

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Автомоделная аномальная диффузия и устойчивые законы

В.В. Учайкин

Излагаются стохастические принципы построения процесса аномальной диффузии. Дается обзор соответствующих моделей случайных процессов. На основе принципа автомоделности и независимых приращений производится расширение понятия диффузионного процесса до класса устойчивых процессов. Замена принципа независимых приращений принципом восстановления позволяет осуществить следующий шаг в расширении понятия диффузии, приводящий к диффузионным уравнениям в частных производных дробных порядков как по координатам, так и по времени. Приводятся фундаментальные решения этих уравнений в терминах устойчивых законов, обсуждается их связь с фрактальностью и памятью среды. Вводится новый класс распределений, названных дробно-устойчивыми.

PACS numbers: 02.50, –г, 05.40.Fb, 05.40.Jc

Содержание

1. Введение (847).
2. Аномальная диффузия как случайный процесс (848).
 - 2.1. Винеровский процесс. 2.2. Автомоделность и устойчивость.
 - 2.3. Уравнения для L-процессов. 2.4. Обобщенное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова.
3. Устойчивые законы (853).
 - 3.1. Устойчивые распределения как предельные. 3.2. Свойства устойчивых распределений. 3.3. Дробно-устойчивые распределения.
4. Аномальная диффузия как асимптотика скачкообразных процессов (857).
 - 4.1. Процессы восстановления. 4.2. Подчиненные процессы.
 - 4.3. Теорема об аномальной диффузии. 4.4. Уравнения аномальной диффузии. 4.5. Обобщенный закон Фика.
5. Память, шумы, фракталы (861).
 - 5.1. Дробные производные. 5.2. Память и перемежаемость.
 - 5.3. Эредитарные процессы. 5.4. Дробные диффузионные процессы и шумы. 5.5. Стохастические фракталы. 5.6. Одномерный фрактальный газ. 5.7. Блуждание на одномерном фрактале.
6. Кинетика с конечной скоростью свободного движения (867).
 - 6.1. Мезодиффузия. 6.2. Общее решение. 6.3. Точные решения.
 - 6.4. Телеграфное уравнение. 6.5. Метод моментов. 6.6. Дробное обобщение телеграфного уравнения. 6.7. Влияние конечной скорости.
7. Заключение (872).
8. Приложения (873).
 - 8.1. Дробно-устойчивые плотности, выражающиеся через эле-

ментарные и специальные функции. 8.2. Дробные интегро-дифференциальные операторы.

Список литературы (875).

1. Введение

Приступая в юные наши годы к выполнению общефизического лабораторного практикума, все мы знакомимся с теорией ошибок, и в минимальном варианте это знакомство сводилось к уяснению того, что результат любого измерения X изучаемой величины a обычно сопровождается, или, как образно выразился Зайдель, *отягощается* [1] случайной ошибкой Δ :

$$X = a + \Delta.$$

Полностью исключить ее, как правило, не удастся, но можно уменьшить ее повторением опыта и вычислением среднего арифметического (выборочного среднего) измеренных величин X_1, \dots, X_n :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = a + \Delta_n.$$

Здесь по-прежнему a — истинное значение физической величины (систематическая ошибка предполагается исключенной), а Δ_n — зависящая от числа повторных измерений n случайная ошибка, которая при больших n распределена по нормальному (гауссову) закону.

Двумя годами позже в курсе теории вероятностей мы узнавали, почему она так должна быть распределена: потому что справедлива.

Центральная предельная теорема (ЦПТ). Пусть случайные величины X_j независимы, одинаково распределены со средним значением $\langle x \rangle = a$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$. Тогда

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - na}{\sqrt{n} \sigma} \underset{d}{\sim} G,$$

В.В. Учайкин. Ульяновский государственный университет
432700 Ульяновск, ул. Л. Толстого 42, Российская Федерация
Тел. (8422) 32-06-12
Факс (8422) 41-23-40
E-mail: uchaikin@sv.uven.ru

Статья поступила 1 октября 2002 г.,
после доработки 9 апреля 2003 г.

где G — случайная величина со стандартной нормальной (гауссовой) плотностью распределения

$$p_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

а знак $\stackrel{d}{\sim}$ означает асимптотическое (при $n \rightarrow \infty$) равенство распределений случайных величин, стоящих по обе стороны от этого знака.

Дрожание стрелки прибора, вызванное проходящим под окном трамваем, давало нам первое представление о случайном процессе и релаксации (стрелка быстро успокаивалась), разглядывание под микроскопом взвешенных в жидкости частиц показывало пример безостановочных случайных блужданий — броуновского движения или диффузии. В курсе молекулярной физики мы знакомимся с уравнением диффузии, в одномерном случае имеющим вид

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2},$$

где $p(x, t)$ — плотность распределения x — координаты диффундирующей частицы в момент времени t , а D — коэффициент диффузии. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$,

$$p(x, 0) = \delta(x),$$

то решение этого уравнения имеет вид

$$p(x, t) = (Dt)^{-1/2} g(x(Dt)^{-1/2}),$$

где

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

— гауссово распределение с удвоенной дисперсией. Заметим, что в данном случае уравнение диффузии можно представить также в виде

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \delta(x) \delta(t),$$

предполагающем нулевое начальное условие.

Эти формулы образуют фундамент теории линейной нормальной диффузии. Простейший вывод уравнения диффузии основан на *уравнении непрерывности*

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}$$

и *законе Фика*

$$j(x, t) = -D \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}.$$

К диффузионной модели приводят различные физические и не обязательно физические задачи: одни и те же диффузионные уравнения описывают поведение нейтронов в ядерном реакторе, курса ценных бумаг на финансовой бирже и частиц цветочной пыльцы, взвешенных в жидкости. История изучения броуновского движения связана с именами Эйнштейна, Смолуховского, Ланжевена, Фоккера, Планка, Орнштейна, Уленбека, Чандрасекара и других известнейших физиков. С пионерскими работами в этом направлении читатель старшего поко-

ления может быть знаком по сборнику [2]. Смолуховский, в частности, пишет: "Известная теория броуновского движения, развитая Эйнштейном, мною и Ланжевеном..." [2, с. 319]. Работы Эйнштейна, Ланжевена и Смолуховского [3–5] датированы соответственно 1905 г., 1908 г. и 1912 г. Однако впервые диффузионное уравнение появилось в диссертации Луи Башелье — ученика Пуанкаре — в 1900 г. Диссертация называлась "Теория спекуляций" и была посвящена изучению случайного процесса эволюции рыночных цен.

Тот факт, что совершенно разные по природе явления описываются одинаковыми уравнениями, является прямым указанием на то, что *дело здесь не в конкретном механизме явления, а в некотором общем качестве, которым обладает весь класс подобных явлений*. Формулировка этого качества в виде аксиом или определений позволяет освободить картину от деталей, не влияющих существенно на ход процесса, и исследовать полученную модель "в чистом виде". Это уже удел математиков, усилиями которых и была создана теория случайных процессов, первым объектом применения которой стало броуновское движение. Важнейший вклад в математическую теорию броуновского движения внес Винер, доказавший, что траектории броуновского процесса почти везде непрерывны, но нигде не дифференцируемы. В связи с этим броуновское движение называют *винеровским процессом*. Наряду с Винером математическими аспектами броуновского движения занимались Бернулли, Дуб, Кац, Феллер, Бернштейн, Леви, Колмогоров, Стратонович и другие известные теоретики.

В предлагаемой работе мне хочется показать обобщение понятия диффузии на фоне теории случайных процессов и сделать это так, чтобы процессы аномальной диффузии, о которых так много пишут в последние годы (см., например, [6–12]), возникли, или, еще лучше, проявились на этом фоне самым естественным образом. Их отличие от нормальной диффузии заключается в том, что ширина диффузионного пакета растет по закону t^H , где $H \neq 1/2$ ($H < 1/2$ в случае *субдиффузии* и $H > 1/2$ в случае *супердиффузии*). При этом нормальная форма диффузионного пакета может и не сохраниться, и для ее изучения необходима дополнительная информация о процессе. Эта информация может быть либо извлечена из конкретной физической ситуации, либо привнесена извне в виде некоторого принципа, которому удовлетворяет, в частности, нормальная диффузия — броуновское движение. В качестве такого принципа может быть выбран *принцип автомодельности (самоподобия)*, согласно которому

$$p(x, t) = t^{-H} q(xt^{-H}),$$

но H теперь не обязательно $1/2$ и не обязательно $q(x)$ — нормальное распределение.

Обзору основных идей и результатов этого направления и посвящена настоящая работа.

2. Аномальная диффузия как случайный процесс

2.1. Винеровский процесс

Для того чтобы лучше представить себе место диффузии среди других случайных процессов, напомним несколько

определений [13]. Мы ограничимся рассмотрением одномерного движения, так что случайная координата блуждающей частицы $X(t)$, $t \geq 0$, будет вещественной переменной. В этом случае понятие случайного процесса совпадает с понятием случайной функции [14, с. 589].

2.1.1. Случайный процесс (случайная функция) $\{X(t)\}$ есть совокупность случайных величин $X(t)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве и отвечающих всевозможным значениям t . Случайная величина $X(t)$ называется *координатой* случайного процесса в момент времени t , а случайная реализация $X(\cdot)$ — *траекторией* случайного процесса.

Следуя принятой в физической литературе традиции, будем характеризовать случайный процесс $\{X(t)\}$ набором конечномерных плотностей $p_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$, $t_n > t_{n-1} > \dots > t_1$, в предположении, что они существуют.

2.1.2. Случайный процесс $\{X(t)\}$ называется *гауссовским процессом*, если для любых $n \geq 1$ и t_1, \dots, t_n $p_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$ является n -мерным нормальным (гауссовским) распределением. Так как нормальное распределение однозначно определяется своими первыми и вторыми моментами, то для задания гауссовского процесса достаточно указать две функции: математическое ожидание $m(t) = \langle X(t) \rangle$ и корреляционную функцию $B(t, u) = \langle [X(t) - m(t)][X(u) - m(u)] \rangle$.

2.1.3. Случайный процесс $\{X(t)\}$ называется *марковским процессом*, если для любых $n \geq 1$ и $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ условная плотность $p(x, t | x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$ зависит лишь от последней координаты:

$$p(x, t | x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = p(x, t | x_n, t_n).$$

Свойство марковости интерпретируется как независимость будущего от прошлого при известном настоящем. Леви формулирует это свойство словами "прошедшее влияет на будущее только через настоящее" и подчеркивает аналогию с принципом Гюйгенса: "Можно сказать, что это *принцип Гюйгенса в расчете вероятностей*" [15, с. 48]. В некотором смысле его можно считать стохастическим обобщением динамического принципа, заложенного в уравнениях механики: будущее механической системы полностью определяется ее фазовыми координатами в настоящий момент и не зависит от прошлого.

Условную плотность $p(x, t | y, u)$ обозначают $p(y, u \rightarrow x, t)$ и называют *переходной плотностью*. Переходная плотность удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена, являющемуся переформулировкой приведенного выше определения:

$$p(y, u \rightarrow x, t) = \int p(y, u \rightarrow z, v) p(z, v \rightarrow x, t) dz,$$

$$u < v < t.$$

Заметим, что "промежуточных" аргументов здесь два (z и v), но интегрирование по одному из них (z) снимает и зависимость от другого (v). Переходная плотность вместе с одномерной плотностью $p(x, 0)$, заданной в начальный момент времени $t = 0$, полностью определяют марковский процесс при $t > 0$.

2.1.4. Случайный процесс $\{X(t)\}$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых $n \geq 1$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ случайные величины

$X(0), X(t_1) - X(0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ взаимно независимы. Леви такие процессы называет *аддитивными* [15, с. 80]. Очевидно, они принадлежат к классу марковских процессов, причем

$$p(y, u \rightarrow x, t) = p(0, u \rightarrow x - y, t).$$

2.1.5. Процесс с независимыми приращениями называется *однородным*, если распределения разностей $X(t + \tau) - X(t)$ не зависят от t :

$$p(y, u \rightarrow x, t) = p(0, 0 \rightarrow x - y, t - u) \equiv p(x - y, t - u).$$

Леви называет такие процессы *линейными*, отмечая, что среди них "существуют процессы и отличные от броуновского" [15, с. 81].

2.1.6. Однородный процесс называется *стохастически (слабо) непрерывным*, если

$$\int_{|x| > \varepsilon} p(x, \tau) dx \rightarrow 0$$

при $\tau \downarrow 0$ и любом $\varepsilon > 0$.

Приведем наиболее распространенные определения диффузионного процесса (броуновского движения).

2.1.7. Броуновское движение $\{X(t)\}$ может быть определено как однородный процесс с переходной плотностью $p(x, t)$, являющейся фундаментальным решением параболического дифференциального уравнения [16, с. 319].

2.1.8. Броуновским движением или процессом Винера — Башелье называют начинающийся в начале координат процесс с независимыми приращениями, имеющими нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, пропорциональной t . Винером и Леви было показано, что траектории такого процесса с вероятностью 1 непрерывны и что это свойство выделяет этот процесс из более широкого класса безгранично делимых процессов [17, с. 212].

2.1.9. Винеровский процесс (броуновское движение) есть однородный процесс с независимыми приращениями и непрерывными траекториями [18, с. 38], т.е.:

а) при $0 < t_1 < t_2 < \dots$ случайные величины $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots$ независимы;

б) $X(t + \tau) - X(t)$ не зависит от t ;

в) $\lim_{\tau \rightarrow 0} P(|X(t + \tau) - X(t)| \geq \varepsilon) / \tau = 0$ при $\tau \rightarrow 0$ и всех $\varepsilon > 0$ (условие Лундберга).

Нетрудно видеть (свойство а)), что винеровский процесс является марковским: если приращение $X(t_n) - X(t_{n-1})$ не зависит от остальных приращений $X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_1) - X(0)$, то оно не зависит и от самих значений $X(t_{n-2}), \dots, X(0)$, а следовательно, и $X(t_n)$ при заданном $X(t_{n-1})$ не зависит от всех предыдущих значений $X(t_{n-2}), \dots, X(0)$. Свойство б) обеспечивает однородность процесса, а при равномерном разбиении времени — и одинаковость их распределений. Таким образом, два положения, а) и б), подводят нас к ЦПТ. Остается "последний штрих", и он дается третьим свойством, в), — непрерывностью траекторий. Это свойство, впрочем, может быть заменено заданием нормального распределения траекторий [19, с. 17], заданием линейного закона возрастания дисперсии со временем или просто требованием конечности дисперсии. Ее линейная зависимость от времени возникает в

результате независимости приращений, а нормальный закон следует из центральной предельной теоремы. Определение 2.1.9, таким образом, может быть переписано в следующем эквивалентном виде.

2.1.10. Винеровский процесс (*W-процесс*) есть однородный процесс с конечной дисперсией.

2.2. Автомодельность и устойчивость

Есть, однако, существенная деталь, отличающая простое суммирование независимых слагаемых с конечной дисперсией, когда нормальное распределение возникает как асимптотический (при большом числе слагаемых) закон, от винеровского процесса, когда нормальное распределение наблюдается при любом конечном времени. Для броуновского движения нет больших и малых времен, оно автомодельно.

2.2.1. *Автомодельность (самоподобие, масштабная инвариантность, скейлинг)* — это особая симметрия системы, состоящая в том, что изменение масштабов одних переменных может быть скомпенсировано преобразованием масштабов других [20, с. 8, 351].

В нашем случае автомодельность плотности распределения $p(x, t)$ выражается соотношением

$$p(x, t) = t^{-H} p(xt^{-H}, 1).$$

В терминах случайной переменной свойство автомодельности принимает вид

$$X(t) \stackrel{d}{=} t^H X(1),$$

или

$$X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t),$$

при $a > 0$ и любом фиксированном t . Вообще, случайный процесс $\{X(t)\}$ называется *автомодельным*, если автомодельны распределения всех его конечномерных векторов:

$$(X(at_1), \dots, X(at_n)) \stackrel{d}{=} (a^H X(t_1), \dots, a^H X(t_n)).$$

Для автомодельности же однородного марковского процесса достаточно автомодельности одномерного распределения.

2.2.2. Определим теперь *L-процесс* как однородный процесс с автомодельным одномерным распределением

$$p(x, t) = t^{-1/\alpha} g^{(\alpha)}(xt^{-1/\alpha}),$$

где $\alpha = 1/H$, а $g^{(\alpha)}(x)$ — неизвестная пока плотность распределения. Таким образом, переход от *W-процесса* (п. 2.1.10) к *L-процессу* (п. 2.2.2) осуществляется заменой условия конечности дисперсии требованием автомодельности.

Очевидно, что такая замена не может привести к сужению класса рассматриваемых процессов: *W-процесс* удовлетворяет этому условию и остается в классе *L* с $\alpha = 2$. Появятся ли при этом какие-то новые процессы? Ответ на этот вопрос связан с тем, существуют или нет отличные от гауссова *L-процессы*, удовлетворяющие условию автомодельности.

Рассмотрим два момента времени: t и $t + \tau$. Случайные координаты *L-процесса* в эти моменты связаны

соотношением

$$X(t + \tau) = X(t) + X(\tau).$$

При условии $X(0) = 0$ случайные величины $X(t)$ и $X(\tau)$ являются приращениями процесса в непересекающихся интервалах $(0, t)$ и $(t, t + \tau)$ и, стало быть, независимы. Плотность распределения их суммы дается сверткой плотностей слагаемых:

$$p(x, t + \tau) = p(x, t) * p(x, \tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(x - x', t) p(x', \tau) dx'.$$

Удобно от плотностей перейти к характеристическим функциям

$$\tilde{p}(k, t) = \langle \exp \{ikX(t)\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) p(x, t) dx,$$

для которых операция свертки превращается в произведение:

$$\tilde{p}(k, t + \tau) = \tilde{p}(k, t) \tilde{p}(k, \tau),$$

а условие автомодельности принимает вид

$$\tilde{p}(k, t) = \tilde{g}^{(\alpha)}(kt^{1/\alpha}).$$

2.2.3. Эти соотношения приводят к функциональному уравнению

$$\tilde{g}^{(\alpha)}(k(t + \tau)^{1/\alpha}) = \tilde{g}^{(\alpha)}(kt^{1/\alpha}) \tilde{g}^{(\alpha)}(k\tau^{1/\alpha}),$$

определяющему класс *строго устойчивых законов*, называемых далее для краткости просто *устойчивыми*. Характеристические функции $\tilde{g}^{(\alpha)}(k)$ выражаются в элементарных функциях и могут быть записаны в нескольких формах. Приведем здесь две наиболее употребляемые из них — формы *A* и *C* по классификации, предложенной в [21]:

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \begin{cases} \exp \left\{ -|k|^\alpha \left[1 - i\beta \tan \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \operatorname{sign} k \right] \right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp \{-|k|^\alpha\}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (\text{A})$$

$$\tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp \left\{ -|k|^\alpha \exp \left[-i \left(\frac{\theta\alpha\pi}{2} \right) \operatorname{sign} k \right] \right\}. \quad (\text{C})$$

Здесь $\alpha \in (0, 2]$ — характеристический показатель устойчивого закона, а $\beta \in [-1, 1]$ и $\theta \in [-\theta_\alpha, \theta_\alpha]$, $\theta_\alpha = \min \{1, 2/\alpha - 1\}$, — параметры асимметрии. Задаваемые этими характеристическими функциями устойчивые случайные величины будем обозначать через $S^{(\alpha, \beta)}$ и $S(\alpha, \theta)$ соответственно.

Отложив обсуждение устойчивых распределений и случайных величин, вернемся к *L-процессам*.

2.3. Уравнения для L-процессов

Напомним, что мы ввели в рассмотрение *L-процесс* как однородный автомодельный процесс. Его случайное значение в момент времени t

$$X^{(\alpha, \beta)}(t) \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

Семейство таких процессов названо в [16] *устойчивыми процессами*, однако в [22] предлагается оставить это название за процессами, конечномерные распределения которых являются многомерными устойчивыми (см. п. 3.2.16), а для рассматриваемых процессов использовать следующую терминологию.

2.3.1. Случайный процесс $X(t)$ называется (*стандартным*) α -устойчивым движением Леви с параметрами $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, если:

- 1) $X(0) = 0$ почти наверное;
- 2) $X(t)$ является процессом с независимыми приращениями;
- 3) $X(t + \tau) - X(t) \stackrel{d}{=} \tau^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}$ при любых t и τ .

Для краткости мы будем называть его $L^{(\alpha, \beta)}$ -процессом, тогда винеровский процесс обозначится как $L^{(2, 0)}$ -процесс.

Чтобы яснее увидеть различие между траекториями W-процесса и L-процесса, рассмотрим поведение функции

$$Q(\tau, \Delta) \equiv \frac{P(|X(t + \tau) - X(t)| \geq \Delta)}{\tau}$$

при $\tau \rightarrow 0$. Для W-процесса

$$\begin{aligned} Q_W(\tau, \Delta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \tau^{3/2}} \int_{\Delta}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \tau} \int_{\Delta/\sqrt{\tau}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz. \end{aligned}$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Q_W(\tau, \Delta) = 0,$$

отражающее непрерывность траекторий винеровского процесса. В случае же L-процесса с $\alpha < 2$

$$Q_L(\tau, \Delta) = \frac{P(|S^{(\alpha, \beta)}| \geq \Delta \tau^{-1/\alpha})}{\tau}.$$

Известно, что

$$P(|S^{(\alpha, \beta)}| \geq x) \propto x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

так что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Q_L(\tau, \Delta) = \text{const} \cdot \Delta^{-\alpha} > 0, \quad \tau \rightarrow 0.$$

Траектории L-процесса *не являются непрерывными* — в этом их главное отличие. Амплитуда скачков (разрывов) зависит от α : чем меньше α , тем больше разрывы. Таким образом, среди L-процессов $L^{(2, 0)}$ — единственный процесс, обладающий непрерывными траекториями.

Ширина диффузионного пакета при $\alpha < 2$ растет со временем быстрее, чем \sqrt{t} , а именно, пропорционально $t^{1/\alpha}$. При этом форма его описывается устойчивым распределением с показателем α . Дисперсия бесконечна, но ничто не мешает воспользоваться любой другой мерой ширины (например, шириной на половине высоты пика или шириной интервала, содержащего фиксированную вероятность). Мы пришли к *стохастической модели супердиффузии*, подробно рассмотренной в [23, 24].

Наглядное представление о траекториях L-процессов с разными α, β дает рис. 1, на котором представлены результаты моделирования методом Монте-Карло.

По аналогии с обычной диффузией введем положительную постоянную — "коэффициент диффузии" D — соотношением $X^{(\alpha, \beta)}(t) \stackrel{d}{=} (Dt)^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}$.

2.3.2. *Характеристическая функция состояния L-процесса* $X^{(\alpha, \beta)}(t)$ в момент t имеет вид ($\alpha \neq 1$)

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t) &= \langle \exp \{ikX^{(\alpha, \beta)}(t)\} \rangle = \\ &= \exp \left\{ -Dt|k|^\alpha \left[1 - i\beta \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{sign } k \right] \right\}. \end{aligned}$$

Непосредственно отсюда следует и уравнение, которому она удовлетворяет:

$$\frac{\partial \tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t)}{\partial t} = -|k|^\alpha D \left[1 - i\beta \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{sign } k \right] \tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t).$$

Обращение этого уравнения (обратное преобразование Фурье) осуществляется с применением формул обратных потенциалов Феллера (см. [25]) и приводит к уравнению эволюции пространственного распределения [24]

$$\frac{\partial p^{(\alpha, \beta)}(x, t)}{\partial t} = DK^{(\alpha, \beta)}(x; p^{(\alpha, \beta)}(\cdot, t)),$$

где правая часть может быть записана в одной из двух эквивалентных форм:

$$\begin{aligned} K^{(\alpha, \beta)}(x; p^{(\alpha, \beta)}(\cdot, t)) &= \frac{A}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \beta \text{sign}(x - \xi)}{|x - \xi|^{1+\alpha}} \times \\ &\times [p^{(\alpha, \beta)}(x, t) - p^{(\alpha, \beta)}(\xi, t)] d\xi, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} K^{(\alpha, \beta)}(x; p^{(\alpha, \beta)}(\cdot, t)) &= \\ &= \frac{A}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} [2p^{(\alpha, \beta)}(x, t) - (1 + \beta)p^{(\alpha, \beta)}(x - \xi, t) - \\ &- (1 - \beta)p^{(\alpha, \beta)}(x + \xi, t)] \xi^{-1-\alpha} d\xi, \end{aligned}$$

где

$$A = 1 + \beta^2 \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Выражения эти связаны с производными по x дробного порядка. В частности, в симметричном случае ($\beta = 0$)

$$K^{(\alpha, 0)}(x; p^{(\alpha, 0)}(\cdot, t)) = -D^\alpha p^{(\alpha, 0)}(x, t),$$

где D^α означает производную Рисса порядка α по переменной x , а в случае одностороннего процесса ($\alpha < 1$, $\beta = 1$)

$$K^{(\alpha, 1)}(x; p^{(\alpha, 1)}(\cdot, t)) = -\left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^{-1} D_+^\alpha p^{(\alpha, 1)}(x, t),$$

где D_+^α — оператор дробной производной Маршо (см. [25]).

2.4. Обобщенное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова

Приведем еще два определения диффузионных процессов.

2.4.1. Под *диффузионным процессом* $\{X(t)\}$, фазовым пространством которого является действительная прямая, понимают непрерывный марковский процесс с

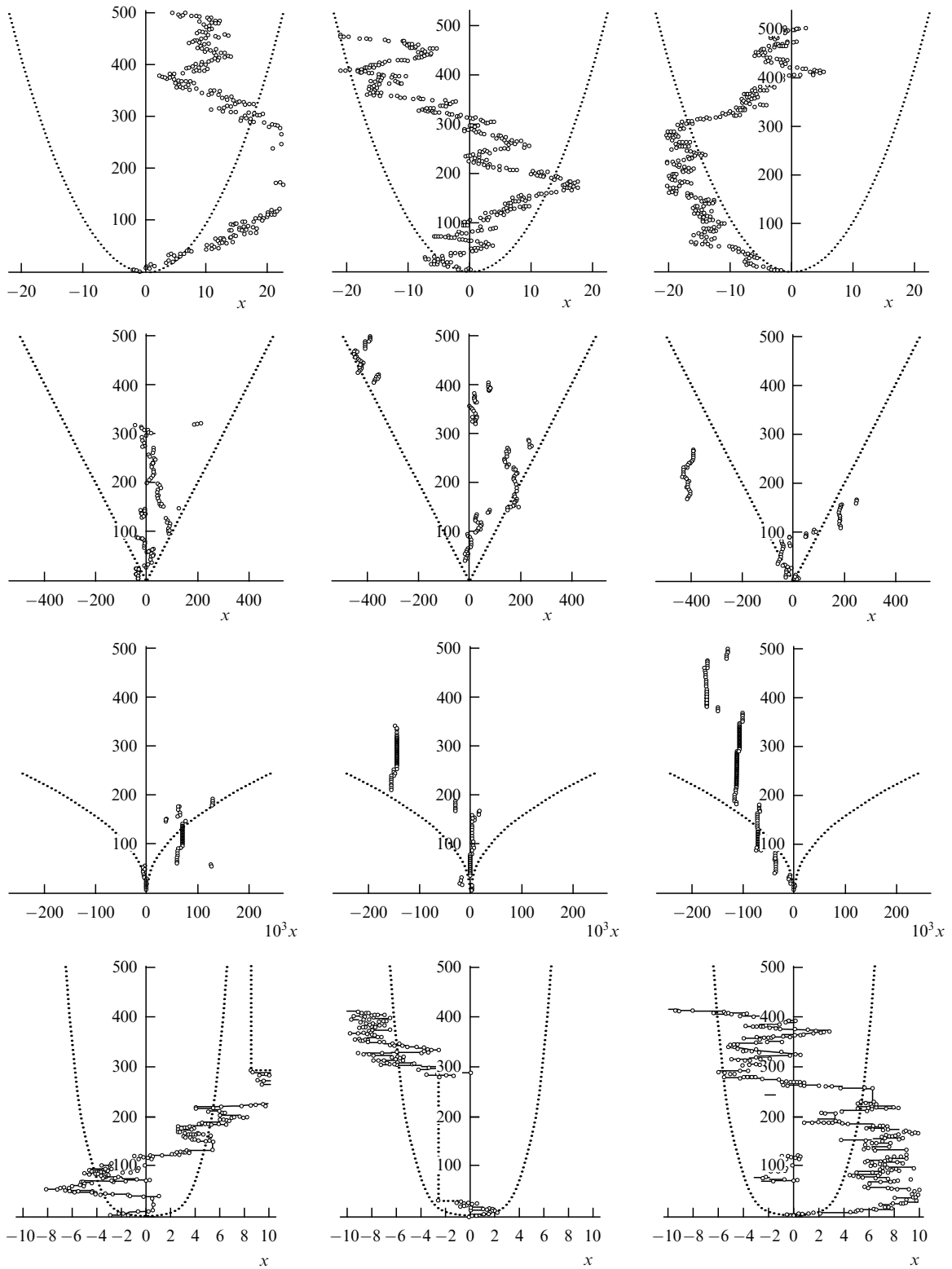


Рис. 1. Типичные траектории L-процессов ($\alpha = 2, 1, 1/2$ — сверху вниз) и подчиненного L-процесса с $\alpha = 2$ и $\omega = 1/2$. Пунктир показывает изменение ширины диффузионного пакета (по горизонтали) со временем (вертикальная ось).

переходной плотностью $p(x, t \rightarrow x + \xi, t + \tau)$, удовлетворяющей для любого $\varepsilon > 0$ следующим условиям [16, с. 335]: при $\tau \downarrow 0$

$$\frac{1}{\tau} \int_{|\xi| > \varepsilon} p(x, t \rightarrow x + \xi, t + \tau) d\xi \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{|\xi| \leq \varepsilon} p(x, t \rightarrow x + \xi, t + \tau) \xi d\xi \rightarrow \mu(x, t),$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{|\xi| \leq \varepsilon} p(x, t \rightarrow x + \xi, t + \tau) \xi^2 d\xi \rightarrow \sigma^2(x, t).$$

Коэффициент $\mu(x, t)$ характеризует систематическое (в среднем) смещение в направлении оси OX , называемое *сносом*.

2.4.2. Диффузионный процесс можно определить как марковский процесс с непрерывными реализациями, уравнения для переходной плотности которого $p \equiv p(y, u \rightarrow x, t)$ имеют вид прямого

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t) p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t) p]$$

и обратного (сопряженного)

$$-\frac{\partial p}{\partial u} = \mu(y, u) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2(y, u) \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

уравнений Колмогорова (первое из них называется также уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова — ФПК) с начальным условием $p = \delta(x - y)$ при $t \downarrow u$ и $u \uparrow t$ соответственно [14, с. 170].

Задаваемый двумя последними определениями процесс уже не является однородным, поскольку коэффициенты μ и σ зависят от времени и координат. Физически это означает диффузию в неоднородной и нестационарной среде. Понятно, что если μ и σ — достаточно гладкие функции, то локально (на малых расстояниях и временах) этот процесс совпадает с однородным диффузионным процессом.

2.4.3. Наряду с записанным выше уравнением ФПК существует и другой вариант прямого уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t) p] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma(x, t) \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(x, t) p) \right],$$

вытекающий из интерпретации уравнения Ланжевена, данной Стратоновичем, подобно тому, как само уравнение ФПК является интерпретацией Ито того же уравнения Ланжевена — нелинейного стохастического дифференциального уравнения типа

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t),$$

где $W(t)$ — стандартный ($\mu = 0, \sigma = 1$) винеровский процесс. Обсуждение разных форм уравнения диффузии можно найти в [26, с. 226].

Обобщение этих уравнений на основе L-процессов очевидно: достаточно заменить $dW(t)$ на $dL(t)$ — приращение L-процесса. При этом уравнение ФПК принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, t) p(x, t)) + DK(x; p(\cdot, t)).$$

Решение этого уравнения находится по аналогии с решением обычного ФПК (см., например, [27]). Мы найдем его здесь для случая $\mu(x, t) = -vx$, допускающего две физические интерпретации. Одна из них — гармонический осциллятор под действием потока случайных импульсов, вторая — эволюция скорости частицы в вязкой среде, испытывающей импульсы силы со стороны "тяжелых молекул". Характеристическая функция этого распределения (при $D = 1$ и $v = 1$) удовлетворяет уравнению (см. п. 2.3.2)

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + k \frac{\partial \tilde{p}}{\partial k} = -|k|^\alpha \left[1 - i\beta \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{sign } k \right] \tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t).$$

Его решение имеет вид

$$\tilde{p}(k, t) = \exp \left\{ -|k|^\alpha [1 - \exp(-\alpha t)] \frac{M}{\alpha} - ik \exp(-t) x_0 \right\},$$

где x_0 — начальная координата процесса, а

$$M = 1 - i\beta \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{sign } k.$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$p(x, t) = \frac{\alpha^{1/\alpha}}{(1 - \exp(-\alpha t))^{1/\alpha}} g^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{(x - x_0 \exp(-t)) \alpha^{1/\alpha}}{(1 - \exp(-\alpha t))^{1/\alpha}} \right).$$

При $t \rightarrow \infty$ получаем стационарное решение

$$p(x, \infty) = \alpha^{1/\alpha} g^{(\alpha, \beta)}(x\alpha^{1/\alpha}).$$

В работе [28] это решение получено непосредственно из стационарного ($\partial \tilde{p} / \partial t = 0$) уравнения. Представленный здесь результат является более общим, он показывает и закон релаксации системы к равномерному распределению, в качестве которого выступает теперь устойчивый (с параметрами α и β) закон. Впрочем, при $\alpha = 2$ мы получаем известный результат для процесса Орнштейна–Уленбека.

3. Устойчивые законы

3.1. Устойчивые распределения как предельные

Открытие Полем Леви класса устойчивых распределений было, возможно, одним из самых крупных событий в теории вероятностей XX века. Оно освободило ЦПТ от ограничения, налагаемого требованием конечности дисперсии, и открыли возможность суммирования случайных величин с бесконечными дисперсиями. Оказалось, что если существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение нормированной суммы $(\sum_{j=1}^n X_j - A_n) / B_n$ при $n \rightarrow \infty$ и подходящим образом выбранных последовательностях A_n и $B_n > 0$, то это распределение обязательно будет устойчивым. При этом $B_n = h(n)n^{1/\alpha}$, где $h(n)$ — медленно меняющаяся функция (типа логарифма или какой-нибудь его степени), а α — характеристический показатель.

3.1.1. Если для случайной величины (с.в.) X с функцией распределения (ф.р.) $F(x)$ можно подобрать такие A_n и B_n , то говорят, что с.в. X или ее ф.р. $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона. В противном случае она не принадлежит области притяжения никакого закона: только устойчивые законы обладают областями притяжения.

Чтобы проверить, принадлежит ли области притяжения данная конкретная с.в. X , нужно прежде всего вычислить дисперсию или просто второй момент $\langle X^2 \rangle$. Если он конечен, с.в. X находится в области притяжения нормального закона. Если $\langle X^2 \rangle = \infty$, необходимо проверить асимптотику "хвостов" распределения X . Если оказывается, что

$$P(|X| > x) \sim h(x)x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то ответ положителен; если же асимптотика имеет иной вид, ответ отрицательный. Мы ограничимся далее лишь случаем "нормального" (не путать с гауссовым!) притяжения, когда $h(x) \rightarrow \text{const} > 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть теперь известно, что X принадлежит области притяжения устойчивого закона. Как определить его параметры α и $\beta(\theta)$? Ответ на этот вопрос дает обобщенная предельная теорема.

3.1.2. Обобщенная предельная теорема (ОПТ). Пусть случайные величины X_j независимы, одинаково распределены и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} P(X > x) &\sim a_+ x^{-\alpha}, & x \rightarrow \infty, \\ P(X < -x) &\sim a_- x^{-\alpha}, & x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$0 < \alpha \leq 2$, $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$ и $a_+ + a_- > 0$. Тогда найдутся такие последовательности A_n и $B_n > 0$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - A_n}{B_n} \underset{d}{\sim} S^{(\alpha, \beta)},$$

где $\beta = (a_+ - a_-)/(a_+ + a_-)$.

3.1.3. Разумеется, существует бесконечное множество последовательностей нормирующих коэффициентов A_n, B_n с одним и тем же асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$. В частности, они могут быть определены следующим образом ($a = \langle X \rangle$ и $c = a_+ + a_-$):

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = 2 & \quad A_n = na, & B_n = \sqrt{cn \ln n}; \\ \text{при } \alpha \in (1, 2) & \quad A_n = na, & B_n = \frac{(\pi cn)^{1/\alpha}}{[2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)]^{1/\alpha}}; \\ \text{при } \alpha = 1 & \quad A_n = \beta cn \ln n, & B_n = \frac{\pi cn}{2}; \\ \text{при } \alpha \in (0, 1) & \quad A_n = 0, & B_n = \frac{(\pi cn)^{1/\alpha}}{[2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)]^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

3.2. Свойства устойчивых распределений

Приведем важнейшие свойства устойчивых распределений (в форме С).

3.2.1. Все устойчивые плотности одновершинны.

3.2.2. Дисперсии всех устойчивых распределений, кроме гауссова, бесконечны.

3.2.3. Средние значения устойчивых распределений с показателем $\alpha \leq 1$ не существуют.

3.2.4. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению инверсии:

$$g(x; \alpha, \theta) = g(-x; \alpha, -\theta).$$

3.2.5. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению двойственности: при $\alpha \geq 1$

$$g(x; \alpha, \theta) = x^{-1-\alpha} g(x^{-\alpha}; \alpha', \theta'),$$

где $\alpha' = 1/\alpha$, $\theta' = \alpha(1 + \theta) - 1$.

3.2.6. В начале координат функция распределения

$$G(x; \alpha, \theta) = \int_{-\infty}^x g(x'; \alpha, \theta) dx',$$

плотность и ее производная имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} G(0; \alpha, \theta) &= \frac{1 - \theta}{2}, \\ g(0; \alpha, \theta) &= \pi^{-1} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right), \\ g'(0; \alpha, \theta) &= (2\pi)^{-1} \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \sin(\theta\pi). \end{aligned}$$

3.2.7. Если плотность распределения $g(x; \alpha, \theta)$ не является крайней (т.е. $\theta \neq \pm\theta_\alpha$), то оба ее хвоста спадают по закону $|x|^{-\alpha-1}$ ("тяжелые хвосты"):

$$g(\pm|x|; \alpha, \theta) \sim \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\pi} \sin\left[\frac{\alpha(1 \pm \theta)\pi}{2}\right] |x|^{-1-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty.$$

3.2.8. Для крайних плотностей, когда

$$\begin{aligned} \theta = \pm 1, & \quad \alpha < 1, \\ \theta = \pm\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right), & \quad \alpha > 1, \end{aligned}$$

одна из приведенных выше формул теряет смысл: соответствующий хвост становится "коротким" с экспоненциально спадающей асимптотикой.

3.2.9. Как следует из формулы для $G(0; \alpha, \theta)$, положительным значениям коэффициента асимметрии θ соответствует сосредоточение большей доли вероятности на положительной полуоси, отрицательным значениям θ — на отрицательной полуоси. При $\alpha \leq 1$ $G(0; \alpha, 1) = 0$ и $G(0; \alpha, -1) = 1$, т.е. крайние распределения становятся *односторонними*, сосредоточенными исключительно на положительной или отрицательной полуоси. При $\alpha \rightarrow 1$

$$G(x; \alpha, 1) \rightarrow G(x; 1, 1) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

и односторонние плотности становятся вырожденными:

$$g(x; 1, \pm 1) = \delta(x \mp 1).$$

3.2.10. Следующие устойчивые плотности представляются в элементарных функциях: распределение Гаусса

$$g(x; 2, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\},$$

распределение Коши

$$g(x; 1, 0) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

и распределение Леви – Смирнова

$$g\left(x; \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}} \exp\{- (4x)^{-1}\}.$$

Список распределений, выражающихся через специальные функции, приведен в разделе 8.1, графики некоторых из них показаны на рис. 2.

3.2.11. Трансформанта Меллина от плотности на положительной полуоси:

$$\begin{aligned} g(s; \alpha, \theta) &\equiv \int_0^\infty g(x; \alpha, \theta) x^s dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1 - s/\alpha)}{\Gamma(\rho s)\Gamma(1 - \rho s)}, \\ \rho &= \frac{1 + \theta}{2}. \end{aligned}$$

3.2.12. Преобразование Лапласа односторонних распределений:

$$g(\lambda; \alpha, 1) \equiv \int_0^\infty g(x; \alpha, 1) \exp(-\lambda x) dx = \exp(-\lambda^\alpha), \quad \alpha \leq 1.$$

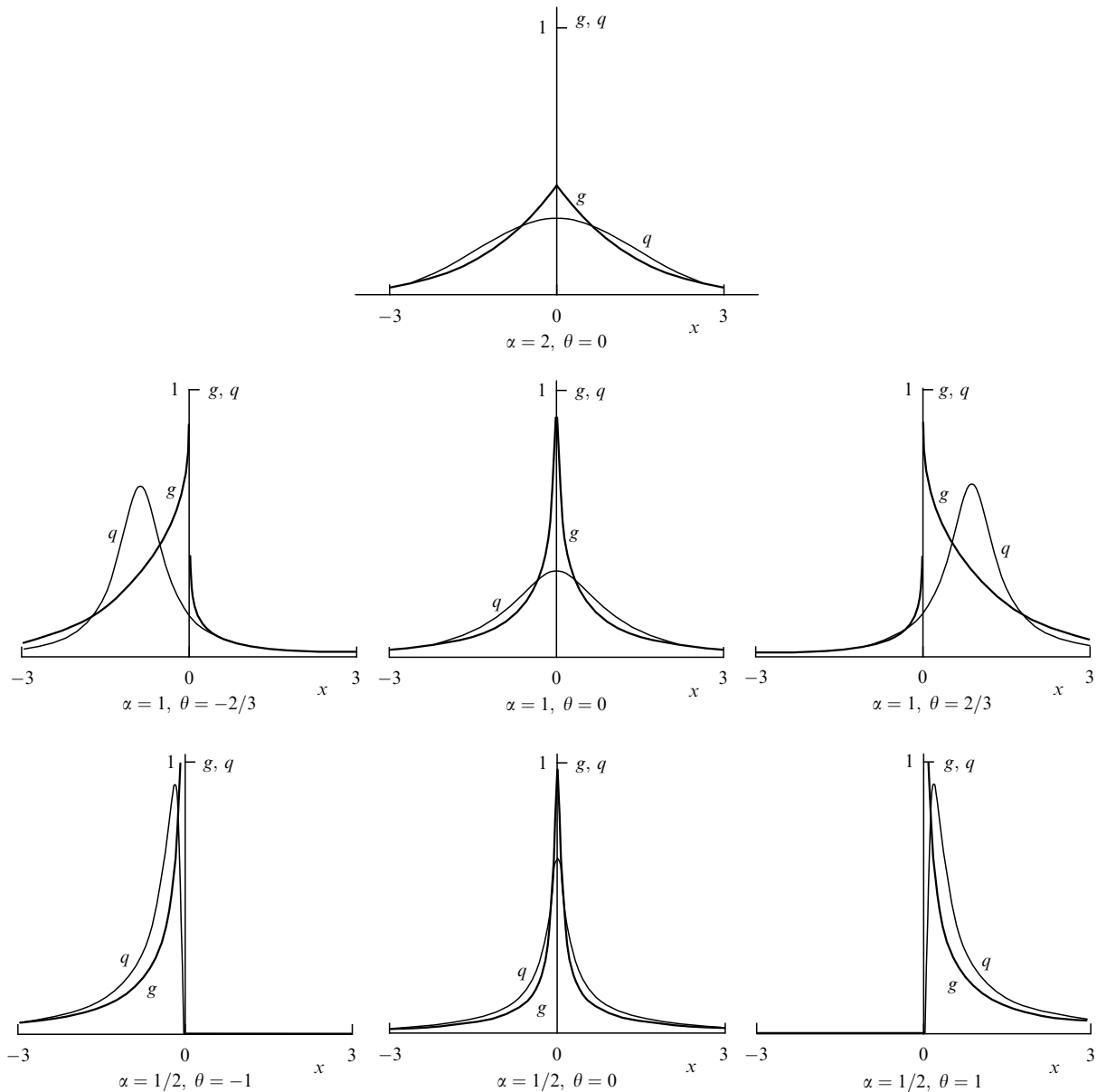


Рис. 2. Плотности устойчивых (тонкие кривые с гладкими вершинами) и дробно-устойчивых с показателем $\omega = 1/2$ (жирные кривые с острыми вершинами) распределений.

3.2.13. Характеристический показатель α в обеих формах А и С один и тот же, параметры асимметрии β и θ связаны формулой

$$\beta = \frac{\tan(\theta\alpha\pi/2)}{\tan(\alpha\pi/2)},$$

а сами случайные величины — соотношением

$$S(\alpha, \theta) \stackrel{d}{=} \left[\cos\left(\frac{\theta\alpha\pi}{2}\right) \right]^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

3.2.14. Удобство формы С среди прочего состоит и в том, что при $\theta = 1$ и $\alpha \uparrow 1$, как это видно из п. 3.2.12,

$$g(x; \alpha, 1) \rightarrow \delta(x - 1).$$

В форме А распределение вероятностей при этих условиях уходит в бесконечность.

Мы пришли к устойчивым распределениям, рассмотрев сначала L-процессы, затем последовательности нормированных сумм независимых случайных величин, однако сами устойчивые (мы ограничиваемся везде лишь строго устойчивыми) распределения и определяемые ими случайные величины могут быть определены и непосредственно. Одно из таких определений имеет следующий вид.

3.2.15. Случайная величина S называется *устойчивой с показателем* $\alpha \in (0, 2]$, если для любого n

$$\sum_{i=1}^n S_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} S,$$

где S_j — не зависящие от S и друг от друга случайные величины с одним и тем же α -устойчивым распределением.

Это определение легко обобщается на случайные векторы.

3.2.16. Случайный вектор $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)$ называется *устойчивым*, если для любого n

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{S}_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} \mathbf{S}.$$

Характеристическая функция d -мерного устойчивого вектора имеет вид

$$\tilde{g}_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{k}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |\mathbf{k}\mathbf{s}|^\alpha \left[1 - i \operatorname{sign}(\mathbf{k}\mathbf{s}) \tan \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \right] \Gamma(\mathbf{d}\mathbf{s}) \right\},$$

где $\Gamma(\mathbf{d}\mathbf{s})$ — конечная мера на сфере S_d единичного радиуса в рассматриваемом d -мерном пространстве, называемая *спектральной мерой*. Плотность

$$\begin{aligned} g_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{x}) &= g_d^{(\alpha, \Gamma)}(x_1, \dots, x_d) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_d \exp[-i(k_1 x_1 + \dots + k_d x_d)] \times \\ &\times \tilde{g}^{(\alpha, \Gamma)}(k_1, \dots, k_d) \end{aligned}$$

называется *многомерной устойчивой плотностью*. Если спектральная мера равномерно распределена по сфере, эта плотность изотропна. Если спектральная мера сосредоточена в точках пересечения осей со сферой, то компоненты S_1, \dots, S_d устойчивого вектора \mathbf{S} взаимно независимы.

Здесь следует отметить два важных обстоятельства. Во-первых, изотропность распределения влечет за собой независимость компонент только в случае $\alpha = 2$. При $\alpha < 2$ компоненты изотропно распределенного вектора не являются независимыми, а распределение с независимыми компонентами не является изотропным. Во-вторых, ввиду расходимости дисперсии обычная корреляционная техника анализа статистической связи компонент при $\alpha < 2$ неприменима [22].

3.3. Дробно-устойчивые распределения

Рассмотрим теперь распределения, которые понадобятся нам в связи с решением уравнений с дробными производными по времени (раздел 4.3).

3.3.1. Пусть $S(\alpha_1, \theta_1)$ и $S(\alpha_2, \theta_2)$ — взаимно независимые строго устойчивые случайные величины в представлении С. Случайную величину

$$Y(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \mu) \stackrel{d}{=} \frac{S(\alpha_1, \theta_1)}{[S(\alpha_2, \theta_2)]^{(\mu)}},$$

где

$$S^{(\mu)} = |S|^\mu \operatorname{sign} S, \quad -\infty < \mu < \infty,$$

и соответствующую ей плотность

$$\begin{aligned} p_Y(x; \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \mu) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(xy^{1/\mu}; \alpha_1, \theta_1) g(y; \alpha_2, \theta_2) |y|^\mu dy \end{aligned}$$

назовем *дробно-устойчивыми*.

Частные случаи дробно-устойчивых случайных величин нередко встречаются в литературе. Так, в [22] случайная величина

$$Y\left(2, \alpha, 0, 1, -\frac{1}{2}\right) = S(2, 0) \sqrt{S(\alpha, 1)}, \quad \alpha < 1,$$

названа *субгауссианом*, а в более общем случае

$$Y\left(\alpha_1, \alpha_2, 0, 1, -\frac{1}{\alpha_1}\right) = S(\alpha_1, 0) [S(\alpha_2, 1)]^{1/\alpha_1},$$

$$0 < \alpha_1 \leq 2, \quad \alpha_2 < 1,$$

— *субустойчивой* случайной величиной. Известны соотношения

$$Y(2, 2, 0, 0, 1) \stackrel{d}{=} S(1, 0),$$

$$Y\left(\alpha_1, \frac{\alpha}{\alpha_1}, 0, 1, -\frac{1}{\alpha_1}\right) \stackrel{d}{=} S(\alpha, 0),$$

$$Y(1, 1, 1, 0, 1) \stackrel{d}{=} S(1, 0).$$

Разумеется,

$$Y(\alpha, 1, \theta, 1, \mu) \stackrel{d}{=} S(\alpha, 0).$$

К классу дробно-устойчивых относится и распределение случайной величины

$$Z(\alpha, \omega, \theta) = \frac{S(\alpha, \theta)}{[S(\omega, 1)]^{\omega/\alpha}}, \quad \omega < 1,$$

полученное Котульским [29] в асимптотическом решении проблемы Монтролла – Вейса (см. раздел 4.3)

$$\begin{aligned} q(x; \alpha, \omega, \theta) &\equiv p_Y\left(x; \alpha, \omega, \theta, 1, \frac{\omega}{\alpha}\right) = \\ &= \int_0^\infty g(xy^{\omega/\alpha}; \alpha, \theta) g(y; \omega, 1) y^{\omega/\alpha} dy. \end{aligned}$$

Термин "дробно-устойчивые" введен в нашей работе [30], а свойства этих распределений исследованы в работах [31 – 33]. Приведем наиболее важные из них.

3.3.2. Если $0 < \alpha < 1$ и $\theta = 1$, то плотность $q(x; \alpha, \omega, 1)$ отличается от нуля только на положительной полуоси. Во всех других случаях она отлична от нуля на всей вещественной оси.

3.3.3. Имеет место свойство инверсии:

$$q(-x; \alpha, \omega, \theta) = q(x; \alpha, \omega, -\theta).$$

Если $\theta = 0$, то

$$q(-x; \alpha, \omega, 0) = q(x; \alpha, \omega, 0),$$

т.е. дробно-устойчивое распределение с $\theta = 0$ является симметричным относительно начала координат.

3.3.4. Согласно свойству инверсии достаточно рассмотреть класс дробно-устойчивых плотностей при всех α, ω и θ только на положительной полуоси, что позволяет ввести одностороннее преобразование Меллина

$$\bar{q}(s; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^\infty x^s q(x; \alpha, \omega, \theta) dx, \quad -1 < \operatorname{Re} s < \alpha,$$

которое в силу специфики дробно-устойчивой случайной величины является значительно более удобным инструментом анализа, чем традиционная характеристическая функция. Применяя это преобразование и используя выражение для трансформанты Меллина устойчивой

плотности

$$\bar{g}(s; \alpha, \theta) = \rho \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1+\rho s)\Gamma(1-\rho s)}, \quad \rho = \frac{1+\theta}{2},$$

мы получим

$$\bar{q}(s; \alpha, \omega, \theta) = \rho \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s/\alpha)\Gamma(1+s/\alpha)}{\Gamma(1+\rho s)\Gamma(1-\rho s)\Gamma(1+\omega s/\alpha)}.$$

3.3.5. Дробно-устойчивое распределение имеет моменты всех порядков только в случае $\alpha = 2$. При этом область значений θ сужается до одного значения $\theta = 0$, распределение становится симметричным, нечетные моменты обращаются в нуль, а четные даются формулой

$$m^{(2n)}(2, \omega, 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} q(x; 2, \omega, 0) dx = \frac{4^n n! \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n\omega+1)}.$$

При $1 < \alpha < 2$ второй и высшие моменты бесконечны, при $\alpha \leq 1$ перестает существовать и среднее значение.

3.3.6. В начале координат

$$q(0; \alpha, \omega, \theta) = \frac{\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)}{\pi\Gamma(1-\omega/\alpha)} \cos\left(\frac{\theta\pi}{2}\right)$$

и

$$Q(0; \alpha, \omega, \theta) \equiv \int_{-\infty}^0 q(x; \alpha, \omega, \theta) dx = \frac{1-\theta}{2}.$$

Заметим, что $q(x; \alpha, \omega, \theta)$ имеет интегрируемую особенность в начале координат, когда $\alpha \leq 1$ и $\omega < 1$.

3.3.7. При $\omega \rightarrow 1$ плотности $q(x; \alpha, \omega, \theta)$ превращаются в устойчивые плотности $g(x; \alpha, \theta)$.

3.3.8. Если $\omega < 1$ и $\theta > 0$, то

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) \sim \frac{g(x; \alpha, \theta)}{\Gamma(1+\omega)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

т.е. дробно-устойчивые плотности имеют такие же тяжелые (в смысле степенной зависимости) хвосты, что и устойчивые плотности.

3.3.9. При $\alpha = 2$ дробно-устойчивая плотность выражается через одностороннюю устойчивую плотность соотношением

$$q(x; 2, \omega, 0) = \frac{1}{\omega|x|^{1+2/\omega}} g\left(|x|^{-2/\omega}; \frac{\omega}{2}, 1\right).$$

Список дробно-устойчивых плотностей, выражаемых через элементарные или широко известные специальные функции, дан в разделе 8.1. Графики некоторых из них представлены на рис. 2.

3.3.10. В работе [33] найдены характеристические функции дробно-устойчивых распределений

$$\tilde{q}(k; \alpha, \omega, \theta) = E_{\omega}(-\psi(k; \alpha, \theta)),$$

где

$$E_{\omega}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1+n\omega)}$$

— функция Миттаг–Леффлера, а

$$\psi(k; \alpha, \theta) = -|k|^{\alpha} \exp\left\{-i\alpha\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{sign } k\right\}.$$

Там же получены обратно-степенные ряды для дробно-устойчивых плотностей

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma(n\rho)\Gamma(1-n\rho)\Gamma(1+n\omega)} x^{-n\alpha-1}.$$

3.3.11. Одномерные дробно-устойчивые плотности естественным образом обобщаются на многомерные [34]

$$q_d(\mathbf{x}; \alpha, \omega, \Gamma) = \int_0^{\infty} g_d(\mathbf{x}y^{\omega/\alpha}; \alpha, \Gamma) g_1(y; \omega, 1) y^{d\omega/\alpha} dy,$$

описывающие распределение случайного вектора

$$\mathbf{Z}_d(\alpha, \omega, \Gamma) \equiv \frac{\mathbf{S}_d(\alpha, \Gamma)}{[S_1(\omega, 1)]^{\omega/\alpha}}.$$

4. Аномальная диффузия как асимптотика скачкообразных процессов

4.1. Процессы восстановления

Исторически рассматриваемая схема аномальной диффузии была разработана другим путем — путем асимптотического анализа скачкообразных процессов. Основную работу в этом направлении принято считать статью Монтролла и Вейса [35], без ссылки на которую не обходится ныне ни один обзор по аномальной диффузии (см. также прекрасный обзор [36]). Покажем здесь основные вехи этого пути, воспользовавшись терминологией теории восстановления [37].

Пусть T_1, T_2, \dots — последовательность взаимно независимых положительных случайных величин с общей плотностью распределения $q(t)$. Назовем их *временами ожиданий*, а моменты времени

$$T(n) = \sum_{j=1}^n T_j, \quad T(0) = 0,$$

— *моментами восстановления (регенерации)*.

4.1.1. Последовательность случайных величин $\{T(n)\}$ образует *процесс восстановления*.

Поскольку случайные величины T_j положительны, то среднее значение

$$\tau \equiv \langle T_j \rangle = \int_0^{\infty} tq(t) dt$$

имеет смысл и тогда, когда интеграл расходится: в этом случае $\tau = \infty$.

В физических процессах с моментами $T(n)$ обычно связаны некоторые физические события нулевой длительности — скачкообразные переходы системы из одного состояния в другое, столкновения частицы с атомами среды, излучение или поглощение фотона и т.д. Назовем их просто *событиями* и рассмотрим число $N(t)$ событий, происходящих в промежутке времени $(0, t)$.

4.1.2. Случайный процесс

$$N(t) = \max\{n : T(n) < t\}$$

называется *читающим процессом восстановления*, функция

$$\bar{N}(t) = \langle N(t) \rangle$$

— функцией восстановления. Последняя может быть представлена в виде

$$\bar{N}(t) = \sum_{n>0} \mathbf{P}(T(n) < t) = \sum_{n>0} \int_0^t q^{*n}(s) ds$$

(здесь $p^{*n}(x)$ означает многократную свертку плотностей $p(x)$, при этом $p^{*1}(x) \equiv p(x)$, а $p^{*0}(x) = \delta(x)$). Она убывает, конечна, неотрицательна, полуаддитивна:

$$\bar{N}(t+s) \leq \bar{N}(t) + \bar{N}(s), \quad t, s \geq 0,$$

и удовлетворяет уравнению восстановления

$$\bar{N}(t) = \int_0^t [1 + \bar{N}(t-s)] q(s) ds.$$

Его интерпретация крайне проста: среднее число событий в промежутке $(0, t)$ равно вероятности попадания в него первого события плюс среднее число следующих за ним событий.

4.1.3. Функция восстановления также удовлетворяет элементарной теореме восстановления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(t)}{t} = \tau^{-1},$$

а в предположении конечности второго момента:

$$m^{(2)} = \int_0^{\infty} t^2 q(t) dt < \infty,$$

справедливы неравенства

$$\frac{t}{\tau} \leq \bar{N}(t) \leq \frac{t}{\tau} + \frac{m^{(2)}}{2\tau^2}.$$

Выбрав в качестве $q(t)$ показательное распределение

$$q(t) = \mu \exp(-\mu t),$$

мы получаем простейший процесс восстановления — пуассоновский процесс.

4.1.4. Обобщенный пуассоновский процесс введен в [17, с. 211] посредством случайных сумм

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} R_j,$$

где R_j — независимые случайные величины с одинаковым распределением $p(x)$, а $N(t)$ — обычный пуассоновский процесс:

$$\mathbf{P}(N(t) = n) = \frac{(\mu t)^n}{n!} \exp(-\mu t).$$

Плотность распределения $p(x, t)$ случайной суммы $X(t)$ имеет вид

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} \exp(-\mu t) p^{*n}(x),$$

а сам процесс может быть интерпретирован как скачкообразное блуждание частицы вдоль оси x . То, что суммирование начинается с $n = 0$, означает, что в начальный момент времени частица находится в начале координат и продолжает оставаться там вплоть до $t = T_1$ — момента, когда она совершает свой первый скачок. После этого скачка способность частицы к

ожиданию восстанавливается в том же виде, и процесс продолжается.

Далее Феллер модифицирует этот процесс, заменяя процесс $\{X_1 = R_1, X_2 = X_1 + R_2, X_3 = X_2 + R_3, \dots\}$ с независимыми приращениями R_j марковской цепью $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$, и называет полученный процесс псевдопуассоновским.

4.2. Подчиненные процессы

Плотность распределения псевдопуассоновского процесса

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^0(t) \pi(x, n) = \langle \pi(x, N(t)) \rangle,$$

где

$$W_n^0(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} \exp(-\mu t)$$

и

$$\pi(x, n) = p^{*n}(x).$$

Последнее равенство можно интерпретировать как плотность распределения процесса с целочисленным временем n , называемым операционным временем. Случайную переменную $N(t)$ Феллер называет рандомизированным операционным временем. В общей схеме операционное время T не обязательно должно быть распределено по закону Пуассона и даже не обязательно должно быть дискретным.

4.2.1. Пусть $\pi(x, t)$ — переходная плотность марковского процесса $\{X(t)\}$, а $w(\theta, t) d\theta$ — распределение рандомизированного времени $T(t)$, сосредоточенное на положительной полуоси. Тогда плотность $p(x, t)$ для процесса $\{X(T(t))\}$ запишется в виде

$$p(x, t) = \int_0^{\infty} \pi(x, \theta) w(\theta, t) d\theta.$$

Назовем этот процесс подчиненным в широком смысле, чтобы дистанцироваться от определения, даваемого Феллером [17, с. 394].

4.2.2. Пусть $\{X(t)\}$ — марковский процесс с непрерывными переходными вероятностями и $\{T(t)\}$ — процесс с неотрицательными независимыми приращениями. Тогда $\{X(T(t))\}$ — также марковский процесс.

Будем говорить, что этот процесс подчинен $\{X(t)\}$ с использованием операционного времени $\{T(t)\}$. Процесс $\{T(t)\}$ называется направляющим (управляющим) процессом.

В случае, если процесс $\{X(t)\}$ также имеет независимые приращения, мы вновь приходим к записанной выше формуле для $p(x, t)$. В частности, если $\{X(t)\}$ — броуновское движение с переходной плотностью

$$\pi(x, t) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

а направляющий процесс — процесс Смирнова – Леви

$$w(\theta, t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi\theta^3}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\theta}\right),$$

то подчиненный процесс имеет плотность

$$p(x, t) = \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{-2} \exp\left(-\frac{x^2 + t^2}{2\theta}\right) d\theta = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)},$$

т.е. является процессом Коши. Этот пример распространяется и на более общий случай: когда $\{X(t)\}$ — устойчивый процесс (леви-движение) с показателем α_1 а $\{T(t)\}$ — односторонний устойчивый процесс с показателем $\alpha_2 < 1$ ($\beta = 1$), то подчиненный процесс тоже является устойчивым (леви-движением) с показателем $\alpha_1\alpha_2$.

Это все, однако, относится к случаю, когда $\{T(t)\}$ — процесс с независимыми приращениями, как это требуется определением Феллера. Мы же в качестве $\{T(t)\}$ будем использовать считающий процесс восстановления с переходной плотностью $q(t)$, отнюдь не являющийся процессом с независимыми приращениями (если, конечно, $q(t)$ не является экспонентой). В этом — смысл дистанцирования от феллеровского определения.

Таким образом, полагая в нашей схеме R_j независимыми, а плотность $q(t)$ произвольной, получим

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t) p^{*n}(x),$$

где

$$\begin{aligned} W_n(t) &= P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1) = \\ &= Q^{*n}(t) - Q^{*(n+1)}(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [Q^{*n}(t) - Q^{*(n+1)}(t)] p^{*n}(x).$$

Это простейшая модель одномерного скачкообразного блуждания частицы с независимыми временами ожиданий, непрерывно распределенными по одному и тому же закону $q(t)$, и независимыми (друг от друга и от времен ожиданий) смещениями, распределенными с одинаковой плотностью $p(x)$. В англоязычной литературе этот процесс обозначается CTRW (Continuous Time Random Walks).

4.3. Теорема об аномальной диффузии

Вычисление распределения $p(x, t)$ в указанных выше предположениях называют *проблемой Монтролла–Вейса* [35]. Ее удобно решать путем преобразования Фурье по координате и преобразования Лапласа по времени:

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(ikx - \lambda t) p(x, t).$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) p^{*n}(x) dx = [\tilde{p}(k)]^n$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) Q^{*n}(t) dt &= \int_0^{\infty} dt \exp(-\lambda t) \int_0^t ds q^{*n}(s) = \\ &= \int_0^{\infty} ds \int_s^{\infty} dt \exp(-\lambda t) q^{*n}(s) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda s) q^{*n}(s) ds = \frac{1}{\lambda} [\tilde{q}(\lambda)]^n, \end{aligned}$$

получим

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{q}^n(\lambda) - \tilde{q}^{n+1}(\lambda)] \tilde{p}^n(k) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda [1 - \tilde{q}(\lambda) \tilde{p}(k)]}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\lambda \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda [1 - \tilde{q}(\lambda) \tilde{p}(k)]} \times \\ &\times \exp(-ikx + \lambda t). \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление по этой формуле требует задания конкретных распределений $q(t)$ и $p(x)$; если же ограничиться лишь асимптотическим исследованием при $t \rightarrow \infty$, то достаточно задать лишь асимптотики $q(t)$ и $p(x)$ при больших значениях аргументов. В одномерной постановке эта задача решена Котульским [29]. Мы приведем здесь его результат в виде теоремы, сформулированной в работе [30].

Пусть T_1, T_2, \dots — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения, принадлежащей области притяжения устойчивого закона с параметрами $\omega, \theta = 1$, а R_1, R_2, \dots — не зависящая от нее последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения, принадлежащей области притяжения устойчивого закона с параметрами α, θ . Тогда существует конечная положительная постоянная $c = c(\alpha, \omega, \theta)$ такая, что

$$P\left(\frac{X(t)}{c(\alpha, \omega, \theta)t^{\omega/\alpha}} < x\right) \Rightarrow Q(x; \alpha, \omega, \theta), \quad t \rightarrow \infty,$$

где

$$Q(x; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^{\infty} G(xy^{\omega/\alpha}; \alpha, \theta) dG(y; \omega, 1).$$

Дифференцируя это соотношение по x , переходим к плотности

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^{\infty} g(xy^{\omega/\alpha}; \alpha, \theta) g(y; \omega, 1) y^{\omega/\alpha} dy.$$

Таким образом, плотность распределения одномерного процесса $\{X(t)\}$ в асимптотике больших времен имеет вид

$$p^{as}(x, t) = q\left(\frac{xt^{-\omega/\alpha}}{c}; \alpha, \omega, \theta\right) \frac{t^{-\omega/\alpha}}{c}.$$

Этот результат может быть получен двумя способами: путем рассмотрения процесса $X(t)$ как суммы случайного числа случайных слагаемых с применением обобщенного варианта центральной предельной теоремы, выводящей на устойчивые законы [29, 30], и асимптотическим обращением с использованием тауберовых теорем, как это сделано для одномерного случая в работе [38], а для трехмерного симметричного случая в книге [39]. В случае d -мерного сферически симметричного блуждания

$$p_d^{as}(\mathbf{x}, t) = q_d\left(\frac{\mathbf{x}t^{-\omega/\alpha}}{c}; \alpha, \omega\right) \frac{t^{-d\omega/\alpha}}{c^d},$$

где

$$q_d(\mathbf{x}; \alpha, \omega) = \int_0^{\infty} g_d(\mathbf{x}y^{\omega/\alpha}; \alpha) g_1(y; \omega, 1) y^{d\omega/\alpha} dy,$$

$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, а $g_d(\mathbf{x}, \alpha)$ — плотность сферически симметричного d -мерного устойчивого распределения, характеристическая функция которого имеет вид

$$\tilde{g}_d(\mathbf{k}; \alpha) = \exp(-|\mathbf{k}|^\alpha), \quad \mathbf{k} \in \mathbf{R}^d.$$

4.4. Уравнения аномальной диффузии

Возможно, самый простой способ выйти на асимптотику рассматриваемого процесса, отталкиваясь от трансформанты

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda[1 - \tilde{q}(\lambda)\tilde{p}(k)]},$$

заключается в использовании в качестве $p(x)$ и $q(t)$ самих устойчивых плотностей $g(x; \alpha, \theta)$ и $g(x; \omega, 1)$, $0 < \alpha \leq 2$, $\omega \leq 1$. Законность такой подстановки обусловлена тем, что каждый устойчивый закон принадлежит своей области притяжения. Тем самым условие теоремы из раздела 4.3 выполняется. В то же время асимптотическое выражение $p(x, t)$ определяется только асимптотиками функций $p(x)$ и $q(t)$, а все распределения, принадлежащие фиксированной области притяжения, в том числе и устойчивое, имеют одну и ту же (с точностью до постоянного множителя) асимптотику. Следовательно, выбирая в качестве $p(x)$ и $q(t)$ устойчивые плотности, мы несколько не теряем в общности.

Согласно тауберовым теоремам в восстановлении распределения $p(x, t)$ при больших x и t основную роль играет поведение трансформанты Фурье–Лапласа $\tilde{p}(k, \lambda)$ в области малых значений аргументов, где

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k) &= \tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp\left\{-|k|^\alpha \exp\left[-\frac{i\alpha\theta\pi}{2} \operatorname{sign} k\right]\right\} \sim \\ &\sim 1 - |k|^\alpha \exp\left\{-\frac{i\alpha\theta\pi}{2} \operatorname{sign} k\right\}, \quad k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и

$$\tilde{q}(\lambda) = \tilde{g}(i\lambda; \omega, 1) = \exp(-\lambda^\omega) \sim 1 - \lambda^\omega, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Несложные преобразования приводят к следующему соотношению для главной асимптотики:

$$\lambda^\omega \tilde{p}^{as}(k, \lambda) = -|k|^\alpha \exp\left\{-\frac{i\alpha\theta\pi}{2} \operatorname{sign} k\right\} \tilde{p}^{as}(k, \lambda) + \lambda^{\omega-1}.$$

Пусть трансформанты Фурье функций $f(x)$ и $p(x)$ связаны соотношением

$$\tilde{f}(k) = -|k|^\alpha \exp\left\{-\frac{i\alpha\theta\pi}{2} \operatorname{sign} k\right\} \tilde{p}(k).$$

Выполняя элементарные преобразования, приведем его к виду

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k) &= \left[(u+v) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i(u-v) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \operatorname{sign} k\right] \times \\ &\times |k|^{-\alpha} \tilde{f}(k), \\ u &= \frac{\sin((1+\theta)\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)}, \\ v &= \frac{\sin((1-\theta)\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi)}, \end{aligned}$$

означающему, согласно формулам (12.11)–(12.14) и (12.25) из книги [25], что оригиналы этих трансформант связаны оператором Феллера I_δ^α , $\delta = \theta\pi/2$:

$$\begin{aligned} p(x) &= I_\delta^\alpha f(x) = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u+v+(u-v)\operatorname{sign}(x-\xi)}{|x-\xi|^{1-\alpha}} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

являющимся линейной комбинацией интегральных операторов дробного порядка.

Обратный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} (I_\delta^\alpha)^{-1} &= \frac{\alpha}{2A\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u+v+(u-v)\operatorname{sign}(x-\xi)}{|x-\xi|^{1-\alpha}} \times \\ &\times [p(x) - p(\xi)] d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{2A\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty [(u+v)p(x) - up(x-\xi) - \\ &- vp(x+\xi)] \xi^{-1-\alpha} d\xi, \\ A &= \left[(u+v) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[(u-v) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]^2. \end{aligned}$$

Вернемся к уравнению для \tilde{p}^{as} , которое после обратного преобразования Фурье по k принимает вид

$$\lambda^\omega \tilde{p}^{as}(x, \lambda) = -(I_\delta^\alpha)^{-1} \tilde{p}^{as}(x, \lambda) + \lambda^{\omega-1}.$$

Произведение же $\lambda^\omega \tilde{p}(x, \lambda)$ и функция $\lambda^{\omega-1}$ являются трансформантами Лапласа *дробной производной Римана–Лиувилля*

$$\frac{\partial^\omega p(x, t)}{\partial t^\omega} = \frac{1}{\Gamma(1-\omega)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\omega}$$

и обобщенной функции

$$\frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x).$$

Таким образом, главная асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) часть распределения $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению в частных производных дробного порядка

$$\frac{\partial^\omega p^{as}(x, t)}{\partial t^\omega} = -(I_\delta^\alpha)^{-1} p^{as}(x, t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x),$$

которое мы будем называть *уравнением аномальной диффузии (АД-уравнением)*. Здесь масштаб переменных x и t выбран специальным образом. В общем случае АД-уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^\omega p^{as}(x, t)}{\partial t^\omega} = DK(x; p^{as}(\cdot, t)) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x),$$

где D — положительная постоянная (коэффициент диффузии), а оператор K задается выражением

$$K(x; p(\cdot, t)) \equiv -(I_\delta^\alpha)^{-1} p(x, t).$$

Многомерный аналог АД-уравнения в изотропном случае включает в себя лапласиан дробного порядка:

$$\frac{\partial^\omega p^{as}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^\omega} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} p^{as}(\mathbf{x}, t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(\mathbf{x}).$$

Различные аспекты, связанные с применением уравнений в дробных производных, рассмотрены в работах [40–42] и др.

4.5. Обобщенный закон Фика

Будучи преобразованным (путем дробного дифференцирования порядка $1 - \omega$ обеих частей) к виду

$$\frac{\partial p^{as}}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} \frac{\partial^{1-\omega} p^{as}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^{1-\omega}} + \delta(\mathbf{x})\delta(t),$$

АД-уравнение может быть представлено в виде системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{as}}{\partial t} &= -\operatorname{div} \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= D(-\Delta)^{\alpha/2} \frac{\partial^{1-\omega} p^{as}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^{1-\omega}}, \end{aligned}$$

первое из которых является уравнением непрерывности, определяющим вектор плотности тока вероятности \mathbf{j} , а второе — обобщенным законом Фика, заданным в неявной форме. При $\alpha = 2$ он записывается в явной форме

$$\mathbf{j} = -D \operatorname{grad} \frac{\partial^{1-\omega} p^{as}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^{1-\omega}},$$

принимаяющей вид обычного закона Фика при $\omega = 1$. Наличие в правой части производной по времени дробного порядка

$$\frac{\partial^{1-\omega} p^{as}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^{1-\omega}} = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p^{as}(\mathbf{x}, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{1-\omega}}$$

отражает влияние памяти процесса на распространение вероятности: плотность тока в данный момент определяется не локальным градиентом плотности в данный момент, а ее эволюцией в течение всего предшествующего периода диффузии. При $\alpha = 2$ достаточно знать эволюцию градиента плотности в точке наблюдения \mathbf{x} (пространственная локальность еще сохраняется), но при $\alpha < 2$ плотность тока в точке \mathbf{x} в момент времени t определяется уже эволюцией $p(\mathbf{x}, t)$ во всем пространстве (эффект больших пробегов, называемых *полетами Леви*) в течение всего времени диффузии.

Заметим, что при $\omega \rightarrow 1$ множитель $t^{-\omega}/\Gamma(1 - \omega)$ превращается в дельта-функцию $\delta(t)$ [43, с. 487], а АД-уравнение — в уравнение супердиффузии, рассмотренное в [23]. При $\alpha \rightarrow 2$ оператор Рисса превращается в обычный лапласиан, а АД-уравнение — в уравнение субдиффузии, исследованное в [44]. При одновременном выполнении этих условий мы имеем обычное диффузионное уравнение, с одномерного варианта которого мы и начали данный обзор.

5. Память, шумы, фракталы

5.1. Дробные производные

Судьба дробного исчисления подобна судьбе устойчивых законов: для многих физиков оно остается некоторой экзотикой. Мне посчастливилось: судьба свела меня с профессором Московского университета В.М. Золотаревым и профессором Казанского университета Р. Нигма-

туллиным, благодаря которым эта экзотика превратилась для меня в реальный инструмент. Не могу не вспомнить здесь и о встрече с профессором МГУ П.С. Ланда, автором превосходной монографии [45], с которой я познакомился на Международной конференции по нелинейной динамике и хаосу в Саратове в 1996 г. С юношеской любознательностью (качество, редко сохраняемое в статусе крупного ученого) Полина Соломонова допытывалась: первая производная характеризует наклон кривой в данной точке, вторая — ее выпуклость (вогнутость), а что характеризует производная порядка, скажем, $3/2$? Мои (не очень внятные, вероятно) объяснения, как мне показалось, разочаровали ее. Возможно, сейчас я бы ответил точнее, но в целом этот вопрос еще дискутируется. Подробное изложение теории дробного интегрирования и дифференцирования можно найти в книге [25], ставшей энциклопедией по этому вопросу и широко цитируемой как отечественными, так и зарубежными авторами. Я же здесь ограничусь лишь следующим замечанием.

Производная дробного порядка — это нелокальная характеристика функции: она зависит не только от поведения функции в окрестности рассматриваемой точки x , но и от принимаемых ею значений на всем интервале (a, x) (или (x, b)). Его можно записать в виде предела отношения приращений подобно обычной производной, но для этого надо обобщить понятие приращения целого порядка на случай дробного порядка. В общем, здесь много любопытных деталей, да и самих конструкций дробных производных существует множество, так что практическое использование этого аппарата требует некоторой подготовки, без чего легко попасть впросак.

В качестве такого примера приведу фрагмент из книги [46]: "Воспользовавшись определением дробной гёльдеровской производной порядка ν

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^\nu} = \frac{\partial^\nu f}{\partial x^\nu},$$

получим выражение для тока

$$j(x, t) = - \lim_{a \rightarrow 0} \tilde{k} \frac{T(x, t) - T(x - a, t)}{a^\nu} = -k \frac{\partial^\nu T(x, t)}{\partial x^\nu}.$$

Тогда уравнение теплопроводности на фракталах имеет вид

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \tilde{k} \frac{\partial^{1+\nu} T(x, t)}{\partial x^{1+\nu}}."$$

И на следующей (357-й) странице: "Во-вторых, легко установить асимптотическое поведение теплопереноса на фракталах при больших временах:

$$T(x, t) = T_0 \exp \left[- \left(\frac{x^{1+\nu}}{\tilde{k}t} \right)^{1/\nu} \right]."$$

Очевидно, однако, что функция $T(x, t)$ дифференцируема при всех $x > 0$, так что

$$T(x + \Delta x, t) - T(x, t) \propto \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

и отношение

$$\frac{\Delta x}{(\Delta x)^\nu}$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ может стремиться лишь к нулю ($v > 1$) или бесконечности ($v < 1$), тогда как в левой части уравнения теплопроводности стоит производная по времени, имеющая для записанной выше функции при положительном времени конечную величину.

Приведем в качестве иллюстрации несколько примеров дробных производных Римана–Лиувилля от простых функций:

$$\frac{d^v x^\lambda}{dx^v} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda - \alpha + 1)} x^{\lambda - \alpha}, \quad x > 0, \quad \lambda > -1;$$

$$\frac{d^v 1}{dx^v} = [\Gamma(1 - \alpha)]^{-1} x^{-\alpha};$$

$$\frac{d^v \exp(ax)}{dx^v} = [\Gamma(\alpha)]^{-1} \exp(ax) \gamma(\alpha, ax).$$

Обратите внимание на то, что производная от постоянной обращается в нуль лишь в случае целых порядков, для дробных α она отличается от нуля. Ситуация, впрочем, изменится, если производную брать не от нуля до x , а от $a \neq 0$ до x — дробная производная, как и интеграл, зависит от величины отрезка.

5.2. Память и перемежаемость

Чтобы лучше понять ситуацию, приводящую к появлению дробных производных при анализе асимптотики скачкообразных процессов, запишем интегральное уравнение для "скорости счета" $f(t) = dN(t)/dt$:

$$f(t) - \int_0^t q(t - \tau) f(\tau) d\tau = q(t).$$

Если распределение интервала между импульсами экспоненциальное:

$$q_T(t) = \tau^{-1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

мы имеем пуассоновский процесс. Он марковский и памятью не обладает. Что означает эта фраза? Пусть T — время ожидания первого импульса, а $q_{T-\theta}(t|\theta)$ — условная плотность оставшегося к моменту θ времени ожидания $T - \theta$ при условии, что промежуток $(0, \theta)$ пустой. Очевидно,

$$q_{T-\theta}(t|\theta) = \frac{q_T(\theta + t)}{\int_0^\infty q_T(t) dt} = \tau^{-1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Таким образом, отсчитываем мы время от $t = 0$ (начала процесса) или от некоторого $\theta > 0$ (при условии, что интервал $(0, \theta)$ пуст), мы получаем одну и ту же плотность распределения первого импульса — экспоненту с параметром τ . Если же мы возьмем, например,

$$q_T(t) \sim Bt^{-v-1},$$

то

$$q_{T-\theta}(t|\theta) \sim v\theta^v(\theta + t)^{-v-1}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Условная плотность оставшегося времени ожидания зависит от θ — это и означает немарковость процесса, или, на физическом языке, наличие памяти.

Чтобы посмотреть асимптотику процесса в целом, выполним преобразование Лапласа уравнения для $f(t)$:

$$[1 - \tilde{q}(\lambda)] \tilde{f}(\lambda) = \tilde{q}(\lambda).$$

Согласно тауберовым теоремам (см., например, [17]), поведение функции $f(t)$ при больших t определяется поведением ее трансформанты

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) f(t) dt$$

в области малых λ , а именно, трансформанта любой монотонной (начиная с некоторого t) функции имеет асимптотическое представление

$$\tilde{f}(\lambda) \sim C\lambda^{-\rho}, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

тогда и только тогда, когда

$$f(t) \sim \frac{C}{\Gamma(\rho)} t^{\rho-1}, \quad \rho > 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Легко показать, что

$$1 - \tilde{q}(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{B}{v} \Gamma(1 - v) \lambda^v, & v < 1, \\ \langle T \rangle \lambda, & v > 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\tilde{f}(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{v}{B\Gamma(1-v)} \lambda^{-v}, & v < 1, \\ \langle T \rangle^{-1} \lambda^{-1}, & v > 1, \end{cases}$$

и обратное преобразование дает

$$\tilde{f}(t) \sim \begin{cases} Ct^{v-1}, & v < 1, \\ \langle T \rangle^{-1}, & v > 1. \end{cases}$$

Если же выполнить обратное преобразование Лапласа выражений

$$\lambda^v \tilde{f}(\lambda) = \frac{v}{B\Gamma(1-v)}$$

и

$$\lambda \tilde{f}(\lambda) = \langle T \rangle^{-1},$$

то в соответствии со свойствами дробной производной Римана–Лиувилля получим

$$\frac{d^v f}{dt^v} = 0, \quad v < 1,$$

и

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad v > 1.$$

Таким образом, при $v > 1$, когда среднее $\langle T \rangle$ конечно, $f(t)$ выходит на постоянное значение при $t \rightarrow \infty$, т.е. в асимптотике больших t ведет себя как чистый пуассоновский процесс. Другими словами, со временем он *теряет память* (наблюдается *асимптотический склероз*). В случае же, когда $v < 1$ и среднее соответственно бесконечно, плотность спадает по закону t^{v-1} при сколь угодно больших t — *память сохраняется*.

Прямое моделирование этого процесса при $\nu < 1$ вскрывает еще одно свойство — свойство *перемежаемости*. В каком бы масштабе мы не наблюдали распределение точек на оси, оно выглядит прерывистым. Области сгущения сменяются (*перемежаются*) пустотами. Среднее число точек на интервале $(0, t)$ растет пропорционально t^γ , т.е. здесь мы имеем дело со стохастическим фракталом с фрактальной размерностью γ . Примечательно, что фрактальная размерность совпадает с порядком дробной производной γ . При $\gamma > 1$ перемежаемость исчезает, и в больших масштабах распределение точек выглядит однородным.

Разумеется, приведенная здесь интерпретация дробных производных не является единственно возможной (см. [47–50]).

5.3. Эредитарные процессы

Отмечавшаяся выше нелокальность дробной производной означает, что изменение плотности зависит не только от ее значений в окрестности рассматриваемой точки (как это имеет место в случае нормальной диффузии), но и от ее значений в удаленных точках пространства. Этот факт можно представить в виде

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = K(x; p(\cdot, t))$$

(характеристические показатели α и β для краткости опускаем, коэффициент диффузии $D = 1$). Здесь $K(x; p(\cdot, t))$ — не просто сокращенная запись правой части, это — функционал на множестве плотностей $\{p(x', t)\}$ (при фиксированных параметрах x и t), ставящий каждой плотности $p(x', t)$ в соответствие число $K(x; p(\cdot, t))$. Заметим, однако, что $\partial p(x, t)/\partial t$ зависит здесь только от плотности в тот же момент времени: информация о предыдущих состояниях процесса не используется.

Вполне естественным представляется обобщение приведенного выше функционального уравнения на случай, когда не только координаты, но и время является активной переменной:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = Q(x, t; p(\cdot, \cdot)).$$

Случайный процесс, скорость изменения плотности которого зависит от значений плотности в предшествующие моменты времени, называется *эредитарным*.

В русском языке эредитарности (heredity) соответствуют термины *память, последствие, запаздывание, наследственность, остаточность*. Вито Вольтерра, посвятивший развитию понятия эредитарности и его применению к физическим и экологическим задачам ряд научных работ и несколько глав в книгах [51, 52], отмечал, что впервые понятие последствия в физике ввел Пикар в 1907 г., хотя явления усталости металлов, магнитного гистерезиса и других эредитарных процессов были известны, конечно, много раньше.

В подавляющем большинстве приложений ограничиваются *линейной эредитарностью*, которая в рассматриваемой модели приводит к уравнению

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} q(t, t') K(x; p(\cdot, t')) dt'.$$

Линейная эредитарность называется *инвариантной*, если ядро интегрального оператора в правой части зависит от разности времен $t - t'$. Мы рассматриваем только положительные времена, считая, что при $t < 0$ $p(x, t) = 0$; уравнение соответствующего инвариантного эредитарного процесса имеет вид

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \int_0^t q(t - t') K(x; p(\cdot, t')) dt'$$

с начальным условием

$$p(x, 0) = \delta(x).$$

Напомним, что введенные в п. 2.3.2 функционалы $K^{(\alpha, \beta)}$ являются однородными функциями относительно переменной x :

$$K^{(\alpha, \beta)}(ax; p^{(\alpha, \beta)}(\cdot, t)) = a^{-\alpha} K^{(\alpha, \beta)}(x; p^{(\alpha, \beta)}(\cdot, t)),$$

что, собственно, и обуславливает автомодельный характер фундаментального решения. Чтобы сохранить это свойство и для рассмотренного типа эредитарного процесса, достаточно потребовать, чтобы ядро $q(t)$ удовлетворяло условию

$$q(t) = \frac{t^{-\omega-1}}{\Gamma(-\omega)}.$$

В этом случае

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^{1-\omega}}{\partial t^{1-\omega}} K(x; p(\cdot, t)) + \delta(x)\delta(t)$$

или

$$\frac{\partial^\omega p(x, t)}{\partial t^\omega} = K(x; p(\cdot, t)) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x).$$

Автомодельное решение при этом имеет вид

$$p(x, t) = t^{-\beta/\alpha} p(xt^{-\beta/\alpha}, 1).$$

В частности, при $\alpha = 2$ мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial^\omega p(x, t)}{\partial t^\omega} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x),$$

описывающему субдиффузию [44], а устремляя далее ω к 1 и учитывая, что при этом $t^{-\omega}/\Gamma(1-\omega) \rightarrow \delta(t)$, получаем обычное диффузионное уравнение.

5.4. Дробные диффузионные процессы и шумы

Другой способ введения эредитарности в автомодельные процессы основан на использовании стохастических интегралов по случайной мере $dL(t)$, описывающей случайное приращение L-процесса в интервале времени $(t, t + dt)$. В этой терминологии (см. п. 2.4.3)

$$X(t) = \int_0^t dL(\tau), \quad t > 0,$$

$$X(t + \tau) - X(t) = \int_t^{t+\tau} dL(\tau') \stackrel{d}{=} \tau^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

Эредитарность здесь вводится с помощью функции $h(t, \tau)$, определяющей вклад единичной меры в момент τ в состояние процесса в момент t :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) dL(\tau).$$

Если функция $h(t, \tau)$ инвариантна относительно сдвига по времени:

$$h(t, \tau) = h(t - \tau),$$

то такой процесс называют *процессом скользящего среднего* (moving average process, МА-процесс).

Примером МА-процесса служит процесс Орнштейна – Уленбека – Леви, который можно записать в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^t \exp[-\lambda(t - \tau)] dL(\tau).$$

Построенный по такому же принципу процесс

$$X_{\alpha}^H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|t - \tau|^{H-1/\alpha} - |\tau|^{H-1/\alpha}) dL(\tau),$$

где $0 < H < 1$, $H \neq 1/\alpha$, называется *линейным дробным устойчивым движением*, так как получается из устойчивого процесса интегрированием дробного порядка. Отметим два важных свойства процесса $\{X_{\alpha}^H(t)\}$. Во-первых, он самоподобен с параметром H , т.е. для любых $a > 0$ и t_1, \dots, t_n

$$(X_{\alpha}^H(at_1), \dots, X_{\alpha}^H(at_n)) \stackrel{d}{=} (a^H X_{\alpha}^H(t_1), \dots, a^H X_{\alpha}^H(t_n)).$$

Во-вторых, он обладает стационарными приращениями:

$$X_{\alpha}^H(t) - X_{\alpha}^H(0) \stackrel{d}{=} X_{\alpha}^H(t + \tau) - X_{\alpha}^H(\tau).$$

В частном случае $\alpha = 2$ мы имеем дело с *дробным броуновским движением*. Если его среднее значение равно нулю (при $H \neq 1$), дисперсия

$$\langle [X_2^H(t)]^2 \rangle = t^{2H} \sigma^2, \quad \sigma^2 = \langle [X_2^H(1)]^2 \rangle,$$

а автокорреляционная функция

$$\begin{aligned} C_2^H(t_1, t_2) &= \langle X_2^H(t_1) X_2^H(t_2) \rangle = \\ &= (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

Обычному броуновскому движению соответствует $H = 1/2$ и

$$C_2^{1/2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \sigma^2 \min(t_1, t_2), & \text{если } t_1 \text{ и } t_2 \\ & \text{одинакового знака,} \\ 0, & \text{если } t_1 \text{ и } t_2 \\ & \text{разных знаков.} \end{cases}$$

При $H < 1/2$ имеет место субдиффузия, при $1/2 < H < 1$ — супердиффузия, при $H = 1$ — баллистический режим. Заметим, что форма распределения вероятности во всех режимах остается гауссовой:

$$p(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sigma t^H} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2 t^{2H}}\right).$$

Поскольку броуновское движение имеет стационарные приращения, последовательность

$$\{Z_j = X_2^H(j+1) - X_2^H(j), \quad j = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

является стационарной и называется *дробным гауссовым шумом*. Его автокорреляционная функция

$$\begin{aligned} R_j &= (|j+1|^{2H} - 2|j|^{2H} + |j-1|^{2H}) \frac{\sigma_0^2}{2} \sim \\ &\sim \sigma_0^2 H(2H-1) j^{2H-2}, \quad j \rightarrow \infty, \quad H \neq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

а спектральная плотность $P(\nu)$ имеет асимптотически степенной вид:

$$P(\nu) \propto \nu^{-\gamma}, \quad \gamma = 2H - 1.$$

При $\gamma = 0$ имеем белый шум, моделирующий электронный и фотонный дробные шумы, тепловой шум. Случаи $\gamma = 1, 2$ и $\gamma > 2$ соответствуют розовому, коричневому и черному шумам, также находящим применение к естественным и общественным процессам. В частности, черные спектры описывают различного рода катастрофы — разливы рек, засухи, перебои с электроэнергией, финансовые кризисы [53].

5.5. Стохастические фракталы

Пространственный аналог записанного в разделе 5.1 интегрального уравнения имеет вид

$$f(\mathbf{x}) - \int p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = p(\mathbf{x}).$$

Оно описывает в физическом аспекте среднюю плотность числа столкновений исчезающей частицы, начинающей свое движение из начала координат с переходной плотностью $p(\mathbf{x})$. Это, однако, не единственная интерпретация: если предположить, что в каждом столкновении частица с вероятностью $1 - 1/n$ исчезает и с вероятностью $1/n$ расщепляется на n частиц, продолжающих движение с теми же переходными вероятностями независимо друг от друга, то для средней плотности столкновений мы вновь приходим к тому же самому уравнению.

Собственно движение нас в данном случае не интересует, мы будем рассматривать лишь след, оставленный частицей в виде конечного или бесконечного множества точек в пространстве (назовем его *пылью*) — тех самых точек, где частица испытала столкновения. Образ блуждающей частицы позволяет лучше представить себе общую картину корреляций в этом множестве случайных точек и воспользоваться готовым математическим аппаратом теории переноса [54].

Решение этой задачи для изотропной экспоненциальной плотности

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \exp(-r), \quad r = |\mathbf{x}|,$$

хорошо известно [55]. Асимптотическое поведение $f(\mathbf{x})$ при этом имеет вид

$$f^{as}(\mathbf{x}) \propto r^{-1}, \quad r \rightarrow \infty.$$

К такому же результату мы приходим и при любом другом выборе переходной плотности, удовлетворяю-

щей условию

$$\sigma^2 \equiv \int p(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x} < \infty.$$

Ситуация изменится, если дисперсия бесконечна; к этой категории относятся и блуждания с переходной плотностью

$$p(\mathbf{x}) \propto r^{-3-\alpha}, \quad r \rightarrow \infty, \quad \alpha < 2,$$

называемые полетами Леви.

Непосредственное преобразование Фурье интегрального уравнения

$$[1 - \tilde{p}(\mathbf{k})] \tilde{f}^{as}(\mathbf{k}) = 1$$

в области малых $|\mathbf{k}|$, когда

$$1 - \tilde{p}(\mathbf{k}) \propto |k|^\alpha,$$

приводит к соотношению

$$|\mathbf{k}|^\alpha \tilde{f}^{as}(\mathbf{k}) = 1,$$

эквивалентному уравнению с дробным лапласианом

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f^{as}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}).$$

Это уравнение — стационарный вариант уравнения аномальной изотропной диффузии. Его решение имеет вид

$$f^{as}(\mathbf{x}) = C(\alpha)r^{-3+\alpha},$$

где $C(\alpha)$ — нормировочная постоянная (см. [25, §25]). Обратите внимание на изменение знака перед α : так же, как и в одномерном случае, в выражении для переходной плотности перед α стоит минус, а в формуле для плотности всех точек — плюс. Такое поведение решения является следствием бесконечной длины траектории. Если траектория имеет конечное (детерминированное или случайное с конечным средним) число узлов, то асимптотика $f^{as}(\mathbf{x})$ будет такой же, как и $p(\mathbf{x})$, т.е. $\propto r^{-3-\alpha}$, хотя если это число (в среднем) велико, то функция $f^{as}(\mathbf{x})$ будет иметь ярко выраженный участок с поведением $\propto r^{-3+\alpha}$, сменяющийся участком, где $f^{as}(\mathbf{x}) \propto r^{-3-\alpha}$ [56].

В случае бесконечной траектории среднее число ее узлов в шаре радиуса R асимптотически растет по закону

$$\langle N(R) \rangle \propto R^\alpha, \quad \alpha \in (0, 2].$$

Это дало основание Б. Мандельброту назвать такое множество точек *стохастическим фракталом*. Он использовал полеты Леви для моделирования распределения галактик (узлов) и получил качественное согласие с наблюдательными данными, что породило еще один термин, популярный в последние годы, — *фрактальная космология* [57].

В заключение подчеркнем, что усредненная условная (т.е. в системе координат с центром в одной из случайных точек) плотность удовлетворяет уравнению с дробным оператором $(-\Delta)^{\alpha/2}$, и его показатель α совпадает (в случае бесконечных траекторий) с фрактальной размерностью.

5.6. Одномерный фрактальный газ

В работе [58] случайное распределение $\{X_j\} = \dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots$ точечных атомов на прямой, обладающее свойствами:

- 1) $X_0 = 0$;
- 2) $X_i < X_j$, если $i < j$;
- 3) $X_j - X_{j-1} = R_j$ — взаимно независимые, одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$,

названо *одномерным лоренц-газом*. Легко видеть, что распределение вероятности числа атомов $N_+(x)$ в промежутке $(0, x]$ выражается через многократные свертки распределения $F(x)$ соотношением

$$W(n, x) \equiv \mathbf{P}(N_+(x) = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x).$$

Аналогичное соотношение имеет место и для распределения числа частиц $N_-(x)$ в интервале $[-x, 0)$. Полное число атомов на отрезке $[-x, x]$ равно сумме

$$N(x) = N_+(x) + N_-(x) + 1.$$

Выбирая разные функции распределения $F(x)$, получаем различные модели случайной среды. Так, использование ступенчатой функции Хевисайда

$$F(x) = \mathbf{H}(x - a) \equiv \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

дает одномерную детерминированную решетку; экспоненциальное распределение

$$F(x) = 1 - \exp(-\mu x)$$

приводит к независимо распределенным атомам (пуассоновская модель).

В любом случае, если среднее значение R конечно, мы получаем в асимптотике больших x $\langle N(x) \rangle \propto x$, и относительные флуктуации $\Delta N(x)/\langle N(x) \rangle \rightarrow 0$. Это значит, что если $f(N(x), x)$ — некоторая гладкая функция случайной переменной N , то при $x \rightarrow \infty$ $f(N(x), x) \rightarrow f(\langle N(x) \rangle, x)$, т.е. с увеличением толщины слоя x происходит *самоусреднение*:

$$\langle f(N(x), x) \rangle \rightarrow f(\langle N(x) \rangle, x).$$

Пусть теперь

$$1 - F(x) \sim \frac{A}{\Gamma(1 - \alpha)} x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \alpha < 1.$$

В этом случае среднее расстояние между атомами бесконечно, реальные же расстояния будут конечными в любой реализации случайной среды. Бесконечность среднего значения R приводит к тому, что на всех масштабах будут наблюдаться пустоты вперемежку со сгущениями, т.е. перемежаемость (рис. 3). Применение обобщенной предельной теоремы приводит к следующему результату:

$$\sum_{i=1}^n W(i, x) \sim \int_0^z w_z(z) dz, \quad x \rightarrow \infty,$$

где $z = n/\langle N(x) \rangle$, а

$$w_z(z) = \frac{z^{-1-1/\alpha}}{\alpha \Gamma(1 + \alpha)} g\left(\frac{z^{-1/\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}; \alpha, 1\right).$$

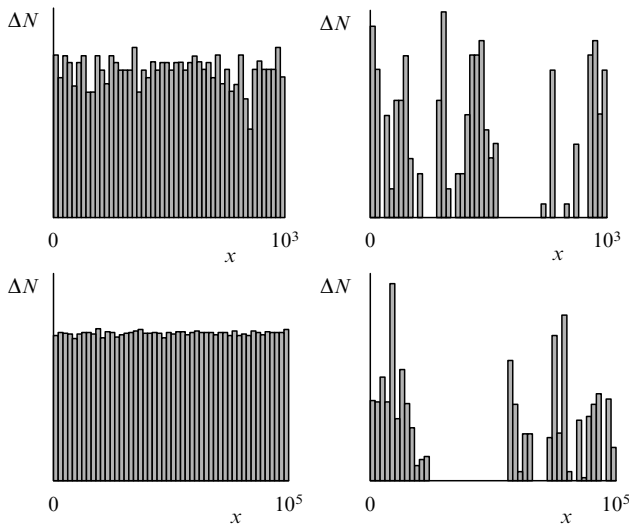


Рис. 3. Регулярное (слева) и фрактальное (справа, $\alpha = 0,75$) распределения атомов на прямой в разных масштабах.

Нетрудно видеть, что лоренц-газ обладает следующими свойствами.

1. Все атомы равноправны и все процессы $N(x)$ с различными начальными атомами статистически эквивалентны: $N \stackrel{d}{=} N(x)$.

2. Среднее (по ансамблю) число атомов растет с толщиной слоя, отсчитываемой от одного из них, по степенному закону

$$\langle N(x) \rangle \sim N_1 x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

3. Относительные флуктуации числа атомов в этом слое не убывают с увеличением его толщины, а стремятся к постоянной величине.

Эти свойства и дают основание назвать полученную структуру *стохастическим фракталом* (или фрактальным газом) — самоподобным в вероятностном смысле множеством с фрактальной размерностью α . Для фрактального газа имеет место соотношение

$$\langle f(N(x), x) \rangle \sim \int_0^\infty f(N_1 x^\alpha z, x) w_\alpha(z) dz$$

при $x \rightarrow \infty$. Оно указывает на отсутствие самоусредняемости на фрактальных структурах — главное отличие блужданий на фракталах от блужданий в регулярной среде.

Аналогичным образом построим случайное множество точек $\{T_j\}$ на положительной полуоси времени, характеризующее случайные моменты перескока блуждающей частицы с одного атома на другой. Случайные интервалы времени между этими событиями будем считать независимыми и одинаково распределенными с функцией распределения $Q(t)$. Если $Q(t) = 1 - \exp(-\mu t)$, $\mu > 0$, то случайное множество $\{T_j\}$ образует однородный пуассоновский поток. Это означает, что вероятность совершения частицей скачка в интервале $(t, t + dt)$ не зависит от момента ее предыдущего скачка; другими словами — частица не обладает памятью. Во всех остальных случаях говорят о частице с памятью, а если

$$1 - Q(t) \sim \frac{B}{\Gamma(1 - \omega)} t^{-\omega}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \beta < 1,$$

то о частице с фрактальной памятью. Все, что было сказано выше относительно ансамбля $\{X_i\}$, справедливо и для ансамбля $\{T_i\}$, в том числе и правило усреднения. Если $K(t)$ — случайное число скачков в фиксированном интервале $(0, t]$, то усредненная по статистическому ансамблю $\{T_i\}$ функция $h(K(t), t)$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\langle h(K(t), t) \rangle \sim \int_0^\infty h(K_1 t^\omega z, t) w_\omega(z) dz, \quad t \rightarrow \infty.$$

5.7. Блуждание на одномерном фрактале

Рассмотрим теперь процесс блуждания частицы на рассмотренном выше фрактале. В начальный момент она находится в начале координат. По истечении случайного времени T_1 она перескакивает с равной вероятностью в один из двух соседних атомов, где пребывает в течение случайного времени, после чего вновь совершает скачок в один из соседних атомов (которым теперь может оказаться и атом, находящийся в начале координат, с которого она начинала движение).

Если мы в качестве координаты выберем не x , а номер атома i , а в качестве времени не t , а номер момента скачка j , то в соответствии с центральной предельной теоремой получим

$$P(I < i | J = j) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \int_{-\infty}^i \exp\left(-\frac{x^2}{2j}\right) dx, \quad j \rightarrow \infty.$$

Этот результат является следствием усреднения по ансамблю случайных траекторий частиц с фиксированными узлами и моментами перескока. Чтобы получить искомую функцию распределения, необходимо усреднить по двум независимым статистическим ансамблям $\{X_i\}$ и $\{T_j\}$, т.е. по случайным значениям I и J индексов i и j соответственно:

$$F(x, t) = \langle \langle P(I < i | J = i) \rangle \rangle.$$

Выполняя это усреднение, после некоторых преобразований получим [59]

$$F(x, t) \sim \Xi^{(\alpha, \omega)}((Ct)^{-\omega/(2\alpha)} x), \quad t \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

где $C = \text{const}$,

$$\Xi^{(\alpha, \omega)}(x) = \int_0^\infty Q(xy^{-\alpha}; 2, \omega, 0) g(y; \alpha, 1) dy.$$

Соответствующее соотношение для плотности $p(x, t) = \partial F(x, t) / \partial x$ имеет вид

$$p(x, t) = (Ct)^{-\omega/(2\alpha)} \xi^{(\alpha, \omega)}((Ct)^{-\omega/(2\alpha)} x),$$

где

$$\xi^{(\alpha, \omega)}(x) = \int_0^\infty q(xy^{-\alpha}; 2, \omega, 0) g(y; \alpha, 1) y^{-\alpha} dy.$$

При $\omega \rightarrow 1$ распределение переходит в нормальное. При одновременном выполнении этих двух условий мы получаем гауссову форму для самой плотности $p(x, t)$, что соответствует нормальной диффузии в регулярной среде.

Сопоставление пространственного распределения частицы, блуждающей на фрактале, с решением АДУравнения для фрактального блуждания (рис. 4) показы-

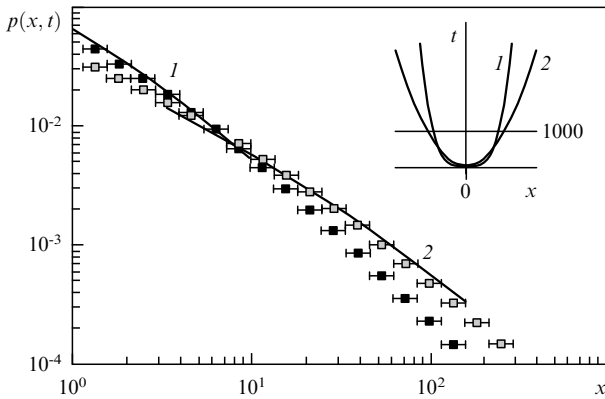


Рис. 4. Плотности симметричных ($\theta = 0$) распределений $p(x, t; \alpha, \omega)$, $\alpha = 1/2$, $\omega = 1/4$, $t = 10^3$ для блуждания на фрактале (1) и фрактального блуждания (2). Кривые — численный расчет, точки — расчет методом Монте-Карло. На врезке — ширина диффузионных пакетов в зависимости от времени.

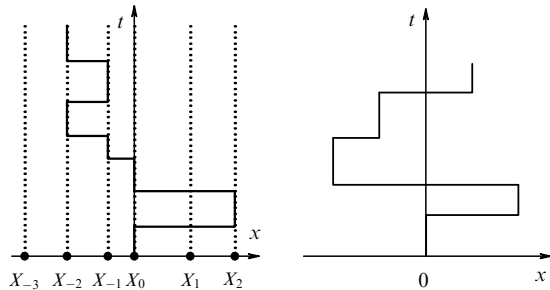


Рис. 5. Блуждание на фрактале (слева) и фрактальное блуждание (справа).

вает, что последнее в общем случае нельзя интерпретировать как уравнение, описывающее блуждание на фракталах: в первом случае диффузионный пакет расплывается по закону $\sim t^{\omega/(2\alpha)}$, в последнем — по закону $\sim t^{\omega/\alpha}$, т.е. гораздо быстрее. В случае блужданий на фракталах показатель $H = \omega/(2\alpha)$ принадлежит интервалу $(0, 1/2)$, и супердиффузионного режима ($\gamma > 1/2$) вообще не возникает. Причину этого различия можно увидеть из рис. 5: фрактально блуждающая частица после вылета из атома всегда может уйти на большое расстояние, тогда как в случае блуждания на фрактале она может оказаться запертой между соседними кластерами, совершая между ними большое число переходов.

Различаются в рассматриваемых случаях и сами формы распределений $\xi(x; \alpha, \omega)$ и $q(x; \alpha, \omega)$. Угловое распределение многократно рассеянных на фрактале частиц рассмотрено в [60].

В заключение подчеркнем, что эти выводы справедливы для статистического ансамбля одномерных "застывших" распределений. В многомерном блуждании корреляция между последовательными пробегами может быть выражена слабее и меньше сказываться на различии. Кроме того, ситуация может существенно измениться, если в течение характерного времени пребывания частицы на одном из атомов расположение атомов заметно меняется (как это имеет место при диффузии в турбулентной среде — отсюда и супердиффузия).

6. Кинетика с конечной скоростью свободного движения

6.1. Мезодиффузия

Специфический тип эрдитарности возникает в случае, когда частица совершает скачки с конечной скоростью свободного движения. В этом случае мы получаем невырожденное распределение даже в отсутствие ловушек, т.е. при непрерывном движении частицы с постоянной по величине и переменной по направлению скоростью. Интерес к этому процессу, несколько остывший со времен анализа нестационарных режимов ядерных реакторов, усилился в связи с рождением нового направления исследований конденсированного состояния — физики мезоскопических систем [61–63]. Мезоскопические наноструктуры предоставляют уникальную возможность экспериментального исследования процесса переноса в среде с хорошо определенным потенциальным полем, не искаженным случайными примесями и другими дефектами. При этом весьма существенным оказывается наличие трех временных областей с разными режимами переноса: интервал $(0, t_1)$ с преобладанием баллистического переноса, область (t_2, ∞) , $t_2 > t_1$, где устанавливается режим нормальной (гауссовой) диффузии, и промежуточная область (t_1, t_2) , режим переноса в которой назван в [64] мезоскопической диффузией (см. также [65]). Мы будем использовать здесь термин *мезодиффузия*.

Квантовомеханический анализ одномерной задачи, проведенный в [64], показал, что отличительной особенностью мезодиффузии является отклонение от закона Фика

$$j = -D \frac{\partial p}{\partial x},$$

заменяемого в этой области соотношением Максвелла–Каттанео

$$j = -D \frac{\partial p}{\partial x} - \theta \frac{\partial j}{\partial t}, \quad \theta > 0.$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

оно приводит к уравнению для плотности распределения частиц $p(x, t)$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \theta \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

называемому *телеграфным*. Характерной особенностью его решения для ограниченного по времени (например, мгновенного) источника является наличие диффузионного фронта, за пределами которого диффундирующие частицы отсутствуют, а в окрестности самого фронта они движутся в баллистическом режиме. При больших временах баллистическая компонента затухает, а оставшаяся часть решения в образцах больших размеров превращается в гауссов пакет, удовлетворяющий обычному диффузионному уравнению. Детали этого процесса исследованы в работах [64–68].

6.2. Общее решение

Распределение вероятности блуждающей со скоростью v вдоль оси OX частицы с распределением свободного пробега

$$P(R > x) = P(x) = \int_x^\infty p(x) dx$$

и равновероятным направлением после столкновения дается плотностью

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t [f(x - v\tau, t - \tau) + f(x + v\tau, t - \tau)] P(v\tau) d\tau,$$

где $f(x, t)$ — плотность столкновений (среднее число столкновений на единичном интервале в единицу времени), удовлетворяющая уравнению

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t [f(x - v\tau, t - \tau) + f(x + v\tau, t - \tau)] p(v\tau) d\tau + \delta(x)\delta(t).$$

Преобразование Фурье (по x) и Лапласа (по t) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k, \lambda) &= \frac{1}{v} W(k, \lambda) \tilde{f}(k, \lambda), \\ \tilde{f}(k, \lambda) &= 1 + w(k, \lambda) \tilde{f}(k, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W(k, \lambda) &= \int_0^\infty P(x) \cos(kx) \exp\left(-\frac{\lambda}{v} x\right) dx, \\ w(k, \lambda) &= \int_0^\infty p(x) \cos(kx) \exp\left(-\frac{\lambda}{v} x\right) dx. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{W(k, \lambda)}{v[1 - w(k, \lambda)]},$$

так что сама плотность выражается соотношением

$$p(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int_{-\infty}^\infty dk \int_C d\lambda \frac{W(k, \lambda)}{v[1 - w(k, \lambda)]} \exp(-ikx + \lambda t).$$

Эта форма представления результата более удобна для асимптотического анализа, чем для численных расчетов.

Чтобы привести другую форму общего решения (т.е. решения для произвольного распределения пробега между столкновениями $p(x)$), введем распределение пробегов между столкновениями с изменением направления движения. Плотность этого распределения $g(x)$ связана с $p(x)$ соотношением

$$g(x) = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n p^{*n}(x),$$

где

$$p^{*n}(x) = \int_0^x p^{*(n-1)}(x - x') p(x') dx'$$

— $(n - 1)$ -кратная свертка плотностей $p(x)$. Введем также индексы 1 и 2 для обозначения направления движения частицы вдоль оси OX (1 — налево, 2 — направо), а через

$p_{ij}(x, t)$ обозначим плотность распределения частицы в состоянии i при условии, что в момент $t = 0$ она начала движение из начала координат в состоянии j . Очевидно,

$$\sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^\infty p_{ij}(x, t) dx = 1,$$

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} p_{ij}(x, t).$$

В [71] показано, что

$$p_{11}(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \Delta G^{*n}(\xi_1) g^{*n}(\xi_2),$$

$$p_{21}(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty g^{*(n+1)}(\xi_1) \Delta G^{*n}(\xi_2),$$

где

$$g^{*(n+1)}(\xi) = \int_0^\xi g^{*n}(\xi - x) g(x) dx$$

— n -кратная свертка плотности $g(x)$,

$$G^{*n}(\xi) = \int_0^\xi g^{*n}(x) dx,$$

$$\Delta G^{*n}(\xi) = G^{*n}(\xi) - G^{*(n+1)}(\xi),$$

$$\xi_1 = \frac{vt - x}{2}, \quad \xi_2 = \frac{vt + x}{2}.$$

Заметим, что приведенные здесь распределения включают и δ -особенности, даваемые слагаемыми с $n = 0$, так что справедливо условие нормировки

$$\int_{-vt}^{vt} [p_{1j}(x, t) + p_{2j}(x, t)] dx = 1.$$

6.3. Точные решения

Вторая форма представления $p(x, t)$ сводит проблему к вычислению многократных сверток распределений пробегов между точками изменения направления движения. Существуют распределения, свертки которых выражаются через элементарные или специальные функции. Соответствующие им решения будем называть *точными*.

Возьмем классическое распределение пробега экспоненциального вида

$$p(x) = \mu \exp(-\mu x).$$

В этом случае

$$p^{*n}(x) = \mu \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\mu x),$$

$$g(x) = \frac{\mu}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(\frac{\mu x}{2}\right)^n \exp(-\mu x) = \sigma \exp(-\sigma x), \quad \sigma = \frac{\mu}{2}.$$

Далее,

$$g^{*n}(\xi) = \sigma \frac{(\sigma \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\sigma \xi),$$

$$\Delta G^{(n)}(\xi) = \frac{(\sigma \xi)^n}{n!} \exp(-\sigma \xi).$$

Подставляя эти выражения в общую формулу и выражая степенные ряды через модифицированные функции Бесселя, получаем

$$p(x, t) = \exp(-\sigma vt) \frac{1}{2} \left\{ \delta(x + vt) + \delta(x - vt) + \right. \\ \left. + \sigma I_0(\sigma \sqrt{(vt)^2 - x^2}) + \frac{vt I_1(\sigma \sqrt{(vt)^2 - x^2})}{\sqrt{(vt)^2 - x^2}} \right\}.$$

Дельта-функции здесь описывают распределения нерассеянных частиц от точечного мгновенного источника, непрерывная часть решения относится к рассеянной компоненте.

Естественно, n -кратная свертка экспоненциальной плотности изменяет ее вид. Однако если мы будем рассматривать класс гамма-распределений в целом:

$$g_{\sigma, v_1} * g_{\sigma, v_2}(x) = g_{\sigma, v_1 + v_2}(x),$$

то операция свертки изменяет лишь индекс ν гамма-распределения. Говорят, что этот класс замкнут относительно свертки. Это свойство называют еще *воспроизводимостью* [69].

Гамма-распределения не единственные воспроизводимые распределения. Распределения

$$g_\nu(x) = \nu x^{-1} \exp(-x) I_\nu(x),$$

порождаемые модифицированными функциями Бесселя $I_\nu(x)$, также образуют класс воспроизводимых распределений

$$g_\nu^{*n}(x) = \nu n x^{-1} \exp(-x) I_{\nu n}(x) = g_{\nu n}(x).$$

Очевидно, каждое строго устойчивое распределение $g(x; \alpha, \theta)$ благодаря свойству

$$g^{*n}(x; \alpha, \theta) = n^{-1/\alpha} g(x n^{-1/\alpha}; \alpha, \theta)$$

порождает класс воспроизводимых распределений. Частным случаем такого типа является δ -плотность

$$g(x; 1, 1) = \delta(x - 1),$$

описывающая блуждание на одномерной решетке. Заметим, что воспроизводимость не тождественна устойчивости: в последнем случае свертывание распределений не изменяет существенных параметров α и θ , влияя лишь на масштабный множитель.

Таким образом, принадлежность $f(x)$ к классу воспроизводимых распределений является достаточным условием для существования точного решения, если, разумеется, его плотности выражаются через элементарные или специальные функции. Существуют, однако, и другие плотности, приводящие к точным решениям. Пример — равномерное на $[0, a]$ распределение [17]

$$g(x) = \frac{1}{a}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$g^{*n}(x) = \frac{1}{a^n (n-1)!} \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} (x - va)_+^{n-1}, \quad x \leq na,$$

где $(x - a)_+$ есть нуль при $x \leq na$ и $x - a$ при $x \geq a$.

6.4. Телеграфное уравнение

Телеграфное уравнение, выведенное (как указано в [68]) лордом Кельвином в связи с проведением первого трансатлантического кабеля, в безразмерных единицах времени t имеет вид

$$\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial t^2} + \frac{\partial f_\nu}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x^2}.$$

Его решение $f_\nu(x, t)$ имеет смысл тока в точке x проводника в момент времени t , а параметр ν связан с самоиндукцией и сопротивлением единицы длины проводника.

При начальных условиях

$$f_\nu(x, 0) = \delta(x), \quad \left[\frac{\partial f_\nu(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0$$

оно состоит из двух слагаемых:

$$f_\nu(x, t) = f_\nu^{(0)}(x, t) + f_\nu^{(s)}(x, t).$$

Первое описывает два мгновенных импульса, расходящихся из начала координат со скоростью ν :

$$f_\nu^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(x - \nu t) + \delta(x + \nu t)] \exp\left(-\frac{t}{2}\right).$$

Второе дает непрерывную часть решения, заполняющего интервал между этими импульсами ($-\nu t < x < \nu t$):

$$f_\nu^{(s)}(x, t) = \frac{1}{4\nu} \left[I_0\left(\sqrt{\frac{t^2 - x^2/\nu^2}{4}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{t I_1\left(\sqrt{(t^2 - x^2/\nu^2)/4}\right)}{\sqrt{t^2 - x^2/\nu^2}} \right] \exp\left(-\frac{t}{2}\right).$$

Отметим следующие свойства приведенного решения:

$$f_\nu(x, t) > 0, \quad |x| \leq \nu t, \\ f_\nu(x, t) = 0, \quad |x| > \nu t,$$

$$\int_{-\nu t}^{\nu t} f_\nu(x, t) dx = 1,$$

$$\int_{-\nu t}^{\nu t} x^2 f_\nu(x, t) dx = 2\nu^2 [t + \exp(-t) - 1],$$

$$f_\nu(x, t) \cong \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu^2 t}\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

Читатель уже обратил внимание на то, что выражение типа $f_\nu(x, t)$ появилось в предыдущем разделе как точное решение задачи об одномерных блужданиях частицы с постоянной скоростью и экспоненциальным распределением пробега. При $\sigma v = 1/2$ параметр ν имеет смысл скорости свободного движения частицы, $f_\nu(x, t)$ имеет смысл плотности распределения вероятности в момент t , а $f_\nu^{(0)}(x, t)$ описывает распределение частиц, не менявших до момента времени t направления своего движения. Они находятся в точках $x = \nu t$ и $x = -\nu t$, образуя фронт диффузионного пакета, занимающего отрезок $[-\nu t, \nu t]$; вероятность обнаружить частицу за пределами отрезка равна нулю. При $t \rightarrow \infty$ решение $f_\nu(x, t)$ стремится к нормальному распределению $g_\nu(x, t)$ с дисперсией $2\nu^2 t$ [70], удовлетворяющему обычному диффузионному

уравнению

$$\frac{\partial g_v}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 g_v}{\partial x^2}$$

с начальным условием

$$g_v(x, 0) = \delta(x).$$

В силу своего приближенного (асимптотического) характера оно уже не содержит информации о диффузионном фронте, а описывает лишь центральную (впрочем, довольно большую) часть диффузионного пакета.

Чтобы получить телеграфное уравнение исходя из самой задачи о блужданиях, вернемся к трансформанте Фурье–Лапласа $\tilde{p}(k, \lambda)$ и вычислим входящие в нее функции w и W в предположении о показательном распределении пробега $p(x) = \mu \exp(-\mu x)$:

$$w\left(k, \frac{\lambda}{v}\right) = \mu W\left(k, \frac{\lambda}{v}\right) = \frac{\mu(\mu + \lambda/v)}{(\mu + \lambda/v)^2 + k^2}.$$

В результате приходим к выражению

$$[\lambda^2 + \mu v \lambda + v^2 k^2] \tilde{p}(k, \lambda) = \mu v + \lambda,$$

представляющему собой не что иное как преобразованное по Фурье–Лапласу телеграфное уравнение относительно плотности $p(x, t)$, удовлетворяющей начальным условиям

$$p(x, 0) = \delta(x), \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{t=0} = 0.$$

Заметим, что в отличие от уравнения ФПК (п. 2.4.2), содержащего первую и вторую производные по координате и первую по времени, телеграфное уравнение содержит первую и вторую производные по времени и вторую по координате.

6.5. Метод моментов

Для численного определения трансформанты плотности

$$p(x, \lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) p(x, t) dt$$

в случае произвольного распределения пробегов удобно использовать метод моментов.

Введем обозначения

$$m_{2n}(t) = \int_{-\infty}^\infty x^{2n} p(x, t) dx,$$

$$\tilde{m}_{2n}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty x^{2n} \tilde{p}(x, \lambda) dx = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) m_{2n}(t) dt,$$

$$\tilde{p}_n(\mu) = \int_0^\infty \exp(-\mu x) x^n p(x) dx,$$

подставим разложения

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} m_{2n}(\lambda) k^{2n},$$

$$w(k, \lambda) = \sum_{n=0}^\infty a_n(\lambda) k^{2n},$$

$$W(k, \lambda) = \sum_{n=0}^\infty A_n(\lambda) k^{2n}$$

в уравнение

$$[1 - w(k, \lambda)] p(k, \lambda) = \frac{1}{v} W(k, \lambda)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях k . Несложные преобразования приводят к рекуррентному соотношению

$$\tilde{m}_{2n}(\lambda) = \frac{(-1)^n (2n)!}{1 - a_0(\lambda)} \left[\frac{1}{v} A_n(\lambda) + \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{(2v)!} a_{n-v}(\lambda) \tilde{m}_{2v}(\lambda) \right],$$

$$\tilde{m}_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

Здесь

$$a_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \tilde{p}_{2n}\left(\frac{\lambda}{v}\right), \quad A_0(\lambda) = \frac{v}{\lambda} \left[1 - p_0\left(\frac{\lambda}{v}\right) \right],$$

$$A_1(\lambda) = \left(\frac{v}{2\lambda}\right) \tilde{p}_2\left(\frac{\lambda}{v}\right) + \left(\frac{v}{\lambda}\right)^2 \tilde{p}_1\left(\frac{\lambda}{v}\right) + \left(\frac{v}{\lambda}\right)^3 \tilde{p}_1\left(\frac{\lambda}{v}\right) - \left(\frac{v}{\lambda}\right)^3$$

и т.д.

Остановимся на втором моменте:

$$\tilde{m}_2(\lambda) = -\frac{2[A_2(\lambda)/v + a_2(\lambda)/\lambda]}{1 - a_0(\lambda)}.$$

Для показательного распределения пробегов ($p(x) = \mu \exp(-\mu x)$)

$$\tilde{m}_2(\lambda) = \frac{2v^2}{\lambda^2(\lambda + \mu v)}.$$

Обратное преобразование Лапласа с применением теоремы о вычетах приводит к выражению

$$m_2(t) = \frac{2}{\mu^2} [\exp(-\mu vt) + \mu vt - 1],$$

точно согласующемуся с решением телеграфного уравнения.

В общем случае обращение $\tilde{m}_2(\lambda) \rightarrow m_2(t)$ элементарными средствами выполнить не удастся, но в асимптотической области ($t \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0$) можно обойтись тауберовыми теоремами [17]. Так, для одностороннего устойчивого распределения пробегов

$$p(x) = c^{-1/\alpha} g(c^{-1/\alpha} x; \alpha, 1), \quad c > 0, \quad \alpha \leq 1,$$

получаем

$$\tilde{m}_2(\lambda) = \frac{2v^2}{\lambda^2} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{c\alpha(\lambda/v)^{\alpha-1}}{\exp\{c(\lambda/v)^\alpha\} - 1} \right] \sim \frac{2(1-\alpha)v^2}{\lambda^3}, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

и соответственно

$$m_2(t) \sim (1-\alpha)(vt)^2, \quad t \rightarrow \infty.$$

Вычисление высших моментов и восстановление по ним распределений выполнено в работах [66, 67, 71–74]. Там же рассмотрено влияние ловушек на эти распределения. Показано, в частности, что при ловушках степенного типа с показателем $\omega < 1$ распределение становится субдиффузионным с коэффициентом диффузии, содержащим скорость v .

6.6. Дробное обобщение телеграфного уравнения

Как отмечалось выше, обычное телеграфное уравнение с образом Фурье–Лапласа

$$[\lambda^2 + \mu v \lambda + v^2 k^2] \tilde{p}(k, \lambda) = \mu v + \lambda$$

точно описывает процесс одномерного блуждания частицы с конечной скоростью v и показательным распределением $p(x) = \mu \exp(-\mu x)$ свободных пробегов. В этом смысле его обобщением на случай произвольного распределения пробегов можно считать выведенное в разделе 6.2 уравнение

$$[1 - w(k, \lambda)] \tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1}{v} W(k, \lambda).$$

Его решение рассматривалось выше, однако непосредственное обращение этого уравнения, т.е. переход от переменных k, λ к x и t , приводит к интегральному уравнению, не сводящемуся к дифференциальному, как это имеет место в случае показательных распределений пробегов

$$p(x, t) = P(x) \delta(x - vt) + \int_{-\infty}^{\infty} p(x') p\left(x - x', t - \frac{x'}{v}\right) dx'.$$

Дробное обобщение дифференциального телеграфного уравнения возникает в случае, когда пробеги распределены по асимптотически степенному закону с тяжелым хвостом $p(x) \propto x^{-\alpha-1}, 0 < \alpha < 1$. Для удобства вычислений возьмем в качестве такой плотности уже использованную в предыдущем разделе одностороннюю устойчивую плотность с показателем α и масштабным множителем $c: \tilde{p}(\lambda) = \exp\{-c\lambda^\alpha\}$.

Используя представление

$$w(k, \lambda) = \frac{1}{2} \left[\tilde{p}\left(\frac{\lambda}{v} - ik\right) + \tilde{p}\left(\frac{\lambda}{v} + ik\right) \right]$$

и асимптотическое разложение

$$\exp(-c\lambda^\alpha) \sim \frac{1}{1 + c\lambda^\alpha + \dots},$$

приходим к уравнению

$$T^{(\alpha, \alpha)}(k, \lambda) \tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1}{v} T^{(\alpha-1, \alpha)}(k, \lambda),$$

где

$$T^{(\alpha, \beta)}(k, \lambda) = \frac{v^2}{c} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\lambda}{v} - ik \right)^\alpha \left[1 + c \left(\frac{\lambda}{v} + ik \right)^\beta \right] \right\}.$$

Задаваемый этим изображением оператор при целых α, β можно считать дробным интегро-дифференциальным оператором, а уравнение

$$T^{(\alpha, \beta)} p(x, t) = \frac{1}{v} T^{(\alpha-1, \alpha)} 1$$

— дробным обобщением телеграфного уравнения. Действительно, при $\alpha \rightarrow 1$

$$T^{(\alpha, \alpha)}(k, \lambda) \rightarrow \lambda^2 + \frac{v}{c} \lambda + v^2 k^2,$$

$$T^{(\alpha-1, \alpha)}(k, \lambda) \rightarrow \left(\lambda + \frac{v}{c} \right) v,$$

и мы приходим к обычному телеграфному уравнению, решение которого, приведенное в разделе 6.4, характеризуется гауссовой асимптотикой при $t \rightarrow \infty$.

Соответствующую асимптотику для дробного уравнения с характеристическим показателем $\alpha = 1/2$ легко получить, если пренебречь слагаемым $c(\lambda/v + ik)^{1/2}$ во втором сомножителе оператора $T^{(\alpha, \beta)}$. Тогда

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (vk)^2}},$$

откуда

$$p(x, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{(vt)^2 - x^2}}.$$

Этот результат подтверждается методом Монте-Карло. Вторым моментом его $m_2(t) = (vt)^2/2$ согласуется с приведенным в конце раздела 6.5 выражением.

Следует заметить, что приведенное здесь обобщение телеграфного уравнения не единственно хотя бы потому, что исходное уравнение описывает совершенно различные физические процессы — электромагнитные волны в проводящей среде и одномерное блуждание частицы. Дробные обобщения этих процессов могут быть различными. С другой стороны, даже в задаче о блужданиях появляются другие формы обобщения телеграфного уравнения (см., например, [12]), хотя интерпретация их и менее очевидна.

6.7. Влияние конечной скорости

Опишем вкратце влияние конечной скорости свободного движения на аномальную кинетику, когда и пробеги, и времена пребывания в ловушках распределены по обратно-степенным законам с показателями α и ω .

Сначала несколько слов о ситуации с бесконечной скоростью. Как отмечалось выше, ширина диффузионного пакета в этом случае растет по закону t^H , где $H = \omega/\alpha$. При $H < 1/2$ имеет место субдиффузия (СД), при $1/2 < H < 1$ — супердиффузия (СПД), при $H > 1$ — режим, который можно назвать *супербаллистическим* (СБР): пакет расплывается в пространстве быстрее, чем в случае свободного движения частиц. В работе [64] этот режим назван "турбулентным" (см. также [75]). Наглядное представление о расположении указанных областей дает рис. 6. На границе зон супердиффузии и субдиффу-

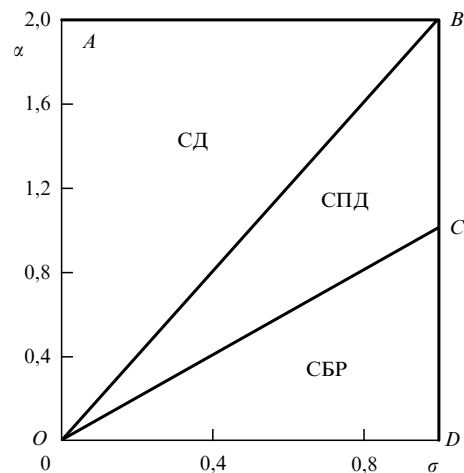


Рис. 6. Строение области аномальной диффузии в модели с бесконечной скоростью свободного движения частицы.

зии, описываемой отрезком прямой $\alpha = 2\omega$, значение показателя H соответствует нормальному диффузионному процессу, однако лишь точка B представляет нормальную диффузию (НД), все остальные точки отрезка OB представляют квазинормальную диффузию, когда закон расплывания пакета — $t^{1/2}$, а форма пакета отличается от нормальной. По этим же соображениям мы используем термин квазибаллистический (КБР) для режима, изображаемого отрезком OC .

Важнейшим отличием процесса с конечной скоростью от рассматриваемого выше является конечность всех моментов распределения $p(x, t)$, поскольку за пределом отрезка $[-vt, vt]$ в момент времени t частица не может быть обнаружена ни в каком случае. В этой ситуации вновь становится эффективным метод моментов. Асимптотический анализ показывает, что

$$m_{2n}(t) \equiv \int_{-vt}^{vt} x^{2n} p(x, t) dx \propto (vt)^{\gamma^{(2n)}},$$

$$\gamma^{(2n)} = \begin{cases} 2n, & \alpha \leq \omega, \\ 2n - \alpha + \omega, & \alpha > \omega. \end{cases}$$

Тип диффузии $H \equiv \gamma^{(2)}/2$ определяется младшим показателем. Видно, что при $\omega < \alpha < \omega + 1$ и любых ω процесс представляет собой супердиффузию, при $\alpha = \omega + 1$ — квазинормальный режим, при $\alpha > \omega + 1$ — субдиффузию. Область супербаллистического режима исчезла, предельным режимом максимальной скорости расширения диффузионного пакета стал квазибаллистический режим (треугольник OCD , рис. 7).

Квазинормальная диффузия ($H = 1/2$) изображается теперь отрезком прямой $\alpha = \omega + 1$ вместо $\alpha = 2\omega$, как это имело место в случае с бесконечной скоростью.

Из сопоставления рис. 6 и рис. 7 видно также, что квазинормальная диффузия с бесконечной скоростью возникает при тех значениях показателей α и ω , которые при конечной скорости приводят к супердиффузии. При $0 < \omega < 1/2$ форма распределения частиц с конечной скоростью движения частицы принципиально отличается от формы распределения с бесконечной скоростью частиц. При $1/2 < \omega < 1$ ситуация иная; распределения в том и другом случае имеют одинаковую форму.

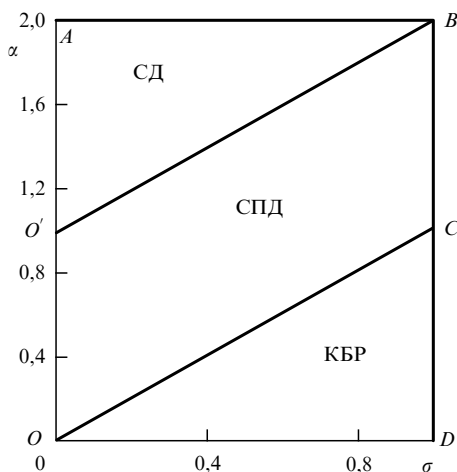


Рис. 7. Строение области аномальной диффузии в модели с конечной скоростью свободного движения частицы.

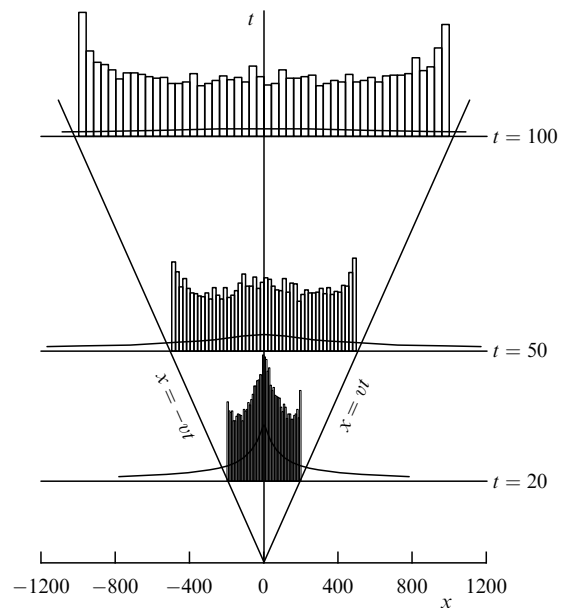


Рис. 8. Распределение $p(x, t)$ в случае одномерной супердиффузии ($\alpha = 1/2$). Гистограммы — расчет методом Монте-Карло для $v = 10$, сплошные кривые — для $v = \infty$ (в обоих случаях имеются ловушки со средним временем удержания, равным 1).

Анализ полученных результатов привел к следующим выводам.

1. В отличие от второго момента, моменты высших порядков оказываются зависящими от размерности пространства. При каждом t существуют, однако, конечные предельные значения моментов проекции радиус-вектора на каждую из координатных осей.

2. Наличие конечной скорости v свободного движения частицы уменьшает число возможных (при $v = \infty$) диффузионных режимов с пяти до четырех с изменением их областей на диаграмме в плоскости параметров (α, ω) .

3. В случае субдиффузии эффект конечной скорости не влияет на форму асимптотического распределения частиц: при больших временах не имеет значения, с какой — конечной или бесконечной — скоростью движутся частицы в промежутках между пребыванием в ловушках. Само распределение описывается дробно-устойчивым распределением.

4. В случае супердиффузии ($\alpha > 1$) конечная скорость замедляет расширение диффузионного пакета частиц, однако это сказывается лишь на значении коэффициента диффузии $D_v = (1 + \mu\alpha/v)^{-1} D_\infty$, форма распределения не меняется.

При $\alpha < 1$ ситуация противоположная: кинематическое ограничение становится доминирующим фактором в формировании асимптотического поведения процесса. Диффузионное распределение, стремящееся расширяться быстрее, чем баллистическая область, в результате оказывается зажатым в коридоре $[-vt, vt]$ и при $t \rightarrow \infty$ почти полностью сосредотачивается у его стенок (рис. 8).

7. Заключение

Заканчивая этот обзор, я приготовился к наиболее вероятному вопросу читателя, не очень хорошо знакомого с устойчивыми законами и процессами: почему же этот богатый и эффективный аппарат так редко исполь-

зается в приложениях, что о нем мало кто знает? На самом деле — не так уж редко. В обзорах, книгах и сборниках [6–12, 35, 39] можно найти множество их разнообразных применений. Тем не менее действительно существуют причины "замедленной диффузии" устойчивых законов в приложениях. На мой взгляд, таких причин три.

Первая причина принципиальная: бесконечность дисперсии (не говоря уже о среднем значении) многими воспринимается как противоречие здравому смыслу, поскольку во многих случаях дисперсии и во всех случаях среднему придается определенное физическое содержание. В действительности это скорее дань традиции, чем требование логики: при измерениях физических величин мы всегда имеем дело с конкретными числами, никаких расходимостей здесь не возникает. Расходимости возникают тогда, когда появляются интегралы — это свойство уже самих физических теорий, основанных на представлении о гиббсовом ансамбле с бесконечным числом копий, или на возможности бесконечно большого числа независимых изменений. Обычный выход из этого положения — найти физическую причину для существования максимального конечного значения изучаемой величины. Урезанное таким значением распределение обладает уже всеми моментами и лежит в области притяжения нормального закона. Такой подход, однако, вовсе не исключает возможность применения других устойчивых законов. Опыт показывает, что если распределение урезается на большом расстоянии и ему предшествует большой участок со степенным распределением, то сумма независимых случайных величин, выбранных из этого распределения, будет некоторое время (по мере увеличения числа слагаемых) вести себя так, как будто урезаний нет совсем, т.е. будет распределена по соответствующему устойчивому закону, и только при дальнейшем увеличении числа слагаемых выйдет на нормальный режим. В работе [76] это явление названо *промежуточной асимптотикой*.

Две другие причины осторожного, скажем так, отношения прикладных специалистов к устойчивым законам весьма банальны: отсутствие явных аналитических выражений для плотностей (впрочем, в наш компьютерный век это уже не причина) и отсутствие достаточной информации об этих законах и процессах. Надеюсь, что данный обзор в какой-то степени уменьшит дефицит информации и будет способствовать более широкому использованию современных средств теории вероятностей в прикладных задачах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00163) и Британского фонда Royal Society (грант gt/fSU/JP).

8. Приложения

8.1. Дробно-устойчивые плотности, выражающиеся через элементарные и специальные функции

$$a) \quad q(x; 2, 1, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right), \quad -\infty < x < \infty;$$

$$b) \quad q\left(x; 2, \frac{2}{3}, 0\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|x|} K_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} |x|^{3/2}\right), \\ -\infty < x < \infty;$$

$$c) \quad q\left(x; \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{3}\right) = \\ = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{\pi}} x^{-1} \exp\left(-\frac{2}{27} x^3\right) W_{1/2, 1/6}\left(\frac{4}{27} x^3\right), & x > 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{3\pi}} |x|^{-1} \exp\left(\frac{2}{27} |x|^3\right) W_{-1/2, 1/6}\left(\frac{4}{27} |x|^3\right), & x < 0; \end{cases}$$

$$d) \quad q\left(x; \frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{3}\right) = \\ = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3\pi}} x^{-1} \exp\left(\frac{2}{27} x^3\right) W_{-1/2, 1/6}\left(\frac{4}{27} x^3\right), & x > 0, \\ \sqrt{\frac{3}{\pi}} |x|^{-1} \exp\left(-\frac{2}{27} |x|^3\right) W_{1/2, 1/6}\left(\frac{4}{27} |x|^3\right), & x < 0; \end{cases}$$

$$e) \quad q(x; 1, 1, 0) = [\pi(1+x^2)]^{-1}, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$f) \quad q\left(x; 1, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi^3}} \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) E_1\left(\frac{x^2}{4}\right), \\ -\infty < x < \infty;$$

$$g) \quad q\left(x; \frac{2}{3}, 1, 1\right) = \\ = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{\pi}} x^{-1} \exp\left(-\frac{2}{27} x^{-2}\right) W_{1/2, 1/6}\left(\frac{4}{27} x^{-2}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$h) \quad q\left(x; \frac{2}{3}, 1, 0\right) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}} |x|^{-1} \exp\left(\frac{2}{27} x^{-2}\right) \times \\ \times W_{-1/2, 1/6}\left(\frac{4}{27} x^{-2}\right), \quad -\infty < x < \infty;$$

$$i) \quad q\left(x; \frac{2}{3}, 1, -1\right) = \\ = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \sqrt{\frac{3}{\pi}} |x|^{-1} \exp\left(-\frac{2}{27} x^{-2}\right) W_{1/2, 1/6}\left(\frac{4}{27} x^{-2}\right), & x < 0; \end{cases}$$

$$j) \quad q\left(x; \frac{1}{2}, 1, 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$k) \quad q\left(x; \frac{1}{2}, 1, -1\right) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |x|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|x|}\right), & x < 0; \end{cases}$$

$$l) \quad q\left(x; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \begin{cases} [\pi\sqrt{x}(1+x)]^{-1}, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$m) \quad q\left(x; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ [\pi\sqrt{|x|}(1+|x|)]^{-1}, & x < 0; \end{cases}$$

$$n) \quad q\left(x; \frac{1}{3}, 1, 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi} x^{-3/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} x^{-1/2}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{о) } q\left(x; \frac{1}{3}, 1, -1\right) &= \\ &= \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{1}{3\pi} |x|^{-3/2} K_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} |x|^{-1/2}\right), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty \exp(-zt)(t^2 - 1)^{\nu-1/2} dt,$$

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{z^{\mu+1/2} \exp(-z/2)}{\Gamma(\mu - \lambda + 1/2)} \times \\ \times \int_0^\infty \exp(-zt) t^{\mu-\lambda-1/2} (1+t)^{\mu+\lambda-1/2} dt,$$

$$\dot{E}_1(z) = \int_z^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt.$$

8.2. Дробные интегро-дифференциальные операторы

Дробные интегралы Римана – Лиувилля ($\alpha > 0$):

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^{1-\alpha}}, \quad (\text{A.1})$$

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^{1-\alpha}}, \quad (\text{A.2})$$

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^{1-\alpha}}. \quad (\text{A.3})$$

Дробные производные Римана – Лиувилля ($0 < \alpha < 1$):

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^\alpha}, \quad (\text{A.4})$$

$$(D_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^\alpha} \equiv \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}, \quad (\text{A.5})$$

$$(D_-^\alpha f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^\alpha}.$$

Дробные производные Маршо ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} (D_+^\alpha f)(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x - \xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x) - f(\xi)}{(x - \xi)^{1+\alpha}} d\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$(D_-^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x + \xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi. \quad (\text{A.7})$$

Потенциал Рисса ($\alpha > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \dots$):

$$\begin{aligned} (I^\alpha f)(x) &= \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} \left((I_+^\alpha f)(x) + (I_-^\alpha f)(x) \right) = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\xi) d\xi}{|x - \xi|^{1-\alpha}}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

где I_+^α и I_-^α даются выражениями (A.1) и (A.3) соответственно.

Производная Рисса ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} D^\alpha f &\equiv (I^\alpha)^{-1} f = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x) - f(x - \xi)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi = \frac{\alpha}{2\Gamma(-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{2f(x) - f(x - \xi) - f(x + \xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi = \\ &= \left[2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^{-1} (D_+^\alpha f + D_-^\alpha f), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

где D_+^α и D_-^α даются выражением (A.6) и (A.7) соответственно.

Потенциал Феллера ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} (M_{u,v}^\alpha f)(x) &= u(I_+^\alpha f)(x) + v(I_-^\alpha f)(x) = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{u + v + (u - v) \operatorname{sign}(x - \xi)}{|x - \xi|^{1-\alpha}} f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

где $u^2 + v^2 \neq 0$. В частности,

$$M_{u,u}^\alpha = 2u \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) I^\alpha,$$

где I^α дается выражением (A.8).

Обратный потенциал Феллера ($0 < \alpha < 1$):

$$\begin{aligned} (M_{u,v}^\alpha)^{-1} f &= \frac{\alpha}{2A\Gamma(1-\alpha)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty \frac{u + v + (u - v) \operatorname{sign}(x - \xi)}{|x - \xi|^{1+\alpha}} [f(x) - f(\xi)] d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{2A\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty [(u + v)f(x) - uf(x - \xi) - \\ &- vf(x + \xi)] \xi^{-1-\alpha} d\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

где

$$A = \left[(u + v) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^2 + \left[(u - v) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^2.$$

В частности,

$$(M_{1,0}^\alpha)^{-1} = D_+^\alpha,$$

$$(M_{0,1}^\alpha)^{-1} = D_-^\alpha,$$

$$(M_{u,u}^\alpha)^{-1} f = \left[2u \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^{-1} D^\alpha f,$$

где D^α дается выражением (A.9).

Многомерное интегродифференцирование Рисса осуществляется операторами

$$(-\Delta_n)^{-\alpha/2} f = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{R^n} \frac{f(\xi) d\xi}{|x - \xi|^{n-\alpha}}, \quad (\text{A.12})$$

где

$$\alpha > 0, \quad \alpha \neq n, n + 2, n + 4, \dots,$$

$$\gamma_n(\alpha) = \frac{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n - \alpha)/2)},$$

и

$$(-\Delta_n)^{\alpha/2} f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} f(x - k\xi) |\xi|^{-n-\alpha} d\xi, \tag{A.13}$$

где

$$\alpha > 0, \quad l = [\alpha] + 1,$$

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{\pi^{1+n/2}}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2) \Gamma((n + \alpha)/2) \sin(\alpha\pi/2)} \times \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} k^\alpha.$$

В частности, если $n = 1$, то

$$\gamma_1(\alpha) = 2\Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$d_{1,1}(\alpha) = -2\Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad \alpha < 1,$$

и операторы (A.12) и (A.13) совпадают с (A.8) и (A.9) соответственно.

Преобразование Фурье

$$\hat{F}_n f \equiv \int_{R^n} \exp(ikx) f(x) dx, \quad \hat{F}_1 \equiv \hat{F}, \tag{A.14}$$

дробных интегралов и производных имеет вид:

$$\hat{F}(I_{\pm}^\alpha f) = |k|^{-\alpha} \exp\left\{\pm i\alpha \frac{\pi}{2} \text{sign } k\right\} \hat{F}f, \quad 0 < \alpha < 1; \tag{A.15}$$

$$\hat{F}(D_{\pm}^\alpha f) = |k|^\alpha \exp\left\{\mp i\alpha \frac{\pi}{2} \text{sign } k\right\} \hat{F}f, \quad \alpha \geq 0; \tag{A.16}$$

$$\hat{F}(M_{u,v}^\alpha f) = \left[(u+v) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i(u-v) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{sign } k \right] |k|^{-\alpha} \hat{F}f, \quad 0 < \alpha < 1; \tag{A.17}$$

$$\hat{F}_n((-\Delta_n)^{\alpha/2} f) = |k|^\alpha \hat{F}_n f. \tag{A.18}$$

В частности,

$$\hat{F}_1((-\Delta_1)^{-\alpha/2} f) \equiv \hat{F}_1(I^\alpha f) = |k|^{-\alpha} \hat{F}_1 f. \tag{A.19}$$

Преобразование Лапласа

$$\hat{L}f \equiv \int_0^\infty \exp(-\lambda x) f(x) dx$$

дробных интегралов и производных дается формулами

$$\hat{L}(I_{0+}^\alpha f) = \lambda^{-\alpha} (\hat{L}f), \tag{A.20}$$

$$\hat{L}(D_{0+}^\alpha f) = \lambda^\alpha (\hat{L}f). \tag{A.21}$$

Список литературы

1. Зайдель А Н *Ошибки измерений физических величин* (Л.: Наука, 1974)
2. Эйнштейн А, Смолуховский М, в сб. *Броуновское движение* (Под ред. Б И Давыдова) (М.-Л.: ОНТИ, 1936)
3. Einstein A *Ann. Phys.* (Leipzig) **17** 549 (1905)
4. Langevin P *CR Acad. Sci.* **146** 530 (1908)
5. von Smoluchowski M *Phys. Z.* **13** 1069 (1912)
6. Bouchaud J P, Georges A *Phys. Rev. A* **41** 1156 (1990)
7. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
8. Shlesinger M F, Zaslavsky G M, Klafter J *Nature* **363** 31 (1993)
9. West B J, Deering W *Phys. Rep.* **246** 1 (1994)
10. Klafter J, Shlesinger M F, Zumofen G *Phys. Today* **49** (2) 33 (1996)
11. Pekalski A, Sznajd-Weron K (Eds) *Anomalous Diffusion: from Basics to Applications* (Lecture Notes in Physics, Vol. 519) (Berlin: Springer, 1999)
12. Metzler R, Klafter J *Phys. Rep.* **339** 1 (2000)
13. Гихман И И, Скороход А В *Теория случайных процессов* Т. 1 (М.: Наука, 1971)
14. *Вероятность и математическая статистика*. Энциклопедия (Под ред. Ю В Прохорова) (М.: Большая Российская энциклопедия, 1999)
15. Леви П *Стохастические процессы и броуновское движение* (М.: Наука, 1972)
16. Прохоров Ю В, Розанов Ю А *Теория вероятностей* (М.: Наука, 1973)
17. Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* Т. 2 (М.: Мир, 1984)
18. Кайзер Дж *Статистическая термодинамика неравновесных процессов* (М.: Мир, 1990)
19. Вентцель А Д *Курс теории случайных процессов* (М.: Наука, 1975)
20. *Математическая физика*. Энциклопедия (Гл. ред. Л Д Фаддеев) (М.: Большая Российская энциклопедия, 1998)
21. Золотарев В М *Одномерные устойчивые распределения* (М.: Наука, 1983)
22. Samorodnitsky G, Taqqu M S *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance* (New York: Chapman & Hall, 1994)
23. Золотарев В М, Учайкин В В, Саенко В В *ЖЭТФ* **115** 1411 (1999)
24. Uchaikin V V *Int. J. Theor. Phys.* **38** 2377 (1999)
25. Самко С Г, Килбас А А, Маричев О И *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Минск: Наука и техника, 1987)
26. Ван Кампен Н Г *Стохастические процессы в физике и химии* (М.: Высшая школа, 1990)
27. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика (Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения)* (М.: Физматлит, 2001)
28. Chechkin A et al. *Chem. Phys.* **284** 233 (2002)
29. Kotulski M *J. Stat. Phys.* **81** 777 (1995)
30. Kolokoltsov V, Korolev V, Uchaikin V V *J. Math. Sci.* **105** 2569 (2001)
31. Uchaikin V V *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2087 (2000)
32. Uchaikin V V *Physica A* **305** 205 (2002)
33. Uchaikin V V "Fractional stable distributions 2", Preprint No. 12/02 (Nottingham: Nottingham Trent Univ., 2002)
34. Uchaikin V V *Chem. Phys.* **284** 507 (2002)
35. Montroll E W, Weiss G H J. *Math. Phys.* **6** 167 (1965)
36. Montroll E W, Schlesinger M F, in *Nonequilibrium Phenomena II: From Stochastic to Hydrodynamics* (Studies in Statistical Mechanics, Vol. 11, Eds J L Lebowitz, E W Montroll) (Amsterdam: North-Holland, 1984) p. 1
37. Кокс Д Р, Смит В Л *Теория восстановления* (М.: Сов. радио, 1967)
38. Saichev A I, Zaslavsky G M *Chaos* **7** 753 (1997)
39. Uchaikin V V, Zolotarev V M *Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications* (Utrecht: VSP, 1999)
40. Zaslavsky G M, in *Applications of Fractional Calculus in Physics* (Ed. R Hilfer) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 203
41. Gorenflo R, Mainardi F *Arch. Mech.* **50** 377 (1998)
42. Metzler R, Nonnenmacher T F *Chem. Phys.* **284** 67 (2002)

43. *Функциональный анализ* (Под ред. С Г Крейна) (М.: Наука, 1972)
44. Учайкин В В *ЖЭТФ* **115** 2113 (1999)
45. Ланда П С *Нелинейные колебания и волны* (М.: Наука. Физматлит, 1997)
46. Иванова В С и др. *Синергетика и фракталы в материаловедении* (М.: Наука, 1994)
47. Nigmatullin R R *Phys. Status Solidi B* **123** 739 (1984)
48. Чукбар К В *ЖЭТФ* **109** 1335 (1996)
49. Rutman R S *ТМФ* **100** 476 (1994)
50. Рутман Р С *ТМФ* **105** 393 (1995)
51. Вольтерра В *Математическая теория борьбы за существование* (М.: Наука, 1976)
52. Вольтерра В *Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1982)
53. Шредер М *Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая* (М.–Ижевск: РХД, 2001)
54. Масленников М В *Аксиоматическая модель явлений переноса частиц* (М.: Наука, 1989)
55. Кейз К, Цвайфель П *Линейная теория переноса* (М.: Мир, 1972)
56. Uchaikin V V, Gusarov G G *J. Math. Phys.* **38** 2453 (1997)
57. Baryshev Yu V et al. *Vistas Astron.* **38** 419 (1994)
58. Barkai E, Fleurov V, Klafter J *Phys. Rev. E* **61** 1164 (2000)
59. Uchaikin V V, in *Emergent Nature: Patterns, Growth and Scaling in the Sciences* (Ed. M M Novak) (Singapore: World Scientific, 2002) p. 411
60. Uchaikin V V, in *Paradigms of Complexity: Fractals and Structures in the Sciences* (Ed. M M Novak) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 41
61. Лифшиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982)
62. Гантмахер В Ф, Фейгельман М В *УФН* **168** 113 (1998)
63. Grinstein G, Mazenko G (Eds) *Directions in Condensed Matter Physics: Memorial Volume in Honor of Prof. S.K. Ma* (World Scientific Ser. on Directions in Condensed Matter Physics, Vol. 1) (Singapore: World Scientific, 1986)
64. Godoy S, Garcia-Colin L S *Physica A* **258** 414 (1998)
65. Учайкин В В *Изв. вузов. Физика* **43** (5) 23 (2000)
66. Учайкин В В, Яровикова И В *Изв. вузов. Физика* **43** (2) 88 (2000)
67. Учайкин В В, Яровикова И В, Саенко В В *Изв. вузов. Физика* **43** (10) 11 (2000)
68. Garcia-Pelayo R *Physica A* **216** 299 (1995)
69. Уилкс С *Математическая статистика* (М.: Наука, 1967)
70. Монин А С *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.* (3) 234 (1955)
71. Яровикова И В *Ученые записки Ульяновского гос. ун-в. Сер. физ.* (2(9)) 12 (2000)
72. Учайкин В В, Саенко В В *ЖТФ* **71** (2) 8 (2001)
73. Uchaikin V V, Saenko V V *J. Phys. Studies* **4** 371 (2000)
74. Uchaikin V V *Physica A* **255** 65 (1998)
75. Забурдаев В Ю, Чукбар К В *ЖЭТФ* **121** 299 (2002)
76. Учайкин В В *Обозрение приклад. и промышленной матем.* **9** 477 (2002)

Anomalous self-similar diffusion and Lévy-stable laws

V.V. Uchaikin

Ulyanovsk State University,
ul. L. Tolstogo 42, 432700 Ulyanovsk, Russian Federation,
Tel. (7-8422) 32-06 12. Fax (7-8422) 41-23 40
E-mail: uchaikin@sv.uven.ru

Stochastic principles of constructing anomalous diffusion processes are considered. Corresponding models of random processes are reviewed. Based on the self-similarity principle and independent increment principle, the extension of the diffusion process concept to the class of Lévy-stable processes is presented. Replacing the independent increment principle by the renewal principle makes it possible to take the next step in extending the concept, thus leading to fractional space-time partial differential equations. For these, fundamental solutions in terms of Lévy-stable laws are given and the relation to fractality and memory properties is discussed. A new class of 'fractional stable distributions' is introduced.

PACS numbers: **02.50**, –r, 05.40.Fb, 05.40.Jc

Bibliography — 76 references

Received 1 October 2002, revised 9 April 2003