

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Корреляционные и перколяционные свойства турбулентной диффузии

О.Г. Бакунин

В основе всех моделей турбулентной диффузии лежат представления о характере поведения корреляционных функций. В работе представлен последовательный анализ этих корреляционных идей, начиная с работы Тейлора 1921 г., в которой впервые была использована автокорреляционная функция, и заканчивая работами по перколяционной теории турбулентной диффузии. Подчеркивается общность используемых теоретических представлений, несмотря на значительное различие конкретных физических задач. Показано, как идеи "длинных" корреляций и фрактальности входят в перколяционный метод. Подробно обсуждается "универсальность" перколяционного подхода к задачам описания турбулентной диффузии.

PACS numbers: 05.40.-a, 47.27.Qb, 47.53.+n

Содержание

1. Введение (757).
2. Результаты Тейлора и Ричардсона (757).
3. Уравнение Монина (758).
4. Формула Хаузлса и число Пекле (759).
5. Предположение Корринга (760).
6. Квазилинейное приближение (760).
7. Корреляционная модель Тейлора – Макнамары (761).
8. Модель супердиффузии Дрейзина – Дыхне (762).
9. Гидродинамическое приближение Кадомцева – Погуце (763).
10. Континуальная перколяция и диффузия (764).
11. Перколяция в стационарном случае (765).
12. Перколяция в нестационарном случае (766).
13. Заключение (767).

Список литературы (767).

1. Введение

Цель настоящей статьи — обсудить некоторые теоретические идеи, сыгравшие важную роль в понимании процессов турбулентной диффузии. Эта научная проблема имеет восьмидесятилетнюю историю. Ей посвящено колоссальное количество работ, но она все еще далека от полного разрешения. Турбулентность — одно из фундаментальных явлений, широко распространенных в природе. Она проявляется в самых разнообразных формах в зависимости от того, изучается турбулент-

ность жидкости, атмосферы или плазмы. Большое разнообразие плазменных неустойчивостей приводит к развитию различных типов плазменной турбулентности: ленгмюровской, ионно-звуковой, дрейфовой и др. Разнообразие форм требует не только новых специальных методов описания, но и анализа общих для разных типов турбулентности механизмов поведения. Сейчас прошло ровно 40 лет после создания Веденовым, Велиховым, Сагдеевым и Драммондом, Пайнсом квазилинейной теории для слаботурбулентной плазмы [1, 2]. Мы видим, что десятилетия, посвященные развитию квазилинейных идей, оказались в середине исторического отрезка, отсчитываемого от пионерской работы Тейлора [3]. Видно, какое важное значение имел анализ корреляционных эффектов и связь коэффициента диффузии с автокорреляционной функцией. Поэтому представляется интересным проследить связь работы Тейлора, который ввел автокорреляционную функцию, с работами по перколяционной диффузии [4–6], в основе которых лежат идеи "длинных корреляций", заимствованные из теории фазовых переходов. Рассмотренные в статье работы выбирались именно с целью показать, что эта связь имеет большое значение для понимания всей проблемы турбулентной диффузии в целом. В силу краткости изложения многие вопросы будут опущены. Однако как в монографической литературе [7–16, 73, 74], так и в УФН имеются прекрасные обзоры [17–21, 72], освещдающие разные стороны рассматриваемой проблемы.

2. Результаты Тейлора и Ричардсона

В 1921 г. Тэйлор опубликовал работу [3], в которой предложил формулу, устанавливающую прямую связь между коэффициентом диффузии и автокорреляционной функцией скорости. Фактически был предложен принципиально новый "инструмент" анализа процессов диффу-

О.Г. Бакунин. Российский научный центр "Курчатовский институт",
Институт ядерного синтеза,
123182 Москва, пл. Курчатова 1, Российская Федерация
Тел. (095) 492-42-65
E-mail: bakunin@rijnh.nl; bakunin@nfi.kiae.ru

Статья поступила 24 октября 2002 г.,
после доработки 4 марта 2003 г.

зии. Следуя духу работ Ланжевена и Эйнштейна, Тейлор записал стохастическое уравнение движения пробной лагранжевой частицы в случайному поле:

$$x(t) = \int_0^t v(a, \tau) d\tau, \quad (1)$$

где x — координата точки, $v(a, t)$ — случайная функция лагранжевой скорости, a — начальная координата лагранжевой частицы. Целью его вычислений был средний квадрат случайногом смещения частицы:

$$\langle x^2 \rangle = \left\langle \int_0^t v(a, t_1) dt_1 \int_0^t v(a, t_2) dt_2 \right\rangle. \quad (2)$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ означают осреднение по ансамблю лагранжевых траекторий. Мы опускаем здесь выкладки, которые приведены подробно в научной и учебной литературе [7, 10, 11]. Представим окончательный результат вычислений в форме

$$\langle x^2 \rangle = 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} C(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $C(\tau)$ — корреляционная функция Лагранжа:

$$C(\tau) = \langle v(a, t) v(a, t + \tau) \rangle. \quad (4)$$

Несколько иной вид этой формулы был позднее предложен в работе Кампе де Ферье [7]:

$$\langle x^2 \rangle = 2 \int_0^t (t - \tau) C(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Оценки коэффициента турбулентной диффузии в подходе Тейлора приводят к выражению

$$D_T(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \int_0^t C(\tau) d\tau. \quad (6)$$

С позиций современной теории неравновесных систем в этой формуле уже "просматривается" канонический результат Кубо–Грина [22] для коэффициента турбулентной диффузии:

$$D \propto \int_0^\infty C(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Конкретный вид выражения для коэффициента турбулентной диффузии $D_T(t)$ зависит от вида корреляционной функции $C(t)$. Наиболее часто употребляется экспоненциальная корреляционная функция

$$C(t) = V_0^2 \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right),$$

где V_0 — характерная скорость и τ — характерное корреляционное время. Имеются два других важных асимптотических случая.

В первом случае, когда $t \gg \tau$, можем после несложных преобразований в (5) получить

$$\langle x^2 \rangle = 2V_0^2 t \tau - 2 \int_0^\infty \tau C(\tau) d\tau \approx (2V_0^2 \tau) t.$$

Такое представление совпадает с известным законом Эйнштейна для среднеквадратичного смещения $R^2 \propto t$.

Для случая $t \rightarrow 0$ можно записать простейшую аппроксимацию корреляционной функции вида

$$C(t) \approx V_0^2 \left(1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Тогда после подстановки этого выражения в (5) мы получим закон баллистического движения $R \propto t$ в форме $\langle x^2 \rangle = 2V_0^2 t^2$.

Теория вычисления автокорреляционных функций интенсивно развивалась в течение последних восьмидесяти лет [6, 7, 10, 11] в связи со все возрастающей потребностью анализа временных рядов. Поэтому мы ограничимся только некоторыми оценками, важными для дальнейшего изложения. Заметим, что из формул (6) и (7) следует размерная оценка для коэффициента диффузии D_T , отличная от "броуновской" D_0 :

$$D_T \approx V_0^2 \tau, \quad D_0 \approx \frac{\tau^2}{\tau}. \quad (8)$$

Еще одним важным соотношением, которое будет использовано в дальнейшем, является выражение

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle \right|_{t=\tau} = 2C(\tau). \quad (9)$$

Уже из общих соображений ясно, что корреляционная функция является более "гибким" инструментом исследования, чем постоянный коэффициент диффузии. Задача, сформулированная Тейлором [3], оказалась особенно актуальной в связи с исследованиями турбулентной диффузии, выполненным Ричардсоном в 1926 г. [23]. Им было обнаружено существенное отличие законов атмосферной диффузии ("относительной" диффузии двух первоначально близких частиц) от классического:

$$R^2 \propto t^3 \gg t, \quad \text{или} \quad D \approx \frac{R^2}{t} \propto R^{4/3}. \quad (10)$$

Работы Тейлора и Ричардсона, безусловно, открыли принципиально новое направление исследований и оказали огромное влияние на все дальнейшее развитие теории процессов переноса.

3. Уравнение Монина

В теории турбулентной диффузии существенно изменились представления не только о коэффициенте диффузии, но и о форме уравнения диффузии. Важной работой в этой области исследований стала статья Монина [24]. Он использовал функционал Эйнштейна – Смолуховского [7, 14] для плотности диффундирующих частиц

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} [K(x', x) n(x', t) - K(x, x') n(x, t)] dx'. \quad (11)$$

Здесь $K(x, x') dx'$ есть вероятность перехода частицы, находящейся в момент времени t в положении x , в интервал $x' + dx'$ за время dt . Положим

$$G(x', x) = K(x', x) - \delta(x - x') \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x') dx'. \quad (12)$$

Здесь δ — символ функции Дирака. Тогда в случае однородной и изотропной среды получим $G(x' - x) = G(|x - x'|)$. В рассматриваемом нами простейшем

случае функционал (11) имеет вид

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x') n(x', t) dx'. \quad (13)$$

Здесь удобно использовать фурье-представление для $n(x, t)$ по переменной x . Тогда после формальных вычислений придем к выражению

$$\frac{\partial \tilde{n}_k(t)}{\partial t} = \tilde{G}(k) \tilde{n}_k(k, t). \quad (14)$$

Здесь \sim — символ фурье-преобразования. Это выражение указывает на отсутствие эффектов памяти для фурье-гармоник. Классическому уравнению диффузии здесь соответствует выражение

$$\tilde{G}(k) \tilde{n}_k(t) = -Dk^2 \tilde{n}_k(t). \quad (15)$$

Нужно отметить, что такой подход развивали Леви и Хинчин [25]. Они использовали аппроксимацию для $\tilde{G}(k)$ в уравнениях (14), (15), имеющую вид

$$\frac{\partial \tilde{n}_k(t)}{\partial t} = -k^\alpha \tilde{n}_k(k, t), \quad 0 < \alpha \leq 2. \quad (16)$$

Легко заметить, что для $\alpha = 2$ мы получим случай Гаусса (обычное уравнение диффузии). В случае $\alpha = 1$ мы получаем распределение Коши, а для $\alpha = 3/2$ — распределение Хольцмарка [26]. В этой связи важно отметить, что все плотности вероятностей с $\alpha < 2$ имеют степенные "хвосты".

Работа Монина [24] в этом направлении предвосхила современное развитие идей по использованию дополнительных дробных частных производных в диффузионных уравнениях. Монин опирался на идеи Колмогорова об универсальных свойствах развитой изотропной турбулентности [7]. В такой постановке все статистические характеристики определяются только пространственным масштабом $l_k \approx 1/k$ и средней скоростью диссипации энергии в турбулентном потоке $\varepsilon = [L^2/T^3]$. Монин получил из соображений размерности выражение для "ядра" нелокального функционала, описывающего турбулентную диффузию (13), (14):

$$\tilde{G}(k) \propto \tilde{G}(\varepsilon, k) = \varepsilon^{1/3} k^{2/3}. \quad (17)$$

Фактически такое представление удовлетворяет результатам Ричардсона 1926 г. [23]: если считать, что

$$\tilde{G}(k) = -D(k) k^2,$$

то

$$D(k) \approx \frac{R^2}{t} \propto R^{4/3} \propto k^{-4/3}. \quad (18)$$

Кроме того, по современной терминологии [28], уравнение

$$\frac{\partial \tilde{n}_k(t)}{\partial t} = -k^{2/3} \tilde{n}_k(t) \quad (19)$$

есть уравнение с дробной производной по x :

$$\frac{\partial^\alpha n}{\partial x^\alpha} \propto \frac{n}{(\Delta x)^\alpha},$$

где $\alpha = 2/3$ (см. формулу (16)). Такая плотность вероятности из физических соображений была получена впер-

вые. Однако Монин не удовлетворился "символической" формой уравнения. Оставалась возможность преобразовать уравнение к общепринятой форме. Дело в том, что Давыдов [27] ранее предлагал использовать телеграфное уравнение (которое включает "эффекты памяти" [7]) для описания турбулентной диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (20)$$

Здесь τ — характерное корреляционное время. Это уравнение гиперболического типа, что открывает дополнительные возможности использования характеристик для описания нелокальных эффектов. Давыдов предложил использовать его для учета конечной скорости частиц v при молекулярной диффузии. Классическое уравнение диффузии параболического типа

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

получится из телеграфного в пределе $\tau \rightarrow 0$: $D \approx v^2 \tau \rightarrow \text{const}$. Как и следовало ожидать, в обычном случае

$$v \propto \sqrt{\frac{D}{\tau}}, \quad \text{или} \quad R^2 \propto t; \quad v \propto \frac{1}{\sqrt{\tau}} \rightarrow \infty.$$

Желая получить уравнение столь же ясное, как телеграфное, Монин, использовав двукратное дифференцирование по времени, привел уравнение (19) к виду

$$\frac{\partial^3 n}{\partial t^3} = \varepsilon \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (21)$$

Несложно обобщить нелокальное уравнение (14), представив эффекты памяти и нелокальности в одном уравнении, содержащем свертку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}_k(t)}{\partial t} &= -k^2 \int_0^t \tilde{n}_k(t') \tilde{D}_k(k, t - t') \frac{dt'}{\tau} = \\ &= -k^2 \tilde{D}_k(k, t) * \tilde{n}_k(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Использовав преобразование Лапласа по времени, мы можем заметить, что выражение (15) приняло более общую форму:

$$-Dk^2 n_{k,\omega} \rightarrow -k^2 \tilde{D}_{k,\omega}(k, \omega) n_{k,\omega}. \quad (23)$$

Сейчас мы видим, что спустя много лет после теоретических работ Давыдова и Монина уравнения диффузии неоднократно подвергались "дополнению" различными частными производными:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 n}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^\alpha n}{\partial t^\alpha}, \quad \frac{\partial^\beta n}{\partial x^\beta}, \quad (24)$$

с целью описать эффекты нелокальности и памяти [28].

4. Формула Хаузлса и число Пекле

В размерностном анализе уравнения турбулентной диффузии Мониным использовалась только величина ε — скорость диссипации энергии. Однако существенную роль в описании турбулентности [7] играет спектральная функция энергии $E(k)$:

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{2} = \int_0^\infty E(k) dk. \quad (25)$$

Хауэллу [29] удалось получить очень важную формулу, устанавливающую связь между коэффициентом турбулентной диффузии D и спектром $E(k)$. Однако, по-видимому, его результат стал широко известен только после опубликования обзорной статьи Моффата [30]. Мы будем следовать изложению работ [30, 31]. Рассмотрим "локальный" коэффициент диффузии $\delta D(k)$, связанный с конкретным масштабом вихрей $l_k \approx 1/k$, имеющих скорость V_k :

$$\delta D(k) \approx V_k^2 \tau_0, \quad V_k^2 \approx E(k) \delta k. \quad (26)$$

Здесь δk — малый интервал волновых чисел и τ_0 — характерное корреляционное время. Будем считать, что τ_0 связано с молекулярной диффузией:

$$\tau_0 \approx \frac{1}{k^2 D_0}.$$

Мы получаем выражение дифференциального вида

$$\frac{\delta D(k)}{\delta k} = \frac{E(k)}{k^2 D_0}. \quad (27)$$

Примем во внимание, что вместе с D_0 мы должны были бы учесть и значение $D(k)$. Тогда получаем

$$\frac{dD(k)}{dk} = \frac{E(k)}{k^2 (D_0 + D(k))}. \quad (28)$$

После решения этого уравнения мы получим выражение для коэффициента турбулентной диффузии, учитывающее влияние различных масштабов:

$$(D(k) + D_0)^2 = \int_k^\infty \frac{E(k)}{k^2} dk + D_0^2. \quad (29)$$

Мы сделали предположение $D(\infty) = 0$. В пренебрежении эффектами молекулярной диффузии мы получим выражение, которое будет далее неоднократно встречаться:

$$D^2 = \int_k^\infty \frac{E(k)}{k^2} dk. \quad (30)$$

Полученное выражение заметно отличается, с точки зрения размерных оценок, от введенного Тейлором. Обычной размерной оценкой коэффициента диффузии является формула, тесно связанная с моделью случайных блужданий $D_0 \approx \Delta^2/\tau$. Здесь λ — характерный пространственный корреляционный масштаб и τ_0 — характерное корреляционное время. В формуле Тейлора аналогичной оценкой будет $D_T \approx V^2 \tau$. В случае формулы, предложенной Хаузлсом, получаем другой тип оценки коэффициента диффузии

$$D_H \approx V\lambda.$$

Имеется возможность установить связь между этими выражениями. Рассмотрим число Пекле [30, 31]:

$$Pe = \frac{\lambda V}{D_0}. \quad (31)$$

Эта безразмерная величина аналогична хорошо известному числу Рейнольдса $Re = V\lambda/\eta$ и имеет аналогичный смысл. Здесь η — коэффициент вязкости. Число Пекле позволяет оценить долю конвективного переноса в сравнении с диффузионным. В терминах числа Пекле мы получим

$$D_0 = D_0 Pe^0 \equiv D_0, \quad D_T = D_0 Pe^2, \quad D_H = D_0 Pe. \quad (32)$$

Такая форма представления результатов с произвольным показателем степени α сейчас очень распространена [4–6, 30, 31]:

$$D_{\text{eff}} = D_0 Pe^\alpha. \quad (33)$$

5. Предположение Коррсина

Определение корреляционной функции, предложенное Тейлором [3], основано на использовании лагранжевых скоростей:

$$C(\tau) = \langle v(a, t) v(a, t + \tau) \rangle. \quad (34)$$

Однако экспериментальное определение лагранжевых скоростей, входящих в эту формулу, представляет серьезную трудность. Поэтому часто используется эйлерово представление для корреляционной функции, связанное с рассмотрением корреляции скоростей в точках, находящихся на расстоянии Δ друг от друга:

$$C_E(\Delta, \tau) = \langle u(a, t) u(a + \Delta, t + \tau) \rangle. \quad (35)$$

В такой формулировке формула для корреляционной функции оказывается более удобной для экспериментаторов. Мы также можем записать лагранжеву корреляционную функцию через эйлерову скорость:

$$C(\tau) = \langle u(a, t) u(x(a, t + \tau), t + \tau) \rangle. \quad (36)$$

Однако однозначная связь между лагранжевой и эйлеровой корреляционной функциями отсутствует. На это обстоятельство неоднократно указывалось в работах Ламли и Коррсина [32]. Действительно, в формуле (35) отсутствует лагранжева связь точек a и $a + \Delta$. Здесь Δ — всего лишь "некоторое" произвольное смещение.

В 1959 г. Коррсин предложил аппроксимационную формулу [32], выразив лагранжеву корреляционную функцию через эйлерову корреляционную функцию:

$$C(\tau) = \int \rho(\Delta, \tau) C_E(\Delta, \tau) d\Delta. \quad (37)$$

Фактически здесь использована процедура рандомизации. Однако более важным моментом является идея о диффузионной природе смещения Δ , поскольку в качестве $\rho(\Delta, \tau)$ Коррсином было использовано классическое решение уравнения диффузии в пространстве d измерений в форме

$$\rho = \frac{1}{(2\pi D t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{4Dt}\right). \quad (38)$$

Мы видим, что идея диффузионного расплывания лагранжевых траекторий была выдвинута Коррсином за 8 лет до появления работ Дюпри [34–36]. Однако именно после работ [34–36] эта идея получила широкое распространение.

6. Квазилинейное приближение

О большой важности квазилинейного приближения упоминалось во введении к настоящей статье. Квазилинейные уравнения были впервые рассмотрены [1, 2] применительно к задаче описания диффузии в фазовом пространстве, связанной со взаимодействием волн и

частиц. Для наших целей достаточно использовать только некоторые идеи работы Веденова, Велихова, Сагдеева, связанные с осреднением уравнений [8, 9, 15, 33].

Рассмотрим уравнение неразрывности для плотности пассивного скаляра

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (39)$$

Здесь $n(x, t)$ — пространственная плотность пассивного скаляра, а $v(x, t)$ — случайное поле скорости. Используем осреднение уравнения (39). Мы будем считать, что поле плотности можно представить как сумму средней величины $n_0 = \langle n \rangle$ и флуктуационной части $n_1 = n - \langle n \rangle$:

$$n = n_0 + n_1;$$

здесь принято $\langle n_1 \rangle = 0$ и $\langle v \rangle = 0$. В результате несложных вычислений, которые неоднократно приводились в литературе [8, 9, 15, 33], получим два уравнения:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \left\langle v \frac{\partial n_1}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + v \frac{\partial n_0}{\partial x} + v \frac{\partial n_1}{\partial x} - \left\langle v \frac{\partial n_1}{\partial x} \right\rangle = 0. \quad (41)$$

Предполагаем, что флуктуации n_1 и v имеют порядок малости δ в сравнении со средним полем n_0 . В рассматриваемых уравнениях (40), (41) еще сохранены члены порядка δ^2 . Квазилинейность приближения состоит в том, что мы сохраним нелинейный член порядка δ^2 в уравнении для n_0 (40), но в уравнении для n_1 (41) оставим члены только порядка δ . Тогда из уравнения для n_1 мы получим

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + v \frac{\partial n_0}{\partial x} = 0, \quad n_1 = - \int_{-\infty}^t v \frac{\partial n_0}{\partial x} dt'. \quad (42)$$

Это выражение для n_1 подставим в уравнение (40). В результате несложных преобразований [8, 9] мы получим

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \int_0^\infty \langle v(0) v(s) \rangle ds \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}. \quad (43)$$

Таким образом, в квазилинейном приближении для диффузии пассивной примеси мы получим хорошо известную формулу Кубо – Грина (7)

$$D = \int_0^\infty C(\tau) d\tau = \int_0^\infty \langle v(0) v(t) \rangle dt. \quad (44)$$

"Слабым звеном" квазилинейной теории является противоречивость сохранения квазилинейного члена в уравнении для n_0 и отбрасывание нелинейных членов в уравнении для n_1 . Существует большое число работ, где авторы пытаются "подправить" квазилинейное приближение. Их подробный анализ можно найти в [15, 33]. Наибольший интерес в этой области вызвали работы Дюпри [34–36]. Он использовал идею диффузионного расплывания траектории, близкую по смыслу к предложению Корсина (37), (38). Действительно, уравнение для n_1 является линейным и гиперболическим и сохраняет лагранжев характер корреляций. В этой связи открывается возможность описать отброшенные корре-

ляционные эффекты с помощью использования диффузионного приближения [34–36]. Мы будем обсуждать работы, использующие эту идею в следующих разделах.

7. Корреляционная модель Тейлора – Макнамары

Тейлор и Макнамара рассмотрели задачу о вычислении лагранжевой корреляционной функции для описания диффузии сильно замагниченной плазмы [37]. Однако мы изложим их эвристический метод без связи с плазменными моделями. В основе их вычислений лежит фурье-представление лагранжевых скоростей, входящих в корреляционную функцию

$$C(t) = \langle v(x(t), t) v(x(0), 0) \rangle = \sum_{k, k'} \langle \tilde{v}_k(t) \exp[ikx(t)] \tilde{v}_{k'}(0) \exp[ik'x(0)] \rangle. \quad (45)$$

Здесь было использовано фурье-преобразование по пространственной координате x . Следующий шаг по расщеплению корреляций в (45) был назван "гипотезой независимости":

$$C(t) = \sum_k \langle \tilde{v}_k(t) \tilde{v}_k(0) \rangle \langle \exp[ik[x(t) - x(0)]] \rangle. \quad (46)$$

Очередной шаг Тейлора и Макнамары был основан на идеях Дюпри о "диффузионном расплывании траекторий" $[x(t) - x(0)]^2 \approx 2Dt$. Фактически это "рецепт вычисления среднего" для величины $\exp[ik\Delta x(t)]$ в соответствии с формулой

$$\langle \exp A \rangle = \exp \left[\frac{\langle A^2 \rangle}{2} \right]. \quad (47)$$

После вычислений получаем

$$\langle \exp[ik\Delta x(t)] \rangle = \exp[-k^2 Dt]. \quad (48)$$

Эти шаги трудно строго обосновать, но результат вычислений убеждает в необходимости серьезного отношения к такому предположению. В работе Тейлора и Макнамары [37] было получено выражение для корреляционной функции в форме

$$C(t) = \sum_k \langle \tilde{v}_k^2 \rangle \exp(-k^2 Dt). \quad (49)$$

Перед тем как продолжить изложение результатов [37], мы рассмотрим полученное выражение (49) с "корреляционной" точки зрения. Это выражение можно интерпретировать как сумму гауссовых экспоненциальных корреляционных функций с "весами", пропорциональными спектру турбулентности $E(k)$:

$$C(t) = \sum_k E(k) \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right). \quad (50)$$

При этом необходимо учесть, что такая сумма большого числа экспонент может оказаться функцией совсем не экспоненциального вида. Заметна также близость этого выражения к преобразованию Лапласа. Особенно активно используются подобные выражения для получения степенных корреляционных функций [17, 18]. Другим

важным свойством формулы (50) является получающееся из нее выражение для коэффициента диффузии

$$\begin{aligned} D &= \int_0^\infty C(t) dt = \frac{1}{D} \sum_k \frac{E(k)}{k^2} \int_0^\infty \exp(-k^2 Dt) dk \approx \\ &\approx \frac{1}{D} \int \frac{E(k)}{k^2} dk. \end{aligned} \quad (51)$$

Заметим сходство полученного выражения с результатом Хаузелса

$$D^2 = \int_k^\infty \frac{E(k)}{k^2} dk. \quad (52)$$

Важно и то, что экспоненциальная форма в (50) не является необходимым условием. Нас могла бы устроить и другая функциональная зависимость от параметра $z = k^2 Dt$, чтобы обеспечить получение (52).

Из проведенного анализа видно, что идеи взаимного влияния масштабов [29, 30] и корреляционные идеи "диффузионного расплывания траекторий" [34–36] находятся в тесной связи. В своей работе Тейлор и Макнамара провели изящные вычисления и получили формулу, близкую к результату Хаузелса. Они ввели величину $R(t) = [\Delta x(t)]^2$. Тогда

$$C(t) \approx \frac{d}{dt} D \approx \frac{d}{dt} \frac{\Delta x^2}{t} \approx \frac{d^2}{dt^2} R(t). \quad (53)$$

С другой стороны, из формулы (49) получаем

$$C(t) = \int E(k) \exp[-k^2 R(t)] dk. \quad (54)$$

Фактически имеем дифференциальное уравнение "ニュтона" вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} R(t) = C\{R(t)\}. \quad (55)$$

Используя формальную процедуру, получаем окончательное решение [37]

$$D^2 \approx \frac{d}{dt} R(t) = \int E(k) \{1 - \exp[-k^2 R(t)]\} \frac{dk}{k^2}. \quad (56)$$

Для получения (52) достаточно рассмотреть случай $k^2 R(t) \gg 1$.

Необходимо отметить, однако, что ссылки на работу Хаузелса [29] в работе [37] нет. Видимо, результат Хаузелса стал широко известен позже [30, 31].

8. Модель супердиффузии Дрейзина – Дыхне

Задача вычисления коэффициента турбулентной диффузии находится в тесной связи с вопросом о характере поведения корреляционной функции. На обыденном языке "корреляция" означает некоторую связь событий. В теории вероятностей используется строгое математическое понятие "возврата блуждающей частицы" в исходную точку [11, 17] как одна из возможностей описания корреляционных эффектов. В 1971 г. Коррсин в очень интересном докладе [38], посвященном вероятностным проблемам турбулентности, сформулировал несколько задач, требующих решения. Одной из них

была задача учета "возвратов" [11, 17], диффундирующих в турбулентном потоке частиц. Фактически одновременно была опубликована статья Дрейзина и Дыхне [39], посвященная проводимости в анизотропных средах. В этой статье была предложена и рассмотрена физически ясная модель поведения частицы под действием резко анизотропной диффузии. Выделив продольное направление (которое связано с направлением магнитного поля), будем считать, что в этом направлении действует "затравочная" диффузия с коэффициентом D_0 . В поперечном направлении на диффундирующую частицу действуют случайные пульсации, создающие узкие конвективные течения со скоростью V_0 и шириной a (рис. 1).

Дрейзин и Дыхне предложили простую модель вычисления коэффициента диффузии в поперечном направлении D_\perp :

$$D_\perp \approx \frac{\lambda_\perp^2}{t}, \quad \lambda_\perp \approx V_0 t P. \quad (57)$$

Здесь $P = \delta N/N$ — доля "не скомпенсированных" пульсаций, а величина $N \approx \sqrt{2D_0 t}/a$ — число пересеченных частицей потоков ширины a . Оценив с использованием "гауссовой статистики" $\delta N \approx \sqrt{N}$, авторы [39] получили

$$D_\perp \approx V_0^2 a \sqrt{\frac{t}{D_0}}. \quad (58)$$

Фактически это супердиффузионный режим:

$$\lambda_\perp \approx \frac{V_0^2 a}{\sqrt{D_0}} t^{3/4} \gg t^{1/2}. \quad (59)$$

Для объяснения этого результата Дрейзин и Дыхне рассмотрели корреляционную функцию в форме Эйлера

$$C(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle V(0) V(z) \rangle \Phi(z, t_2 - t_1) dz, \quad (60)$$

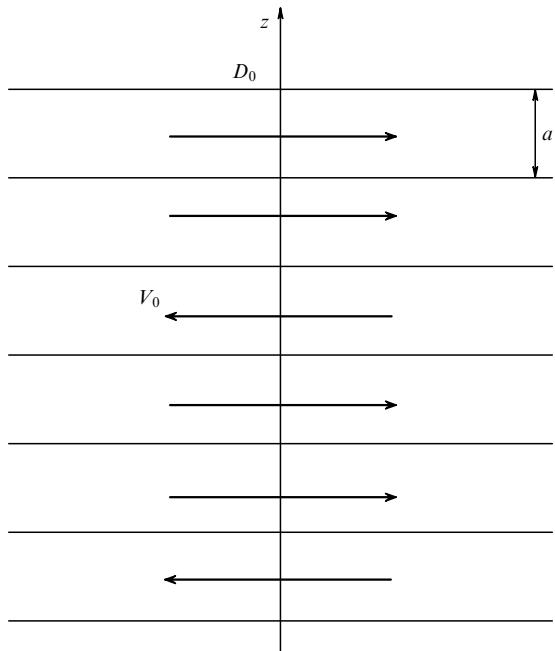


Рис. 1. Модель анизотропной супердиффузии Дрейзина – Дыхне: D_0 — коэффициент "затравочной" диффузии; V_0 — скорость поперечных пульсаций; a — поперечный размер пульсаций.

где

$$\Phi = \frac{1}{(4\pi D_0(t_2 - t_1))^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4D_0 t}\right). \quad (61)$$

Это представление в точности соответствует идеи Корпсина о диффузионной природе "декорреляций" (37), (38).

Однако главным звеном описания аномального характера диффузии стало использование гипотезы о существенной роли "возвратов" [17] в рассматриваемой модели диффузии. При таких предположениях мы изучаем ситуацию с $z \rightarrow 0$. Тогда

$$C(t_1, t_2) = C(\tau) \approx \frac{V_0^2 a}{\sqrt{2\pi D_0 \tau}}, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (62)$$

Теперь можно легко получить результат (59), проведя вычисления (см. (3)):

$$\langle \lambda_{\perp}^2 \rangle \approx \frac{V_0^2 a}{\sqrt{2\pi D_0}} \int_0^t \int_0^t \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{t_1 - t_2}} \approx \frac{V_0^2 a}{\sqrt{2\pi D_0}} t^{3/2}. \quad (63)$$

В результате анализа и вычислений мы видим, что природа супердиффузионности в модели Дрейзина–Дыхне [39] связана с существенной ролью "возвратов", приводящих к скоррелированности движений диффундирующей частицы. Интересный анализ роли "возвратов" в "полосовых" течениях был проведен Чукбаром в работе [40]. В этой же работе было приведено уравнение диффузии, соответствующее модели [39] и содержащее дробные производные:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{n(t', x) dt'}{\sqrt{\pi(t - t')}} - \frac{V_0^2 a}{\sqrt{2D}} \frac{\partial^2 n(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{n_0(0, x)}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}}. \quad (64)$$

Здесь уместно сделать еще одно замечание о результатах, полученных в [39]. Внимательно посмотрев на формулу (62), мы можем заметить, что в нее явно входит число пересеченных частицей потоков, которое в рассматриваемом одномерном случае равно числу:

$$N_b(\tau) \propto \sqrt{\frac{D_0 \tau}{a}}. \quad (65)$$

Тогда мы можем попытаться обобщить результат Дрейзина и Дыхне на случай более общей "топологии" течений с $d > 1$:

$$C(\tau) \approx \frac{V_0^2}{N_b(\tau)}. \quad (66)$$

Несложные вычисления позволяют получить с помощью этой формулы другие скейлинги, описывающие супердиффузию. Так, для $d \geq 2$ известна [17] оценка $N_b \propto t^{2/3}$, и, следовательно, мы получаем скейлинг $x \propto t^{2/3}$.

Формула похожего типа для корреляционной функции встречается в статистической физике [22] и имеет ясный физический смысл:

$$C(\tau) \approx \langle V_0 V_{\tau} \rangle \approx V_0 \frac{V_0}{N_I(\tau)}, \quad (67)$$

где N_I — число частиц, с которыми взаимодействовала "пробная" частица,

$$N_I(t) \approx n R_I(t) \propto n(Dt)^{d/2}. \quad (68)$$

Здесь R_I — радиус взаимодействия, вычисленный на основе диффузионной модели в пространстве d -измерений.

9. Гидродинамическое приближение Кадомцева–Погуце

В этом разделе мы кратко изложим только некоторые из результатов известной статьи Кадомцева и Погуце [41]. Эта работа посвящена проблеме аномального электронного переноса в стохастическом магнитном поле [42]. В связи с вопросом о влиянии корреляций на турбулентный перенос особую роль играет рассмотренная Кадомцевым и Погуце модель диффузии магнитного поля в условиях, когда квазилинейное приближение несправедливо. Они рассмотрели трехмерную задачу, в которой малое случайное поле $\mathbf{B}'(B_x, B_y, 0)$ наложено на большое постоянное поле $\mathbf{B}(0, 0, B_0)$, направленное по оси z . Эта модель очень близка по способу описания анизотропии к модели Дрейзина–Дыхне. Однако в рассмотренном Кадомцевым и Погуце случае движение вдоль оси z не носит диффузионного характера. Поэтому корреляционные эффекты в такой постановке не будут напрямую зависеть от "возвратов".

Анализ диффузии в квазилинейном пределе основывался на стохастическом уравнении для силовых линий

$$\frac{d\mathbf{r}_{\perp}}{dt} = \mathbf{b}(z, \mathbf{r}_{\perp}), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}'}{B_0} \approx b_0.$$

Здесь b_0 — характерный относительный масштаб возмущений. Тогда для коэффициента поперечной диффузии силовых линий магнитного поля получаем после осреднения

$$D_F = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{b}(z, 0) \mathbf{b}(0, 0) \rangle dz \propto b_0^2 \Delta_z. \quad (69)$$

Здесь Δ_z — продольный корреляционный масштаб. Понятно, что такое представление будет справедливо только для случая, когда диффузионное смещение в поперечном направлении много меньше поперечного корреляционного масштаба: $b_0 \Delta_z \ll \Delta_{\perp}$.

Кадомцев и Погуце рассмотрели и противоположный случай, когда $b_0 \Delta_z \geq \Delta_{\perp}$. Авторы [41] ввели уравнение неразрывности для плотности магнитных силовых линий

$$\frac{\partial n_b}{\partial z} + \mathbf{b} \nabla n_b(r_{\perp}, z) = 0. \quad (70)$$

Они использовали представление для n_b как суммы средней величины $n_0 = \langle n_b \rangle$ и флуктуационной части n_1 :

$$n_b = n_0 + n_1.$$

В такой постановке эта задача близка к задаче о квазилинейной диффузии пассивного скаляра (40), (41). Действительно, авторы [41] использовали традиционную форму уравнения для n_0 :

$$\frac{\partial n_0}{\partial z} + \nabla \langle \mathbf{b} n_1 \rangle = 0. \quad (71)$$

Однако в уравнении для n_1 они заменили отбрасываемые ранее члены второго порядка малости членом диффузионного вида. По существу они, следуя идеям Дюпри, связали отбрасываемые ранее корреляционные эффекты

с диффузионным расплыванием траекторий:

$$\frac{\partial n_1}{\partial z} - D_F \nabla_{\perp}^2 n_1 = -\mathbf{b} \nabla n_0. \quad (72)$$

Линейность уравнений сохранилась, но вместо гиперболического вида (42) оно приняло параболический вид. Используя аппарат функций Грина для уравнения (72)

$$\frac{\partial G}{\partial z} - D_F \nabla_{\perp}^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (73)$$

Кадомцев и Погуце получили окончательное выражение для n_0 :

$$\frac{\partial n_0}{\partial z} = D_F \nabla_{\perp}^2 n_0, \quad (74)$$

$$D_F = \frac{1}{2} \int \frac{b^2(\mathbf{k})}{ik_z + k_{\perp}^2 D_F} d\mathbf{k},$$

$$b^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle b(0) b(r) \rangle \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) dr. \quad (75)$$

В случае $\Delta k_z > k_{\perp}^2 D_F$ было получено квазилинейное выражение [8, 9]

$$D_F = \frac{\pi}{2} \int b^2(\mathbf{k}) \delta(k_z) d\mathbf{k} \propto b_0^2 \Delta_z. \quad (76)$$

В случае сильных поперечных корреляций $\Delta k_z < k_{\perp}^2 D_F$ получаем выражение, сходное с результатом Хауэлса [29] (см. (30)):

$$D_F^2 = \frac{1}{2} \int \frac{b^2(\mathbf{k})}{k_{\perp}^2} d\mathbf{k}. \quad (77)$$

Этот результат Кадомцева и Погуце еще раз показал важность учета отбрасываемых в квазилинейном подходе корреляционных эффектов и их тесную связь с вопросом об учете влияния различных масштабов в теории турбулентного переноса. Идеи подробного рассмотрения иерархии масштабов в дальнейшем получили развитие в работах по континуальной перkolации [4–6].

10. Континуальная перkolация и диффузия

Первыми предложили использовать перkolационный подход для описания аномальной диффузии в плазме Кадомцев и Погуце [41]. В конце 70-х годов идеи скейлинга, фрактальности и перkolации получили широкое распространение [43–45]. Физически ясное изложение этих идей содержится в обзорных статьях [17, 18] или книгах [16, 46]. В дальнейшем мы будем предполагать, что читатель знаком с приведенными там основными определениями. Линии тока $\Psi = \Psi(x, y)$ в таком подходе рассматриваются как береговые линии, возникшие в результате затопления водой холмистого ландшафта. Ожидается, что имеется резкий переход от отдельных озер на бескрайней суше к отдельным островам в безграничном океане. Теория перkolации требует существования хотя бы одной береговой линии бесконечной протяженности.

Кадомцев и Погуце [41] связали аномальный характер диффузии с фрактальным характером поведения линий тока плоского течения вблизи порога протекания (рис. 2). Они предложили использовать скейлинг для

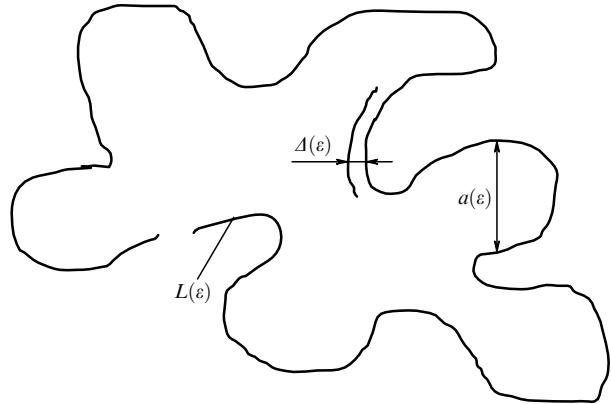


Рис. 2. Фрактальная линия тока: $L(\varepsilon)$ — длина перколоционной линии тока; $\Delta(\varepsilon)$ — ширина перколоционного слоя; $a(\varepsilon)$ — корреляционный размер; ε — малый параметр теории перkolации.

длины перколоционной линии тока:

$$L(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon^{2.4}}. \quad (78)$$

Здесь ε — малая величина, характеризующая степень отклонения системы от критического состояния (порог перkolации);

$$\varepsilon \approx \frac{h}{\lambda V_0},$$

где h имеет размерность функции тока Ψ , а λ — характерный размер и V_0 — характерная скорость.

Дальнейший ход исследований процессов диффузии в системах со сложными структурами, такими, как конвективные ячейки (рис. 3) [31], привел к пониманию важности ширины Δ перколоционного слоя ("ширины" стохастического слоя) [47]. В теории перkolации известен скейлинг для эффективного коэффициента диффузии [17]

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon) = D_0 P_{\infty}(\varepsilon). \quad (79)$$

Здесь D_0 — коэффициент "затравочной диффузии", а P_{∞} — доля пространства, занятая перколоционным кластером. В случае конвективных ячеек величину P_{∞}

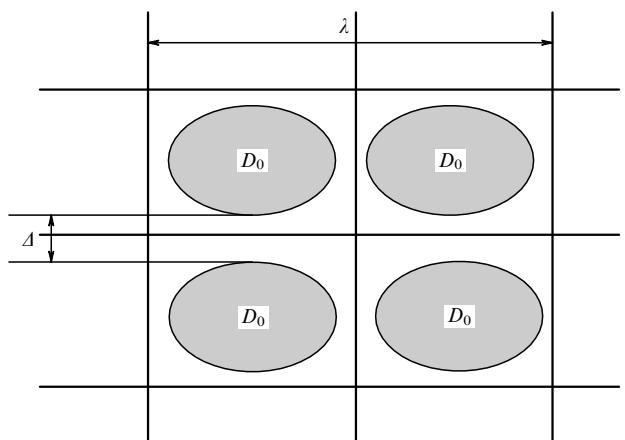


Рис. 3. Модель турбулентной диффузии на конвективных ячейках: D_0 — коэффициент "затравочной" диффузии; λ — характерный размер ячейки; Δ — ширина пограничного слоя.

легко оценить, если ввести параметр λ — размер ячейки:

$$P_\infty = \frac{L\Delta}{\lambda^2}. \quad (80)$$

В этой формуле нашла отражение несложная "топология" перколоционной диффузии на плоскости.

В работе Осипенко, Погуце и Чудина [47] была предложена диффузионная оценка для ширины стохастического слоя Δ

$$\Delta = \sqrt{\frac{D_0\lambda}{V_0}} \approx \sqrt{D_0\tau}. \quad (81)$$

Здесь τ — корреляционный масштаб времени. Эта формула имеет прозрачный физический смысл баланса числа частиц. Из конвективной ячейки в единицу времени поступает $D_0(n/\Delta)\lambda$ частиц. Конвекцией вдоль пограничного слоя уносится $nV_0\Delta$ частиц. Приняв во внимание, что конвективный поток существует только в части пространства Δ/λ , получаем

$$D_{\text{eff}} \propto \lambda V_0 \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (82)$$

Окончательно авторы [47] получили следующую оценку для коэффициента турбулентной диффузии:

$$D_{\text{eff}} = \text{const} \sqrt{D_0 V_0 \lambda}. \quad (83)$$

Немного позднее такая же оценка была получена в работе [48]. В терминах числа Пекле эта формула принимает вид

$$D_{\text{eff}} = \text{const} \frac{\lambda^2}{\tau} \sqrt{\frac{V_0 \lambda}{D_0}} \approx D_0 \text{Pe}^{1/2}. \quad (84)$$

Внимательный анализ формулы (83) показывает, что, несмотря на значительный прогресс, достигнутый в работе [47], ожидаемый перколоционный характер, содержащийся в зависимости $D_{\text{eff}} = D_{\text{eff}}(\varepsilon)$, утрачен. Фактически здесь утрачена прямая связь с эффектами "длинных корреляций", лежащих в основе перколоционного подхода, основанного на степенном характере поведения корреляционного масштаба: $a(\varepsilon) = \lambda|\varepsilon|^{-v}$.

11. Перколоция в стационарном случае

Коллективу авторов работы [4] удалось реализовать потенциал перколоционного подхода Кадомцева — Погуце. Они рассмотрели двумерное стационарное течение с нулевой средней скоростью, которое задано ограниченной функцией тока $\Psi(x, y)$ "общего положения". Имелась в виду изотропная в среднем осциллирующая функция, квазислучайная в расположении седловых точек по высоте. Были выбраны масштабы

$$\Psi_0 \approx \lambda V_0, \quad \lambda \approx \left| \frac{\Psi}{\nabla \Psi} \right|.$$

Авторы [4] основывались на формуле (79) для эффективной диффузии и использовали представление о конвективном характере течения вдоль перколоционной линии тока:

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon) \approx \frac{a^2}{\tau} \frac{L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon)}{a^2}. \quad (85)$$

Здесь τ — корреляционный масштаб времени, и a является единственным параметром, характеризующим пространственный масштаб в теории перколоции [49, 50]. Именно через a эффекты "длинных корреляций" входят в выражение для коэффициента диффузии. Фактически — это формула из работы [47]. Однако, следуя духу работ теории перколоции, авторы [4] предложили "перенормировку", т.е. способ вычисления универсального значения малого параметра ε в их теории перколоционной диффузии. Они отождествили малую "ширину" перколоционной линии тока и малый параметр теории перколоции (см. рис. 2):

$$\Delta(\varepsilon) = \lambda\varepsilon. \quad (86)$$

Используя известные выражения (81), получаем уравнение для определения "универсального" значения $\varepsilon_* = h_*/(\lambda V_0)$ как функции параметров течения D_0, V_0, λ :

$$\sqrt{\frac{D_0 L(h)}{V_0}} = \frac{h}{V_0}. \quad (87)$$

Конкретные вычисления удается провести полностью, если использовать полученные в теории перколоции строгие скейлинговые результаты [16, 17, 51–53] для корреляционного масштаба a и длины фрактальной линии тока L как функции ε :

$$a(\varepsilon) = \lambda\varepsilon^{-v}, \quad L(\varepsilon) = \lambda \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{D_h}, \quad v = \frac{4}{3}, \quad D_h = 1 + \frac{1}{v}. \quad (88)$$

Функциональный вид этих зависимостей отражает введенное Кадомцевым и Погуце фрактальное поведение линий тока. Вычисления в терминах чисел Пекле приводят к выражениям

$$h_* = \lambda V_0 \text{Pe}^{-3/13}, \quad (89)$$

$$D_{\text{eff}} = D_0 \text{Pe}^{10/13}. \quad (90)$$

Здесь уместно сделать несколько общих замечаний. Полученная в [4] формула (90) обладает большой общностью, сравнимой, пожалуй, со скейлингом Бома для диффузии плазмы. Подобно бомовскому скейлингу, в ее основе заложено "исключение характерного размера" (86) (см. также комментарии Кроммса к бомовскому скейлингу [15]). Некоторая произвольность в (86) при выборе значения $\lambda\varepsilon$, а не $\lambda\varepsilon^2$ или $\lambda\varepsilon^3$, может быть истолкована как желание иметь универсальный малый параметр подобно существованию единственного характерного размера — корреляционной длины в теории фазовых переходов. Особенно необходимо здесь отметить, что в рамках работы [4] длина фрактальной перколоционной линии тока не является бесконечно большой, так как малый параметр ε_* не стремится к нулю, а имеет конечное значение $\varepsilon_* = h_*/(\lambda V_0)$ для всех типов течения с характерными D_0, V_0, λ . Именно в этом кроется универсальность формулы (90). Кроме скейлингов (89), (90) мы можем получить и некоторую дополнительную полезную информацию для дальнейшего анализа. Заметим, что в терминах чисел Пекле перколоционный режим занимает промежуточное место между режимами конвективных ячеек из работы [47] и чисто конвективным режимом $D_{\text{eff}} \approx \lambda V_0$. Доля объема, заня-

того перколяционными линиями тока, оценивается как

$$P_\infty = \frac{L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon)}{a(\varepsilon)^2} \approx \varepsilon^{4/3} \propto \frac{1}{a}. \quad (91)$$

Этот результат будет использован как "универсальный" в другой работе по нестационарной перколяции [5].

Время корреляции τ описывается скейлингом:

$$\tau \approx \frac{L(\varepsilon)}{V_0} \approx \frac{\lambda}{V_0} \frac{1}{\varepsilon^{7/3}}. \quad (92)$$

Интересно установить и более тесную связь результатов работы [4] с формулами перколяционной теории [16, 17]. Зададим скейлинговые зависимости для

$$P_\infty \propto \varepsilon^\beta, \quad D_{\text{eff}} \propto \varepsilon^\mu. \quad (93)$$

Так, для P_∞ , сравнивая формулы (91) и (93), получаем $\beta = v = 4/3$. Используя формулу (85) и скейлинг D_{eff} из (93), получаем $\mu = 1$. Полная формула для D_{eff} с $D_0 \propto 1/r^\theta$ дает выражение

$$D_{\text{eff}} \approx r^{-\theta} \varepsilon^\mu \approx \varepsilon^{\theta v + \beta}. \quad (94)$$

Таким образом, мы можем вычислить внутреннюю размерность случайных блужданий [16, 17] для случая фрактальных линий тока:

$$d_w = 2 + \theta = -\frac{7}{4}, \quad \text{или} \quad D_0 \approx \frac{a^2}{\tau} \approx a^{1/4}.$$

Возможны и некоторые другие оценки (см. [16, 17]).

Интересно отметить, что попытка отказа от соотношения $\lambda\varepsilon$ в пользу выражения $\lambda\varepsilon^\chi$ (с некоторым произвольным показателем χ) приведет к переходу от режима $D_{\text{eff}} = D_0 \text{Pe}^{10/13}$ к режиму $D_{\text{eff}} = D_0 \text{Pe}^{1/2}$ только для $\chi > 7$. Переход в режим $D_{\text{eff}} = D_0 \text{Pe}$ потребует значений $\chi \rightarrow 0$.

Заканчивая анализ результатов работы [4], отметим, что мы стремились к простоте изложения, но простота ее результатов кажущаяся. Достаточно вспомнить в этой связи всю "иерархию" масштабов, использованных авторами [4] для анализа:

$$\frac{a}{\varepsilon} \approx L \gg a \gg \lambda \gg \Delta \approx \lambda\varepsilon \approx \frac{h}{V_0}. \quad (95)$$

Здесь

$$L(\varepsilon_*) \approx \lambda \frac{1}{\varepsilon_*^{7/3}}, \quad a(\varepsilon_*) = \lambda \frac{1}{\varepsilon_*^{4/3}}$$

не являются бесконечно большими.

12. Перколяция в нестационарном случае

Следуя духу работы [4], Грузинов, Исиченко и Калда [5] рассмотрели перколяционный предел турбулентной диффузии скалярной примеси в нестационарном несжимаемом плоском течении. Оценив время, за которое картина течения меняется полностью, как $T_0 \approx 1/\omega$, авторы [5] сосредоточили свое внимание на низкочастотном случае $\omega \ll V_0/\lambda$, или $\lambda \ll V_0 T_0$.

Главным параметром в такой постановке задачи является время жизни одной перколяционной линии

тока τ . Для коэффициента диффузии можно использовать стандартное выражение

$$D_*(\varepsilon) \approx \frac{a^2}{\tau}. \quad (96)$$

По смыслу задачи

$$\tau \approx \varepsilon \frac{1}{\omega} \approx \varepsilon T_0,$$

где ε — малый параметр задачи, аналогичной [4]. В рассматриваемом нестационарном случае универсального результата можно было бы ожидать, если бы удалось вычислить конкретное "универсальное" значение ε_* . Авторы работы [5] предложили для этой цели простое выражение, учитывающее конвективный характер движения вдоль перколяционной линии тока в течение времени жизни этой линии тока:

$$\tau \approx \varepsilon \frac{1}{\omega} = \frac{L(\varepsilon)}{V_0}. \quad (97)$$

Здесь легко усмотреть аналогию с формулой (87). Использовав скейлинг из теории перколяции для $L(\varepsilon)$:

$$a(\varepsilon) = \lambda \varepsilon^{-v}, \quad L(\varepsilon) = \lambda \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{D_h}, \quad v = \frac{4}{3}, \quad D_h = 1 + \frac{1}{v}, \quad (98)$$

легко получим $\varepsilon_* = h_*/(\lambda V_0)$ как функцию параметров течения ω, V_0, λ :

$$\varepsilon_* = \left(\frac{\lambda \omega}{V_0} \right)^{1/(2+v)} = \text{Ku}^{-3/10} \propto \omega^{3/10}. \quad (99)$$

Здесь было удобно ввести число Кубо $\text{Ku} = V_0/(\lambda \omega)$. Выражение для D_* получим прямой подстановкой в (96):

$$D_*(\varepsilon_*) \approx \frac{a(\varepsilon_*)^2}{\tau(\varepsilon_*)}. \quad (100)$$

Заметим, однако, что зависимость от $T_0 \approx 1/\omega$ выглядит весьма странно:

$$D_* \propto T_0^{1/10} \approx \frac{1}{\omega^{1/10}}. \quad (101)$$

Медленная "перестройка" течения вряд ли приведет к заметному росту турбулентной диффузии. Причина кроется в том, что мы не учли долю P_∞ перколяционных линий тока в общем течении:

$$P_\infty = \frac{L(\varepsilon) \Delta(\varepsilon)}{a(\varepsilon)^2}. \quad (102)$$

Теперь видно, что, несмотря на то, что мы вычислили $\varepsilon_* = h_*/(\lambda V_0)$, нам необходима дополнительная информация о величине $\Delta(\varepsilon)$. В отличие от работы [4], здесь приходится делать дополнительные к (97) предположения. Авторы [5] принимают $\Delta(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$, аналогично работе [4]. Фактически используются формулы (86) и (91):

$$\Delta \approx \varepsilon_* \lambda, \quad P_\infty = \varepsilon^{4/3} \propto \frac{1}{a(\varepsilon)}. \quad (103)$$

Теперь вычисления приводят к окончательному выражению для D_{eff} :

$$D_{\text{eff}} = D_0 \text{Ku}^{7/10} \propto \omega^{3/10}. \quad (104)$$

Полученная формула отражает универсальный характер перколяционной диффузии в нестационарных течениях, поскольку значение $\varepsilon_* = h_*/(\lambda V_0)$ зависит только от параметров течения ω, V_0, λ .

Необходимо провести дополнительные оценки влияния диффузионного ухода частиц с линий тока. Формулы работы [5] получены в приближении $\tau < \tau_D$. Для оценок используем коэффициент диффузии линий тока D_ψ , связав его с коэффициентом "затравочной" диффузии D_0 :

$$\tau_D \approx \frac{h^2}{D_\psi}, \quad D_\psi = V_0^2 D_0. \quad (105)$$

Условие применимости результатов [5] примет форму

$$\frac{1}{\omega} \frac{h}{\lambda V_0} < \frac{h}{V_0^2 D_0}. \quad (106)$$

Фактически это ограничение на величину "затравочной" диффузии D_0 :

$$D_0 < h\omega(h) V_0^2 \approx h^{v+3}. \quad (107)$$

Заканчивая обсуждение этого вопроса, приведем набор характерных времен в задаче о перколяции в нестационарном течении:

$$\frac{1}{\omega} \frac{h}{\lambda V_0} \ll \frac{h^2}{V_0^2 D_0} \ll \frac{1}{\omega} \approx T_0. \quad (108)$$

Аналогично рассмотренной ранее иерархии масштабов при стационарной перколяции (95) этот набор характерных времен позволяет выделить режимы течений, где эффекты "длинных" корреляций становятся главными.

13. Заключение

Даже кратко рассмотренные нами работы показывают, насколько велик диапазон исследований в области анализа турбулентной диффузии на основе корреляционных идей. Методы, использующие для этих целей "перенормировки" и анализ корреляций, постоянно совершенствуются [55–69]. Так, перколяционный подход получил развитие в направлении учета многомасштабности [6]. В этом подходе вместо $\Psi_0 \approx V_0 \lambda$ использовалась иерархия масштабов λ . Тогда мы получаем новые скейлинговые зависимости, использующие показатель H :

$$\Psi_\lambda = \Psi_0 \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^H, \quad V_\lambda = V_0 \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^{H-1}.$$

Используя многомасштабность, удалось рассмотреть модели Дрейзина–Дыхне, обобщенные на случаи $d > 1$ с общих позиций.

Были также проведены [82–85] перколяционные оценки эффектов диффузии в стохастическом магнитном поле [41, 42, 80, 81]. Предлагалась модификация перколяционного метода для случая ненулевой средней скорости течения [86, 87].

Активно используется подход, основанный на факторизации эйлеровой корреляционной функции $C_E(A, t) \approx f(A)g(t)$ [88–90]. Развиваются методы, основанные на "перенормировании" уравнения для корреляционной

функции [91].

В последнее время большой интерес вызвали работы по "самоорганизованной критичности" (SOC), связанные с описанием аномального переноса в плазме [92–94]. Анализ экспериментальных результатов привел к использованию простого скейлинга

$$x \propto t^H, \quad H \approx 0,62–0,72.$$

Используя простые оценки, можно показать, что это приводит к степенному виду корреляционных функций, а следовательно, и к необходимости рассмотрения "длинных негауссовых корреляций":

$$C(t) \propto \frac{d}{dt} D \propto \frac{x^2}{t^2} \propto \frac{1}{t^\beta}, \quad H = 1 - \frac{\beta}{2}. \quad (109)$$

Очевидно, что поиск и анализ моделей, в которых корреляционные эффекты играют главную роль, остается важной задачей.

Автор благодарит В.Д. Шафранова и Э.И. Юрченко за помощь и неоднократное обсуждение работы.

Список литературы

1. Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z *Nucl. Fusion Suppl.* **1** 82 (1961)
2. Drummond W E, Pines D *Nucl. Fusion Suppl.* **3** 1049 (1962)
3. Taylor G I *Proc. London Math. Soc. Ser. 2* **20** 196 (1921)
4. Исиченко М Б и др. *ЖЭТФ* **96** 913 (1989)
5. Грузинов А В, Исиченко М Б, Калда Я Л *ЖЭТФ* **97** 476 (1990)
6. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
7. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика* Ч. 1, 2 (М.: Наука, 1965, 1967)
8. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1976)
9. Кингсеп А С *Введение в нелинейную физику плазмы* (М.: Изд-во МФТИ, 1996)
10. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика* (М.: Физматлит, 2001)
11. Van Kampen N G *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: North-Holland, 1981) [Ван Кампен Н Г *Стохастические процессы в физике и химии* (М.: Высшая школа, 1990)]
12. Frisch U *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
13. Frost W, Moulden T H (Eds) *Handbook of Turbulence* (New York: Plenum Press, 1977)
14. Зельдович Я Б, Мышикис А Д *Элементы математической физики* (М.: Наука, 1973)
15. *Основы физики плазмы* Т. 1, 2 (Под ред. А А Галеева, Р Судана) (М.: Энергоатомиздат, 1983, 1984)
16. Feder J *Fractals* (New York: Plenum Press, 1988) [Федер Е *Фракталы* (М.: Мир, 1991)]
17. Соколов И М *УФН* **150** 221 (1986)
18. Шкловский Б И, Эфрос А Л *УФН* **117** 401 (1975)
19. Быков А М, Топтыгин И Н *УФН* **163** (11) 19 (1993)
20. Кляцкин В И, Татарский В И *УФН* **110** 499 (1973)
21. Смирнов Б М *УФН* **171** 1291 (2001)
22. Résibois P, De Leener M *Classical Kinetic Theory of Fluids* (New York: Wiley, 1977)
23. Richardson L F *Proc. R. Soc. London Ser. A* **110** 709 (1926)
24. Монин А С *ДАН СССР* **105** 256 (1955)
25. Khintchine A Ya, Levy P *CR Acad. Sci.* **202** 374 (1936)
26. Chandrasekhar S *Rev. Mod. Phys.* **15** 1 (1943)
27. Давыдов Б И *ДАН СССР* **2** 474 (1934)
28. Чукбар К В *ЖЭТФ* **108** 1875 (1995)
29. Howells I D *J. Fluid Mech.* **9** 104 (1960)
30. Moffatt H K *J. Fluid Mech.* **106** 27 (1981)
31. Moffatt H K *Rep. Prog. Phys.* **46** 621 (1983)
32. Frenkiel F N, Sheppard P A (Eds) *Atmospheric Diffusion and Air Pollution* (Adv. in Geophys., Vol. 6) (New York: Academic Press, 1959)

33. Цытович В Н *Теория турбулентной плазмы* (М.: Атомиздат, 1971)
34. Dupree T H *Phys. Fluids* **9** 1773 (1966)
35. Dupree T H *Phys. Fluids* **10** 1049 (1967)
36. Dupree T H *Phys. Fluids* **15** 334 (1972)
37. Taylor J B, McNamara B *Phys. Fluids* **14** 1492 (1971)
38. Corrsin S "Random geometric problems suggested by turbulence", in *Statistical Models and Turbulence: Proc. of a Symp., San Diego, CA, USA, July 15–21, 1971* (Lecture Notes in Physics, Vol. 12, Eds M Rosenblatt, C van Atta) (Berlin: Springer, 1975) p. 300
39. Дрейзин Ю А, Дыхне А М *ЖЭТФ* **63** 242 (1972)
40. Чубар К В *ЖЭТФ* **109** 1335 (1996)
41. Kadomtsev B B, Pogutse O P *Nucl. Fusion Suppl.* **1** 649 (1979)
42. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) 2-е изд. (М.: Наука, 1990)
43. Mandelbrot B B *J. Fluid Mech.* **72** 401 (1975)
44. Mandelbrot B B *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (San Francisco: W.H. Freeman, 1977)
45. Stauffer D *Phys. Rep.* **54** 1 (1979)
46. Stauffer D *Introduction to Percolation Theory* (London: Taylor & Francis, 1985)
47. Осищенко М В, Погуде О П, Чудин Н В *Физика плазмы* **13** 953 (1987)
48. Rosenbluth M N et al. *Phys. Fluids* **30** 2636 (1987)
49. Stanley H E *J. Phys. A: Math. Gen.* **10** L211 (1977)
50. Stanley H E *J. Stat. Phys.* **34** 843 (1984)
51. Saleur H, Duplantier B *Phys. Rev. Lett.* **58** 2325 (1987)
52. Sapoval B, Rosso M, Gouyet J F *J. Phys. Lett. (Paris)* **46** L149 (1985)
53. Bunde A, Gouyet J F *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** L285 (1985)
54. Fradkin L *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 685 (1991)
55. Kolokolov I, Lebedev V, Stepenov M *ЖЭТФ* **115** 920 (1999)
56. Kolokolov I V *Письма в ЖЭТФ* **59** 841 (1994)
57. Balkovsky E et al. *Письма в ЖЭТФ* **61** 1012 (1995)
58. Ziman J M *Models of Disorder: The Theoretical Physics of Homogeneously Disordered Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979) [Займан Д М *Модели беспорядка: Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем* (М.: Мир, 1982)]
59. Lebedev V V, L'vov V S *Письма в ЖЭТФ* **59** 546 (1994)
60. Avellaneda M, Majda A J *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* **4** 41 (1992)
61. Falkovich G, Gawedzki K, Vergassola M *Rev. Mod. Phys.* **73** 913 (2001)
62. Balkovsky E, Falkovich G, Fouxon A *Phys. Rev. Lett.* **86** 2790 (2001)
63. Antonov N V *Physica D* **144** 370 (2000)
64. Теодорович Э В *ПММ* **55** (2) 275 (1991)
65. Majda A J, Kramer P R *Phys. Rep.* **314** 237 (1999)
66. Силантьев Н А *ЖЭТФ* **111** 871 (1997)
67. Кляцкин В И *УФН* **164** 531 (1994)
68. Кляцкин В И, Якушкин И Г *ЖЭТФ* **118** 849 (2000)
69. Кляцкин В И, Саичев А И *ЖЭТФ* **111** 1297 (1997)
70. Зельдович Я Б *Письма в ЖЭТФ* **38** (2) 51 (1983)
71. Зельдович Я Б и др. *ЖЭТФ* **89** 2061 (1985)
72. Зельдович Я Б и др. *УФН* **152** 3 (1987)
73. Вайнштейн С И, Быков А М, Топтыгин И Н *Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме* (М.: Наука, 1989)
74. Вайнштейн С И *Магнитные поля в космосе* (М.: Наука, 1983)
75. Tatarinova E B, Kalugin P A, Sokol A V *Europhys. Lett.* **14** 773 (1991)
76. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **13** 22 (1970)
77. Кравцов В Е, Лернер И В, Юдсон В И *ЖЭТФ* **91** 569 (1986)
78. Яглом А М *Корреляционная теория стационарных случайных функций* (Л.: Гидрометеоиздат, 1981)
79. Власов А А *Статистические функции распределения* (М.: Наука, 1966)
80. Rechester A B, Rosenbluth M N *Phys. Rev. Lett.* **40** 38 (1978)
81. Rechester A B, Rosenbluth M N, White R B *Phys. Rev. Lett.* **42** 1247 (1979)
82. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 795 (1991)
83. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 809 (1991)
84. Isichenko M B, Horton W *Comment. Plasma Phys. Control. Fusion* **14** 249 (1991)
85. Isichenko M B et al. *Phys Fluids B: Plasma Phys.* **4** 3973 (1992)
86. Юшманов П Н *Письма в ЖЭТФ* **52** 848 (1990)
87. Yushmanov P N *Comment. Plasma Phys. Control. Fusion* **14** 313 (1992)
88. Misguich J H et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **29** 825 (1987)
89. Vlad M et al. *Phys. Rev. E* **58** 7359 (1998)
90. Vlad M et al. *Phys. Rev. E* **63** 066304 (2001)
91. Krommes J A *Phys. Plasmas* **7** 1148 (2000)
92. Carreras B A et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 4438 (1998)
93. Carreras B A et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 3653 (1999)
94. Krommes J A, Ottaviani M *Phys. Plasmas* **6** 3731 (1999)

The correlation and percolation properties of turbulent diffusion

O.G. Bakunin

Russian Research Center 'Kurchatov Institute', Nuclear Fusion Institute
pl. Kurчатова 1, 123182 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 492-4265
E-mail: bakunin@rijnh.nl; bakunin@nfi.kiae.ru

All models of turbulent diffusion are based on the understanding of the behaviour of correlation functions. In the present paper, the evolution of correlation ideas is systematically analyzed, starting from Teilor's 1921 work which pioneered the use of the autocorrelation function and ending with percolation theory analyses of turbulent diffusion. It is emphasized that even though physical problems encountered in the field may be very different, they all share a common theoretical framework. The use of the 'long' correlation and fractality ideas in the percolation method is described. The 'universality' of the percolation approach to turbulent diffusion is discussed in detail.

PACS numbers: **05.40.-a**, 47.27.Qb, **47.53.+n**

Bibliography — 94 references

Received 24 October 2002, revised 4 March 2003