

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Кластеризация и диффузия частиц и плотности пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках

В.И. Кляцкин

*В работе рассматриваются диффузия частиц и поля плотности консервативной пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках. Принципиальной особенностью такой диффузии в дивергентном гидродинамическом потоке является кластеризация поля плотности консервативной пассивной примеси (в эйлеровом описании) и в ряде случаев самих частиц (в лагранжевом описании). Это явление когерентно, осуществляется с вероятностью единица и должно проявляться почти во всех реализациях динамики процесса. На основе статистической топографии описываются статистические параметры, характеризующие эту кластеризацию. Кластеризация частиц и поля их концентрации может осуществляться и в случайных бездивергентных полях скоростей, если учесть их инерцию. Принципиальной особенностью такой диффузии является дивергентность самого поля скорости частиц. При этом для статистического описания их динамики принципиально неприменимо приближение дельта-коррелированного во времени поля скоростей флуктуирующего потока (например, уравнение Фоккера–Планка для диффузии малоинерционных частиц), и необходимо принимать во внимание конечность его временного радиуса корреляции, что осуществляется на основе диффузионного приближения.*

PACS numbers: 02.50. – г, 05.40. – а, 05.45. – а

## Содержание

1. Введение (689).
2. Постановка задачи (690).
  - 2.1. Малоинерционные частицы и малоинерционное поле примеси.
  - 2.2. Безынерционные частицы и безынерционное поле примеси.
3. Статистический анализ диффузии безынерционных частиц и поля плотности примеси (696).
  - 3.1. Приближение дельта-коррелированного во времени поля скоростей.
  - 3.2. Условия применимости дельта-коррелированного приближения и диффузионное приближение.
  - 3.3. Особенности диффузии примеси в быстропеременных случайных волновых полях.
4. Кластеризация примеси в случайных бездивергентных гидродинамических потоках (705).
  - 4.1. Диффузия плавучей примеси.
  - 4.2. Диффузия малоинерционных частиц и поля примеси в случайных бездивергентных гидродинамических потоках.

## 5. Заключение (709).

## Список литературы (709).

## 1. Введение

Задача о распространении частиц и пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках является одной из проблем статистической гидродинамики и имеет большое значение для решения экологических задач диффузии примеси в атмосфере Земли и океанах [1–5], диффузии в пористых средах [6] и проблемы крупномасштабного распределения массы на последней стадии формирования Вселенной [7, 8]. Ее изучение интенсивно ведется начиная с пионерских работ [9–11]. В дальнейшем многими исследователями были получены разнообразные уравнения, описывающие статистические характеристики поля примеси как в эйлеровом, так и в лагранжевом описании (см., например, [12–15]). Вывод таких уравнений для различных моделей флуктуирующих параметров в различных приближенных схемах (как для моментных функций поля плотности примеси, так и для ее плотности вероятностей) и их анализ продолжается интенсивно и в последние десятилетия (см., например, [16–28]).

В последнее время внимание как теоретиков, так и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усредненных характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с

**В.И. Кляцкин.** Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 119017 Москва, Пыжевский пер. 3, Российская Федерация  
Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, 690041 Владивосток, ул. Балтийская 43, Российская Федерация  
Тел. (095) 269-12-83  
E-mail: klyatskin@yandex.ru

Статья поступила 3 марта 2003 г.

атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения, и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Решение динамических задач для конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за их чрезвычайной математической сложности. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, а не частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т.е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например, скалярных двумерных полей

$$\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} = (x, y)$$

напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами. Обычно используемые методы статистического усреднения (т.е. вычисления средних типа среднего значения  $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle$ , пространственно-временной корреляционной функции  $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t') \rangle$  и т.п., где через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций, и, зачастую, полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но и противоречат, на первый взгляд, друг другу. Так, например, статистическое усреднение по всем реализациям делает поле средней концентрации пассивной примеси в случайном поле скоростей все более гладким, в то время как каждая его отдельная реализация за счет перемешивания областей с существенно разной концентрацией стремится стать все более изрезанной в пространстве.

Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют "глобальные" пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри нее. А такие детали для данного примера существенно зависят от характера поля скоростей — является оно дивергентным или бездивергентным. Так, в первом случае с вероятностью, равной единице, в отдельных реализациях образуются *кластеры* — компактные области повышенной концентрации примеси (см., например, [29, 30]), окруженные обширными областями плотности низкой концентрации. Однако при этом все статистические моменты расстояния между частицами экспоненциально растут во времени, т.е. имеет место статистическое разбегание частиц в среднем (см., например, [31–33]).

Такие физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, естественно называть *когерентными* (см., работу [34] и книги [36], где дано подробное обсуждение этого вопроса). Подобную "статистическую когерентность" можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы, и выделение ее

*статистически устойчивых характеристик* аналогично понятию *когерентности* как *самоорганизации* многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов (см., например, [37]).

Полная статистика (например, полная совокупность всех пространственно-временных  $n$ -точечных моментных функций), безусловно, содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удается исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные главным образом с одновременными и одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос: как, зная такого рода статистические характеристики и особенности системы, получить основные количественные и качественные особенности поведения отдельных ее реализаций и описать такие физические явления, как кластеризация частиц и поля плотности пассивной примеси в гидродинамических потоках?

Ответ на этот вопрос дают методы статистической топографии (см., например, работу [35] и книги [36]), позволяющие переосмыслить "философию" статистического анализа динамических стохастических систем, что может быть полезно и для экспериментаторов, планирующих статистическую обработку экспериментального материала.

Исследование динамики и диффузии инерционных частиц в гидродинамических потоках, начиная с классической работы Стокса 1851 г. [38] (см. также книги [39, 40]), привлекает внимание многочисленных исследователей благодаря многочисленным техническим приложениям (см., например, книги [41, 42] и работы [43–47], где содержится обширная библиография). Отметим, что в первой из работ [45] впервые было обращено внимание на то, что поле скоростей инерционных частиц в бездивергентном поле скоростей гидродинамического потока является дивергентным, в отличие от безинерционных пассивных частиц. И это обстоятельство широко использовалось в работах [48, 49] для анализа многочисленных приложений в гидродинамике, геофизике и астрофизике. Дивергентность поля скоростей инерционных частиц означает, что должна иметь место кластеризация таких частиц и поля пассивной примеси, сформированного такими частицами, даже для бездивергентного гидродинамического потока. И основная задача состоит в том, чтобы оценить основные параметры, характеризующие такую кластеризацию [50].

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Малоинерционные частицы и малоинерционное поле примеси

Диффузия поля плотности числа инерционных частиц, приходящихся на единицу объема  $n(\mathbf{r}, t)$  и движущихся в случайных гидродинамических потоках, описываемых эйлеровым полем скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) n(\mathbf{r}, t) = 0, \quad n(\mathbf{r}, 0) = n_0(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Здесь через  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  обозначено поле скоростей частиц в гидродинамическом потоке.

Общее число частиц при этом сохраняется в процессе эволюции, т.е.

$$N_0 = \int n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int n_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \text{const}.$$

Если плотность частицы  $\rho_0$ , то эволюция поля плотности пассивной примеси  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 n(\mathbf{r}, t)$ , движущейся в гидродинамическом потоке, также описывается уравнением неразрывности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}),$$

которое можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2)$$

Мы не учитываем эффект действия молекулярной диффузии, что справедливо на начальных этапах развития диффузии, и при этом общая масса примеси сохраняется в процессе эволюции, т.е.

$$M = M(t) = \int \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \text{const}.$$

Поле скоростей частиц  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в гидродинамическом потоке  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  для малоинерционных частиц можно описывать квазилинейным уравнением в частных производных (см., например, [43–47])

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)], \quad (3)$$

которое мы будем рассматривать как феноменологическое. В общем случае возможны неединственность решения уравнения (3), существование в них разрывов и т.п. Однако в асимптотическом случае малой инерционности частиц (параметр  $\lambda \rightarrow \infty$ ), который и представляет для нас интерес, решение задачи будет единственным на разумном интервале времени. Отметим, что линейный по полю скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  член в правой части (3)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \lambda \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  является известной *формулой Стокса* для силы сопротивления, действующей на медленно движущуюся частицу. При аппроксимации частицы шаром с радиусом  $a$

$$\lambda = \frac{6\pi a \eta}{m_p},$$

где  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости, а  $m_p$  — масса частицы (см., например, [39, 40]).

В общем случае гидродинамическое эйлерово поле скоростей имеет вид

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t),$$

где  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$  — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — случайная составляющая. Случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  может иметь как соленоидальную составляющую (для которой  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ), так и потенциальную (для которой  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ).

Уравнения (1)–(3), как упоминалось выше, составляют *эйлерово описание* эволюции поля плотности числа малоинерционных частиц и поля плотности пассивной примеси. Эти уравнения представляют собой уравнения в частных производных первого порядка и могут быть решены методом характеристик.

Вводя характеристические кривые  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$ , описывающие движения частицы с помощью уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) = -\lambda [\mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)], \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0),$$

перейдем от (1) и (2) к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt} n(t) = -n(t) \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad n(0) = n_0(\mathbf{r}_0), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\rho(t) \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0).$$

Отметим, что уравнения (4) являются обычными уравнениями Ньютона для динамики частицы с линейной силой трения, описываемой силой Стокса  $\mathbf{F}(t) = -\lambda \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)$ , под действием случайной силы  $\mathbf{f}(t) = \lambda \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)$ , порожденной гидродинамическим потоком.

Решения уравнений (5) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они описывают эволюцию плотности числа частиц и плотности пассивной примеси в окрестности фиксированной частицы, траектория которой определяется решением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  системы уравнений (4). Причем, как видно из (5), плотность числа частиц и плотность пассивной примеси в дивергентных потоках меняются, увеличиваясь в областях сжатия и уменьшаясь в областях разрежения среды.

## 2.2. Безынерционные частицы и безынерционное поле примеси

Для безынерционных частиц параметр  $\lambda \rightarrow \infty$  и, как следует из уравнения (3),

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t).$$

В этом случае траектория частицы и ее плотность в гидродинамическом потоке с полем скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  описываются уравнениями

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\rho(t) \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0),$$

а эйлерово поле плотности удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, для безынерционных частиц задача определения их траекторий в гидродинамическом потоке является чисто кинематической задачей.

Остановимся на стохастических особенностях решения задачи (6) для системы частиц в отсутствие среднего потока ( $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$ ). Исходя из уравнения (6), каждая частица движется независимым образом. Однако если случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет конечный пространственный радиус корреляции  $l_{\text{кор}}$ , то частицы, расстояние между которыми меньше  $l_{\text{кор}}$ , находятся в общей зоне влияния случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , и могут появиться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц.

Для стационарного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$  уравнение (6) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

Отсюда ясно, что стационарные точки  $\tilde{\mathbf{r}}$ , в которых  $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$ , остаются неподвижными точками. При этом в зависимости от того, являются они устойчивыми или неустойчивыми, они будут притягивать или отталкивать частицы, находящиеся в их окрестности. В силу случайности функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  положение точек  $\tilde{\mathbf{r}}$  также случайно. Аналогичная ситуация должна иметь место и в общем случае пространственно-временного случайного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Если какие-то точки  $\tilde{\mathbf{r}}$  в течение достаточно большого времени остаются устойчивыми, то в отдельных реализациях случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в их окрестностях должны образовываться кластерные области частиц (т.е. компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах). Если же смена устойчивости этих точек на неустойчивость происходит достаточно быстро и частицы не успевают значительно перестроиться, то кластерные области образовываться не будут.

Численное моделирование (см. работы [27, 51, 52]) показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1а для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  схематически изображена эволюция системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге, в безразмерном времени, связанном со статистическими параметрами поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется, и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность (фрактального характера) этого контура. Для случая же дивергентного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1б. Подчеркнем еще раз, что образование кластеров в этом случае — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц исчезает.

Увидеть, как происходит кластеризация частиц, можно на простейшем примере, в котором случайное поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет структуру [53]

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) \sin(2\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (8)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  — случайный векторный процесс. Отметим, что такой вид функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  соответствует первому члену ряда разложения по гармоническим составляющим и обычно используется при численном моделировании задачи [51, 52].

В этом случае уравнение (6) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t) \sin(2\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

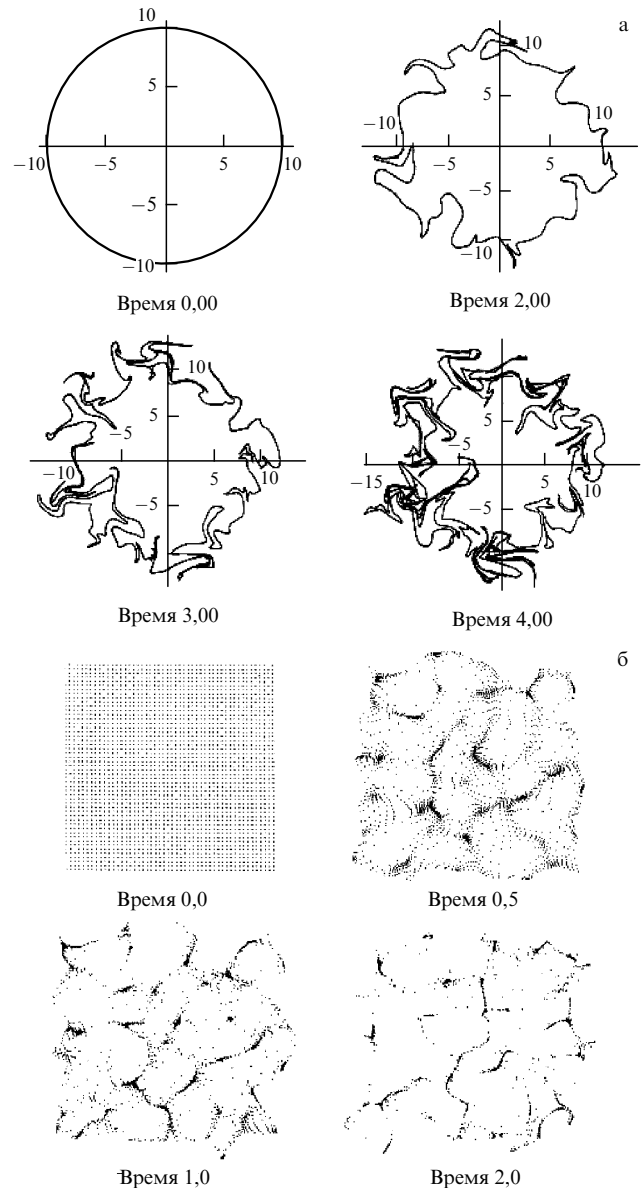


Рис. 1. Результаты численного моделирования диффузии системы частиц в соленоидальном (а) и дивергентном (б) случайных полях скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Для такой модели движение частицы по направлениям вектора  $\mathbf{k}$  и перпендикулярно вектору  $\mathbf{k}$  расщепляется, и если выбрать ось  $x$  в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , то уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt} x(t) = v_x(t) \sin(2kx), \quad x(0) = x_0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_R(t) \sin(2kx), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0.$$

Решение первого уравнения в (9) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{k} \arctan \{ \exp [T(t)] \tan(kx_0) \}, \quad (10)$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t v_x(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Учитывая равенство, вытекающее из (10),

$$\begin{aligned} \sin(2kx) &= \\ &= \sin(2kx_0) \frac{1}{\exp[-T(t)] \cos^2(kx_0) + \exp[T(t)] \sin^2(kx_0)}, \end{aligned}$$

последнее уравнение в (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) &= \\ &= \sin(2kx_0) \frac{\mathbf{v}_R(t)}{\exp[-T(t)] \cos^2(kx_0) + \exp[T(t)] \sin^2(kx_0)}. \end{aligned}$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) &= \mathbf{R}_0 + \sin(2kx_0) \times \\ &\times \int_0^t \frac{\mathbf{v}_R(\tau)}{\exp[-T(\tau)] \cos^2(kx_0) + \exp[T(\tau)] \sin^2(kx_0)} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, если начальное положение частицы  $x_0$  такое, что

$$kx_0 = n \frac{\pi}{2}, \quad (13)$$

где  $n = 0, \pm 1, \dots$ , то частица будет неподвижной, и  $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$ .

Равенства (13) определяют в общем случае плоскости или, в одномерном случае, точки. Они соответствуют нулям поля скоростей. Устойчивость этих точек, однако, зависит от знака функции  $v(t)$ , который изменяется в процессе эволюции. В результате можно ожидать, что частицы будут сгущаться в окрестностях этих точек, если  $v_x(t) \neq 0$ , что и должно соответствовать кластеризации частиц.

Для бездивергентного поля скорости, когда  $v_x(t) = 0$  и, следовательно,  $T(t) \equiv 0$ ,

$$x(t|x_0) \equiv x_0, \quad \mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin(2kx_0) \int_0^t \mathbf{v}_R(\tau) d\tau,$$

т.е. никакой кластеризации не наблюдается.

На рисунке 2а представлен кусок реализации случайного процесса  $T(t)$ , полученный путем численного интегрирования равенства (11) для одной реализации случайного процесса  $v_x(t)$  и используемый для численного моделирования временной эволюции координат четырех частиц  $x(t)$  ( $x \in (0, \pi/2)$  с начальными координатами  $x_0(i) = (\pi/2)(i/5)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ); рис. 2б). Из рисунка 2б видно, что частицы в безразмерный момент времени  $t \approx 4$  (см. [53]) образуют кластер в окрестности точки  $x = 0$ . Далее в момент времени  $t \approx 16$  первоначальный кластер исчезает и образуется новый кластер в окрестности точки  $x = \pi/2$ . В момент времени  $t \approx 40$  снова образуется кластер в окрестности точки  $x = 0$  и т.д. При этом частицы в кластерах помнят свою предысторию и расходятся на значительные расстояния в переходных временных областях (рис. 2в).

Таким образом, мы видим, что в рассматриваемом примере кластер как цельное образование не переходит из одной области пространства в другое, а разрушается с последующим образованием нового. При этом время существования кластеров значительно больше, чем пере-

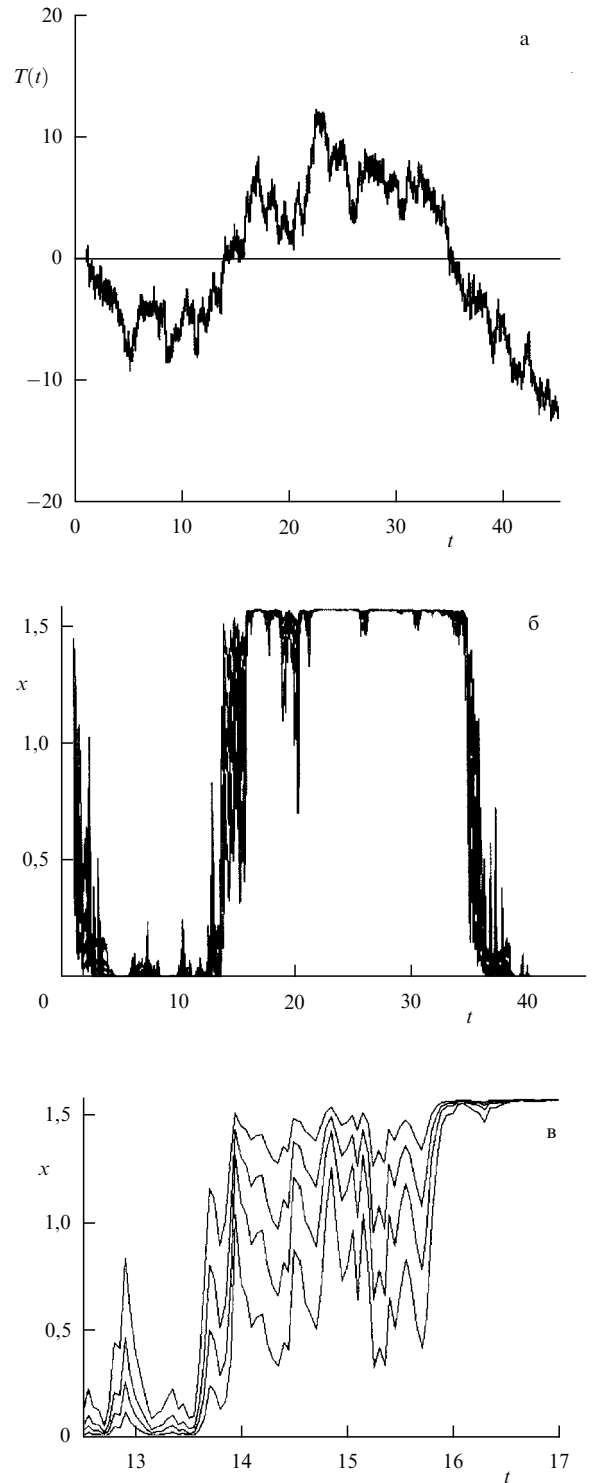


Рис. 2. Кусок реализации случайного процесса  $T(t)$  (а), полученный путем численного интегрирования равенства (11) для одной реализации случайного процесса  $v_x(t)$  и используемый для расчета временной эволюции  $x$  координат четырех частиц (б, в).

ходное время. По-видимому, это — свойство конкретной рассматриваемой модели поля скоростей, и возникает оно из-за стационарности точек (13).

Что касается диффузии частиц по оси  $y$ , то в этом направлении образования кластеров не наблюдается.

Проследить образование кластеров в эйлеровом описании можно также на примере случайного поля скоростей вида (8). В этом случае поле плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$

описывается выражением [53]

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0) \frac{1}{\exp [T(t)] \cos^2(kx) + \exp [-T(t)] \sin^2(kx)}, \quad (14)$$

где функция  $T(t)$  описывается формулой (11), а параметр  $\mathbf{r}_0$  определяется из выражений (10) и (12).

Для бездивергентного поля скорости, когда  $v_x(t) = 0$ ,  $T(t) \equiv 0$ ,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left( \mathbf{r} - \sin(2kx) \int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau \right).$$

В частном случае, когда начальное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{r}$ , т.е.  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$ , равенство (14) упрощается и принимает вид

$$\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} = \frac{1}{\exp [T(t)] \cos^2(kx) + \exp [-T(t)] \sin^2(kx)}. \quad (15)$$

На рисунке 3 представлена пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности  $1 + \rho(\mathbf{r}, t)/\rho_0$ , рассчитанная по формуле (15) в безразмерных пространственно-временных переменных (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе). Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание

поля плотности к узким окрестностям точек  $x \approx 0$  и  $x \approx \pi/2$ , т.е. образование кластеров. Так, на рис. 3а, б изображена временная последовательность ( $t = 1-10$ ) образования кластера в окрестности точки  $x \approx 0$ . На рисунке 3в, г изображена временная последовательность ( $t = 16-25$ ) перетекания поля плотности из окрестности точки  $x \approx 0$  в окрестность точки  $x \approx \pi/2$ , т.е. ликвидация кластера в окрестности  $x \approx 0$  и рождение нового кластера в окрестности  $x \approx \pi/2$ . Далее этот процесс повторяется во времени. "Время жизни" таких кластеров, как видно из рисунков, для рассматриваемой модели имеет порядок "времени их формирования".

Итак, мы рассмотрели простейшую модель для диффузии примеси (частиц и эйлерова поля плотности) в случайном поле скоростей, в которой наглядно виден процесс образования кластерной структуры. Особенностью рассмотренной модели является фиксированный характер точек, где образуются кластеры. Это, конечно, уменьшает ценность рассмотренной модели.

Однако эта модель позволяет понять основное отличие диффузии в дивергентных и бездивергентных полях скоростей. В бездивергентных (несжимаемых) полях скорости частицы (и, следовательно, поле плотности) не успевают притягиваться к устойчивым центрам притяжения за время их существования, и частицы слегка флуктуируют относительно своего первоначального местонахождения. В дивергентном же (сжимаемом) поле скоростей за то же время существования устойчи-

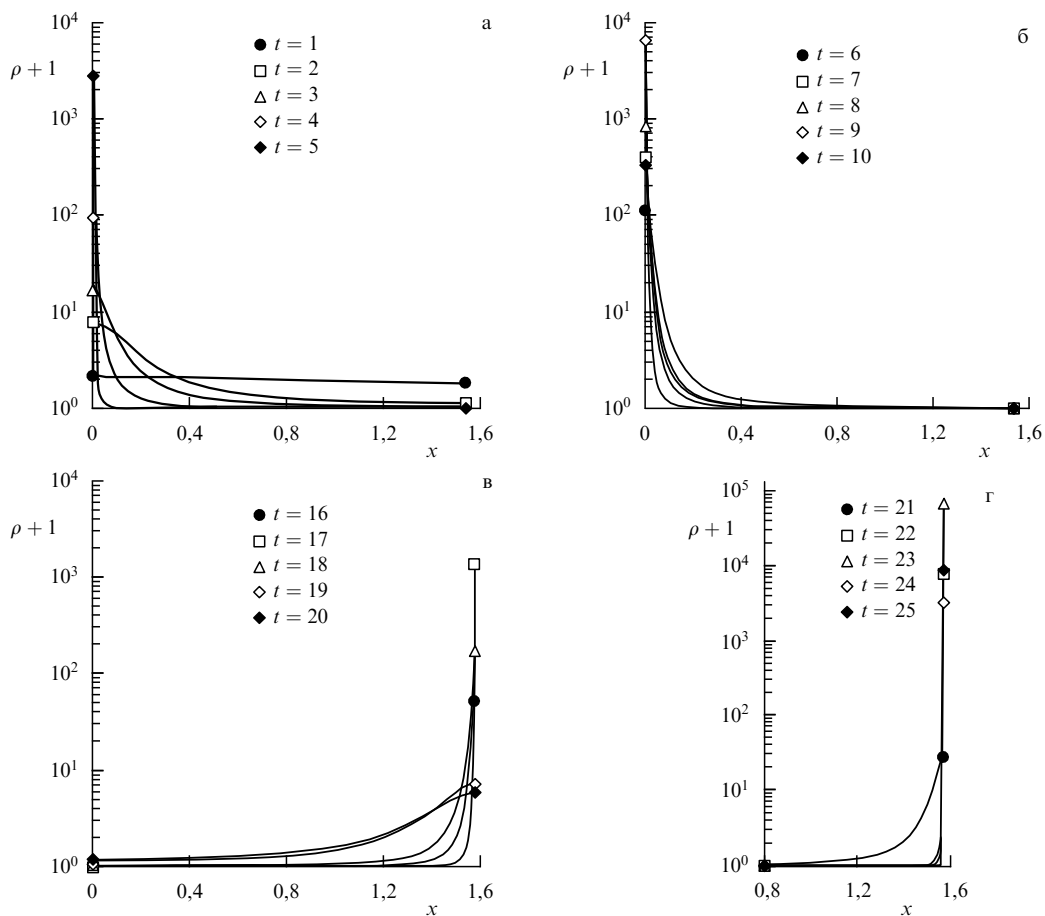


Рис. 3. Пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности.

вых центров притяжения частицы успевают притянуться к ним, так как этот процесс притяжения убыстряется экспоненциальным образом, что наглядно проявляется в формуле (15).

Отметим, что, по-видимому, впервые такого рода кластеризация для системы частиц и поля примеси была отмечена в работах [54, 55], где в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование так называемого Eole эксперимента. В рамках этого глобального эксперимента в 1970–1971 гг. в Аргентине были запущены 500 баллонов постоянной плотности, которые распространялись по всему Южному полушарию на высоте примерно в 12 км.

Результаты статистической обработки экспериментально измеренных относительных расстояний между частицами можно найти, например, в работах [56–58].

Решение системы уравнений (6) зависит от характеристического параметра  $\mathbf{r}_0$  — начальной координаты частицы (это отмечаем вертикальной чертой):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t|\mathbf{r}_0). \quad (16)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{r}_0$ , однозначно определяющего положение произвольной частицы, называют ее *лагранжевыми координатами*. При этом уравнения (6) соответствуют *лагранжеву описанию* эволюции поля плотности числа частиц и плотности активной примеси. Связь между эйлеровым и лагранжевым описаниями задается первым из равенств (16). Разрешив его относительно  $\mathbf{r}_0$ , получим соотношение, выражающее лагранжевы координаты через эйлеровы:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t). \quad (17)$$

Исключая затем с помощью (17) зависимость от  $\mathbf{r}_0$  в оставшемся равенстве (16), вернемся к эйлерову описанию поля плотности пассивной примеси

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t|\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int \rho(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_0, \quad (18)$$

где введена новая функция, называемая *расходимостью*,

$$j(t|\mathbf{r}_0) = \det \|j_{ik}(t|\mathbf{r}_0)\| = \det \left\| \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0)}{\partial r_{0k}} \right\|.$$

Дифференцируя (6) по компонентам вектора  $\mathbf{r}_0$ , приходим к уравнениям для элементов якобиевой матрицы  $j_{ik}(t|\mathbf{r}_0)$ :

$$\frac{d}{dt} j_{ik}(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} j_{ik}(t|\mathbf{r}_0), \quad j_{ik}(0|\mathbf{r}_0) = \delta_{ik}.$$

Отсюда следует, что определитель этой матрицы описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} j(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t|\mathbf{r}_0), \quad j(0|\mathbf{r}_0) = 1. \quad (19)$$

Величина  $j(t|\mathbf{r}_0)$  является количественной мерой степени сжатия или растяжения физически бесконечно малых жидких частиц. Сопоставляя уравнения (6) и (19), видим, что

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t|\mathbf{r}_0)}. \quad (20)$$

Таким образом, выражение (18) можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_0, \quad (21)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками. Дельта-функция в правой части (21) является *индикаторной функцией* для положения лагранжевой частицы, и, следовательно, после усреднения равенства (21) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей получаем хорошо известную связь средней плотности пассивной примеси в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей

$$P(t; \mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \langle \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle$$

положения безынерционной лагранжевой частицы (см., например, [1])

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int \rho_0(\mathbf{r}_0) P(t; \mathbf{r}|\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0.$$

Очевидно, что приведенное равенство справедливо и для малоинерционных частиц, описываемых уравнениями (2).

Итак, в лагранжевом представлении поведение безынерционных частиц и плотности пассивной примеси описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (4), (19). От них легко перейти к линейному уравнению Лиувилля для индикаторных функций в соответствующем фазовом пространстве (см., например, [36, 61]). Для этого введем индикаторную функцию  $\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t|\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j(t|\mathbf{r}_0) - j)$ , (22)

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат  $\mathbf{r}_0$ . Дифференцируя (22) по времени и используя уравнения (4), (5) и (19), приходим к эквивалентному исходной задаче уравнению Лиувилля

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\mathbf{r}_0), \quad (23)$$

$$\Phi_{\text{Lag}}(0; \mathbf{r}, \rho, j|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1).$$

Одновременная плотность вероятности для решения статистических задач (4) и (19) совпадает с усредненной по ансамблю реализаций значений индикаторной функции

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j|\mathbf{r}_0) = \langle \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\mathbf{r}_0) \rangle.$$

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию, аналогичную (22)

$$\Phi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (24)$$

сосредоточенную на поверхности  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$  в трехмерном случае или контуре в двумерном случае. Эта функция связана с лагранжевой индикаторной

функцией очевидным равенством

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty dj j \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0)$$

и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho)], \quad (25)$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

откуда видно, что принципиальные особенности возникают только для дивергентного поля скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ . Разумеется, уравнение (25) можно получить и непосредственно из динамического уравнения (7) (см., например, [36, 61]).

Одноточечная плотность вероятности для решения динамического уравнения (2) в этом случае совпадает с усредненной по ансамблю реализаций индикаторной функцией

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle,$$

и, следовательно, одноточечная плотность вероятности поля плотности в эйлеровом описании связана с одно-временной плотностью вероятностей в лагранжевом описании с помощью равенства

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty dj j P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0). \quad (26)$$

Наряду с этим эйлерова индикаторная функция дает богатую количественную и качественную информацию о геометрической структуре случайного поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$  (*статистическая топография*). В статистической топографии основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const.}$$

Для анализа системы контуров (здесь для простоты будем говорить о двумерном случае) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию (24), сосредоточенную на них и являющуюся функционалом параметров среды.

Через функцию (24) выражаются, например, такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ :

$$S(t, \rho) = \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \quad (27)$$

и общая "масса" поля, заключенная в этих областях:

$$M(t, \rho) = \int_\rho^\infty \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}). \quad (28)$$

Так, для динамики пассивной примеси, описываемой уравнением Лиувилля (25), дифференцируя по времени равенства (27) и (28), получаем выражения

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, \rho) = \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t, \rho) = \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho})$$

и, следовательно, площадь области, ограниченной контуром  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ , а также общая масса, сосредоточенная в этой области, сохраняются для бездивергентного поля скорости. В этом случае очевидно, что также сохраняется число замкнутых контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени, исходя из заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве, определяемого равенством  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho = \text{const}$ .

При наличии у поля скорости потенциальной составляющей все эти величины эволюционируют во времени.

Средние по ансамблю реализаций значения выражений (27) и (28) непосредственно определяются одноточечной плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$  можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ . Так, например, величина

$$l(t, \rho) = \int |\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)| \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) d\mathbf{r} = \oint dl \quad (29)$$

описывает общую длину контуров  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ .

### 3. Статистический анализ диффузии безынерционных частиц и поля плотности примеси

Рассмотрим теперь задачу статистического описания диффузии безынерционных частиц и поля плотности пассивной примеси в случайном поле скоростей в отсутствие среднего потока ( $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$ ).

Случайная составляющая поля скоростей предполагается в общем случае дивергентной ( $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ) и, в то же время, статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ( $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ )

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \int E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{k}, \quad (30)$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) + E_{ij}^p(\mathbf{k}, t),$$

где спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (31)$$

$$E_{ij}^p(\mathbf{k}, t) = E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Здесь через  $E^s(k, t)$  и  $E^p(k, t)$  обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Временной радиус корреляции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  определим равенствами

$$\tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2 = \int_0^\infty B_{ii}(0, \tau) d\tau = \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} E_{ii}(\mathbf{k}, \tau) =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} [(d-1) E^s(k, \tau) + E^p(k, \tau)],$$



где дисперсия поля скоростей

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(0, 0) = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$$

и параметр  $d$  — размерность пространства.

Непосредственный практический интерес представляют следующие случаи.

• Чисто бездивергентный гидродинамический поток, для которого  $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$  ( $E^P(k, t) = 0$ ).

• Случай чисто потенциального поля скоростей ( $E^S(k, t) = 0$ ). Такой случай осуществляется, например, при диффузии примеси в случайных волновых полях.

• Смешанный случай, который осуществляется, например, при диффузии плавучей примеси.

В силу однородности и изотропности поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} B_{kl}(0, \tau) &= D_0(\tau) \delta_{kl}, \quad \frac{\partial}{\partial r_i} B_{kl}(0, \tau) = 0, \\ -\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} B_{kl}(0, \tau) &= \frac{D^S(\tau)}{d(d+2)} [(d+1) \delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} \delta_{li}] + \\ &+ \frac{D^P(\tau)}{d(d+2)} [\delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}]. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь  $d$  — размерность пространства по повторяющимся индексам, как обычно, предполагается суммирование и введены обозначения

$$\begin{aligned} D_0(\tau) &= \frac{1}{d} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ &= \frac{1}{d} \int [(d-1) E^S(k, \tau) + E^P(k, \tau)] d\mathbf{k}, \\ D^S(\tau) &= \int k^2 E^S(k, \tau) d\mathbf{k}, \\ D^P(\tau) &= \int k^2 E^P(k, \tau) d\mathbf{k} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что интегралы по времени от коэффициентов (33) описываются выражениями

$$\begin{aligned} D_0 &= \int_0^\infty D_0(\tau) d\tau = \frac{1}{d} \sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0, \\ D^S &= \int_0^\infty D^S(\tau) d\tau = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} k^2 E^S(k, \tau), \\ D^P &= \int_0^\infty D^P(\tau) d\tau = \tau_{\operatorname{div} \mathbf{u}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\tau_{\operatorname{div} \mathbf{u}}$  — временной радиус корреляции поля  $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а  $\sigma_{\operatorname{div} \mathbf{u}}^2 = \langle (\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r})^2 \rangle$  — ее дисперсия.

Для бездивергентного поля скоростей ( $E^P = 0$ ) равенства (32) и (33) упрощаются и величина

$$\begin{aligned} D^S &= \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} k^2 E^S(k, \tau) = \\ &= -\frac{1}{d-1} \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau \end{aligned} \quad (35)$$

связана с вихревой структурой случайного бездивергентного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  коррелирует с решениями уравнений (23), (25), которые являются функционалами поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Расщепление корреляций для гауссова поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  осуществляется на основе формулы Фурутцу–Новикова

$$\begin{aligned} \langle u_k(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle &= \\ &= \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} \right\rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

справедливой для гауссова случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с нулевым средним значением и произвольным функционалом от него  $R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]$ ,  $0 \leq \tau \leq t$  (см. [59, 60], а также [36, 61]).

### 3.1. Приближение дельта-коррелированного во времени поля скоростей

При расчете статистических свойств диффузии безынерционных частиц и поля плотности воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , в рамках которого корреляционный тензор (30) аппроксимируется выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = 2B_{ij}^{\operatorname{eff}}(\mathbf{r}) \delta(\tau), \quad (37)$$

где

$$B_{ij}^{\operatorname{eff}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) d\tau.$$

В этом случае вместо равенств (32) имеем соответственно равенства

$$\begin{aligned} B_{kl}^{\operatorname{eff}}(0) &= D_0 \delta_{kl}, \quad \frac{\partial}{\partial r_i} B_{kl}^{\operatorname{eff}}(0) = 0, \\ -\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} B_{kl}^{\operatorname{eff}}(0) &= \frac{D^S}{d(d+2)} [(d+1) \delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} \delta_{li}] + \\ &+ \frac{D^P}{d(d+2)} [\delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}] \end{aligned} \quad (38)$$

с коэффициентами (34).

Диффузия примеси в случайном поле скоростей в лагранжевом представлении описывается уравнением Лиувилля (23), а в эйлеровом представлении — уравнением (25). Усреднение этих уравнений по ансамблю реализаций поля скоростей  $\{\mathbf{u}\}$  приводит к уравнениям для одновременного лагранжева вероятностного распределения  $P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0)$  и одноточечной плотности эйлерового вероятностного распределения  $P(t, \mathbf{r}; \rho)$ .

Расщепление корреляций для гауссова поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с функционалами от него осуществляется по формуле Фурутцу–Новикова (36), которая для дельта-коррелированного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  упрощается и принимает вид (см. также [36, 61])

$$\begin{aligned} \langle u_k(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle &= \\ &= \int B_{kl}^{\operatorname{eff}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]}{\delta u_l(\mathbf{r}', t-0)} \right\rangle d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (39)$$

где  $0 \leq \tau \leq t$ .

**3.1.1. Лагранжево описание (диффузия частиц).** Усреднив уравнение (23) по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , используя формулу Фурутцу–Новикова (39) и

принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta u_{\beta}(\mathbf{r}', t - 0)} \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \\ & = \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_{\beta}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \right\} \times \\ & \times \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

и соотношения (38), приходим к уравнению Фоккера – Планка для одновременной лагранжевой плотности вероятностей  $P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0)$  координаты частицы  $\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0)$ , ее плотности  $\rho(t | \mathbf{r}_0)$  и расходимости  $j(t | \mathbf{r}_0)$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \\ & = D^p \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial j} \rho j + \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right) P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0), \\ & P(0; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1). \quad (40) \end{aligned}$$

Решение уравнения (40) таково:

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) P(t; j | \mathbf{r}_0) \delta\left(\rho - \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j}\right), \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}') & = \exp(D_0 t \Delta) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ & = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4D_0 t}\right\} \quad (42) \end{aligned}$$

— вероятностное распределение координат частицы пассивной примеси, а

$$\begin{aligned} P(t; j | \mathbf{r}_0) & = \exp\left(D^p t \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2\right) \delta(j - 1) = \\ & = \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(j \exp \tau)}{4\tau}\right\} \quad (43) \end{aligned}$$

— вероятностное распределение поля расходимости в ее окрестности. В (43) и ниже используется безразмерное время  $\tau = D^p t$ . Подчеркнем, что полученное решение (41) означает статистическую независимость координат  $\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0)$  и расходимости  $j(t | \mathbf{r}_0)$  в окрестности частицы с лагранжевыми координатами  $\mathbf{r}_0$ . Причем логарифмически нормальное распределение (43) означает, что величина  $\chi(t | \mathbf{r}_0) = \ln j(t | \mathbf{r}_0)$  распределена по гауссову закону с параметрами

$$\langle \chi(t | \mathbf{r}_0) \rangle = -\tau, \quad \sigma_{\chi}^2(t) = 2\tau. \quad (44)$$

В частности, из (43), как, впрочем, и непосредственно из уравнения (40), вытекают следующие выражения для моментов случайного поля расходимости:

$$\langle j^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \exp[n(n-1)\tau], \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (45)$$

Подчеркнем, что средняя расходимость постоянна:  $\langle j(t | \mathbf{r}_0) \rangle = 1$ , а ее высшие моменты экспоненциально растут со временем.

Заметим еще, что согласно (20) и (45) имеем следующее выражение для лагранжевых моментов плотности:

$$\langle \rho^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}_0) \exp[n(n+1)\tau],$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост как средней плотности, так и ее высших моментов в лагранжевом представлении. При этом плотность вероятности для плотности частицы имеет вид

$$P(t; \rho | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(\rho \exp(-\tau)/\rho_0(\mathbf{r}_0))}{4\tau}\right\}. \quad (46)$$

Его можно получить и как решение уравнения Фоккера – Планка, следующего из (40),

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho | \mathbf{r}_0) = D^p \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P(t; \rho | \mathbf{r}_0),$$

$$P(0; \rho | \mathbf{r}_0) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho).$$

Выявленное выше парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности, состоящее в одновременном росте со временем их моментных функций, объясняется свойствами логарифмически нормального распределения вероятностей (см. [34, 36, 62]). Так, кривой типичной реализации случайной расходимости является экспоненциально спадающая кривая

$$j^*(t) = \exp(-\tau).$$

Напомним, что кривой типичной реализации случайного процесса  $z(t)$  мы называем детерминированную кривую  $z^*(t)$ , которая обладает следующим свойством: для любого интервала времени  $(t_1, t_2)$  случайный процесс  $z(t)$  как бы "обвивает" кривую  $z^*(t)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $z(t) > z^*(t)$ , совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство  $z(t) < z^*(t)$ , т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (47)$$

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также мажорантные оценки. Например, с вероятностью  $p = 1/2$

$$j(t | \mathbf{r}_0) < 4 \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)$$

на всем интервале времени  $t \in (t_1, t_2)$ .

Аналогично, для реализаций плотности имеем кривую типичной реализации и минорантную оценку

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(\tau), \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) > \frac{\rho_0}{4} \exp\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства частицы в потоках, содержащих случайную потенциальную составляющую, качественно отличаются от статистических свойств частицы в бездивергентных потоках, где  $j(t | \mathbf{r}_0) \equiv 1$ , а плотность в окрестности фиксированной частицы сохраняется:  $\rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0) = \text{const}$ . Приведенные выше статистические оценки для частицы означают, что статистика случайных процессов  $j(t | \mathbf{r}_0)$  и  $\rho(t | \mathbf{r}_0)$  формируется выбросами их реализаций относительно типичных реализаций.

В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях дивергентного и бездивергентного поля скоростей по сути одинаковы.

Рассмотрим теперь совместную динамику двух частиц в отсутствие среднего потока. В этом случае

индикаторная функция

$$\Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_2)$$

описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) \right] \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

И усреднение этой функции по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с учетом формулы Фурутцу – Новикова (36) и равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t - 0)} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ = - \left[ \frac{\partial}{\partial r_{1j}} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial r_{2j}} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \right] \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

приводит для совместной плотности вероятностей положения двух частиц

$$P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$$

к уравнению Фоккера – Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i} \partial r_{2j}} \right] B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{0}) P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (48)$$

Умножая теперь уравнение (48) на функцию  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{l})$  и интегрируя по  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , получаем для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц

$$P(t; \mathbf{l}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{l}) \rangle$$

уравнение Фоккера – Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{l}) = \frac{\partial^2}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) P(t; \mathbf{l}), \quad P(0; \mathbf{l}) = \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0), \quad (49)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = 2 [B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{0}) - B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l})]$$

— структурная матрица векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а  $\mathbf{l}_0$  — начальное расстояние между частицами.

В общем случае решить уравнение (49) не удастся. Однако если начальное расстояние между частицами  $l_0 \ll l_{\text{cor}}$ , где  $l_{\text{cor}}$  — пространственный радиус корреляции поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , то можно разложить функции  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{l})$  в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = - \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l})}{\partial l_i \partial l_j} \Big|_{\mathbf{l}=\mathbf{0}} l_i l_j.$$

С использованием представления (31)–(33) диффузионный тензор упрощается и может быть записан в виде

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = \frac{1}{d(d+2)} [(D^s(d+1) + D^p) \delta_{\alpha\beta} l^2 - \\ - 2(D^s - D^p) l_\alpha l_\beta], \end{aligned} \quad (50)$$

где  $d$  — размерность пространства.

Подставляя теперь (50) в (49), умножая обе части получившегося уравнения на  $l^n$  и интегрируя по  $\mathbf{l}$ ,

получаем замкнутое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \langle l^n(t) \rangle = \frac{1}{d(d+2)} [(D^s(d+1) + D^p) n(d+n-2) - \\ - 2(D^s - D^p) n(n-1)], \end{aligned}$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ( $n = 1, 2, \dots$ ). При этом распределение вероятностей для случайного процесса  $l(t)/l_0$  будет логарифмически нормальным. Отметим, что, умножая уравнение (49) на  $\delta(l(t) - l)$  и интегрируя по  $\mathbf{l}$ , легко получить уравнение для плотности вероятностей модуля вектора  $\mathbf{l}(t)$

$$P(t; l) = \langle \delta(|\mathbf{l}(t)| - l) \rangle = \int \delta(|\mathbf{l}(t)| - l) P(t, \mathbf{l}) d\mathbf{l}$$

вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, l) = - \frac{\partial}{\partial l} \frac{D_{ii}(l)}{l} P(t, l) + \frac{\partial}{\partial l} N(l) P(t, l) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial l^2} N(l) P(t, l), \end{aligned}$$

где  $N(l) = l_j l_i D_{ij}(\mathbf{l})/l^2$ .

Следовательно, типичной реализацией для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция времени

$$l^*(t) = \exp \left\{ \frac{1}{d(d+2)} \{ D^s d(d-1) - D^p(4-d) \} t \right\}. \quad (51)$$

Отсюда следует, что в двумерном случае ( $d = 2$ ) выражение

$$l^*(t) = \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\}$$

существенно зависит от знака разности ( $D^s - D^p$ ). В частности, для бездивергентного поля скоростей ( $D^p = 0$ ) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D^s t \ll \ln \left( \frac{l_{\text{cor}}}{l_0} \right),$$

при которых справедливо разложение (50). В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ( $D^s = 0$ ) — типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц "слиться". Учитывая, что при этом сами жидкие частицы сжимаются, мы видим, что в этом случае должны образовываться *кластеры*, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах, что согласуется с результатами численного моделирования эволюции реализации однородного вначале распределения частиц в случайном потенциальном поле скоростей, приведенного на рис. 1б (правда, для совершенно другой статистической модели поля скоростей). Это означает, что само явление кластеризации не зависит от модели случайного поля скоростей, хотя, конечно, статистические параметры, характеризующие это явление, могут существенно зависеть от модели.

В трехмерном же случае ( $d = 3$ ) из (51) следует, что

$$I^*(t) = \exp \left\{ \frac{1}{15} (6D^s - D^p)t \right\},$$

и типичная реализация будет экспоненциально затухать со временем при выполнении более жесткого (чем в двумерном случае) условия

$$D^p > 6D^s.$$

В одномерном случае

$$I^*(t) = \exp(-D^p t)$$

типичная реализация всегда убывает со временем, так как поле скоростей в этом случае всегда дивергентно.

**3.1.2. Эйлерово описание.** Для описания поведения реализаций поля примеси в случайном поле скоростей нужно знать вероятностное распределение ее плотности. Уравнение для эйлеровой плотности вероятностей легко вывести в силу формулы (26), домножив уравнение (40) на  $j$  и интегрируя его по всем возможным значениям  $j$  и  $\mathbf{r}_0$ . В итоге находим уравнение для плотности вероятности поля плотности в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(t, \mathbf{r}; \rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t, \mathbf{r}; \rho), \quad (52)$$

$$P(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho).$$

Уравнение (52) можно получить и непосредственно, усредняя уравнение (25) по ансамблю реализаций случайного дельта-коррелированного во времени поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в отсутствие среднего потока с помощью формулы Фурутцу–Новикова (39) и используя выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta \Phi(t, \mathbf{r}; \rho)}{\delta u_{\beta}(\mathbf{r}', t - 0)} =$$

$$= \left\{ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_{\beta}} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_{\beta}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right\} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho).$$

Из уравнения (52), в частности, следует, что моментные функции поля плотности описываются уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = D^p n(n-1) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (53)$$

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}).$$

Его решение имеет вид

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \exp[n(n-1)\tau] \int P(t; \mathbf{r}|\mathbf{r}') \rho_0^n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (54)$$

где функция  $P(t; \mathbf{r}|\mathbf{r}')$  описывается равенством (42).

Так, если начальная плотность примеси всюду одинакова:  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ , то вероятностное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{r}$  и логнормально с плотностью вероятности

$$P(t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho \exp(\tau)/\rho_0)}{4\tau} \right\}. \quad (55)$$

При этом все моментные функции, начиная со второй, экспоненциально растут со временем:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n \exp[n(n-1)\tau], \quad (56)$$

а типичная реализация поля плотности в любой фиксированной точке пространства экспоненциально падает во времени:

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(-\tau), \quad (57)$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках. Формирование же эйлеровой статистики плотности в любой фиксированной точке пространства идет за счет флуктуаций плотности вокруг этой кривой.

Выше мы обсудили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Покажем теперь, что это распределение дает также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

Для наглядности ограничимся двумерным случаем. Как говорилось выше, важные сведения о пространственном поведении реализаций несет анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}, \quad (58)$$

и таких функционалов поля плотности, как общая величина площади  $S(t, \rho)$ , где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ , общая масса примеси  $M(t, \rho)$ , заключенная в этих областях, средние значения которых описываются одноточечной плотностью вероятностей:

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \quad (59)$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}).$$

Подставив сюда решение уравнения (52), после несложных преобразований легко найти явные выражения для этих величин:

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int \Phi \left( \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{\rho_0(\mathbf{r}) \exp(-\tau)}{\rho} \right) \right) d\mathbf{r}, \quad (60)$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int \rho_0(\mathbf{r}) \Phi \left( \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \left( \frac{\rho_0(\mathbf{r}) \exp(\tau)}{\rho} \right) \right) d\mathbf{r},$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл ошибок,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy.$$

Отсюда видно, в частности, что при  $\tau \gg 1$  средняя площадь областей, где плотность выше уровня  $\rho$ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} \exp \left( -\frac{\tau}{4} \right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} d\mathbf{r}, \quad (61)$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} \exp \left( -\frac{\tau}{4} \right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} d\mathbf{r} \quad (62)$$

монотонно стремится к полной ее массе  $M = \int \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ . Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том,

что частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окруженные разреженными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально примесь равномерно распределена на плоскости:  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ . При этом средняя удельная площадь областей (приходящаяся на единицу площади), внутри которых  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ , равна

$$s(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} P(t; \tilde{\rho}) d\tilde{\rho} = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 \exp(-\tau)/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (63)$$

где  $P(t; \rho)$  — не зависящее от  $\mathbf{r}$  решение уравнения (52) (т.е. функция (55)), а удельная средняя масса примеси (приходящаяся на единицу площади), сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$m(t, \rho) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) d\tilde{\rho} = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 \exp(\tau)/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (64)$$

Из (63), (64) следует, что на больших временах их средняя удельная площадь убывает по закону

$$s(t, \rho) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \quad (65)$$

независимо от отношения  $\rho/\rho_0$ , в то время как внутри этой площади собирается практически вся масса примеси

$$m(t, \rho) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right). \quad (66)$$

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения  $\rho/\rho_0$  (см. [34, 36]). Так, если  $\rho/\rho_0 < 1$ , то в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 1$  и  $m(0, \rho) = 1$ . Далее, ввиду того, что частицы примеси первое время стремятся разбежаться, образуются небольшие области, где

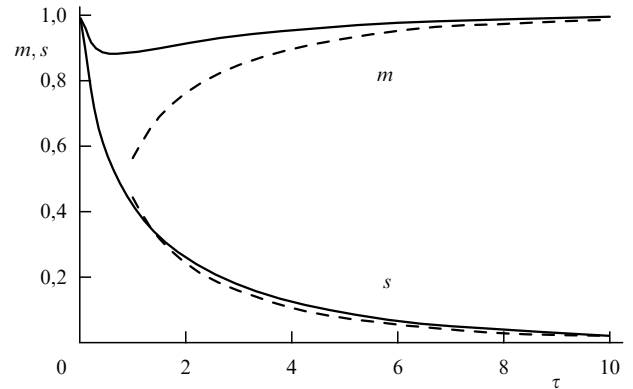


Рис. 4. Динамика образования кластеров для  $\rho/\rho_0 = 0,5$ .

$\rho(\mathbf{r}, t) < \rho$ , и эти области содержат незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (65), (66) (рис. 4). Отметим, что в момент времени  $\tau^* = \ln(\rho/\rho_0)$  величина площади  $s(t^*, \rho) = 1/2$ .

В обратном, более интересном случае  $\rho/\rho_0 > 1$  в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 0$  и  $m(0, \rho) = 0$ . Из-за начального разбегания частиц образуются небольшие кластерные области, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ ; эти области практически сохраняются во времени и интенсивно втягивают в себя значительную часть общей массы. В дальнейшем площади этих областей с течением времени уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (65), (66) (рис. 5).

Для более детального описания поля плотности в случайном поле скоростей необходимо, как указывалось ранее, рассматривать его пространственный градиент

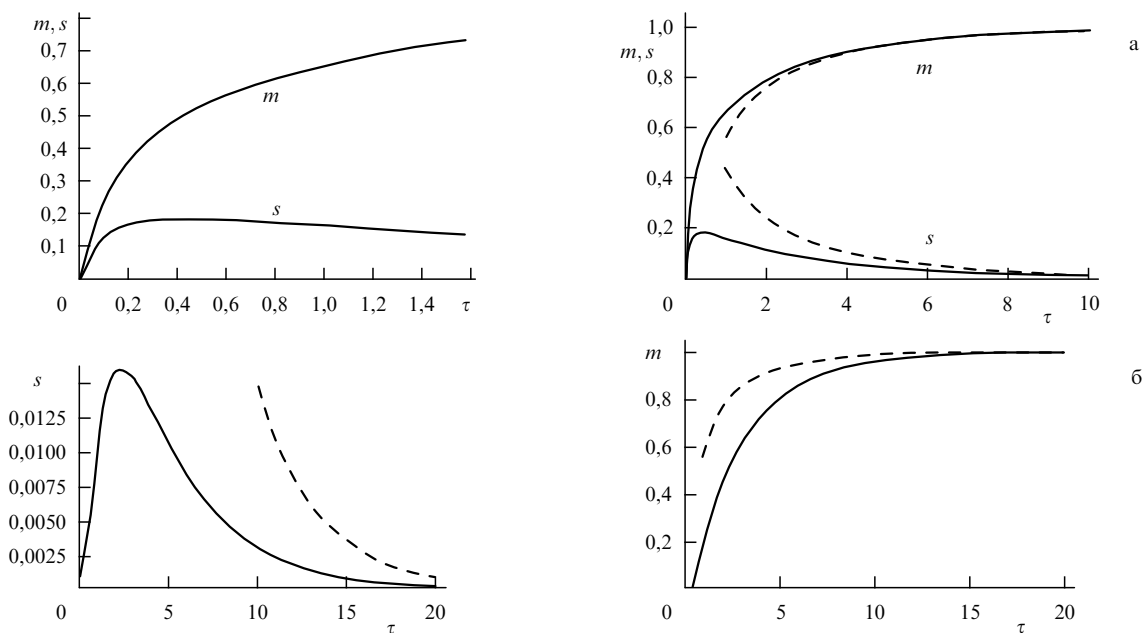


Рис. 5. Динамика образования кластеров для  $\rho/\rho_0 = 1,5$  (а) и  $\rho/\rho_0 = 10$  (б).

$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$  и, вообще говоря, производные высшего порядка. При этом для бездивергентного потока жидкости сохраняется среднее значение градиента плотности частицы примеси  $\langle \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)$ . Что же касается моментных функций модуля градиента плотности, то они описываются уравнениями (см., например, [27, 34, 36])

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \frac{n(d+n)(d-1)}{d(d+2)} D^s \langle p^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle, \quad (67)$$

$$\langle p^n(0|\mathbf{r}_0) \rangle = p_0^n(\mathbf{r}_0).$$

Следовательно, модуль градиента поля плотности в лагранжевом описании является логарифмически нормальной величиной, типичная реализация которой так же, как и его моментные функции, экспоненциально растут во времени. В частности, первый и второй моменты в двумерном случае описываются соответственно равенствами

$$\langle |\mathbf{p}(t|\mathbf{r}_0)| \rangle = |\mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)| \exp\left(\frac{3}{8} D^s t\right), \quad (68)$$

$$\langle \mathbf{p}^2(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \mathbf{p}_0^2(\mathbf{r}_0) \exp(D^s t).$$

Отметим, что логнормальное распределение для модуля градиента примеси, впервые предположенное в работе [63], согласуется с атмосферными экспериментальными данными [64, 65].

Кроме того, из формулы (29) следует, что общая средняя длина контура  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$  (в двумерном случае) также экспоненциально растет во времени по закону

$$\langle l(t, \rho) \rangle = l_0 \exp(D^s t),$$

где  $l_0$  — начальная длина контура [26, 27]. Напомним, что в этом случае для бездивергентного поля скоростей сохраняется число контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени, исходя из заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве.

Таким образом, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным; пространственные градиенты обостряются, и линии уровня приобретают фрактальный характер. Такую картину мы видели на рис. 1а, соответствующем численному моделированию, правда, для совершенно другой модели флуктуаций поля скоростей. Это означает, что общие особенности поведения, отмеченные выше, не зависят от типа моделей.

Выше было показано, что при наличии потенциальной составляющей у поля скорости может происходить кластеризация частиц в зависимости от соотношения между соленоидальной и потенциальной составляющими поля скоростей. В то же время в эйлеровом поле плотности всегда осуществляется кластеризация при наличии потенциальной составляющей поля скоростей. Наряду с динамическим уравнением (7) представляет определенный интерес и уравнение, соответствующее переносу неконсервативной примеси (см., например, [40])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}).$$

В этом случае в лагранжевом описании уравнение для динамики частиц совпадает с уравнением (4), и, следовательно, для частиц может осуществляться кластеризация. Однако в эйлеровом описании, как легко видеть, кластеризация не осуществляется. В этом случае, аналогично бездивергентному полю скоростей, сохраняется как среднее число контуров, так и средняя площадь, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ , и средняя "масса" примеси  $\int \rho(\mathbf{r}, t) dS$ , сосредоточенная в этих контурах.

### 3.2. Условия применимости дельта-коррелированного приближения и диффузионное приближение

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (37) является условие малости временного радиуса корреляции  $\tau_0$  случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче, т.е.  $\tau_0 \ll \tau_1$ . При наличии среднего потока  $\tau_1 \sim L/v$  или  $\tau_1 \sim L/\sqrt{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}$ , где параметр  $L$  представляет типичный масштаб длины. Этот масштаб может зависеть от свойств среднего течения (например,  $L = v/|\nabla v|$  — типичный размер вихрей) или от плотности примеси ( $L = \rho/|\nabla \rho|$ ). В любом случае эти размеры уменьшаются со временем за счет появления мелкомасштабных структур. В результате два временных масштаба становятся сравнимы, и в такой ситуации приближение дельта-коррелированности становится неприменимым. Необходимо принимать во внимание конечность временного радиуса корреляции  $\tau_0$ . При отсутствии среднего потока параметр  $L = l_0$  совпадает с пространственным радиусом корреляции случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , и условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  являются условия

$$t \gg \tau_0, \quad \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0^2}{l_0^2} \ll 1. \quad (69)$$

Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  можно провести в рамках диффузионного приближения (см., например, [34] и книги [36, 61]). Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. В рамках этого приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка  $\tau_0$  несущественно, т.е. частицы и поле примеси на этих масштабах эволюционируют как свободные. Более подробно применение этого приближения будет рассмотрено в следующем разделе при анализе кластеризации малоинерционной примеси. А здесь только отметим, что при отсутствии среднего потока уравнения для плотностей вероятностей как лагранжевых, так и эйлеровой переменных при условии  $t \gg \tau_0$  полностью совпадают с уравнениями, полученными выше, в приближении дельта-коррелированности поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Условиями применимости диффузионного приближения при этом также являются условия (69).

Предельный случай стационарного случайного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , соответствующий предельному случаю  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , не описывается диффузионным приближением. Этот случай, удобный для численного моделирования, очень труден для аналитических исследований, хотя некоторые результаты были получены и в этом случае (см., например, работы [17, 22]).

### 3.3. Особенности диффузии примеси в быстропеременных случайных волновых полях

Движение частиц в быстропеременных случайных полях скорости или под действием быстропеременных случайных сил представляет собой важную проблему, имеющую многочисленные приложения в механике, гидродинамике, физике плазмы и т.п. При этом хорошо известно, что стохастический перенос в быстропеременных колебательных и волновых полях приводит к ряду важных физических явлений, таких, например, как ускорение Ферми, стохастический нагрев плазмы и т.п. [66, 67].

В ряде случаев коэффициенты диффузии как в приближении дельта-коррелированного случайного поля, так и в диффузионном приближении могут обратиться в нуль. Такой случай, например, осуществляется при движении частиц в быстропеременных случайных волновых полях скорости [68] (см. также работы [69]).

Так, диффузия безынерционных частиц в этом случае описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (70)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — статистически однородное в пространстве и стационарное во времени случайное волновое векторное поле, такое, что  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ .

Введем теперь новое поле  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  с единичной дисперсией, такое, что

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sigma_u \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t),$$

где дисперсия поля скоростей

$$\sigma_u^2 = B_{ii}(0, 0).$$

Будем считать, что это случайное поле имеют волновое происхождение, и, следовательно, его корреляционный тензор имеет структуру

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int F_{ij}(\mathbf{k}) \cos \{ \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t \} d\mathbf{k}, \quad (71)$$

где спектральная функция  $F_{ij}(\mathbf{k})$  такова, что  $\int F_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = 1$ , и  $\omega = \omega(\mathbf{k}) > 0$  — дисперсионная кривая для волновых движений. Так, например, для акустических волн  $\omega(\mathbf{k}) = ck$ , где  $c$  — скорость распространения звука; для гравитационных волн на поверхности глубокой жидкости  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{gk}$ ; для внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде  $\omega(\mathbf{k}) = N\sqrt{k^2 - k_z^2}/k$ , где  $N$  — частота Брента–Вяйсяля; для волн Россби в атмосфере и океане  $\omega(\mathbf{k}) = -\beta k_x/k^2$ , где  $\beta$  — градиент силы Кориолиса в направлении  $y$ , и т.п.

Для традиционных волновых движений спектральная функция поля скорости удовлетворяет условию  $\Phi_{ij}(0) = 0$ , где  $\Phi_{ij}(\omega) = \int F_{ij}(\mathbf{k}) \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})] d\mathbf{k}$ , и тензорный коэффициент диффузии в соответствующем уравнении Фоккера–Планка обращается в нуль, т.е.

$$D_{ij} = \int_0^\infty B_{ij}(0, t) dt = 0.$$

Этот же коэффициент диффузии возникает и в диффузионном приближении при условии  $t \gg \tau_0$ , где  $\tau_0$  — временной радиус корреляции поля скорости. И, следовательно, как приближение дельта-коррелированности поля скоростей, так и диффузионное приближение не

приводит к конечному результату, для получения которого необходимо учитывать члены высшего порядка малости [68].

Пусть максимум спектральной функции  $F_{ij}(\mathbf{k})$  соответствует некоторому волновому числу  $k_m$ , а максимум спектральной функции  $\Phi_{ij}(\omega)$  — частоте  $\omega_m$ . Определим пространственный и временной масштабы  $l = 2\pi/k_m$ ,  $\tau_0 = 2\pi/\omega_m$ . При этом величина  $\varepsilon = \sigma_u \tau_0 / l$  для реальных волновых полей, как правило, мала и может рассматриваться как основной малый параметр задачи, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ . Будем также считать, что во всей области, где определен спектр поля скорости, справедливо неравенство  $\sigma_u k \ll \omega(k)$ , которое обуславливает отсутствие резонансов между разными компонентами поля скорости.

Существование максимумов спектральных функций  $F_{ij}(\mathbf{k})$  и  $\Phi_{ij}(\omega)$  отнюдь не означает присутствие квазирегулярной составляющей в поле случайных скоростей. Их существование обусловлено тем, что само поле скоростей является результатом дифференцирования (по пространству и времени) других вспомогательных волновых полей (например, поля потенциала для потенциального поля скоростей или поля смещения границы раздела и т.п.). Конечно, если спектральные функции являются очень "узкими", т.е. имеют дельта-образный вид относительно центральной частоты (волнового числа), то возможно предварительно упростить задачу путем динамического усреднения по быстрым осцилляциям с центральной частотой (волновым числом) исходных стохастических уравнений. Однако для большинства геофизических волновых задач такая ситуация не осуществляется.

Отметим, что гипотеза статистической пространственной однородности имеет, вообще говоря, ограниченную применимость и не справедлива, например, для волн в атмосферном или океаническом волноводах, при рассмотрении переноса ограниченными волновыми пакетами и т.п. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением гауссова статистически однородного волнового поля скорости, сосредоточив внимание на принципиальной стороне вопроса. Для получения конкретных количественных результатов необходимо рассматривать статистические модели самого волнового поля с точностью до квадратичных членов. При этом, вообще говоря, возникает средний перенос (стоксов дрейф). Диффузия частиц для разных частных случаев рассматривалась, например, в работах [70–72] на основе подхода, предложенного в свое время Тейлором [11]. Применение же к указанному классу задач более общего и последовательного подхода, справедливого для волн различной природы (предложенного в работе [68] и основанного на построении метода последовательных приближений для решения уравнений для вариационных производных) позволяет получить некоторые обобщения теории переноса, основанной на уравнении Фоккера–Планка. Этот подход позволяет вычислять различные статистические характеристики ансамблей частиц, переносимых волновыми течениями, и анализировать на основе методов статистической топографии эффекты, связанные с кластеризацией и образованием когерентных структур в полях плотности примеси.

**3.3.1. Лагранжево описание.** Используя спектральное представление поля скоростей (71) и его свойства,

можно вычислить коэффициенты диффузии во втором приближении, и уравнение для плотности вероятности положения частицы  $P(\mathbf{r}, t)$  для больших значений времен ( $t \gg \tau_0$ ) можно записать в виде [68]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = & -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} k_i F_{ki}(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial r_k} P(\mathbf{r}, t) + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \times \\ & \times \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} P(\mathbf{r}, t) + \\ & + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{2i} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \times \\ & \times \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (72)$$

где  $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ ,  $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ .

Уравнение (72) представляет собой уравнение Фоккера – Планка, описывающее плотность вероятности положения частицы, переносимой статистически однородным гауссовым волновым полем скоростей.

Для изотропных флуктуаций поля  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  уравнение (72) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = D_d \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} P(\mathbf{r}, t), \quad (73)$$

соответствующий гауссову случайному векторному процессу  $\mathbf{r}(t)$  со средним значением  $\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \mathbf{r}_0$  и дисперсией

$$\sigma_{\mathbf{r}}^2(t) = \langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2 \rangle = 2dD_d t,$$

где  $d$  — размерность пространства, а коэффициент диффузии

$$D_d = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ii}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (74)$$

В этом случае спектральный тензор волнового поля скоростей имеет структуру

$$F_{ki}(\mathbf{k}) = F^s(k) \left( \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right) + F^p(k) \frac{k_i k_k}{k^2}, \quad (75)$$

где  $F^s(k)$  и  $F^p(k)$  — соответственно соленоидальная и потенциальная составляющие спектрального тензора,  $\omega(\mathbf{k}) \equiv \omega(k)$ . Следовательно, для коэффициента диффузии получаем выражение

$$\begin{aligned} D_d = & \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega_1^2} k_1^2 F_{ii}(\mathbf{k}_1) \int d\mathbf{k}_2 F_{ll}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) = \\ = & \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega_1^2} k_1^2 [F^s(k_1)(d-1) + F^p(k_1)]^2 \times \\ & \times \int d\mathbf{k}_2 \delta(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (76)$$

Для анизотропной среды появляется пространственная асимметрия векторного процесса  $\mathbf{r}(t)$ . Его среднее

значение и дисперсия описываются выражениями

$$\langle r_m(t) \rangle = r_{0m} + t \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int k_i F_{mi}(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})}, \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{r}}^2(t) = & \langle \mathbf{r}^2(t) - \langle \mathbf{r}(t) \rangle^2 \rangle = \\ = & t \sigma_{\mathbf{u}}^4 \pi \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ii}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) + \\ & + t \sigma_{\mathbf{u}}^4 \pi \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{2i} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lk}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned}$$

Как видим, коэффициент диффузии оказывается пропорциональным не дисперсии поля скорости, а ее квадрату. Это связано с тем, что в данной задаче отсутствуют резонансы типа "волна – частица", что ведет к уменьшению порядка дисперсии скорости случайного дрейфа частиц. Задача оказывается подобной задачам о колебаниях маятника Капицы или о вихревом дрейфе заряженных частиц в быстропеременном электрическом поле [66], где основной эффект также имеет квадратичную величину.

**3.3.2. Эйлерово описание.** Перейдем теперь к статистическому описанию эйлерова представления. Для простоты будем считать, что начальное распределение поля плотности постоянно, т.е.  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ , и, следовательно, случайная функция  $\rho(\mathbf{r}, t)$  будет статистически однородной в пространстве, т.е. все ее одноточечные статистические характеристики не будут зависеть от пространственной точки  $\mathbf{r}$ .

Используя теперь спектральное представление (71) и вычисляя коэффициенты во втором приближении, можно получить уравнение [68]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = \tilde{D}_d^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho) + \tilde{D}_d^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t; \rho), \quad (78)$$

где  $d$  — размерность пространства и

$$\begin{aligned} \tilde{D}_d^{(2)} = & \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 k_{1k} k_{1i} k_{1l} (k_{1j} - k_{2j}) F_{ki}(\mathbf{k}_1) \times \\ & \times \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2), \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_d^{(3)} = & -\sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 k_{1k} k_{1i} k_{1l} k_{2j} F_{ki}(\mathbf{k}_1) \times \\ & \times \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned}$$

Уравнение (78) справедливо как для изотропных, так и для неизотропных флуктуаций поля скоростей. Следовательно, в случайных изотропных сжимаемых волновых полях распределение вероятностей  $P(t; \rho)$  в рассматриваемом приближении является логнормальным, и должна осуществляться кластеризация поля примеси. При этом для коэффициента  $\tilde{D}_d^{(2)}$  с учетом формулы (75) получаем выражение

$$\begin{aligned} \tilde{D}_d^{(2)} = & \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega^2(k_1)} k_1^4 F^p(k_1) [F^s(k_1)(d-1) + F^p(k_1)] \times \\ & \times \int d\mathbf{k}_2 \delta(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned}$$



В случае анизотропных полей скорости решение уравнения (78) выражается через функцию Эйри от логарифма плотности. При этом в области малых значений  $\rho$  решение уравнения принимает отрицательные значения. Однако область больших плотностей, а следовательно, и моментные функции поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$  описываются правильно. Некоторое изменение функции распределения в области больших плотностей не препятствует кластеризации поля примеси.

Таким образом, учет первых не исчезающих поправок к уравнению для плотности вероятностей как диффундирующих частиц, так и самого поля пассивной консервативной примеси в случайных волновых полях приводят к отличным от нуля коэффициентам переноса. Для сжимаемых анизотропных волновых полей скорости возникает средний перенос частиц (стоксов дрейф) и анизотропия распределения вероятностей положения лагранжевых частиц. В этом случае также осуществляется кластеризация поля пассивной консервативной примеси.

Следует отметить, однако, что эти процессы протекают на разных пространственных масштабах, что выражается различными степенями волновых векторов  $\mathbf{k}$ ; в коэффициентах диффузии в уравнениях (72) и (78). Так, мелкомасштабные флуктуации поля скоростей на кластеризацию примеси в эйлеровом описании оказывают существенно большее влияние, чем на диффузию лагранжевых частиц. Если волновое поле имеет достаточно широкий спектр (например, затухающий степенным образом при достаточно больших значениях волновых чисел, как это характерно для турбулентности), то возможно появление расходимости в выражениях для коэффициентов диффузии (79). При этом может быть рассчитан и вклад резонансных эффектов в коэффициент диффузии (74).

#### 4. Кластеризация примеси в случайных бездивергентных гидродинамических потоках

Мы видели, что для существования кластеризации поля безынерционной примеси необходимо, чтобы поле скоростей гидродинамического потока было дивергентным. Обычно во многих задачах физики атмосферы Земли и океана среда считается в общем случае *несжимаемой*, т.е. описывается бездивергентным полем скоростей. В этом случае кластеризация все же может осуществляться в ряде случаев, которые и рассмотрим далее.

##### 4.1. Диффузия плавучей примеси

Прежде всего рассмотрим диффузию плавучей примеси, следуя [29, 34]. Если пассивная примесь движется на поверхности  $z = 0$  в несжимаемой среде ( $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) в отсутствие среднего потока с горизонтальной и вертикальной скоростями  $\mathbf{u} = (\mathbf{U}, w)$ , то на этой поверхности создается эффективный двумерный сжимаемый поток с двумерной дивергенцией

$$\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = - \left. \frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Считаем, что пространственный спектральный тензор поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет вид

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

Представим теперь поле плавучей примеси в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{R}, t) \delta(z), \quad \mathbf{r} = (\mathbf{R}, z), \quad \mathbf{R} = (x, y).$$

Подставляя теперь это выражение в уравнение (2) и интегрируя по  $z$ , получаем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \right) \rho(\mathbf{R}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{R}, 0) = \rho_0(\mathbf{R}).$$

Поле  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  гауссово, однородное и изотропное со спектральным тензором

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_{\perp}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2, t) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{\mathbf{k}_{\perp}^2} \right) dk_z, \quad (80)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2.$$

Сопоставляя теперь (80) с (30) и (31), получаем выражения для соленоидальной и потенциальной составляющих скорости  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  на плоскости  $z = 0$  [29]

$$E^s(\mathbf{k}_{\perp}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2, t) dk_z, \quad (81)$$

$$E^p(\mathbf{k}_{\perp}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2, t) \frac{k_z^2}{\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2} dk_z.$$

Следовательно, уравнение для плотности вероятностей поля плотности  $\rho(\mathbf{R}, t)$  будет описываться двумерным уравнением (52), т.е. уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(t, \mathbf{r}; \rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t, \mathbf{r}; \rho), \quad (82)$$

$$P(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

с коэффициентами диффузии, определяемыми согласно (33), (34) и (81) равенствами

$$D_0 = 2\pi \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} k^2 dk E(k, \tau),$$

$$D^s = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} k^4 dk E(k, \tau), \quad (83)$$

$$D^p = \frac{4\pi}{5} \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} k^4 dk E(k, \tau).$$

Таким образом, мы видим, что для диффузии плотности безынерционной плавучей примеси должна осуществляться кластеризация поля плотности в эйлеровом описании. В то же время для диффузии безынерционных плавучих частиц кластеризация осуществляться не будет, так как в этом случае согласно (83) имеет место неравенство  $D^s > D^p$ .

##### 4.2. Диффузии малоинерционных частиц и поля примеси в случайных бездивергентных гидродинамических потоках

Рассмотрим теперь диффузию малоинерционных частиц и поля примеси в случайных бездивергентных гидродинамических полях, следуя работам [50, 73].

Диффузия поля плотности числа частиц, приходящихся на единицу объема  $n(\mathbf{r}, t)$ , движущихся в случайном гидродинамическом потоке, описывается уравнением непрерывности (1)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) n(\mathbf{r}, t) = 0, \quad n(\mathbf{r}, 0) = n_0(\mathbf{r}), \quad (84)$$

где эйлерово поле скорости примеси  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в отсутствие средней скорости потока удовлетворяет уравнению (3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda[\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \quad (85)$$

Будем считать, что поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — бездивергентное (т.е.  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r} = 0$ ) однородное, изотропное в пространстве и стационарное во времени гауссово случайное поле с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle.$$

Для такой модели пространственная спектральная и пространственно-временная спектральная функции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  определяются как

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int E_{ij}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k},$$

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t),$$

где

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (86)$$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \Phi(k, \omega) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

В этом случае

$$B_{ij}(0, t) = \frac{d-1}{d} \int E(k, t) \delta_{ij} d\mathbf{k}, \quad (87)$$

где  $d$  — размерность пространства, а тензор четвертого порядка  $\partial^2 B_{ij}(0, \tau) / \partial r_k \partial r_l$  имеет представление

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D(\tau)}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}]. \quad (88)$$

Коэффициент  $D(\tau)$  в (88)

$$D(\tau) = \int \mathbf{k}^2 E(k, \tau) d\mathbf{k} = -\frac{1}{d-1} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

и величина

$$D(0) = -\frac{1}{d-1} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

связана с вихревой структурой случайного бездивергентного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Характеристические кривые  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$  для уравнения (85) согласно (4) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (89)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) = -\lambda[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)], \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0),$$

и описывают динамику частицы.

Для безынерционных частиц  $\lambda \rightarrow \infty$  и, как следует из уравнения (89),

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t). \quad (90)$$

Следовательно, в этом предельном случае дисперсия случайного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и его временной радиус корреляции  $\tau_V$  связаны с дисперсией случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и временем корреляции  $\tau_0$  очевидными равенствами

$$\sigma_V^2 = \sigma_u^2, \quad \tau_V = \tau_0. \quad (91)$$

**4.2.1. Особенность диффузии малоинерционных частиц (лагранжево описание).** Прежде всего отметим, что для описания диффузии малоинерционных частиц неприменимо приближение дельта-коррелированного случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а следовательно, и уравнение Фоккера–Планка для совместной плотности вероятности положения частицы и ее скорости [73].

В самом деле, введем индикаторную функцию для решения уравнения (89)

$$\phi(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}),$$

которая описывается уравнением Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V}\right) \phi(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}) = -\lambda \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \phi(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}), \quad (92)$$

$$\phi(0; \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0)).$$

Среднее значение индикаторной функции  $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{V}; t)$  по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  описывает совместную одновременную плотность вероятности положения частицы и ее скорости

$$P(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \langle \phi(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}) \rangle = \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}) \rangle_{\mathbf{u}}.$$

В предположении дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (37), усредняя уравнение (92) по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с учетом формулы Фурутцу–Новикова (39), выражения для вариационной производной

$$\frac{\delta}{\delta u_i(\mathbf{r}', t - 0)} \phi(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}) = -\lambda \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial V_i} \phi(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}),$$

и равенства (38), получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V}\right) P(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \lambda^2 D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{V}^2} P(t; \mathbf{r}, \mathbf{V}), \quad (93)$$

$$P(0; \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0)),$$

где коэффициент диффузии

$$D_0 = \frac{1}{d} \int_0^{\infty} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau = \frac{1}{d} \tau_0 \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Здесь, как и ранее,  $d$  — размерность пространства,  $\tau_0$  — временной радиус корреляции случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а  $\sigma_u^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  — его дисперсия.

Одним из условий применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  во времени является условие

$$\lambda \tau_0 \ll 1. \quad (94)$$

Как следует из уравнения (93), функции  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{V}(t)$  являются гауссовыми случайными процессами, и для их моментных функций обычным путем получаем систему

уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle r_i(t)r_j(t) \rangle &= 2\langle r_i(t)V_j(t) \rangle, \\ \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) \langle r_i(t)V_j(t) \rangle &= \langle V_i(t)V_j(t) \rangle, \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda\right) \langle V_i(t)V_j(t) \rangle &= 2\lambda^2 D_0 \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (95)$$

Из системы (95) следует, что стационарные значения всех одновременных корреляций при  $\lambda t \gg 1$  и  $t/\tau_0 \gg 1$  описываются выражениями

$$\begin{aligned} \langle V_i(t)V_j(t) \rangle &= \lambda D_0 \delta_{ij}, \quad \langle r_i(t)V_j(t) \rangle = D_0 \delta_{ij}, \\ \langle r_i(t)r_j(t) \rangle &= 2t D_0 \delta_{ij}, \end{aligned}$$

и, в частности, дисперсия процесса  $\mathbf{V}^2(t)$  и пространственный коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle$$

описываются равенствами

$$\sigma_{\mathbf{V}}^2 = \langle \mathbf{V}^2(t) \rangle = \lambda \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau = \lambda \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2, \quad (96)$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = dD_0 = \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau = \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2.$$

Аналогичным образом, для дельта-коррелированного во времени поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  легко получить и выражение для временного радиуса корреляции  $\tau_{\mathbf{V}}$  случайного процесса  $\mathbf{V}(t)$ , рассматривая временную корреляцию  $\langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau) V_j(\mathbf{r}, t) \rangle$ . А именно [73]

$$\tau_{\mathbf{V}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (97)$$

Сопоставляя равенства (91) с равенствами (96) и (97), видим, что они несовместимы, т.е. для выполнения равенства (90) требуется не только выполнение условий  $\lambda t \gg 1$  и  $t/\tau_0 \gg 1$ , но и выполнение условия

$$\lambda \tau_0 \gg 1, \quad (98)$$

что противоречит условию применимости приближения дельта-коррелированности во времени случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (94). Что же касается коэффициента пространственной диффузии  $D$  в (96), то эта величина, как видно из уравнения (89), есть

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \int_0^\infty \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau = \tau_{\mathbf{V}} \sigma_{\mathbf{V}}^2 = \\ &= \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2 = \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau, \end{aligned}$$

как в дельта-коррелированном приближении, так и в приближении безынерционности поля примеси и вообще не зависит от параметра  $\lambda$  (при условии, конечно,  $\lambda t \gg 1$ ).

Таким образом, приближение дельта-коррелированности во времени случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  для динамической системы (89) неправильно описывает статистику скорости частицы и ее корреляцию с положением частицы при переходе к приближению безынерционности частиц. И в то же время это приближение не противоречит пространственной диффузии частиц.

Отметим, что выделение пространственного описания диффузии частицы из его пространственно-временного описания составляет так называемую *проблему Крамерса* (см., например, [74]).

**4.2.2. Диффузия малоинерционной примеси в эйлеровом описании.** Если считать, что случайное поле  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  гауссово, статистически однородно и изотропно в пространстве, стационарно во времени с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$\langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}', t') \rangle = B_{ij}^{(V)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'),$$

то одноточечная плотность вероятности для решения динамического уравнения (84)  $P(t, \mathbf{r}; n)$  как в приближении дельта-коррелированного во времени поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , так и в диффузионном приближении описывается уравнением (52)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right) P(t, \mathbf{r}; n) = D^{(V)} \frac{\partial^2}{\partial n^2} n^2 P(t, \mathbf{r}; n), \quad (99)$$

$$P(0, \mathbf{r}; n) = \delta(n_0(\mathbf{r}) - n),$$

где коэффициенты диффузии

$$D_0 = \frac{1}{d} \int_0^\infty \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle d\tau = \frac{1}{d} \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (100)$$

$$D^{(V)} = \int_0^\infty \left\langle \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle d\tau = \tau_{\text{div } \mathbf{V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle,$$

характеризуют пространственное расплывание плотности числа частиц, приходящихся на единицу объема  $n(\mathbf{r}, t)$ , и характерное время образования кластерных структур  $\tau_{\mathbf{V}}$  и  $\tau_{\text{div } \mathbf{V}}$  — временные радиусы корреляции для случайных полей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и  $\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$ , а  $d$  — размерность пространства.

Таким образом, задача сводится к оценке коэффициентов диффузии (100) исходя из стохастического уравнения (85), т.е. к вычислению временных радиусов корреляций  $\tau_{\mathbf{V}}$  и  $\tau_{\text{div } \mathbf{V}}$  случайных полей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и  $\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$ , их пространственных масштабов корреляций и дисперсий [50].

Считаем, что дисперсия случайного поля скоростей гидродинамического потока  $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  достаточно мала и определяет основной малый параметр задачи. Для большого значения параметра  $\lambda$  (малая инерционность частиц) мы можем линеаризовать уравнение (85) относительно функции  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и перейти к более простому векторному уравнению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &= \\ &= - \left( \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned} \quad (101)$$

В дальнейшем мы будем вычислять статистические характеристики поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в первом исчезающем порядке малости по параметру  $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ . Отметим, что статистика поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , описываемого стохастическими уравнениями (85), (101), в общем случае не является гауссовой. Однако легко видеть, что высшие кумулянты поля  $\text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  будут более высокого порядка малости, чем второй кумулянт, и, следовательно, при выводе уравнения (99) действительно можно воспользоваться приближением гауссова поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .

Для малоинерционной примеси, как мы видели на примере диффузии частиц, несправедливо приближение дельта-коррелированности во времени случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Поэтому необходимо производить вычисления при произвольном значении параметра  $\lambda\tau_0$ . Это можно сделать в диффузионном приближении.

Случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  коррелирует с функцией  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , которая является функционалом поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Расщепление корреляций для гауссова поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  основано на формуле Фурутцу–Новикова (36), содержащей вариационные производные. Уравнения для соответствующих средних значений в диффузионном приближении выписываются точно. Соответствующее упрощение задачи осуществляется на уровне функциональной зависимости решения задачи от флуктуирующих параметров (см., например, [36]), и предполагается, что на временных масштабах порядка  $\tau_0$  влияние поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  несущественно.

Для вариационных производных в диффузионном приближении имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')} = 0$$

с начальным условием при  $t = t'$

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'+0} &= - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t')}{\partial r_l} + \right. \\ &\left. + \delta_{il} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r}, t') \right] + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda \delta_{il}, \end{aligned}$$

которое следует из уравнения (101). Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')} &= \exp[-\lambda(t - t')] \left\{ - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t')}{\partial r_l} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_k} \delta_{il} V_k(\mathbf{r}, t') \right] + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda \delta_{il} \right\}. \end{aligned}$$

Само поле  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в диффузионном приближении имеет структуру

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \exp[-\lambda(t - t')] \mathbf{V}(\mathbf{r}, t'),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t') = \exp[\lambda(t - t')] \mathbf{V}(\mathbf{r}, t).$$

Таким образом, в диффузионном приближении для вариационной производной получаем окончательное выражение

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')} &= - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} + \delta_{il} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_\mu} V_\mu(\mathbf{r}, t) \right] + \\ &+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda \exp[-\lambda(t - t')] \delta_{il}. \end{aligned} \quad (102)$$

Формулы (36) и (102) позволяют провести все необходимые вычисления, что и было сделано в работе [50], где были вычислены коэффициенты (100):

$$D_0 = \frac{1}{d} \tau_V \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{d} \tau_0 B_{ii}(0, 0) = \frac{d-1}{d} \tau_0 \int E(k, 0) \mathbf{d}\mathbf{k}, \quad (103)$$

$$D^{(V)} = \tau_{\text{div V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{4}{\lambda} \frac{d^2 - 1}{d(d+2)} D_1 D_2(\lambda),$$

где

$$D_1 = \int_0^\infty D(\tau) d\tau = \int_0^\infty d\tau \int \mathbf{d}\mathbf{k} k^2 E(k, \tau),$$

$$\begin{aligned} D_2(\lambda) &= \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) D(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty d\tau \exp(-\lambda\tau) \int \mathbf{d}\mathbf{k} k^2 E(k, \tau). \end{aligned}$$

В частности, в трехмерном случае для малоинерционных частиц при  $\lambda\tau_0 \gg 1$  получаем

$$D_0 = \frac{1}{3} \tau_V \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{3} \tau_0 B_{ii}(0, 0) = \frac{2}{3} \tau_0 \int E(k, 0) \mathbf{d}\mathbf{k}, \quad (104)$$

$$D^{(V)} = \tau_{\text{div V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{8}{15} \frac{\tau_0}{\lambda^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2.$$

В двумерном же случае при  $\lambda\tau_0 \gg 1$  имеем

$$D_0 = \frac{1}{2} \tau_V \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \tau_0 B_{ii}(0, 0) = \tau_0 \int E(k, 0) \mathbf{d}\mathbf{k}, \quad (105)$$

$$D^{(V)} = \tau_{\text{div V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{\tau_0}{\lambda^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2.$$

Таким образом, мы видим, что  $D^{(V)} \sim \sigma_u^4$ . Это связано с тем, что сперва вихревая компонента поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  генерирует вихревую компоненту поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  прямым линейным механизмом без участия адвекции, а уже затем вихревая компонента поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  генерирует дивергентную компоненту поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  через механизм адвекции.

Условие применимости полученных выражений является, очевидно, условие

$$\frac{\sigma_u^2 \tau_0^2}{l_0^2} \ll 1,$$

где  $l_0$  — пространственный масштаб корреляции случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Обсудим теперь двумерный гидродинамический поток с учетом вращения, который описывается уравнением

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) V_i(\mathbf{r}, t) &= \\ &= -\lambda [V_i(\mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{r}, t)] + 2\Omega \Gamma_{i\mu} V_\mu(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

где матрица

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^2 = -E,$$

а  $E$  — единичная матрица. Это уравнение можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -A[\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)], \quad (106)$$

где матрица  $A = (\lambda E - 2\Omega \Gamma)$ , а случайное поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \lambda A^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad A^{-1} = \frac{\lambda E + 2\Omega \Gamma}{\lambda^2 + 4\Omega^2}. \quad (107)$$

В случае, когда  $\{\lambda \text{ или } \Omega\} \rightarrow \infty$ , приближенно получаем выражение

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{U}(\mathbf{r}, t). \quad (108)$$

Отметим, что можно ввести новый вектор  $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \Gamma \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , и тогда величина

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial W_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} = \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial V_2(\mathbf{r}, t)}{\partial r_1} - \frac{\partial V_1(\mathbf{r}, t)}{\partial r_2}$$

описывает вихревую компоненту поля скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .

Уравнение (106) отличается от уравнения (85) тензорным характером параметра  $\Lambda$ . Кроме того, в уравнении (106) поле  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  является дивергентным полем, и для бездивергентного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  величина

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \lambda \frac{\partial}{\partial r_k} \Lambda_{k\mu}^{-1} u_\mu(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{2\lambda\Omega}{\lambda^2 + 4\Omega^2} \Gamma_{k\mu} \frac{\partial u_\mu(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \end{aligned}$$

связана с вихревой компонентой поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Будем предполагать, как и ранее, что дисперсия  $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  имеет малое значение, и для больших значений параметров  $\{\lambda, \Omega\}$  можно линеаризовать уравнение (106) относительно потока (108). В этом случае пространственный коэффициент диффузии  $D_0$  в (100) не зависит от параметра  $\lambda$  и описывается формулой [50]

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2} \tau_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty B_{ii}(0, \tau) \cos(2\Omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{\pi}{2} \int \Phi(k, 2\Omega) d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (109)$$

где  $\Phi(k, \omega)$  — пространственно-временная спектральная функция (86) поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Что касается коэффициента диффузии  $D^{(V)}$ , то для него можно получить выражение [50]

$$D^{(V)} = \frac{4\lambda^2\Omega^2}{(\lambda^2 + 4\Omega^2)^2} \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) \cos(2\Omega\tau) D(\tau) d\tau. \quad (110)$$

Если  $\{\lambda, \Omega\}\tau_0 \gg 1$ , то

$$D^{(V)} = \frac{4\lambda^3\Omega^2 D(0)}{(\lambda^2 + 4\Omega^2)^3} = \begin{cases} \frac{4\Omega^2 D(0)}{\lambda^3}, & \text{если } \lambda \gg \Omega, \\ \frac{\lambda^3 D(0)}{16\Omega^4}, & \text{если } \lambda \ll \Omega, \end{cases} \quad (111)$$

где, как и ранее,

$$D(0) = \int k^2 E(k, 0) d\mathbf{k} = -\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Таким образом, при выполнении условий  $\{\lambda, \Omega\}\tau_0 \gg 1$  в рассматриваемой задаче процесс генерации дивергентной части поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  описывается линейным уравнением без учета адвективных членов. Если к тому же  $\lambda \gg \Omega$ , то необходимо принять во внимание поправочные члены порядка  $\sigma_{\mathbf{u}}^4$  (105), которые могут быть в некоторых случаях сравнимы со (111), т.е. в этом случае мы получаем выражение

$$\begin{aligned} D^{(V)} &= \frac{3}{2} \frac{\tau_0}{\lambda^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ &= -\frac{4\Omega^2}{\lambda^3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \left\{ 1 - \frac{3\lambda\tau_0}{2\Omega^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (112)$$

Выше был описан метод получения выражений для коэффициентов диффузии, характеризующих кластеризацию плотности числа малоинерционных частиц в гидродинамических потоках в различных асимптотических режимах. Мы не ставили своей целью изучение этих коэффициентов (и, следовательно, самого явления кластеризации) для конкретных геофизических или астрофизических задач. Это совершенно самостоятельные задачи, которые можно решать на основе приведенных выражений.

## 5. Заключение

В заключение отметим следующее.

- Статистические характеристики решения задачи о диффузии частиц и поля концентрации пассивной консервативной примеси в случайных дивергентных полях скоростей могут иметь мало общего с поведением отдельных реализаций. Для таких задач традиционный подход, основанный на моментном описании, неинформативен. Для этих задач необходимо иметь статистическое описание на уровне плотностей вероятностей (как минимум, одновременной или одноточечной).

- В задачах о диффузии частиц и поля концентрации пассивной примеси в случайных дивергентных полях скоростей существуют, однако когерентные статистические физические явления, осуществляющиеся с вероятностью единица (кластеризация частиц и поля консервативной примеси в дивергентном поле скоростей). Это означает, что данное явление осуществляется почти во всех реализациях случайного поля скоростей.

- Сами когерентные явления практически не зависят от модели флуктуирующих параметров динамической системы, и в простейшем случае их временная динамика может быть описана в рамках одновременных и одноточечных распределений вероятностей с помощью методов статистической топографии. При этом, конечно, конкретные параметры, характеризующие это явление (например, характерные времена образования кластерных структур и их пространственные характерные масштабы), могут существенно зависеть от моделей.

- Кластеризация малоинерционных частиц и поля их концентрации может осуществляться и в случайных бездивергентных полях скоростей. При этом для их статистического описания принципиально неприменимо приближение дельта-коррелированного во времени поля скоростей флуктуирующего потока (например, уравнение Фоккера – Планка для диффузии малоинерционных частиц) и необходимо принимать во внимание конечность его временного радиуса корреляции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 01-05-64042 и 02-05-64375) и Государственного контракта 40.020.1.1.1177.

## Список литературы

1. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика* Ч. 1, 2 (М.: Наука, 1965, 1967)
2. Csanady G T *Turbulent Diffusion in the Environment* (Geophys. and Astrophys. Monographs, Vol. 3) (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1973)
3. Lesieur M *Turbulence in Fluids: Stochastic and Numerical Modelling* (Fluid Mechanics and Its Applications, Vol. 1) 2nd ed. (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)
4. McComb W D *The Physics of Fluid Turbulence* (Oxford Engineering Sci. Ser., Vol. 25) (Oxford: Clarendon Press, 1990)

5. Okubo A *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models* (Biomathematics, Vol. 10) (Berlin: Springer-Verlag, 1980)
6. Dagan G *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19** 183 (1987)
7. Гурбатов С Н, Малахов А Н, Саичев А И *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии* (Современные проблемы физики, Вып. 81) (М.: Наука, 1990)
8. Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Rev. Mod. Phys.* **61** 185 (1989)
9. Batchelor G K *J. Fluid Mech.* **5** 113 (1959)
10. Batchelor G K, Howells I D, Townsend A A *J. Fluid Mech.* **5** 134 (1959)
11. Taylor G I *Proc. London Math. Soc. Ser. 2* **20** 196 (1923); *Proc. R. Soc. London Ser. A* **164** 476 (1938)
12. Roberts P H *J. Fluid Mech.* **11** 257 (1961)
13. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **11** 945 (1968); **13** 22 (1970); *J. Fluid Mech.* **64** 737 (1974)
14. Saffman P G *Phys. Fluids* **12** 1786 (1969)
15. Chen H, Chen S, Kraichnan R H *Phys. Rev. Lett.* **63** 2657 (1989)
16. Sinai Ya G, Yakhot V *Phys. Rev. Lett.* **63** 1962 (1989)
17. Avellaneda M, Majda A J *Commun. Math. Phys.* **131** 381 (1990)
18. Gao F *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* **3** 511 (1991)
19. Lipscombe T C, Frenkel A L, ter Haar D J *Stat. Phys.* **63** 305 (1991)
20. Careta A et al. *J. Stat. Phys.* **71** 235 (1993)
21. Kimura Y, Kraichnan R H *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* **5** 2264 (1993)
22. Majda A J *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* **5** 1963 (1993); *J. Stat. Phys.* **75** 1153 (1994)
23. Kraichnan R H *Phys. Rev. Lett.* **72** 1016 (1994)
24. Кляцкин В И *УФН* **164** 531 (1994)
25. Klyatskin V I, Woyczynski W A *ЖЭТФ* **108** 1403 (1995)
26. Klyatskin V I, Woyczynski W A, Gurarie D, in *Stochastic Modelling in Physical Oceanography* (Progress in Probability, Vol. 39, Eds R J Adler, P Müller, B Razovskii) (Boston: Birkhäuser, 1996) p. 221; *J. Stat. Phys.* **84** 797 (1996)
27. Saichev A I, Woyczynski W A, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 85, Eds S A Molchanov, W A Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 359
28. Gurarie D, Klyatskin V, in *Two-dimensional Turbulence in Plasmas & Fluids* (AIP Conf. Proc., Vol. 414, Eds R L Dewar, R W Griffiths) (Woodbury, NY: American Institute of Physics, 1997) p. 213
29. Кляцкин В И, Саичев А И *ЖЭТФ* **111** 1297 (1997).
30. Кляцкин В И *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **36** 177 (2000)
31. Кляцкин В И *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами* (М.: Наука, 1975)
32. Saichev A I *Dynamics Systems* **1** 1 (1993)
33. Gurbatov S N, Saichev A I *Chaos* **3** 333 (1993)
34. Кляцкин В И, Гурарий Д *УФН* **169** 171 (1999)
35. Isichenko M V *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
36. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения* (М.: Физматлит, 2001); *Динамика стохастических систем. Курс лекций* (М.: Физматлит, 2002)
37. Nicolis G, Prigogine I *Exploring Complexity: an Introduction* (New York: W.H. Freeman, 1989)
38. Stokes G G *Camb. Trans.* **9** 8 (1851)
39. Лэмб Г *Гидродинамика* (М.: Гостехиздат, 1947)
40. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
41. Ungarish M *Hydrodynamics of Suspensions: Fundamentals of Centrifugal and Gravity Separation* (Berlin: Springer-Verlag, 1993)
42. *Sedimentation of Small Particles in a Viscous Fluid* (Advances in Fluid Mechanics, Vol. 7, Ed. E M Tory) (Southampton, UK: Computational Mechanics Publ., 1996)
43. Maxey M R, Riley J J *Phys. Fluids* **26** 883 (1983)
44. Maxey M R, Corrsin S J *Atmos. Sci.* **43** 1112 (1986)
45. Maxey M R *J. Fluid Mech.* **174** 441 (1987); *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **333** 289 (1990)
46. Wang L-P, Maxey M R *J. Fluid Mech.* **256** 27 (1993)
47. Maxey M R, Chang E J, Wang L-P *Exp. Therm. Fluid Sci.* **12** 417 (1996)
48. Elperin T, Kleeorin N, Rogachevskii I *Phys. Rev. E* **53** 3431 (1996); **58** 3113 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **76** 224 (1996); **77** 5373 (1996); **81** 2898 (1998); *Atmos. Res.* **53** 117 (2000)
49. Balkovsky E, Falkovich G, Fouxon A *Phys. Rev. Lett.* **86** 2790 (2001)
50. Кляцкин В И, Эльперин Т *ЖЭТФ* **122** 327 (2002)
51. Zirbel C L, Çinlar E, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 85, Eds S A Molchanov, W A Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 459
52. Кошель К В, Александрова О В *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **35** 638 (1999)
53. Кляцкин В И, Кошель К В *УФН* **170** 771 (2000)
54. Mesinger F *J. Atmos. Sci.* **22** 479 (1965); *Mon. Weather Rev.* **99** 15 (1971)
55. Mesinger F, Mintz Y, Technical Report No. 4, No. 5 (Los Angeles, CA: Dep. Meteorology, Univ. of California, 1970)
56. Er-El J, Peskin R L *J. Atmos. Sci.* **38** 2264 (1981)
57. Мирабель А П, Монин А С *Изв. АН СССР. Сер. Физ. атм. и океана* **19** 902 (1983)
58. Ott S, Mann J J *J. Fluid Mech.* **422** 207 (2000)
59. Furutsu K J *Res. NBS D* **67** 303 (1963)
60. Новиков Е А *ЖЭТФ* **47** 1919 (1964)
61. Кляцкин В И *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1980); *Ondes et Équations Stochastiques dans les milieux Aléatoirement non Homogènes* (Besaçon – Cedex: Les Éditions de Physique, 1985)
62. Кляцкин В И, Саичев А И *УФН* **162** (3) 161 (1992)
63. Gurvich A S, Yaglom A M *Phys. Fluids* **10** Suppl. S59 (1967)
64. Dahm W J A, Buch K A *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.* **1** 1290 (1989)
65. Kerstein A R, McMurtry P A *Phys. Rev. E* **49** 474 (1994)
66. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988)
67. Лихтенберг А Дж, Либман М А *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984)
68. Кляцкин В И, Якушкин И Г *ЖЭТФ* **118** 849 (2000)
69. Weichman P V, Glazman R E *Phys. Rev. Lett.* **83** 5011 (1999); *J. Fluid Mech.* **420** 147 (2000); **453** 263 (2002)
70. Herterich K, Hasselmann R J *Phys. Oceanogr.* **12** 704 (1982)
71. Sanderson B G, Okubo A J *Geophys. Res.* **93** 3570 (1988)
72. Walterscheid R L, Hocking W K J *Atmos. Sci.* **48** 2213 (1991)
73. Кляцкин В И, Эльперин Т *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **38** 817 (2002)
74. Уленбек Г Е *УФН* **103** 275 (1971)

### Clustering and diffusion of particles and passive tracer density in random hydrodynamic flows

V.I. Klyatskin

*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per. 3, 119017 Moscow, Russian Federation,*  
*V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Russian Academy of Sciences (Far East Division), Baltiiskaya ul. 43, 690041 Vladivostok, Russian Federation*  
 Tel. (7-095) 269-1283  
 E-mail: klyatskin@yandex.ru

The diffusion of particles and passive tracer density fields in random hydrodynamic flows is considered. The crucial feature of this diffusion in a divergent hydrodynamic flow is the clustering of the passive tracer density field (in Euler description) and occasionally of particles themselves (in Lagrangian description) — a coherent phenomenon which occurs with probability unity and should arise in almost all dynamic scenarios of the process. In the present paper, statistical clustering parameters are described in statistical topography terms. Because of their inertia, particles and their density field can also cluster in random divergence-free velocity fields, the divergence of the particle velocity field itself being a crucial aspect of such diffusion. The fluctuating flow velocity field delta-correlated in time (as, e.g., in the Fokker–Planck equation for diffusing particles of small inertia) is in principle an invalid approximation for the statistical description of particle dynamics, and the diffusion approximation accounting for the finite time correlation radius should instead be used for the purpose.

PACS numbers: **02.50. – r, 05.40. – a, 05.45. – a**  
 Bibliography — 74 references

Received 3 March 2003