

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

Объединенная научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук и Объединенного физического общества Российской Федерации

(26 марта 2003 г.)

26 марта 2003 г. в конференц-зале Физического института им. П.Н. Лебедева РАН состоялась Объединенная научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук и Объединенного физического общества Российской Федерации. На сессии были заслушаны доклады:

1. **Иоффе Л.Б., Фейгельман М.В.** (Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва). *Реализация топологически защищенных квантовых битов в решетке джозефсоновских контактов.*

2. **Саранин А.А., Зотов А.В., Лифшиц В.Г.** (Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток). *Наноструктуры на поверхности кремния.*

3. **Веселаго В.Г.** (Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл.; Институт общей физики РАН им. А.М. Прохорова, Москва). *Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления.*

Краткие содержания докладов 1 и 3 публикуются ниже.

PACS numbers: 03.67.Lx, 03.67.Pp, 74.81.Fa

Реализация топологически защищенных квантовых битов в решетке джозефсоновских контактов

Л.Б. Иоффе, М.В. Фейгельман

1. Введение

В настоящей работе предлагается новый тип джозефсоновской решетки с нетривиальной топологией, которая реализует квантовое основное состояние типа спиновой жидкости с топологическим порядком. Одновременно это состояние является сверхпроводником с зарядом, квантованным в единицах $4e$ вместо обычного заряда пары $2e$. Новое основное состояние обладает вырождением кратности 2^K , где K — число топологически нетривиальных циклов на решетке. Показано, что предлагаемая система обладает свойством "встроенной" коррекции квантовых ошибок: влияние локальных слабых шумов любого типа экспоненциально мало при большом размере решетки. Это позволяет использовать

предложенную систему для создания квантовых битов и их массивов с очень большими временами когерентности.

Квантовое вычисление [1, 2], если бы его удалось реализовать, являлось бы очень мощным методом решения классически невычислимых задач типа факторизации больших чисел на простые множители [3] или поиск в больших базах данных [4]. Открытие квантовых алгоритмов коррекции ошибок [5] показало, что в принципе задача построения работающего квантового компьютера решаемая. Однако фактическое ее решение остается чрезвычайно сложной задачей, поскольку основным элементом квантового компьютера ("квантовым процессором") должна быть квантовая система с огромным числом 2^K (где $K \sim 10^6$) квантовых состояний, которые являются вырожденными (или почти вырожденными) по энергии, несмотря на наличие внешних возмущений, существующих в любой реальной системе. Квантовый алгоритм состоит в задании гамильтониана этой квантовой системы как функции времени, причем относительная погрешность, с которой задаются параметры гамильтониана, должна быть меньше, чем $10^{-4} - 10^{-6}$, для того, чтобы можно было использовать алгоритмы коррекции ошибок. Если бы удалось добиться еще меньшего, на несколько порядков, уровня шумов и погрешностей задания параметров гамильтониана, то можно было бы использовать системы существенно меньшего размера с $K \sim 10^4$ (дело в том, что от уровня шумов очень сильно зависит дополнительное количество элементов процессора, которые необходимо добавлять для обеспечения работы алгоритмов коррекции ошибок) [6]. Иначе говоря, искомая система должна иметь следующее свойство: она должна обладать таким подпространством (мы будем его именовать защищенным) своего гильбертова пространства, что для всякого локального оператора возмущения $\hat{O}$ должно быть выполнено условие $\langle n | \hat{O} | m \rangle = O_0 \delta_{nm} + o(\exp(-L))$, где n, m — это любые из 2^K состояний защищенного подпространства, а L — линейный размер системы, который может быть сделан очень большим. Такая система реализовала бы почти полную коррекцию квантовых ошибок не "алгоритмически", а "физически", в силу определенных свойств множества своих низлежащих состояний.

Перечисленные требования выглядят настолько необходимыми для физической системы, что их реализация кажется на первый взгляд невозможной. Однако недавние достижения теории сильно коррелированных квантовых систем показывают, что в действительности дело обстоит не столь безнадежно, поскольку уже известны примеры систем с отчасти похожими свойствами. Прежде всего здесь следует упомянуть работы Вена с соавторами [7, 8], в которых показано, что состояния дробного квантового эффекта Холла на замкнутой поверхности с нетривиальной топологией обладают свойством экспоненциально слабой чувствительности к локальным возмущениям; так, состояние с фактором заполнения $1/3$ на поверхности тора должно быть трехкратно вырождено. Разумеется, это следует рассматривать как чисто теоретический результат, поскольку изготовить двумерный электронный газ на поверхности тора и вдобавок приложить поперечное к этой поверхности сильное магнитное поле практически невозможно. Однако этот пример показывает, что *в принципе* квантовую систему с подобными свойствами можно вообразить и следует просто искать более практически исполнимую ее версию.

Совершенно другой теоретический подход к той же, в сущности, проблеме, берет свое начало в давней идее Андерсона [9] (см. также [10]) о возможности необычного квантового состояния типа "спиновая жидкость" в треугольной решетке спинов $1/2$ с антиферромагнитным взаимодействием. Хотя недавние крупномасштабные численные расчеты показали, что на такой решетке реализуется все-таки состояние с антиферромагнитным порядком (хотя и сильно подавленным квантовыми флуктуациями), обнаружилось существование похожих моделей, где основное состояние действительно имеет характер спиновой жидкости [11, 12], причем торические граничные условия и в этих спиновых системах приводят к вырождению основного состояния. Эти идеи были использованы Китаевым в ключевой работе [13], где был сформулирован общий подход к построению квантовой системы с топологически защищенным подпространством состояний, а также предложен довольно простой модельный гамильтониан, удовлетворяющий всем необходимым требованиям. Идея подхода Китаева может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти квантовую систему в которой: а) нет никакого обычного (локального) параметра порядка (иначе говоря, на взгляд локального наблюдателя она представляет собой "бесструктурную жидкость"); б) есть щель в энергетическом спектре; в) при топологически нетривиальных граничных условиях возникает вырождение основного состояния.

Наглядной иллюстрацией, дающей представление о том, какая система нас тут интересует, может служить такая картина: представим себе наблюдателя, путешествующего по поверхности типа замкнутой полосы. Могут существовать две простейшие поверхности такого рода: цилиндр и лист Мёбиуса. Ясно, что осматриваясь вокруг себя на расстоянии, малом по сравнению с шириной и длиной полосы, путешественник не может выяснить, на какой из этих двух поверхностей он находится. Чтобы это узнать, ему придется совершить "кругосветное путешествие", т.е. обойти по образующей вдоль всей полосы. На квантовом языке такое путешествие аналогично воздействию *нелокального* оператора,

с помощью которого только и можно различить два "топологически различных" состояния.

Простейший гамильтониан, имеющий все эти свойства, был предложен и решен в работе [13]; его важным свойством является наличие двоичных квантовых переменных — "спинов", ассоциированных с ребрами решетки, на которой определена система. Китаев показал, что в низкоэнергетическом пределе предложенная им система описывается эффективной калибровочной Z_2 теорией на решетке, которая имеет анионы в качестве элементарных возбуждений. Он показал также, что анионный характер возбуждений и наличие зависящего от топологии вырождения основного состояния — связанные между собой свойства. Первая физическая реализация гамильтониана, близкого по своим свойствам к обсуждаемому Китаевым, была предложена в работе [14]. В этой работе было показано, каким образом можно реализовать при помощи сетки джозефсоновских контактов (с относительно большой зарядовой энергией E_C) модель квантовых димеров на треугольной решетке, которая уже рассматривалась ранее в связи с исследованиями в духе подхода Андерсона к спиновой жидкости [12] (укажем здесь для полноты картины на ряд интересных работ по теории спиновых жидкостей, появившихся в последнее время, см. [15–22]). В работе [14] было показано также, что треугольная решетка квантовых димеров действительно обладает (в некотором интервале параметров) всеми свойствами, необходимыми для реализации топологически защищенного кубита — и даже множества таких кубитов.

Однако экспериментальная реализация предложенной в [14] системы представляется довольно сложной для современного уровня технологии создания субмикронных джозефсоновских контактов. В настоящем докладе мы изложим новый подход к решению сформулированной задачи, который представляется более практически реализуемым, а также и более близким к исходной модели Китаева (подробное изложение см. в статьях [23, 24]).

2. Джозефсоновская решетка и эффективный гамильтониан

Основной "строительный элемент" нашей джозефсоновской сетки — ромб из четырех сверхпроводящих островков, соединенных одинаковыми туннельными контактами. Поперечное магнитное поле, приложенное к системе, обеспечивает поток внутри каждого ромба Φ_r , равный $\Phi_0/2$, т.е. половине сверхпроводящего кванта потока. В результате каждый такой ромб в отдельности представляет собой бистабильную квантовую систему. В случае (который мы и будем ниже рассматривать) относительно большой величины джозефсоновской энергии контактов $E_J \gg E_C$, где $E_C = e^2/2C$, а C — емкость туннельных контактов, ромб допускает квазиклассическое описание в терминах циркулирующих по нему сверхпроводящих токов. Два квазиклассических состояния, реализующих минимум джозефсоновской энергии, отличаются знаками разностей фаз на контактах (они могут быть равны $\pm\pi/4$) и, соответственно, направлением тока вокруг ромба. Энергетический потенциальный барьер для перехода между этими двумя состояниями имеет порядок E_J . Роль кинетической энергии играет в данном случае зарядовая энергия E_C , а амплитуда квантового туннельного процесса — перехода между

состояниями с противоположными направлениями токов — имеет порядок $E_J^{3/4} E_C^{1/4} \exp(-S_0)$, где туннельное действие $S_0 \sim (E_J/E_C)^{1/2}$. Для количественного анализа необходимо использовать лагранжиан ромба в виде

$$\mathcal{L}_{\text{rhomb}} = \sum_{(ij)} \frac{1}{16E_C} (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_j)^2 + E_J \cos(\phi_i - \phi_j - a_{ij}), \quad (1)$$

где ϕ_i — фаза сверхпроводящего параметра порядка на i -м острове, а a_{ij} выбраны таким образом, чтобы обеспечить правильное значение Φ_r магнитного потока через ромб; суммирование происходит по $i, j = 1, 2, 3, 4$. Потенциальная энергия ромба как функция разности фаз по его длинной диагонали получается минимизацией джозефсоновской энергии по фазам двух "боковых" островов и равна

$$U(\phi_{ij}) = -2E_J \left(\left| \cos \frac{\phi_{ij}}{2} \right| + \left| \sin \frac{\phi_{ij}}{2} \right| \right). \quad (2)$$

Эта энергия имеет два минимума при $\phi_{ij} = \pm\pi/2$, которые можно использовать для создания элементарного "незащищенного" кубита [25]. В каждом из этих состояний фаза изменяется на $\pm\pi/4$ на каждом контакте в направлении по часовой стрелке вокруг ромба. Мы обозначим эти состояния как $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ соответственно, сопоставляя им проекции фиктивных "спинов" $1/2$, описываемые в базисе матрицы Паули σ^z . Оператор перехода между этими состояниями будет тогда иметь вид $v\sigma^x$. В результате численного решения уравнений квазиклассического приближения получаем для амплитуды туннелирования

$$v \sim E_J^{3/4} E_C^{1/4} \exp(-S_0) \ll E_J, \quad (3)$$

$$S_0 \approx 1,61 \left(\frac{E_J}{E_C} \right)^{1/2}.$$

Следующий этап "конструирования" сетки — сборка из сверхпроводящих ромбов шестиугольной решетки, в которой сторонам являются длинные диагонали ромбов (рис. 1). Мы предполагаем линейные размеры элементов выбранными таким образом, что то же самое магнитное поле обеспечивает магнитный поток $\Phi_{\text{hex}} = (n + 1/2)\Phi_0$ через каждый шестиугольник сетки (здесь n — какое-либо целое число; надо также заметить, что мы везде считаем выполненным условие $\mathcal{L}I_c \ll \Phi_0$, где $\mathcal{L}$ — индуктивность ромба; такое же условие должно быть выполнено и для шестиугольника, сделанного из ромбов). Рассмотрим возможные низкоэнергетические состояния шестиугольника, построенного из ромбов. Полное число таких состояний $2^6 = 64$ соответствует независимому перебору всех возможных двоичных состояний ромбов. Однако не все из этих состояний имеют в самом деле низкую энергию, но лишь те, для которых числа "право-закрученных" и "лево-закрученных" ромбов в шестиугольнике являются четными. В самом деле, полный набег калибровочно-инвариантной разности фаз при обходе вдоль ромба должен быть равен $2\pi m$ для выполнения условия однозначности сверхпроводящей волновой функции. Учитывая, что в состояниях наинизшей энергии каждого ромба разности фаз вдоль длинной

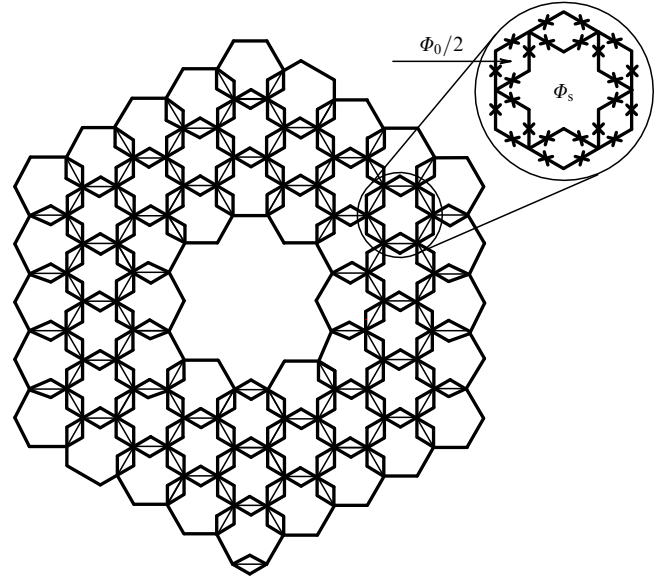


Рис. 1. Пример предлагаемой джозефсоновской решетки. Жирные линии изображают сверхпроводящие проволоки, на каждой проволоке находится один джозефсоновский контакт, как показано на вставке. Сетка находится в магнитном поле, поток которого через каждый ромб и каждый шестиугольник равен полцелому числу сверхпроводящих квантов потока. Тонкие линии изображают "эффективные" связи, из которых построена шестиугольная решетка. Джозефсоновское взаимодействие на этих эффективных связях имеет период π как функция разности фаз. Решетка имеет одно большое отверстие, что соответствует числу "кубитов" $K = 1$.

диагонали ромба равны $\pm\pi/2$, а магнитное поле внутри шестиугольника добавляет еще сдвиг фазы на π , получаем, что допустимые конфигурации должны содержать четные числа (т.е. 0, 2, 4, 6) ромбов с разностью фаз $\pi/2$ (и соответственно, также и с разностью фаз $-\pi/2$). Состояния же, получающиеся из "разрешенных" изменением направления тока в нечетном числе ромбов, с неизбежностью должны содержать ромбы с неоптимальной разностью фаз по диагонали (для компенсации возникающей при обходе вокруг шестиугольника лишней разности фаз π). Это значит, что в таких состояниях вокруг шестиугольника течет ток порядка некоторой доли от I_c , и потому энергия этих состояний выше, чем в "разрешенных" на величину порядка E_J . При рассмотрении низкоэнергетического спектра системы мы можем пренебречь состояниями с такой энергией. Математически это можно выразить введением проекционного оператора шестиугольника $\hat{P} \equiv \prod_a \sigma_a^z$, где произведение взято по всем шести ромбам, и наложением условия $\hat{P}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ на пространстве допустимых квантовых состояний.

Рассмотрим теперь полную эффективную решетку, показанную на рис. 2, и обозначим узлы треугольной решетки, дуальной к решетке наших шестиугольников, латинскими буквами $a, b, c, \dots$. Тогда каждому ромбу сопоставляется пара (a, b) соседних узлов дуальной решетки; правило сопоставления очевидно: ребро (a, b) дуальной решетки пересекает ромб. Гильбертово пространство низколежащих состояний определяется условием

$$\hat{P}_a |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (4)$$

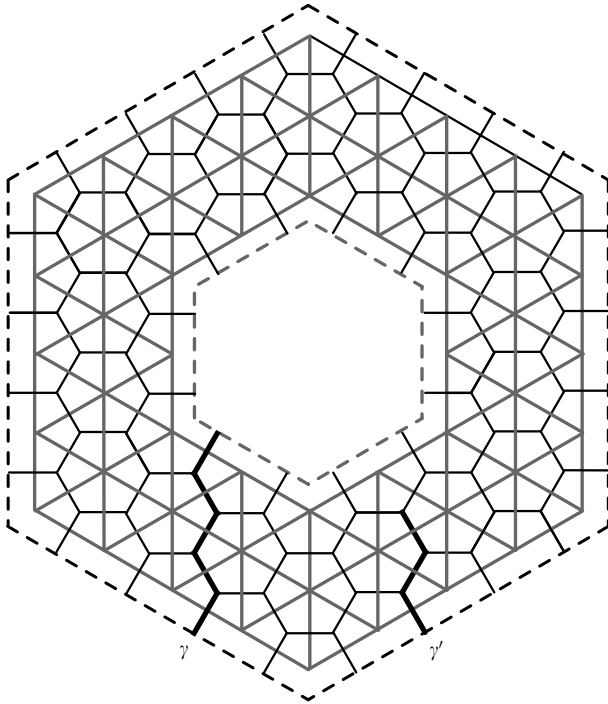


Рис. 2. Расположение эффективных дискретных Z_2 степеней свободы джозефсоновской решетки, изображенной на рис. 1. Спиновые переменные ассоциированы со связями треугольной решетки (показанной жирными линиями), условия связи на допустимые конфигурации определены в узлах этой решетки. Контуры γ и γ' использованы для построения оператора топологического параметра порядка и элементарных возбуждений, соответственно.

для всех узлов a на дуальной решетке. Гамильтониан, действующий на этом пространстве, имеет вид

$$H = -r \sum_{(abc)} Q_{(abc)}, \quad Q_{(abc)} = \sigma_{ab}^x \sigma_{bc}^x \sigma_{ca}^x, \quad (5)$$

а амплитуда r одновременного "переворота" трех ромбов ab, bc, ca , имеющих один общий островок, имеет порядок величины

$$r \approx E_J^{3/4} E_C^{1/4} \exp(-3S_0), \quad (6)$$

где S_0 определено в уравнении (4). "Тройные" процессы, описываемые гамильтонианом (5), являются наименьшими (по порядку теории возмущений) совместимыми с условием (4).

3. Основное состояние, топологическое вырождение и элементарные возбуждения

Гамильтониан (5) вместе с проекционным условием (4) допускает простое точное решение. Это связано с тем, что все индивидуальные проекционные операторы $\hat{P}_a$ коммутируют со всеми операторами $\hat{Q}_{(abc)}$, входящими в гамильтониан. Поэтому точная волновая функция основного состояния может быть построена следующим образом: возьмем состояние $|0\rangle$, которое является собственным для всех операторов ромбов σ_{ab}^x , причем с собственным числом $+1$, и подействуем на это состояние проектором, выделяющим только конфигурации, удовлетворяющие (4):

$$|G\rangle = \prod_a \frac{1 + \hat{P}_a}{\sqrt{2}} |0\rangle. \quad (7)$$

Состояние G и является, как легко проверить, точным основным состоянием. На языке эффективного "спинового" гамильтониана это состояние представляет собой "спиновую жидкость", так как не обладает отличными от нуля средними от операторов спина (немагнитное состояние). В случае топологически тривиальной решетки все остальные состояния отделены от основного состояния G щелью, равной $2r$, как будет показано чуть ниже. Нас же интересует случай решеток с топологически нетривиальными циклами, так как их наличие приводит к точному вырождению основного состояния. В самом деле, рассмотрим операторы

$$\hat{T}_q = \prod_{(ab) \in \gamma_q} \sigma_{ab}^z, \quad (8)$$

где контур γ_q начинается на одной из границ решетки и заканчивается на другой (для решетки с K отверстиями можно определить K независимых операторов типа (8)). Каждый из этих операторов коммутирует с гамильтонианом и условием (4). Физический смысл этих операторов прост: они подсчитывают четность числа ромбов в состоянии $|\uparrow\rangle$, которые пересекаются с контуром γ_q . Определим теперь квантовые состояния

$$|G_f\rangle = \prod_q \frac{1 + c_q \hat{T}_q}{\sqrt{2}} |G\rangle, \quad (9)$$

где $c_q = \pm 1$ — собственное значение оператора $\hat{T}_q$. В каждое из этих состояний входят лишь конфигурации с определенной четностью ромбов в состоянии $|\uparrow\rangle$, которые пересекаются с контуром γ_q , поэтому можно сказать, что эти состояния G_f обладают определенной разностью фаз (0 либо π) между границами решетки. Набор 2^K таких состояний на решетке с K отверстиями и образует 2^K -мерный базис искомого топологически защищенного подпространства.

Элементарные возбуждения могут быть построены аналогичным образом. Выделим островок (abc) и определим состояние $|v_{(abc)}\rangle$ при помощи действия оператора, определенного как $\hat{v}_{(abc)} = \prod_{\gamma' \in (abc)} \sigma_{(df)}^z$, где произведение берется по всем ромбам, пересекающим путь γ' , который начинается на внешней границе решетки, и заканчивается на островке (abc) :

$$|v_{(abc)}\rangle = \prod_q \frac{1 + c_q \hat{T}_q}{\sqrt{2}} \prod_a \frac{1 + \hat{P}_a}{\sqrt{2}} \hat{v}_{(abc)} |0\rangle. \quad (10)$$

Оператор $\hat{v}_{(abc)}$ не коммутирует лишь с одним из операторов $\hat{Q}_{abc}$, именно тем, который расположен на конце контура γ' . Поэтому данное состояние отличается от основного лишь в том отношении, что этот единственный $\hat{Q}$ -оператор имеет собственное значение -1 вместо $+1$, т.е. энергия возбуждения равна $2r$. Важно отметить, что это возбуждение строго локализовано в определенном островке. Физический смысл его очень просто понять, заметив, что основное состояние системы G макроскопически описывает сверхпроводник с элементарным зарядом $4e$ (две куперовские пары) вместо обычного $2e$. Это происходит из-за фрустрации магнитным потоком $\Phi_0/2$ каждого ромба, которая подавляет перенос индивидуальных куперовских пар (аналогичное явление было предсказано в работе [26] для цепочки из таких же ромбов, как у нас). В результате "нечетная"

куперовская пара, попавшая на какой-то из островков, представляет собой локализованное возбуждение над основным состоянием. Возбужденное состояние общего вида строится как набор элементарных возбуждений $|v_{(abc)}\rangle$. Заметим, что создание возбуждения на одной из границ решетки и передвижение его до другой границы эквивалентно действию оператора $\hat{T}_q$; иначе говоря, этот процесс эквивалентен оператору τ_q^z , действующему в 2^K -мерном базисе защищенного подпространства.

Рассмотрим теперь матричные элементы $O_{\alpha\beta} = \langle G_\alpha | \hat{O} | G_\beta \rangle$ локального оператора $\hat{O}$ между двумя состояниями защищенного подпространства. Локальным мы здесь называем оператор, содержащий небольшое (по сравнению с линейными размерами системы) число операторов $\sigma_{ab}^{x,y,z}$. Прежде всего убедимся в том, что для $\alpha \neq \beta$ такие матричные элементы обращаются в нуль. Для этого достаточно заметить, что вследствие вида основных состояний (9) можно при таком вычислении заменить $\hat{O}$ на $\hat{O}' = \mathcal{P}\hat{O}\mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \prod_a (1 + \hat{P}_a)/2$. Теперь нетрудно убедиться, что все операторы, содержащиеся в $\hat{O}'$, коммутируют с операторами $\hat{T}_q$, а потому матричные элементы между состояниями с различными собственными значениями какого-либо из операторов $\hat{T}_q$ обращаются в нуль. Аналогично, вычисляя разность диагональных матричных элементов $\hat{O}$ между состояниями различной четности по какому-либо из контуров γ_q , можно показать, что эта разность обращается в нуль. Таким образом, рассмотренный гамильтониан описывает систему, которая может играть роль идеальной квантовой памяти. В действительности рассмотренная нами здесь "редуцированная" модель (4), (5) очень похожа на исходную модель Китаева [13] и отличается от нее другой геометрией решетки и заменой одной из частей гамильтониана на проекционное условие (4), что эквивалентно пренебрежению одним из двух типов элементарных возбуждений (см. ниже). В реальной физической системе из джозефсоновских контактов имеются, конечно, процессы, не учтенные в идеализированной модели (4), (5). Ниже мы рассмотрим влияние таких процессов, считая их малыми возмущениями, и покажем, что их влияние сводится к появлению экспоненциально малых по размеру решетки отличий матричных элементов $O_{\alpha\beta}$ от $\text{const} \times \delta_{\alpha\beta}$.

4. Влияние физических возмущений, полувихри и фазовая диаграмма

Рассмотрим теперь поправки к идеальной модели (4), (5). Статические поправки происходят, прежде всего, из двух источников: отличие потоков через ромбы Φ_r и через шестиугольники Φ_{hex} от их номинальных полуцелых значений и различия величин критических токов через разные джозефсоновские контакты. Считая все эти поправки относительно малыми (что вполне реалистично для современной технологии создания джозефсоновских сеток), можно получить гамильтониан возмущения в виде

$$\delta H_1 = \sum_{(ab)} V_{ab} \sigma_{ab}^z + \sum_{(ab), (cd)} V_{(ab), (cd)} \sigma_{ab}^z \sigma_{cd}^z, \quad (11)$$

где первая сумма описывает эффект отличия Φ_r от $\Phi_0/2$, т.е. $V_{ab} = \epsilon = \pi\sqrt{2} E_J (\Phi_r/\Phi_0 - 1/2)$, а коэффициенты $V_{(ab), (cd)}$ во второй сумме содержат вклады, пропорциональные пространственным флуктуациям E_J и неточности задания величин Φ_{hex} . В первом члене суммирование

происходит по всем соседям $b(a)$ заданного узла (a) дуальной (т.е. треугольной) решетки, а затем и по всем ее узлам (a); таким образом, это независимое суммирование по всем ромбам. Во втором члене (11) суммирование идет по всем парам ромбов, принадлежащим одному и тому же шестиугольнику, а затем по всем шестиугольникам. Величины $V_{(ab), (cd)}$ имеют второй порядок малости по $\delta E_J/E_J$ и $\delta \Phi_{\text{hex}}/\Phi_0$ и потому, как правило, малы по сравнению с V_{ab} . Учет первого члена в (11) по теории возмущений приводит к модификации волновых функций основного состояния:

$$|\tilde{G}_\pm\rangle = |G_\pm\rangle + \frac{\epsilon}{4r} \sum_{(ab)} \sigma_{(ab)}^z |G_\pm\rangle. \quad (12)$$

Эта теория возмущений применима, пока $\epsilon \ll r$. Легко убедиться в том, что матричные элементы локальных операторов, вычисленные по модифицированным волновым функциям (12), по-прежнему пропорциональны $\delta_{\alpha\beta}$. Нетривиальные матричные элементы возникают лишь в L -м порядке теории возмущений, когда в подправленной волновой функции возникают члены, содержащие L операторов σ^z . Физически это соответствует учету процессов туннелирования возбуждений (одиночных куперовских пар) через всю решетку — от внешней ее границы к внутренней или наоборот. Как уже было упомянуто выше, такие процессы отвечают оператору τ_q^z в базисе состояний с определенными собственными значениями операторов $\hat{T}_q$. В частности, они приводят к экспоненциально малому расщеплению энергий, $E_+ - E_- \sim O_+ - O_- \sim (\epsilon/2r)^L$.

Рассмотрим теперь процессы, приводящие к переходам между состояниями определенной четности, типа $|G_+\rangle \rightarrow |G_-\rangle$. До сих пор в нашем рассмотрении амплитуды таких процессов были точно равны нулю, и связано это было с наложенным в самом начале запретом на конфигурации "неправильной четности", нарушающие условие (4). Фактически нарушение этого запрета возможно, но оно ведет за собой "штраф" в виде большой энергии возникающего при этом возбужденного состояния. Это состояние аналогично по своему характеру обычному сверхпроводящему вихрю, с той разницей, что набег фазы вокруг центра этого вихря равен π , а не 2π , как обычно. Дело в том, что в нашей системе энергия отдельного "ребра" шестиугольной решетки имеет периодичность π (см. (2)). Энергия такого вихря на шестиугольной решетке равна

$$E_v(R) = \frac{\pi E_J}{4\sqrt{6}} (\ln R + c), \quad c \approx 1,2, \quad (13)$$

и содержит логарифмическую зависимость от размера решетки R . Рассмотрим решетку с одним отверстием, как на рис. 1. Изменение значения топологического инварианта $\hat{T}_q$ может произойти при следующем процессе: вблизи внутренней границы рождаются два полувихря разных знаков, один из которых туннелирует вокруг всего отверстия и затем аннигилирует с первым. Амплитуда такого процесса возникает в порядке $\Lambda \gg 1$ теории возмущений по параметру $v/E_v(L)$, где v — амплитуда переворота отдельного ромба, определенная в (4), а Λ — периметр отверстия. В конечном счете, описанные процессы приводят к появлению в эффективном гамильтониане, действующем в защищенном подпространстве, членов вида $h_x \tau^x$, где $h_x \sim [v/E_v(L)]^A$.

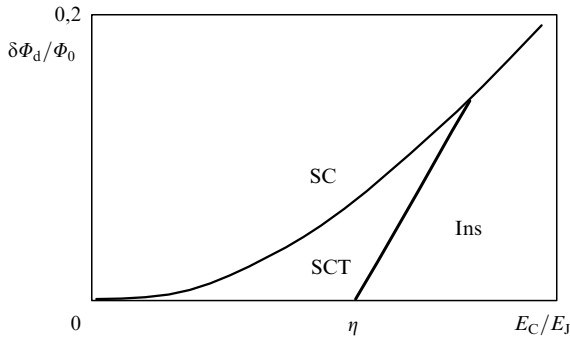


Рис. 3. Схематическая фазовая диаграмма для случая полуцелого Φ_{hex} при низких температурах. Здесь $\delta\Phi_d$ — отклонение магнитного потока через каждый ромб от его идеального значения $\Phi_0/2$, а параметр $\eta \sim 1$. SC обозначает обычную сверхпроводящую фазу, SCT — фазу с дальним порядком по переменной $\cos 2\phi$ в непрерывных переменных и с дискретным топологическим порядком. Фазы SCT и SC разделены линией фазового перехода, эквивалентного квантовому переходу в двумерной модели Изинга в поперечном поле. Ins — диэлектрическая фаза

Вся описанная выше картина подразумевала, что выполнено условие $E_C \ll E_J$, т.е. квантовые эффекты численно малы. При увеличении E_C в конечном счете (при $E_C \geq E_J$) должен происходить фазовый переход в диэлектрическое состояние (см., например, обзор [27]). С другой стороны, при отклонении значения потока Φ_r от $\Phi_0/2$ найденное нами необычное состояние со спариванием куперовских пар должно перейти в обычное сверхпроводящее состояние с квантом заряда $2e$. Этот переход, как можно показать, имеет характер фазового перехода II рода, эквивалентного переходу порядок — беспорядок в двумерной квантовой модели Изинга, и происходит он при $\epsilon \sim r$. Фазовая диаграмма нашей модели схематически показана на рис. 3. При этом подразумевается, что квантовый фазовый переход из найденной нами фазы "сверхпроводник с топологическим порядком" происходит сразу в фазу обычного диэлектрика. Вообще говоря, возможно и существование различных диэлектрических фаз, с топологическим порядком и без него. Здесь мы не будем останавливаться на этом вопросе, он был рассмотрен в работе [24].

Обратимся, наконец, к вопросу об обменной статистике возбуждений в исследуемой фазе "сверхпроводник с топологическим порядком". Как мы видели, имеется два различных типа элементарных возбуждений: локализованные одиночные куперовские пары (несущие электрический заряд $q_e = 2e$) и полувихри (несущие магнитный поток $\Phi_v = \Phi_0/2 = hc/4e$). Рассмотрим процесс, при котором полувихрь адиабатически обходит по замкнутому контуру вокруг куперовской пары. При этом все координаты системы возвращаются к исходным значениям, но ее полная волновая функция, ввиду эффекта Ааронова — Бома, умножается на фазовый множитель $\exp(iq_e\Phi_v/\hbar c) = -1$. Таким образом, в исследуемом состоянии реализуется простейшая версия анионной статистики элементарных возбуждений [28].

5. Квантовые манипуляции

Рассмотрим теперь простейшие квантовые операции, которые можно производить над состояниями защищенного подпространства. Прежде всего напомним, что

собственные значения оператора $\hat{T}_q$, равные ± 1 , имеют простой физический смысл: они соответствуют разностям фаз 0 либо π соответственно между внутренней и внешней границами системы, показанной на рис. 1. Это обстоятельство позволяет реализовать оператор вращения $U_q^z = \exp(i\epsilon_J t \tau_q^z)$ при помощи замыкания внешней и внутренней (соответствующей индексу q) границ сетки через слабый джозефсоновский контакт с энергией ϵ_J в течение времени t . Совершенно аналогичным образом можно реализовать двухкубитный оператор $U_{q,p}^z = \exp(i\epsilon_J^{qp} t \tau_q^z \tau_p^z)$, соединяя через джозефсоновский контакт две внутренние границы соответствующие q -му и p -му кубитам.

Описанные выше операции зависят от непрерывного параметра и потому могут быть выполнены лишь с конечной точностью. В нашей системе может быть реализован также ряд дискретных квантовых операторов, точность задания которых существенно выше. К ним относятся, например, операторы τ_q^z и τ_q^x , а также и квадратные корни из них: $\sqrt{\tau^z} = (1 + i\tau^z)/\sqrt{2i}$ и $\sqrt{\tau^x} = (1 + i\tau^x)/\sqrt{2i}$; подробнее о реализации этих операторов написано в статье [23]. К сожалению, дискретные операции, которые можно осуществить в нашей системе, не составляют полного набора необходимых для универсального квантового вычисления операторов. Это вполне закономерно: как показано в [13], полный набор точных квантовых операторов можно реализовать лишь в системе, обладающей неабелевым топологическим порядком, иначе говоря, в такой системе, где возбуждения являются неабелевыми анионами. В нашей же решетке реализуются простейшие абелевы анионы, как уже было объяснено выше. Таким образом, предложенная нами решетка может рассматриваться как модель идеальной квантовой памяти, но еще не идеального квантового компьютера. Теория решеточных систем с неабелевой калибровочной группой и топологическим порядком, построенных на основе джозефсоновской решетки, предложена недавно в работе [29].

6. Заключение

В настоящем докладе, представляющем собой развитие идей работы [14], предлагается новый тип джозефсоновской решетки, которая может играть роль системы "идеальной" квантовой памяти. По сравнению с первоначальной версией, изложенной в [14], новая система имеет ряд важных преимуществ: а) используется область параметров $E_J \gg E_C$, что ослабляет значение плохо контролируемых электрических шумов, возникающих из-за блуждающих в диэлектрической подложке зарядов; б) в нашей нынешней решетке используются джозефсоновские контакты только одного типа, что сильно упрощает изготовление такой решетки; в) в идеальном случае новая система обладает точным 2^K -кратным вырождением, в то время как в версии работы [14] вырождение достигалось асимптотически с размером системы, с точностью $\exp(-cL)$, где $c \sim 1$; аналогичная константа для новой системы при учете малых возмущений оказывается порядка $\ln(r/\epsilon) \gg 1$, т.е. для достижения необходимой точности достаточно меньших размеров сетки.

При работе над изложенной здесь идеей для нас были весьма полезны многочисленные обсуждения с Дж. Блаттером (G. Blatter), Д.А. Ивановым, А.С. Иоселевичем, С.Е. Коршуновым, А.И. Ларкиным, А. Мил-

лисом (А. Millis), Б. Паннетье (В. Pannetier) и Э. Сера (Е. Serret).

Список литературы

1. Steane A *Rep. Prog. Phys.* **61** 117 (1998)
2. Ekert A, Jozsa R *Rev. Mod. Phys.* **68** 733 (1996)
3. Shor P W, in *Proc. of the 35th Annual IEEE Symp. on the Foundations of Computer Science* (Eds S Goldwasser) (Los Alamitos, CA: IEEE Computer Soc. Press, 1994) p. 124
4. Grover L K, in *Proc. of the 28th Annual ACM Symp. on the Theory of Computing: STOC, May 1996* (New York: ACM Press, 1996) p. 212
5. Shor P W *Phys. Rev. A* **52** R2493 (1995)
6. Preskill J *Proc. R. Soc. London Ser. A* **454** 385 (1998)
7. Wen X G, Niu Q *Phys. Rev. B* **41** 9377 (1990)
8. Wen X G *Phys. Rev. B* **44** 2664 (1991)
9. Anderson P W *Mater. Res. Bull.* **8** 153 (1973); Fazekas P, Anderson P W *Philos. Mag.* **30** 23 (1974)
10. Anderson P W *Science* **235** 1196 (1987); Read N, Chakraborty B *Phys. Rev. B* **40** 7133 (1989); Read N, Sachdev S *Phys. Rev. Lett.* **66** 1773 (1991); Kivelson S *Phys. Rev. B* **39** 259 (1989)
11. Misguich G et al. *Phys. Rev. B* **60** 1064 (1999)
12. Moessner R, Sondhi S L *Phys. Rev. Lett.* **86** 1881 (2001)
13. Kitaev A Yu *Ann. Phys. (New York)* **303** 2 (2003); quant-ph/9707021
14. Ioffe L B et al. *Nature* **415** 503 (2002)
15. Senthil T, Fisher M P A *Phys. Rev. Lett.* **86** 292 (2001)
16. Senthil T, Fisher M P A *Phys. Rev. B* **63** 134521 (2001)
17. Balents L, Fisher M P A, Girvin S M, cond-mat/0110005
18. Paramakanti A, Balents L, Fisher M P A, cond-mat/0203171
19. Misguich G, Serban D, Pasquier V *Phys. Rev. Lett.* **89** 137202 (2002); cond-mat/0204428
20. Motrunich O I, Senthil T, cond-mat/0205170
21. Fendley P, Moessner R, Sondhi S L *Phys. Rev. B* **66** 214513 (2002); cond-mat/0206159
22. Ioselevich A, Ivanov D A, Feigelman M V *Phys. Rev. B* **66** 174405 (2002)
23. Ioffe L B, Feigel'man M V *Phys. Rev. B* **66** 224503 (2002)
24. Douçot B, Feigel'man M V, Ioffe L B *Phys. Rev. Lett.* **90** 107003 (2003)
25. Blatter G, Geshkenbein V B, Ioffe L B *Phys. Rev. B* **63** 174511 (2001)
26. Douçot B, Vidal J *Phys. Rev. Lett.* **88** 227005 (2002)
27. Fazio R, van der Zant H *Phys. Rep.* **355** 235 (2001)
28. Fradkin E *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Redwood City, CA: Addison-Wesley Publ. Co., 1991)
29. Douçot B, Ioffe L B, Vidal J, cond-mat/0302104

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.15. -i, 42.70. -a

Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления

В.Г. Веселаго

В последние несколько лет стал бурно развиваться новый раздел электродинамики — электродинамика материалов с отрицательным преломлением. Первые эксперименты в этой области [1, 2] были сделаны группой физиков из университета Сан-Диего (США). В этих работах были продемонстрированы необычные электродинамические свойства некоторых композитных материалов. Эти свойства чисто формально могут быть объяснены, если принять, что данные материалы обладают отрицательным коэффициентом преломления n . Сами по себе эти материалы представляют собой совокупность небольших металлических элементов, которые расположены в пространстве в строгом геометрическом

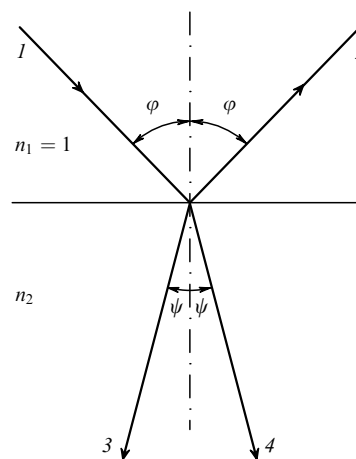


Рис. 1. Преломление света на границе двух сред. Путь 1–4 соответствует ходу падающего и преломленного лучей для случая $n_2 > 0$, а путь 1–3 — для случая $n_2 < 0$.

порядке и образуют структуру, напоминающую своего рода кристалл. Такого рода структуру можно рассматривать как сплошную для длин волн, заметно превосходящих размер составляющих ее элементов и расстояние между ними. Эксперименты, проведенные авторами указанных работ, были сделаны в сантиметровом диапазоне длин волн, а сами элементы исследованных композитов и расстояние между ними имели характерный размер порядка 7–10 мкм.

Ключевым экспериментальным результатом явилась демонстрация для таких материалов довольно необычной реализации закона преломления Снеллиуса. На рисунке 1 изображен переход луча света через плоскую границу раздела двух сред с коэффициентами преломления n_1 и n_2 , соответственно. Если, без нарушения общности, положить $n_1 = 1$, то привычный ход луча при преломлении соответствует пути 1–4. В экспериментах, проведенных в Сан-Диего, луч шел по пути 1–3. Такой путь преломленного луча будет удовлетворять закону Снеллиуса, если положить, что $n_2 < 0$. При этом сам закон Снеллиуса

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (1)$$

не испытывает изменений.

Для материалов с $n < 0$ характерна необычная реализация не только закона Снеллиуса, но и ряда других явлений электродинамики и оптики, в частности эффектов Доплера и Черенкова, формул Френеля, принципа Ферма. Основы электродинамики материалов с отрицательным коэффициентом преломления достаточно полно изложены, в частности, в работах [3–6]. В этих работах было показано, что вещества с отрицательным коэффициентом преломления характеризуются также отрицательными значениями диэлектрической проницаемости ϵ и магнитной проницаемости μ . Существенно, что все эти утверждения относятся к изотропным материалам, для которых величины n , ϵ и μ — скаляры.

Отрицательное значение n соответствует также тому факту, что в таких материалах направление волнового вектора $\mathbf{k}$ и вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ антипараллельны или, что то же самое, антипараллельны направления фазовой и групповой скоростей.