the lattice. The main statement is that the length of these trajectories scales in physical units (fermi) and does not depend on the lattice spacing a , whereas their thickness, as determined in terms of non-Abelian action distribution, is of the order of a . Moreover, these trajectories — infinitely thin within presently available resolution — combine to form infinitely thin surfaces.

PACS numbers: 11.15.Ha, 11.15.Tk, 12.38.Aw

Bibliography — 14 references

Received 27 March 2003