

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Нулевые колебания, нулевые флуктуации
и флуктуации нулевых колебаний

Ф.Я. Халили

Рассмотрен ряд физических явлений и методических вопросов, относящихся к нулевому состоянию осциллятора. Даже в простейшем случае идеального гармонического осциллятора без потерь его нулевое состояние имеет необычные с классической точки зрения свойства. Например, среднее значение произведения двух неотрицательных наблюдаемых — кинетической и потенциальной энергий — в нулевом состоянии отрицательно. Показано, что полуклассический и строгий квантовый подходы к расчету флуктуаций энергии нулевого состояния для осциллятора с затуханием приводят к качественно различным результатам. Рассмотрена зависимость нулевых колебаний в электромагнитных резонаторах от граничных условий. Используя такую зависимость, в принципе возможно передавать информацию без излучения электромагнитных квантов. Проанализированы флуктуации силы давления нулевых колебаний и сопутствующее этим флуктуациям механическое трение, которое может рассматриваться как наиболее фундаментальный механизм ограничения добротности механических осцилляторов. Большинство явлений такого класса пока находятся за пределами возможностей экспериментальной физики, однако их наблюдение почти наверняка станет возможным в обозримом будущем.

PACS numbers: 03.65.Ta, 03.65.Yz, 03.67.Hk

Содержание

1. Введение (301).
2. Нулевое состояние осциллятора (302).
3. Флуктуации энергии нулевого состояния в осцилляторе с конечной добротностью (303).
3.1. Полуклассический (неправильный!) расчет. 3.2. Квантовый расчет. 3.3. О среднем значении энергии нулевых колебаний в осцилляторе с конечной добротностью.
4. Зависимость нулевых колебаний от граничных условий (307).
4.1. Простой пример. 4.2. Передача информации путем модуляции плотности энергии нулевых колебаний.
5. Флуктуации и трение, порождаемые нулевыми колебаниями (309).
5.1. Флуктуации и трение в свободном пространстве. 5.2. Флуктуации и трение в резонансных условиях.
6. Заключение (311).
7. Приложения (311).
7.1. Операторные свойства шумов термостата. 7.2. Вычисление средних значений и спектральных плотностей флуктуаций для величин типа энергии или мощности. 7.3. Колебательные моды для системы "осциллятор + термостат". 7.4. Собственные со-

стояния для LC-контура, параметрически связанного с механическим осциллятором.

Список литературы (316).

1. Введение

В этих методических заметках рассматриваются несколько физических явлений и методических вопросов, относящихся к нулевому состоянию гармонического осциллятора. Эта тема, хотя и не нова, до сих пор вызывает большой интерес и даже дискуссии. В частности, с помощью нулевого состояния, которое можно рассматривать как наиболее "квантовое" из всех состояний осциллятора, можно наглядно продемонстрировать опасность применения полуклассических методов анализа к квантовым системам.

Термины "нулевые колебания" и "нулевые флуктуации" в литературе часто используются как синонимы. Очевидно, однако, что *нулевые колебания* изолированного гармонического осциллятора — это не то же самое, что *нулевые флуктуации*, например, термостата, находящегося при нулевой температуре. Первые обладают некоторой регулярностью. Их можно интерпретировать как гармонические колебания с заданной частотой и заданной амплитудой, но неизвестной, хотя и постоянной во времени, фазой. Вторые же представляют собой стохастический процесс, характеризующийся непрерывной по частотам спектральной плотностью.

Разделы этой статьи "рассортированы" по степени возрастания сложности рассматриваемых в них систем. В разделе 2 рассматривается нулевое состояние одно-

Ф.Я. Халили. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119899 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация
Тел. (095) 939-12-24. Факс (095) 932-88-20
E-mail: farid@hbar.phys.msu.ru

Статья поступила 13 ноября 2002 г.,
после доработки 16 декабря 2002 г.

мерного гармонического осциллятора. Несмотря на предельную простоту этого объекта, даже он может демонстрировать необычные и парадоксальные с классической точки зрения свойства.

В разделе 3 рассмотрены флуктуации энергии нулевого состояния для осциллятора с конечной добротностью. Этот пример наглядно показывает, что некритическое использование полуклассических методов расчета в задачах, касающихся нулевого состояния, может привести к качественно неверным результатам. Здесь же мы коснемся вопроса, который не так давно вызвал оживленную дискуссию в литературе: о точном виде спектральной плотности шумов диссипативных элементов.

В разделе 4 рассматривается зависимость нулевых колебаний в электромагнитных резонаторах от граничных условий. Используя такую зависимость, можно, в частности, передавать информацию без излучения электромагнитных квантов. Термин "флуктуации нулевых колебаний" относится именно к этому классу явлений.

Раздел 5 посвящен флуктуациям силы давления нулевых колебаний и сопутствующему этим флуктуациям механическому трению, которое может рассматриваться как наиболее фундаментальный механизм ограничения добротности механических осцилляторов.

В приложениях, в основном, вынесены наиболее громоздкие выкладки, интересные только с точки зрения применяемой техники расчетов. Исключением является приложение 7.1, где получена формула для шумов диссипативного элемента из наиболее общих соображений, без каких-либо предположений о его внутреннем устройстве.

В статье используются следующие обозначения и нормировки. Чтобы унифицировать вид формул для осцилляторов различной природы, удобно вместо массы m и жесткости K , индуктивности L и емкости C и т.д. использовать собственную частоту ω_0 и волновое сопротивление ρ_0 , которые для механического осциллятора равны

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \rho_0 = \sqrt{Km}, \quad (1.1)$$

а для LC-контура —

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.2)$$

Переменные, зависящие от времени, и их спектры обозначаются одной и той же буквой: например, $q(t)$ — координата и $q(\omega)$ — ее спектр. Поскольку аргумент всегда указывается явно, то никакой путаницы здесь возникнуть не должно.

Используется такая же нормировка спектральной плотности, как и в книге [1]. В этой нормировке спектральная плотность некоторого случайного процесса равна

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(t) \exp(-i\omega t) \frac{dt}{2\pi}, \quad (1.3)$$

где $B(t)$ — корреляционная функция этого процесса. Такое определение¹ дает в два раза меньшее значение

спектральной плотности, чем то, которое обычно встречается в радиофизике. В частности, спектральная плотность случайного напряжения на сопротивлении R при этом равна

$$S(\omega) = \hbar\omega R \coth \frac{\hbar\omega}{\kappa T}, \quad (1.4)$$

где κ — постоянная Больцмана, T — температура (формула Каллена – Вельтона [2]).

2. Нулевое состояние осциллятора

Наличие некоторой конечной энергии в основном состоянии финитных систем непосредственно следует из самых основ квантовой теории. Действительно, отсутствие такой энергии означало бы, что точно задан как импульс объекта (равный нулю), так и его координата (соответствующая точке минимума потенциальной энергии). Очевидно, что это невозможно в силу соотношения неопределенности. Очевидно также, что для любых финитных систем должно существовать (по крайней мере одно) квантовое состояние $|0\rangle$, реализующее минимум функционала полной энергии системы.

Известно, что соотношение неопределенностей позволяет оценить, с точностью до числового множителя, энергию основного состояния любой финитной квантовой системы (например, атома). Более того, в случае гармонического осциллятора, благодаря простой симметричной структуре его гамильтониана, можно с помощью соотношения неопределенности найти точное значение энергии нулевого состояния [3]. Действительно, средняя энергия гармонического осциллятора равна

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0} + \rho_0 \langle q^2 \rangle \right) = \\ &= \frac{\omega_0}{2} \left\{ \frac{\langle p \rangle^2 + (\Delta p)^2}{\rho_0} + \rho_0 [\langle q \rangle^2 + (\Delta q)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где q и p — координата и импульс осциллятора. Для того, чтобы энергия была минимальна, очевидно, необходимо, чтобы средние значения координаты и импульса $\langle q \rangle$ и $\langle p \rangle$ были равны нулю — тогда энергия будет определяться только неопределенностями этих величин Δq и Δp . В то же время, возможные значения последних ограничены неравенством Гейзенберга

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.2)$$

Следовательно,

$$\langle \mathcal{E} \rangle \geq \frac{\omega_0}{2} \left[\frac{\hbar^2}{4\rho_0(\Delta q)^2} + \rho_0(\Delta q)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Минимум правой части (2.3) достигается при $\Delta q = q_0/\sqrt{2}$, где $q_0 = \sqrt{\hbar/\rho_0}$ — так называемая амплитуда нулевых колебаний осциллятора, и равен, как и следовало ожидать, $\hbar\omega_0/2$.

Решив соответствующую вариационную задачу, нетрудно показать также, что волновая функция, реализующая минимум в неравенстве (2.2), в координатном представлении имеет гауссов вид. Отсюда следует явное

¹ Соотношение (1.3) обычно называют теоремой Винера – Хинчина.

выражение для волновой функции осциллятора в нулевом состоянии:

$$\langle q|0\rangle = \frac{1}{(\sqrt{\pi}q_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{q^2}{2q_0^2}\right). \quad (2.4)$$

Волновая функция в импульсном представлении, получаемая из волновой функции (2.4) преобразованием Фурье, также имеет гауссов вид:

$$\begin{aligned} \langle p|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q|0\rangle \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) dq = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi}\rho_0 q_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2(\rho_0 q_0)^2}\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Это справедливо и для любых линейных комбинаций координаты и импульса вида

$$q(\theta) = q \cos \theta + \frac{p}{\rho_0} \sin \theta, \quad (2.6)$$

где θ — произвольный фазовый угол. Действительно, наблюдаемая $q(\theta)$ получается из q в результате свободной эволюции осциллятора в течение времени $t = \theta/\omega_0$; в то же время, нулевое состояние, как состояние с заданной энергией, является стационарным, следовательно, его вид не меняется в процессе свободной эволюции.

Отсюда возникает соблазн приписывать нулевому состоянию совместное распределение вероятностей для координаты и импульса

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{q^2 + (p/\rho_0)^2}{q_0^2}\right), \quad (2.7)$$

тем более, что именно такой вид имеет для нулевого состояния функция Вигнера [4], часто используемая для наглядной иллюстрации различных квантовых состояний как "эрзац" совместного распределение вероятностей для координаты и импульса. То, что такой подход некорректен, видно хотя бы из того, что классическому двумерному распределению вероятностей (2.7) соответствует экспоненциальное распределение вероятностей для энергии осциллятора

$$W(\mathcal{E}) = \frac{1}{\hbar\omega_0/2} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_0/2}\right). \quad (2.8)$$

Среднее значение энергии для такого распределения равно $\hbar\omega_0/2$, что правильно, а дисперсия — $(\hbar\omega_0/2)^2$, что неправильно, так как нулевое состояние является состоянием с заданной энергией.

В то время как полная энергия в нулевом состоянии задана точно, ее составляющие — кинетическая $\mathcal{E}_k$ и потенциальная $\mathcal{E}_p$ энергии в отдельности — в нулевом состоянии имеют ненулевые дисперсии, равные

$$(\Delta\mathcal{E}_k)^2 = (\Delta\mathcal{E}_p)^2 = 2\left(\frac{\hbar\omega_0}{4}\right)^2. \quad (2.9)$$

Это означает, что их стандартные отклонения $\Delta\mathcal{E}_k$ и $\Delta\mathcal{E}_p$ превышают их средние значения $\hbar\omega_0/4$, что для подобных существенно неотрицательных наблюдаемых само по себе необычно.

Для того чтобы полная энергия нулевого состояния при этом не имела дисперсии, необходимо, чтобы потенциальная и кинетическая энергии были полностью антикоррелированы: их коэффициент корреляции должен быть равен минимальному возможному значению — 1. Непосредственный расчет показывает, что это действительно так.

В работе [5] было отмечено, что такая сильная антикорреляция, вместе с большим значением дисперсий (2.9), приводит к парадоксальному с классической точки зрения результату: перекрестное среднее значение двух неотрицательных наблюдаемых — кинетической и потенциальной энергии осциллятора — в нулевом состоянии отрицательно:

$$\langle \mathcal{A}_2 \rangle \equiv \frac{1}{2} \langle \hat{\mathcal{E}}_k \hat{\mathcal{E}}_p + \hat{\mathcal{E}}_p \hat{\mathcal{E}}_k \rangle = -\left(\frac{\hbar\omega_0}{4}\right)^2. \quad (2.10)$$

Можно отметить, что если одновременно измерить координату и импульс осциллятора и, возведя их в квадрат, вычислить потенциальную и кинетическую энергии, то оба полученных в результате числа будут, естественно, положительными. Однако такое измерение не сможет опровергнуть формулу (2.10), так как операторы координаты и импульса не коммутируют друг с другом и поэтому не могут быть одновременно измерены с достаточной точностью. В то же время, как указано в статье [5], сам оператор $\hat{\mathcal{A}}_2$ не может быть представлен в виде квадрата какого-либо эрмитова оператора, которому соответствовала бы некоторая наблюдаемая, точно измерив которую и возведя результат в квадрат, можно было бы вычислить значение $\mathcal{A}_2$.

Для проверки формулы (2.10) необходимо использовать измерение, которое дает информацию о наблюдаемой $\mathcal{A}_2$, не давая при этом никакой информации о наблюдаемых, не коммутирующих с ней. Такие измерения называются квантовыми невозмущающими [6]. Достаточным условием реализации такой процедуры является пропорциональность гамильтониана взаимодействия измерителя с объектом (осциллятором) оператору измеряемой наблюдаемой (в данном случае $\hat{\mathcal{A}}_2$).

3. Флуктуации энергии нулевого состояния в осцилляторе с конечной добротностью

3.1. Полуклассический (неправильный!) расчет

Если добротность осциллятора конечна, то энергия его нулевого состояния уже не является точно заданной величиной и флуктуирует во времени. Характер этих флуктуаций существенно различается для квантового случая, когда температура термостата T близка к нулю, и для классического случая, когда $kT \gg \hbar\omega_0$.

В то же время, в радиофизике и оптике довольно часто используется простой полуклассический метод анализа, заключающийся в том, что решается классическая задача, а "квантовость" вводится путем использования для задания спектральной плотности шумов флуктуационно-диссипационной теоремы Каллена–Вельтона вместо классической формулы Найквиста. Если $kT \ll \hbar\omega_0$, то этот метод может привести к качественно неверным результатам.

Пусть имеется гармонический осциллятор с конечной добротностью (для конкретности будем рассматривать

обычный LC-контур). Вычислим спектральную плотность флуктуаций энергии в этом контуре для случая, когда температура равна абсолютному нулю.

Рассмотрим сначала полуклассический метод расчета. Уравнение движения для заряда на емкости LC-контра имеет вид

$$\ddot{q}(t) + 2\gamma\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \frac{\omega_0}{\rho_0} U(t), \quad (3.1)$$

где $U(t)$ — шум, создаваемый сопротивлением потерь R , и

$$\gamma = \frac{\omega_0 R}{2\rho_0} \quad (3.2)$$

— декремент затухания. Спектральная плотность шума $U(t)$ получается из формулы (1.4) при $T = 0$:

$$S_0(\omega) = \hbar|\omega|R. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.1) может быть представлено как

$$q(t) = \frac{\omega_0}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega) \exp(i\omega t)}{\mathcal{L}(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.4)$$

где

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (3.5)$$

— спектр случайного процесса $U(t)$ и

$$\mathcal{L}(\omega) = -\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2. \quad (3.6)$$

Энергия LC-контра равна, соответственно,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{\rho_0}{2\omega_0} (\dot{q}^2(t) + \omega_0^2 q^2(t)) = \\ &= \frac{\omega_0}{2\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^2 - \omega\omega'}{\mathcal{L}(\omega)\mathcal{L}(\omega')} U(\omega)U(\omega') \times \\ &\times \exp[i(\omega + \omega')t] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Среднее значение этой величины вычисляется с помощью равенства

$$\langle U(\omega)U(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega')S_{\text{FDT}}(\omega). \quad (3.8)$$

Оно равно

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \hbar\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\omega|(\omega_0^2 + \omega^2)}{|\mathcal{L}(\omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.9)$$

Забегая вперед, отметим, что строгий квантовый расчет дает для средней энергии ровно такое же значение. В то же время оно не очень соответствует интуитивным ожиданиям: величина $\langle \mathcal{E} \rangle$ в формуле (3.9) не равна $\hbar\omega_0/2$; более того, входящий в эту формулу интеграл логарифмически расходится на высоких частотах. Эта проблема будет более подробно рассмотрена в разделе 3.3.

Для того чтобы найти спектральную плотность флуктуаций энергии, найдем сначала корреляционную

функцию этих флуктуаций:

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{E}}(t) &= \langle \mathcal{E}(0)\mathcal{E}(t) \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle^2 = \\ &= \left(\frac{\omega_0}{2\rho_0} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega_0^2 - \omega\omega')(\omega_0^2 - \omega_1\omega'_1)}{\mathcal{L}(\omega)\mathcal{L}(\omega')\mathcal{L}(\omega_1)\mathcal{L}(\omega'_1)} \times \\ &\times \langle U(\omega)U(\omega')U(\omega_1)U(\omega'_1) \rangle \exp[i(\omega_1 + \omega'_1)t] \times \\ &\times \frac{d\omega d\omega' d\omega_1 d\omega'_1}{(2\pi)^4} - \langle \mathcal{E} \rangle^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Входящее в эту формулу перекрестное среднее четвертого порядка, с учетом того, что случайный процесс $U(t)$ является нормальным, может быть выражено через моменты второго порядка:

$$\begin{aligned} \langle U(\omega)U(\omega')U(\omega_1)U(\omega'_1) \rangle &= \\ &= (2\pi)^2 \delta(\omega + \omega') \delta(\omega_1 + \omega'_1) S_0(\omega)S_0(\omega_1) + \\ &+ (2\pi)^2 (\delta(\omega + \omega_1) \delta(\omega' + \omega'_1) + \\ &+ \delta(\omega + \omega'_1) \delta(\omega' + \omega_1)) S_0(\omega)S_0(\omega'). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{E}}(t) &= 2(\hbar\gamma)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\omega\omega'|(\omega_0^2 - \omega\omega')^2}{|\mathcal{L}(\omega)|^2 |\mathcal{L}(\omega')|^2} \times \\ &\times \exp[i(\omega_1 + \omega'_1)t] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Спектральная плотность флуктуаций может быть теперь легко найдена с помощью формулы (1.3):

$$S_{\mathcal{E}}(\Omega) = 2(\hbar\gamma)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\omega(\Omega - \omega)|[\omega_0^2 - \omega(\Omega - \omega)]^2}{|\mathcal{L}(\omega)|^2 |\mathcal{L}(\Omega - \omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.13)$$

Это выражение существенно упрощается, если частота наблюдения Ω мала по сравнению с собственной частотой контра ω_0 . В этом случае подынтегральное выражение имеет два узких максимума при значениях ω , близких к ω_0 , что позволяет переписать последнюю формулу в виде

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{E}}(\Omega) &\approx \frac{(\hbar\gamma\omega_0)^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{[v^2 + \gamma^2][(v - \Omega)^2 + \gamma^2]} = \\ &= \frac{(\hbar\omega_0)^2\gamma}{\Omega^2 + (2\gamma)^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Мы получили флуктуации, основная энергия которых сосредоточена вблизи нулевой частоты. Время корреляции этих флуктуаций равно времени релаксации контра $\tau^* = 1/2\gamma$, а их полный размах (корень квадратный из дисперсии) равен энергии нулевых колебаний:

$$\Delta\mathcal{E} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathcal{E}}(\Omega) d\Omega} = \frac{\hbar\omega_0}{2}. \quad (3.15)$$

Напомним, что метод расчета, использованный в этом разделе, неправилен, и полученные результаты неверны. Они предназначены только для иллюстрации некорректности полуклассического подхода.

3.2. Квантовый расчет

Известно, что для линейных квантовых систем уравнения движения в картине Гейзенберга для линейных наблюдаемых (координат, импульсов и их линейных комбинаций) имеют точно такой же вид, как и соответствующие классические уравнения движения. Поэтому для оператора заряда на емкости LC-контура будет справедливо уравнение

$$\ddot{\hat{q}}(t) + 2\gamma\dot{\hat{q}}(t) + \omega_0^2\hat{q}(t) = \frac{\omega_0}{\rho_0} \hat{U}(t), \quad (3.16)$$

не отличающееся по виду от классического уравнения (3.1). Однако в квантовом случае необходимо учитывать не только корреляционные свойства случайного процесса $U(t)$, но и его операторные свойства, а именно, автокоммутатор $[\hat{U}(t), \hat{U}(t')]$ и действие на нулевое состояние $\hat{U}(t)|0\rangle$. Как показано в приложении 7.1, в квантовом случае флуктуационная э.д.с. может быть представлена в виде

$$\hat{U}(t) = \int_0^\infty \sqrt{2\hbar\omega R} (\hat{a}(\omega) \exp(-i\omega t) + \hat{a}^\dagger(\omega) \exp(i\omega t)) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.17)$$

где $\hat{a}(\omega)$, $\hat{a}^\dagger(\omega)$ — операторы уничтожения и рождения, удовлетворяющие соотношениям

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega')] = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (3.18)$$

и

$$\hat{a}(\omega)|0\rangle = 0. \quad (3.19)$$

Решение уравнения (3.16) имеет вид

$$\hat{q}(t) = \frac{\omega_0}{\rho_0} \int_0^\infty \sqrt{2\hbar\omega R} \times \\ \times \left(\frac{\hat{a}(\omega) \exp(-i\omega t)}{\mathcal{L}^*(\omega)} + \frac{\hat{a}^\dagger(\omega) \exp(i\omega t)}{\mathcal{L}(\omega)} \right) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.20)$$

а энергия LC-контура равна

$$\hat{\mathcal{E}}(t) = \frac{\rho_0}{2\omega_0} (\dot{\hat{q}}^2(t) + \omega_0^2 \hat{q}^2(t)) = 2\hbar\gamma \int_0^\infty \sqrt{\omega\omega'} \times \\ \times \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega\omega')}{\mathcal{L}^*(\omega)\mathcal{L}^*(\omega')} \hat{a}(\omega)\hat{a}(\omega') \exp[-i(\omega + \omega')t] + \right. \\ \left. + \frac{(\omega_0^2 + \omega\omega')}{\mathcal{L}^*(\omega)\mathcal{L}(\omega')} \hat{a}^\dagger(\omega)\hat{a}(\omega') \exp[i(\omega - \omega')t] \right) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} + \text{h.c.}, \quad (3.21)$$

где h.c. означает слагаемое, эрмитово сопряженное предыдущему.

Среднее значение и спектральная плотность флуктуаций для наблюдаемых типа (3.21) вычислены в приложении 7.2. Из полученных в этом приложении формул (7.35) и (7.41) следует, что среднее значение энергии в контуре равно

$$\langle \mathcal{E} \rangle = 2\hbar\gamma \int_0^\infty \frac{\omega(\omega_0^2 + \omega^2)}{|\mathcal{L}(\omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (3.22)$$

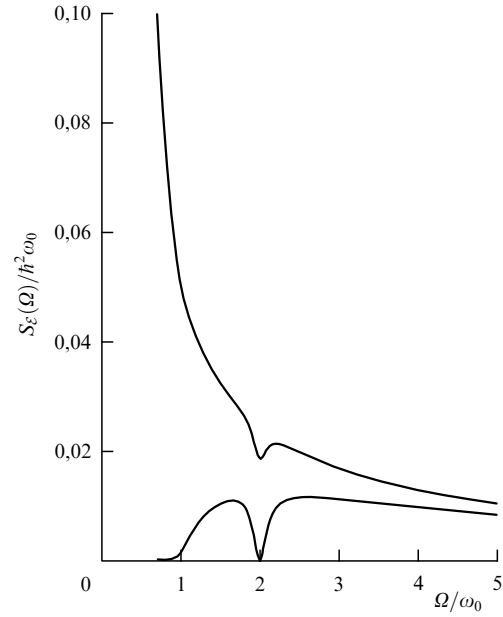


Рис. 1. Спектральные плотности флуктуаций энергии в LC-контуре с добротностью $Q = 10$, полученные в результате полуклассического (верхняя кривая) и строгого квантового (нижняя кривая) расчетов.

а спектральная плотность флуктуаций этой энергии —

$$S_{\mathcal{E}}(\Omega) = (2\hbar\gamma)^2 \int_0^{|\Omega|} \frac{\omega(|\Omega| - \omega) [\omega_0^2 - \omega(|\Omega| - \omega)]^2 d\omega}{|\mathcal{L}(\omega)|^2 |\mathcal{L}(|\Omega| - \omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.23)$$

Сравнивая эти формулы с полученными в разделе 3.1 формулами (3.9) и (3.13), легко заметить, что в то время как выражения для средних значений совпадают, отличаясь лишь формой записи, выражения для спектральных плотностей качественно различаются. Графики функций (3.13) и (3.23) для осциллятора с добротностью $Q = 10$ приведены на рис. 1.

Особенно разительно различие на малых частотах, $\Omega \ll \omega_0$. Для этого диапазона частот нетрудно найти явное выражение для $S_{\mathcal{E}}(\Omega)$. Поскольку пределы интегрирования в формуле (3.23) ограничивают значения переменной интегрирования ω диапазоном малых частот, $0 \leq \omega \leq \Omega \ll \omega_0$, можно считать, что $\mathcal{L}(\omega) \approx \omega_0^2$, и

$$S_{\mathcal{E}}(\Omega) \approx \left(\frac{2\hbar\gamma}{\omega_0^2} \right)^2 \int_0^{|\Omega|} \omega(|\Omega| - \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \\ = \frac{2\hbar^2\gamma^2|\Omega|^3}{3\omega_0^4} = \frac{\hbar^2|\Omega|^3}{6Q^2\omega_0^2}, \quad (3.24)$$

где $Q = \omega_0/2\gamma$ — добротность контура. При $\Omega \simeq \gamma$ эта величина примерно в Q^6 раз меньше, чем полученная полуклассическим расчетом.

Причина расхождения становится очевидной, если обратить внимание на единственное различие формул (3.13) и (3.23) — пределы интегрирования. В формуле (3.13) основной вклад в интеграл при $\Omega \ll \omega_0$ дают значения частоты ω , близкие к собственной частоте ω_0 . Флуктуации энергии в этом случае создаются в основном за счет биений колебаний с частотами вблизи ω_0 , по принципу преобразования частоты вниз (down-conver-

sion): $\Omega = \omega - \omega'$. Такой механизм действительно имеет место для тепловых колебаний, когда температура термостата $T \gg \hbar\omega_0/k$.

В то же время в квантовом случае околорезонансные частоты в подынтегральном выражении в формуле (3.23) отсекаются пределами интегрирования. В результате флуктуации энергии в чисто квантовом случае, когда температура термостата равна нулю, создаются только за счет биений далеких от резонанса и потому гораздо более слабых колебаний с низкими частотами $\omega \ll \omega_0$, по принципу преобразования частоты вверх (up-conversion): $\Omega = \omega + \omega'$. Этим и объясняется резкое падение спектральной плотности на низких частотах.

Можно также соотнести такое поведение спектральной плотности на низких частотах с поведением энергии в изолированном осцилляторе. Энергия нулевых колебаний в изолированном осцилляторе — точно заданная величина $\hbar\omega_0/2$; в осцилляторе с конечной добротностью флуктуации энергии нулевых колебаний на низких частотах отличны от нуля, но малы и быстро стремятся к нулю с ростом добротности. С другой стороны, при классическом рассмотрении неопределенность равновесной энергии осциллятора равна средней энергии, что полностью соответствует полученной полуклассическим методом формуле (3.15).

3.3. О среднем значении энергии нулевых колебаний в осцилляторе с конечной добротностью

Как уже было отмечено, среднее значение энергии в осцилляторе с диссипацией не равно $\hbar\omega_0/2$ и, более того, расходится. Если ограничить интегрирование в формуле (3.22) некоторой частотой обрезания $\omega_{\max}$, то мы получим функцию $\mathcal{E}(\omega_{\max})$, график которой приведен на рис. 2. Видно, что эта функция ведет себя "почти" правильно, набирая значение, близкое к $\hbar\omega_0/2$, при изменении своего аргумента в диапазоне от $\omega_0 - \gamma$ до $\omega_0 + \gamma$. Но затем, при $\omega_{\max} \gg \omega_0$, она пересекает линию $\hbar\omega_0/2$ и логарифмически стремится к бесконечности.

В работах [7–9], чтобы избавиться от этой расходимости и вернуть среднюю энергию к "правильному"

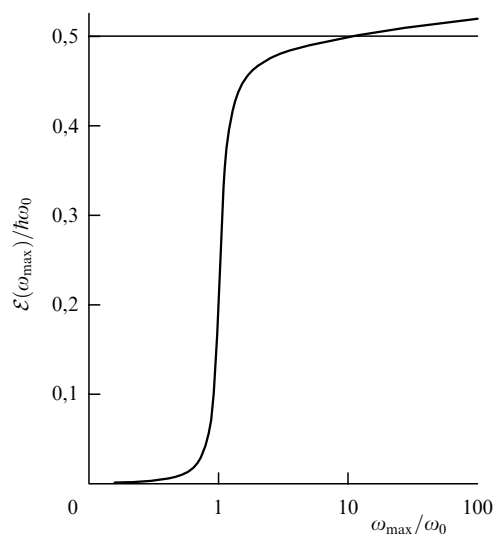


Рис. 2. Зависимость средней энергии нулевых колебаний в осцилляторе с конечной добротностью от частоты обрезания при интегрировании (добротность $Q = 10$).

значению $\hbar\omega_0/2$, было предложено модифицировать формулу (1.4), положив в ней спектральную плотность флуктуаций равной

$$S(\omega) = \hbar\omega_0 R \coth \frac{\hbar\omega_0}{2kT}. \quad (3.25)$$

Однако формула (3.25) очевидным образом нарушает на высоких частотах неравенство (7.17). Кроме того, как было справедливо указано в работе [10], спектральная плотность шума термостата не должна зависеть от каких-либо конкретных параметров системы, к которой этот термостат подключен (см. также дискуссию в статье [11]).

Чтобы разобраться с причинами (кажущегося) расхождения формулы (3.22) с утверждением, что энергия в осцилляторе (моды колебаний) в нулевом состоянии точно равна $\hbar\omega_0/2$, остановимся несколько подробнее на понятии моды колебаний.

В строгом математическом смысле под модами понимаются собственные решения системы уравнений движения для данного объекта. Таким образом, мода — это часть составной системы: а) имеющая размерность единица, т.е. характеризующаяся уравнением движения второго порядка, б) полностью независимая от остальной системы. Рассмотренный выше осциллятор с диссипацией в этом смысле не является модой, так как он связан с термостатом. Мы будем использовать для такого случая термин *степень свободы*, понимая под ним часть составной системы, которую также можно описать уравнением движения второго порядка, но которая, возможно, связана с остальной системой².

В этой терминологии собственные решения для закрытого электромагнитного резонатора с *идеально отражающими* стенками являются как модами, так и степенями свободы для электромагнитного поля внутри него. В то же время, если стенки сделать частично поглощающими или прозрачными, то эти бывшие моды становятся связанными с фонами в стенках резонатора и/или электромагнитными степенями свободы внешнего пространства. Понятие *степени свободы* для них по-прежнему применимо, однако истинные моды такой системы теперь уже проникают внутрь стенок и в окружающее пространство.

С этой точки зрения нет ничего удивительного в том, что энергия осциллятора с конечной добротностью отлична от $\hbar\omega_0/2$, и даже в том, что она расходится. В таком осцилляторе локализована часть энергии всех мод связанной системы "осциллятор + термостат". Для мод, частота которых близка к парциальной частоте осциллятора ω_0 , основная часть энергии сосредоточена в осцилляторе, а для остальных — в термостате. Тем не менее "хвостов" высокочастотных мод (с частотой $\omega \gg \omega_0$) оказывается достаточно, чтобы обеспечить расходимость энергии осциллятора. В приложении 7.3 рассмотрена задача о собственных модах системы "осциллятор + термостат" для простой модели термостата (длинная двухпроводная линия) и получено выра-

² Автор не хотел бы вдаваться в терминологические дискуссии по поводу того, что есть мода и что есть степень свободы; в то же время какие-то два различных термина здесь необходимы. Поэтому предлагается считать приведенные определения "локальными" для данного раздела.

жение для средней энергии в осцилляторе, совпадающее с формулой (3.22).

4. Зависимость нулевых колебаний от граничных условий

4.1. Простой пример

Помимо рассмотренной в предыдущем разделе неопределенности энергии нулевых колебаний, вызванной *линейной* связью осциллятора с внешним миром (термостатом), существует и другой, *нелинейный* механизм появления такой неопределенности. Он связан с тем, что энергия нулевых колебаний зависит от собственной частоты осциллятора, а эта собственная частота всегда в той или иной степени зависит от внешних условий [12]. Например, в объемном СВЧ-резонаторе частота зависит от его геометрических параметров, которые являются координатами некоторых механических осцилляторов (упругих мод стенок резонатора). Как следствие, у них всегда есть собственные неопределенности как тепловые, так и фундаментальные квантовые. Вследствие этого становится неопределенной и частота резонатора, а следовательно, и энергия его нулевых колебаний. Подчеркнем, что такой эффект может иметь место даже в консервативных системах — достаточно, чтобы они состояли из нескольких нелинейно связанных степеней свободы.

Рассмотрим простой пример подобной системы. Пусть имеется LC-контур (рис. 3), индуктивность и емкость которого зависят от координаты механического осциллятора x :

$$L = \frac{L_0}{1 - x/d}, \quad C = \frac{C_0}{1 - x/d}, \quad (4.1)$$

где d — параметр связи. Мы будем считать, что собственная частота этого осциллятора ω_m мала по сравнению с частотой LC-контура.

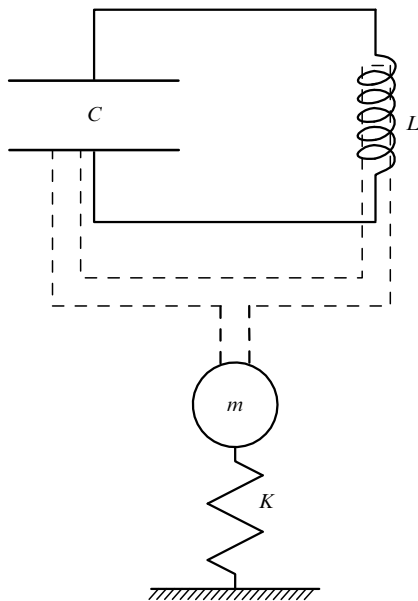


Рис. 3. Электромагнитный резонатор, параметрически связанный с механическим осциллятором.

В этом случае собственная частота, а следовательно, и энергия нулевого состояния LC-контура также будут зависеть от x :

$$\mathcal{E}_0^e = \frac{\hbar\omega_e}{2} \left(1 - \frac{x}{d}\right), \quad (4.2)$$

где $\omega_e = 1/\sqrt{L_0 C_0}$. Если механический осциллятор находится в нулевом состоянии, то неопределенность его координаты x равна $\sqrt{\hbar/2m\omega_m}$. При этом неопределенность энергии нулевого состояния LC-контура будет равна

$$\Delta\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar\omega_e}{2d} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}. \quad (4.3)$$

В то же время для полной связанной системы должно, очевидно, существовать состояние с минимальной энергией, и полная энергия в этом состоянии должна быть задана точно. Следовательно, энергии LC-контура и механического осциллятора должны быть в этом состоянии антикоррелированы, а неопределенность энергии механического осциллятора также должна быть равна (4.3).

В приложении 7.4 решена задача о состояниях с заданной энергией рассматриваемой системы. Из полученных в этом приложении результатов следует, что минимальная энергия равна^{3,4}

$$\mathcal{E}_{00} = \frac{\hbar\omega_e}{2} + \frac{\hbar\omega_m}{2} - \frac{m\omega_m^2 X_0^2}{2}, \quad (4.4)$$

а состояние с минимальной энергией имеет вид

$$|\Psi_{00}\rangle = \hat{\mathcal{D}}(X_0)|0_m\rangle|0_e\rangle, \quad (4.5)$$

где $|0_e\rangle$ и $|0_m\rangle$ — нулевые состояния LC-контура и механического осциллятора, соответственно, $\hat{\mathcal{D}}$ — оператор сдвига по координате x (см. формулу (7.62)), и

$$X_0 = \frac{\hbar\omega_e}{2m\omega_m^2 d} \quad (4.6)$$

— смещение положения равновесия механического осциллятора под действием силы притяжения со стороны нулевых колебаний в LC-контуре.

Легко показать, что средние значения энергии LC-контура и механического осциллятора в состоянии (4.5) равны

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_0^e \rangle &= \langle \Psi_{00} | \hbar\omega_e \left(\hat{n}_e + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\hat{x}}{d} \right) | \Psi_{00} \rangle = \\ &= \frac{\hbar\omega_e}{2} \left(1 - \frac{X_0}{d} \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\langle \mathcal{E}_0^m \rangle = \langle \Psi_{00} | \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_m^2 \hat{x}^2}{2} \right) | \Psi_{00} \rangle = \frac{\hbar\omega_m}{2} + \frac{m\omega_m^2 X_0^2}{2}, \quad (4.8)$$

³ Мы не рассматриваем заведомо нереалистичный случай, когда последний член в формуле (4.4) превышает предыдущий, и обкладки конденсатора "схлопываются" под действием силы притяжения, созданной нулевыми колебаниями.

⁴ В статье [12] допущена досадная опечатка: перед последним членом в формуле для минимальной энергии стоит знак "+" вместо знака "-".

а неопределенности этих энергий совпадают и равны значению (4.3), в соответствии с нашими предварительными соображениями.

4.2. Передача информации путем модуляции плотности энергии нулевых колебаний

Используя зависимость плотности энергии нулевых колебаний от граничных условий, можно, по крайней мере в принципе, передавать информацию без излучения электромагнитных квантов. Принцип действия такого канала связи состоит в модуляции граничного условия на одном конце линии передачи и измерении вызванных этим вариаций плотности нулевой электромагнитной энергии на другом конце той же линии [12].

Представим, что конденсатор C с расстоянием между пластинами d подключен к линии передачи длиной $l = v\tau$, с волновым сопротивлением ρ и скоростью распространения сигнала v (рис. 4). Существенно, чтобы полоса пропускания линии передачи не была ограничена снизу, т.е. она может представлять собой, например, коаксиальный кабель или витую пару, но не полый волновод.

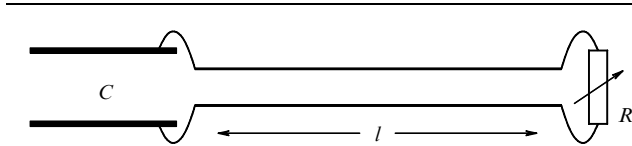


Рис. 4. Схема передачи информации без излучения электромагнитных квантов.

Нулевые колебания собственных мод системы создают силу притяжения между обкладками конденсатора. Структура этих мод существенно зависит от вида граничного условия на дальнем (по отношению к конденсатору) конце линии, поэтому манипулируя этим граничным условием, можно модулировать силу притяжения.

При замкнутом дальнем конце линии наинизшая собственная мода системы соответствует LC-контуре, составленной из конденсатора C и распределенной индуктивности линии $\rho\tau$. В конденсаторе находится существенная часть энергии такой моды (если длина линии не слишком велика, то около половины). В то же время, при разомкнутом конце линии подобная "полусосредоточенная" мода отсутствует. Поэтому естественно предположить, что сила притяжения между обкладками конденсатора будет максимальна при замкнутом конце и минимальна при разомкнутом.

Будем считать, что на дальнем конце линии включено переменное сопротивление R , которое, в частности, может быть равно нулю или бесконечности. Флуктуационная э.д.с. на этом сопротивлении равна (см. (7.24))

$$\hat{U}(t) = \int_0^\infty \sqrt{2\hbar\omega R} \hat{a}(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} + \text{h.c.} \quad (4.9)$$

Тогда флуктуационный заряд на конденсаторе будет равен

$$\hat{q}(t) = C \int_0^\infty \frac{\sqrt{2\hbar\omega R} \hat{a}(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}}{z(\omega)} + \text{h.c.}, \quad (4.10)$$

где

$$z(\omega) = \cos \omega\tau - \omega\tau_0 \sin \omega\tau - i \frac{R}{\rho} (\sin \omega\tau + \omega\tau_0 \cos \omega\tau) \quad (4.11)$$

и $\tau_0 = \rho C$. Средняя сила притяжения между обкладками конденсатора равна, соответственно,

$$F(R) = \frac{\langle 0|\hat{q}^2(t)|0\rangle}{2Cd} = \frac{\hbar RC}{d} \int_0^\infty \frac{\omega}{|z(\omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.12)$$

Этот интеграл логарифмически расходится при $\omega \rightarrow \infty$, по тем же самым причинам, что и средняя энергия нулевых колебаний в LC-контуре (см. раздел 3.3). Однако очевидно, что на достаточно высоких частотах используемая модель сосредоточенного осциллятора и одномерной линии перестает быть справедливой, хотя бы потому, что металл, из которого они сделаны, перестает быть хорошо отражающим. В то же время, нас интересует не абсолютная величина силы F , а ее зависимость от граничных условий на дальнем конце линии (от величины R), т.е. разность $F(R) - F(R \rightarrow \infty)$. А эта величина оказывается конечной.

На рисунке 5 приведен результат численного расчета разности сил притяжения при $R = 0$ и $R \rightarrow \infty$. Видно, что ее максимальное значение достигается при емкости конденсатора, равной $C = C_{\text{opt}} \approx 2,4\tau/\rho$, а величина модуляции силы при этом составляет примерно $0,07\hbar/\tau d$. На рисунке 6 приведен также график функции $F(R) - F(R \rightarrow \infty)$ при $C = C_{\text{opt}}$.

Эта сила весьма мала: например, при скорости v , равной скорости света, $d = 10^{-4}$ см и $l = 10^2$ см она равна 2×10^{-16} дин. Ее отношение к силе Казимира (5.1), приходящейся на площадь d^2 при том же расстоянии между пластинами d , составляет $\approx 1,7d/l \ll 1$. Тем не

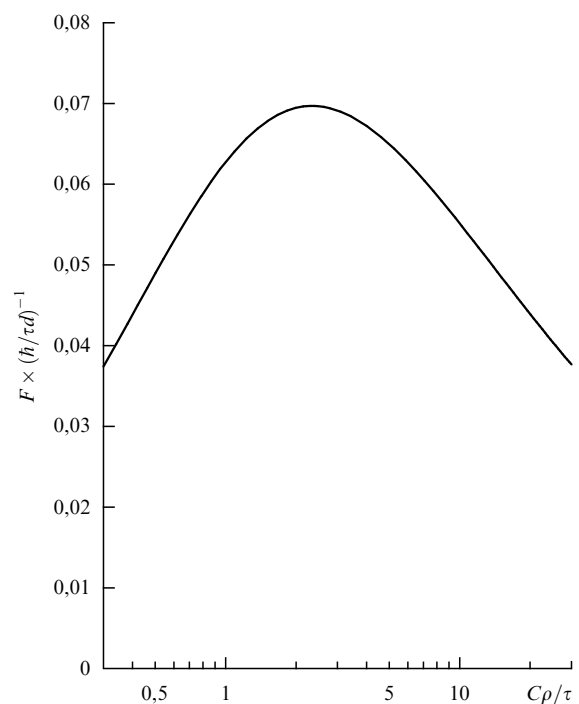


Рис. 5. Зависимость силы притяжения между обкладками конденсатора, подключенного к линии передачи, от величины емкости конденсатора.

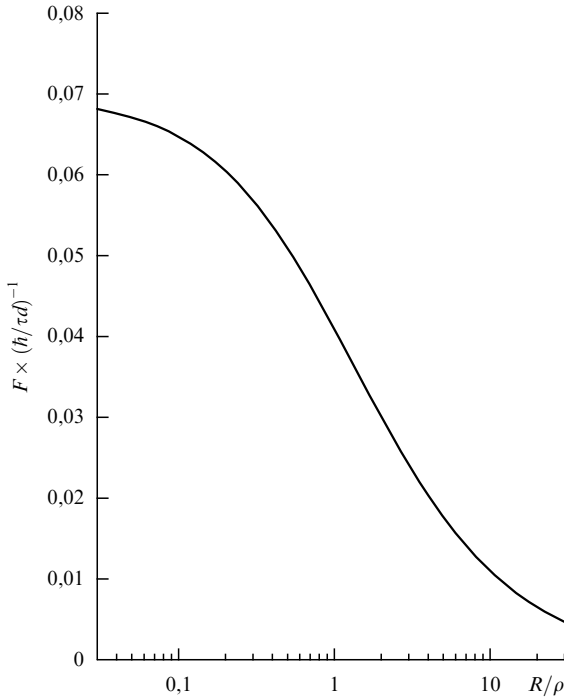


Рис. 6. Зависимость силы притяжения между обкладками конденсатора, подключенного к линии передачи, от величины сопротивления на конце линии.

менее то обстоятельство, что сила (4.12) может быть "окрашена", т.е. превращена из постоянной в меняющуюся по заданному (например, гармоническому) закону путем периодической модуляции сопротивления R , делает экспериментальную задачу по ее обнаружению не абсолютно безнадежной. Величина 2×10^{-16} дин соответствует, например, стандартному квантовому пределу [13] для резонансной силы, действующей на механический осциллятор массой 10^{-3} г и собственной частотой 1 с^{-1} , при времени измерения 5 с. Та же "окраска" может позволить выделить силу (4.12) на фоне постоянных сил другого происхождения, например, вызванных диссипацией в линии передачи.

5. Флуктуации и трение, порождаемые нулевыми колебаниями

5.1. Флуктуации и трение в свободном пространстве

Одним из наиболее известных проявлений нулевых электромагнитных колебаний является сила Казимира [14]. Предсказанная более полувека назад и через несколько лет после этого обнаруженная экспериментально [15], она возникает по той же причине, что и эффекты, рассмотренные в предыдущем разделе, — из-за зависимости плотности энергии нулевых колебаний от граничных условий. В частности, между двумя металлическими пластинками площадью A , разделенными расстоянием d , она меньше, чем в свободном пространстве, за счет низкочастотных компонент, с длинами волн $\lambda \sim d$. В результате между пластинками возникает сила притяжения, равная

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} A. \quad (5.1)$$

Эта сила может рассматриваться как разность много больших по величине, но почти точно компенсирующих друг друга пондеромоторных сил давления электромагнитных нулевых колебаний, действующих на каждую из пластинок с двух сторон.

Около 10 лет назад Г. Бартоном было отмечено, что эта компенсация имеет место только для средних значений сил давления, в то время как флуктуационные компоненты сил давления нулевых колебаний, действующие на отражающую поверхность с двух сторон, являются независимыми и поэтому не компенсируют друг друга. В работах [16, 17] им была решена задача о создаваемом электромагнитными нулевыми колебаниями давлении $\hat{p}(t, \mathbf{r})$ на бесконечную идеально отражающую поверхность, и было показано, что флуктуации давления описываются пространственно-временной корреляционной функцией вида

$$B(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \frac{1}{2} \langle \hat{p}(t, \mathbf{r}) \hat{p}(t', \mathbf{r}') + \hat{p}(t', \mathbf{r}') \hat{p}(t, \mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\Omega, \mathbf{K}) \cos [\Omega(t - t') - \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \frac{d\Omega d^2 \mathbf{K}}{(2\pi)^3}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ — двумерные радиус-векторы на поверхности, $\mathbf{K}$ — двумерный волновой вектор и

$$\Gamma(\Omega, \mathbf{K}) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{60\pi^2 c^4} (\Omega^2 - c^2 K^2)^{5/2}, & |\Omega| \geq cK, \\ 0, & |\Omega| < cK \end{cases} \quad (5.3)$$

— пространственно-временная спектральная плотность.

Рассмотрим тонкую идеально проводящую пластинку размером много больше, чем c/Ω , где Ω — частота наблюдения. В этом случае можно пренебречь дифракционными эффектами на краях пластинки. В работе [18] было показано, что на каждую из сторон такой пластинки будет действовать случайная сила давления со спектральной плотностью

$$S(\Omega) = \frac{\hbar^2 |\Omega|^5}{120\pi^4 c^4} A, \quad (5.4)$$

где A — площадь пластинки. Эта флуктуационная сила перекачивает энергию электромагнитных нулевых колебаний в механические степени свободы. Очевидно, что должен существовать и обратный поток энергии, иначе можно было бы черпать энергию из нулевых колебаний. Другими словами, в движение поверхности пластинки должно вноситься механическое трение. Физический механизм этого трения очевиден: параметрическое возбуждение электромагнитных колебаний колебаниями поверхности пластинки. Причем если при расклатке механических колебаний электромагнитными частота удваивается (поскольку пондеромоторная сила давления пропорциональна квадрату напряженности поля), то в обратном параметрическом процессе она, наоборот, делится пополам. В обоих случаях электромагнитная волна с частотой ω оказывается связана с механическими колебаниями с частотой 2ω .

В соответствии с флуктуационно-диссипационной теоремой, спектральной плотности (5.4) соответствует трение

$$H(\Omega) = \frac{S(\Omega)}{\hbar |\Omega|} = \frac{\hbar \Omega^4 A}{120 c^4}. \quad (5.5)$$

Существенно, что величина $H(\Omega)$ пропорциональна Ω^4 и, соответственно, сила трения пропорциональна пятой производной координаты по времени. Следовательно, наличие такого трения "о пустое пространство" не противоречит принципу относительности, поскольку при постоянной скорости движения сила трения равна нулю.

По величине это трение весьма мало. Чтобы показать это, оценим величину соответствующей такому трению добротности наименьшей моды упругих колебаний для пластинки толщиной a . Частота этой моды равна $\Omega_m = \pi v/a$, где v — скорость звука, а добротность равна

$$Q_m = \frac{m\Omega_m}{2H(\Omega_m)} = \frac{60\pi\rho_0 c^4 a^4}{\hbar v^3}, \quad (5.6)$$

где ρ — плотность материала пластинки. При обычных для твердых тел значениях параметров получаются значения добротности порядка $10^{37} - 10^{38}$ даже для пластинок микронной толщины. На современном уровне экспериментальной техники этот эффект вряд ли может быть обнаружен.

5.2. Флуктуации и трение в резонансных условиях

Как было отмечено в работе [18], флуктуационная сила давления нулевых колебаний и связанное с ней трение становятся намного более сильными в резонансных условиях, например, в LC-контуре, слабо связанном с окружающим электромагнитным вакуумом.

Сила притяжения между обкладками конденсатора в таком контуре может быть вычислена исходя из формулы (3.20). Она равна

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= \frac{\hat{q}^2(t)}{2Cd} = \\ &= \frac{2\hbar\gamma\omega_0^2}{d} \int_0^\infty \sqrt{\omega\omega'} \left(\frac{\hat{a}(\omega)\hat{a}(\omega') \exp[-i(\omega+\omega')t]}{\mathcal{L}^*(\omega)\mathcal{L}(\omega')} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{a}^\dagger(\omega)\hat{a}(\omega') \exp[i(\omega-\omega')t]}{\mathcal{L}^*(\omega)\mathcal{L}(\omega')} \right) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} + \text{h.c.}, \quad (5.7) \end{aligned}$$

где d — ширина емкостного зазора.

В соответствии с формулой (7.35), среднее значение силы притяжения равно

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \frac{2\hbar\gamma\omega_0^2}{d} \int_0^\infty \frac{\omega}{|\mathcal{L}(\omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{4d} \frac{Q_c}{\sqrt{4Q_c^2 - 1}} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{Q_c(2Q_c^2 - 1)}{\sqrt{4Q_c^2 - 1}} \right), \quad (5.8) \end{aligned}$$

где Q_c — добротность контура. При больших Q_c эта величина очень быстро стремится к $\hbar\omega_0/4d$.

Спектральная плотность флуктуаций силы притяжения, как следует из формулы (7.41), равна

$$S_F(\Omega) = \left(\frac{2\hbar\gamma\omega_0^2}{d} \right)^2 \int_0^{|\Omega|} \frac{\omega(|\Omega| - \omega)}{|\mathcal{L}(\omega)|^2 |\mathcal{L}(|\Omega| - \omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.9)$$

Эта формула может быть упрощена, если частота наблюдения близка к двойной резонансной частоте, $\Omega = 2(\omega_0 + \Delta)$, $|\Delta| \ll \omega_0$, и добротность контура велика,

$\gamma \ll \omega_0$. В этом случае

$$S_F(\Omega) \approx \left(\frac{\hbar\omega_0}{4d} \right)^2 \frac{\gamma}{\Delta^2 + \gamma^2}. \quad (5.10)$$

Чтобы найти трение, вносимое нулевыми колебаниями, можно, конечно, воспользоваться флуктуационно-диссипационной теоремой. Однако в методических целях полезно вычислить его непосредственно, что позволит убедиться в справедливости формулы (7.27) для данного конкретного случая.

Предположим, что одна из пластин конденсатора является подвижной, и ее смещение задается координатой x , так что полная величина емкостного зазора равна $d + x$. В этом случае уравнение движения для заряда на емкости конденсатора принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + 2\gamma\dot{q}(t) + \left(1 + \frac{\hat{x}(t)}{d} \right) \omega_0^2 q(t) = \\ = \frac{\omega_0}{\rho_0} \int_0^\infty \sqrt{2\hbar\omega R} (\hat{a}(\omega) \exp(-i\omega t) + \hat{a}^\dagger \exp(i\omega t)) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (5.11) \end{aligned}$$

(значения параметров ω_0 и ρ_0 соответствуют начальному значению емкостного зазора, при $x = 0$).

Поскольку нас интересует лишь линейная по x часть решения (при малых значениях x), будем искать решение методом последовательных приближений. Нулевому приближению $\hat{q}_0$ (при $x = 0$) соответствует формула (3.20). Ее подстановка в формулу (5.11) дает уравнение первого приближения:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(t) + 2\gamma\dot{q}_1(t) + \omega_0^2 q_1(t) = \\ = \frac{\hat{x}(t)}{d} \frac{\omega_0}{\rho_0} \int_0^\infty \sqrt{2\hbar\omega R} (\hat{a}(\omega) \exp(-i\omega t) + \\ + \hat{a}^\dagger(\omega) \exp(i\omega t)) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.12) \end{aligned}$$

Часть силы притяжения, пропорциональная x , равна

$$\hat{F}_1(t) = \frac{\omega_0\rho_0}{2d} [\hat{q}_0(t) \hat{q}_1(t) + \hat{q}_1(t) \hat{q}_0(t)]. \quad (5.13)$$

Решив уравнение (5.12), подставив его значение $\hat{q}_1(t)$ в формулу (5.13) и усреднив полученное выражение для нулевого состояния электромагнитных степеней свободы (поскольку сейчас нас интересует регулярная часть силы), получим, что она может быть представлена в виде

$$\langle 0 | \hat{F}_1(t) | 0 \rangle = \int_{-\infty}^\infty \chi(\Omega) \hat{x}(\Omega) \exp(i\Omega t) \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad (5.14)$$

где $\hat{x}(\Omega)$ — спектр $\hat{x}(t)$, а

$$\chi(\Omega) = \frac{2\hbar\gamma\omega_0^4}{d^2} \int_0^\infty \frac{\omega}{|\mathcal{L}(\omega)|^2} \left(\frac{1}{\mathcal{L}(\Omega - \omega)} + \frac{1}{\mathcal{L}(\Omega + \omega)} \right) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (5.15)$$

— обобщенная восприимчивость, вызванная динамическим воздействием нулевых колебаний. Мнимая часть этого выражения путем простой замены переменной интегрирования может быть приведена к виду

$$\text{Im } \chi(\Omega) = -\frac{2\hbar\gamma^2\omega_0^4}{d^2} \int_0^{|\Omega|} \frac{\omega(|\Omega| - \omega)}{|\mathcal{L}(\omega)|^2 |\mathcal{L}(|\Omega| - \omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.16)$$

Сравнивая эту формулу с формулой для спектральной плотности флуктуаций силы (5.9), легко убедиться в справедливости флуктуационно-диссипационной теоремы для этого случая:

$$S_F(\Omega) = \hbar |\operatorname{Im} \chi(\Omega)|. \quad (5.17)$$

Оценим возможность экспериментальной регистрации рассмотренного трения. Из структуры формулы (5.16) следует, что коэффициент трения имеет резкий максимум вблизи частоты $2\omega_0$. Если добротность контура Q_e достаточно велика, а частота наблюдения Ω близка к $2\omega_0$, то трение равно

$$|\chi(\Omega)| \approx \frac{\hbar \omega_0 Q_e}{8d^2}. \quad (5.18)$$

Представим, что подвижная пластина конденсатора имеет массу m и является частью механического осциллятора с частотой ω_m (рис. 7). Тогда рассмотренное трение приведет к тому, что добротность такого осциллятора будет ограничена величиной

$$Q_m \approx \frac{m\omega_m^2}{2|\chi(\Omega)|} \approx \frac{16m\omega_m d^2}{\hbar Q_e} \quad (5.19)$$

(формула справедлива при $Q_m \gg Q_e$).

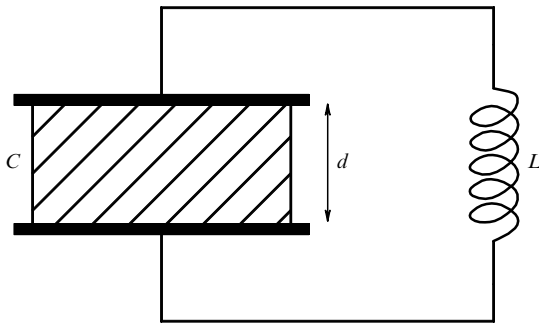


Рис. 7. Возможная схема наблюдения трения, вносимого нулевыми электромагнитными колебаниями.

Пусть, например, между обкладками конденсатора помещена диэлектрическая пластина толщиной d , имеющая частоту наинизшей моды поперечных механических колебаний $\pi v/d$, равную $2\omega_0$ (см. рис. 7). В этом случае формула (5.19) преобразуется к виду

$$Q_m \approx \frac{4\pi^2 YV}{\hbar \omega_0 Q_e}, \quad (5.20)$$

где Y — модуль Юнга материала пластины, а V — ее объем. Если $d = 10^{-4}$ см, $V = 10^{-7}$ см³, $\omega_0 = 10^{10}$ с⁻¹, то

$$Q_m Q_e \approx 10^{24}. \quad (5.21)$$

Можно отметить, что для электромагнитных резонаторов СВЧ-диапазона уже достигнуты значения добротности порядка 10^{11} [19], а для механических резонаторов — превышающие 10^8 [20].

6. Заключение

В этих методических заметках оказались затронутыми далеко не все явления, вызываемые нулевыми колеба-

ниями. Эффекты, связанные с силой Казимира, подробно рассмотрены в обзоре [21]. В нем приведена также обширная библиография по этой теме.

Из числа эффектов, вызываемых флуктуациями энергии нулевых колебаний, можно дополнительно упомянуть рассмотренные в статье [22] флуктуации и трение, вносимые электромагнитным вакуумом в движение заряженных частиц. В этой работе отмечено любопытное обстоятельство, что для обнаружения этого трения необходимо затратить энергию порядка $\hbar/\tau$, где τ — время измерения, которая будет излучена в вакуум в виде одного или нескольких фотонов с частотой порядка τ^{-1} .

Что касается экспериментального наблюдения рассмотренных явлений, то для большинства из них можно отметить, что в настоящий момент такие эксперименты вряд ли возможны или слишком дорогостоящи. Однако их также нельзя считать безнадежно сложными и с учетом быстрого прогресса экспериментальной физики в последние десятилетия (см., например, обзор [23]) их реализация почти наверняка станет возможна в обозримом будущем.

Автор выражает признательность В.Б. Брагинскому и С.П. Вятчанину за полезные обсуждения данной работы.

7. Приложения

7.1. Операторные свойства шумов термостата

7.1.1. Произвольный линейный двухполюсник. Термостат, независимо от того, насколько сложно его внутреннее устройство, с точки зрения "внешнего интерфейса" является линейным двухполюсником (как, например, обычное сопротивление). Такая система характеризуется линейной связью между внешним воздействием $q(t)$ и откликом на него $\hat{U}(t)$:

$$\hat{U}(t) = \hat{U}(t) + \int_{-\infty}^t \chi(t, t') q(t') dt', \quad (7.1)$$

где $\chi(t, t')$ — функция обобщенной восприимчивости, $\hat{U}(t)$ — значение $\hat{U}(t)$ при отсутствии внешнего воздействия, т.е. собственные флуктуации системы.

С другой стороны, рассматриваемую нами систему можно характеризовать гамильтонианом вида

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 - q(t)\hat{U}, \quad (7.2)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ — невозмущенный гамильтониан. Исходя из этого гамильтониана, решение уравнения движения для оператора $\hat{U}(t)$ в картине эволюции Гейзенберга может быть представлено в виде ряда теории возмущений:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) = & \hat{U}(t) - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\hat{U}(t), \hat{U}(t')] q(t') + \\ & + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' [[\hat{U}(t), \hat{U}(t')], \hat{U}(t'')] q(t') q(t'') + \dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

Из сравнения формул (7.3) и (7.1) легко видеть, что оператор $\hat{U}(t)$ должен вторично автокоммутировать:

$$[[\hat{U}(t), \hat{U}(t')], \hat{U}(t'')] \equiv 0 \quad \forall \quad t, t', t'', \quad (7.4)$$

обрывая тем самым ряд теории возмущений на втором члене. Из формул (7.3) и (7.1) следует также, что обобщенная восприимчивость выражается через автокоммутатор $\hat{U}(t)$ [1]:

$$\chi(t, t') = \begin{cases} \frac{i}{\hbar} [\hat{U}(t), \hat{U}(t')], & t \geq t', \\ 0, & t < t' \text{ (в силу принципа причинности)}. \end{cases} \quad (7.5)$$

Это равенство может быть записано также в форме

$$[\hat{U}(t), \hat{U}(t')] = \begin{cases} -i\hbar\chi(t, t'), & t \geq t', \\ i\hbar\chi(t', t), & t \leq t', \end{cases} \quad (7.6)$$

или

$$[\hat{U}(t), \hat{U}(t')] = i\hbar(\chi(t', t) - \chi(t, t')). \quad (7.7)$$

7.1.2. Стационарный линейный двухполюсник. Далее мы ограничим рассмотрение системами, которые являются стационарными как по динамическим свойствам, так и по шумам, т.е. такими, у которых и обобщенная восприимчивость $\chi(t, t')$, и корреляционная функция для шума $\hat{U}(t)$,

$$B(t, t') = \frac{1}{2} \langle \hat{U}(t)\hat{U}(t') + \hat{U}(t')\hat{U}(t) \rangle, \quad (7.8)$$

явно зависят только от разности входящих в них времен t, t' . Очевидно, что термостат удовлетворяет этому условию.

Для стационарных систем естественно использовать спектральное представление, в котором

$$\chi(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \exp[i\omega(t - t')] \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (7.9)$$

$$B(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp[i\omega(t - t')] \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (7.10)$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность шума $\hat{U}(t)$. Формула (7.1) в спектральном представлении принимает вид

$$\hat{\mathcal{U}}(\omega) = \hat{U}(\omega) + \chi(\omega)q(\omega). \quad (7.11)$$

Ниже нам понадобятся также выражения для автокоммутатора оператора $\hat{U}(\omega)$:

$$\begin{aligned} [\hat{U}^\dagger(\omega), \hat{U}(\omega')] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{U}(t), \hat{U}(t')] \exp[i(\omega t - \omega' t')] dt dt' = \\ &= 2\pi i \hbar (\chi(\omega) - \chi(-\omega)) \delta(\omega - \omega') = \\ &= -4\pi \operatorname{Im} \chi(\omega) \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (7.12)$$

а также для автокоррелятора этого оператора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \hat{U}^\dagger(\omega) \hat{U}(\omega') + \hat{U}(\omega') \hat{U}^\dagger(\omega) \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B(t, t') \exp[i(\omega t - \omega' t')] dt dt' = \\ &= 2\pi S(\omega) \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Рассмотрим оператор вида

$$\hat{\mathcal{Q}} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \hat{U}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (7.14)$$

где $Q(\omega)$ — некоторая функция. Вычислим среднее значение оператора $\hat{\mathcal{Q}}^\dagger \hat{\mathcal{Q}}$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{Q}}^\dagger \hat{\mathcal{Q}} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(\omega) Q(\omega') \langle \hat{U}^\dagger(\omega) \hat{U}(\omega') \rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(\omega) Q(\omega') \langle \hat{U}^\dagger(\omega) \hat{U}(\omega') + \\ &+ \hat{U}(\omega') \hat{U}^\dagger(\omega) \rangle \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Q^*(\omega) Q(\omega') [\hat{U}^\dagger(\omega), \hat{U}(\omega')] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\omega)|^2 (S(\omega) - \hbar \operatorname{Im} \chi(\omega)) \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Оператор $\hat{\mathcal{Q}}^\dagger \hat{\mathcal{Q}}$ — неотрицательно определенный, поэтому его среднее значение не может быть меньше нуля. Отсюда, с учетом произвольности функции $Q(\omega)$, следует, что для любых значений ω должно быть

$$S(\omega) \geq \hbar \operatorname{Im} \chi(\omega). \quad (7.16)$$

Легко заметить, что это неравенство может быть усилено: его левая часть — симметричная функция частоты, а правая — антисимметричная, из чего следует, что оно может быть переписано в виде

$$S(\omega) \geq \hbar |\operatorname{Im} \chi(\omega)| \quad (7.17)$$

(эта формула является частным случаем полученных в [13] соотношений для произвольных квантовых 2N-полюсников).

Формула (7.17) очень напоминает флуктуационно-диссипационную теорему. Основное отличие состоит в том, что последняя предполагает, что рассматриваемая система находится в состоянии теплового равновесия. Соотношение же (7.17) получено при гораздо более общих предположениях, и справедливо для любого квантового состояния системы. "Платой" за такую общность является то, что это соотношение имеет форму неравенства.

7.1.3. Термостат в нулевом состоянии. Положим теперь, что рассматриваемая система находится в нулевом состоянии, т.е. ее энергия мала настолько, насколько это допускается соотношением неопределенностей. При этом флуктуации на ее "внешнем интерфейсе" тоже минимальны, поэтому неравенство (7.16) превращается в равенство либо при положительных, либо при отрицательных значениях частоты ω , в зависимости от знака мнимой части $\chi(\omega)$. Знак мнимой части $\chi(\omega)$, в свою очередь, определяется из условия, что рассматриваемая система должна вносить положительную диссипацию.

Дополним гамильтониан термостата (7.2) гамильтонианом подключенного к нему пробного осциллятора, для которого q является обобщенной координатой:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 - \hat{q}(t) \hat{\mathcal{U}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{osc}}. \quad (7.18)$$

Уравнение движения для оператора $\hat{q}(t)$ при этом будет иметь вид

$$\ddot{\hat{q}}(t) + \omega_0^2 \hat{q}(t) = \frac{\omega_0}{\rho_0} \dot{U}(t). \quad (7.19)$$

Перейдя в спектральное представление и объединив последнее уравнение с соотношением (7.11), получим

$$\left(-\omega^2 - \frac{\omega_0}{\rho_0} \chi(\omega) + \omega_0^2\right) \hat{q}(\omega) = \frac{\omega_0}{\rho_0} \hat{U}(\omega). \quad (7.20)$$

Мнимая часть $\chi(\omega)$, пропорциональная $i\omega$, описывает диссипацию энергии (поскольку во временном представлении выражение $i\omega q(\omega)$ переходит в $\dot{q}(t)$). Причина, по которой в уравнении движения для чисто гамильтоновой системы "осциллятор + термостат" появляется диссипативный член, многократно обсуждалась в литературе (см., например, статью [10] или книгу [24]), и поэтому здесь мы не будем на ней останавливаться.

Для того, чтобы диссипация была положительна, необходимо, чтобы мнимая часть $\chi(\omega)$ была неположительна при $\omega \geq 0$ и неотрицательна при $\omega \leq 0$. Отсюда следует, что если термостат находится в нулевом состоянии, то

$$S(\omega) - \hbar \operatorname{Im} \chi(\omega) = \begin{cases} 2\hbar |\operatorname{Im} \chi(\omega)|, & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega \leq 0. \end{cases} \quad (7.21)$$

Вернемся к формуле (7.15) и положим в ней $Q(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$, где ω_1 — некоторая произвольная отрицательная частота. Из соотношения (7.21) следует, что в этом случае будет

$$\langle 0 | \hat{Q}^\dagger \hat{Q} | 0 \rangle = 0, \quad (7.22)$$

т.е. $\hat{Q}|0\rangle$ представляет собой вектор нулевой длины. Другими словами, для любого $\omega < 0$ будет

$$\hat{U}(\omega)|0\rangle = 0. \quad (7.23)$$

Отсюда, с учетом формулы (7.12), следует, что шум $\hat{U}(t)$ может быть представлен в виде

$$\hat{U}(t) = \int_0^\infty \sqrt{2\hbar |\chi(\omega)|} (\hat{a}(\omega) \exp(-i\omega t) + \hat{a}^\dagger(\omega) \exp(i\omega t)) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (7.24)$$

где $a(\omega)$ и $a^\dagger(\omega)$ — некоторые операторы, для которых

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega')] = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (7.25)$$

и

$$\hat{a}(\omega)|0\rangle = 0. \quad (7.26)$$

Спектральная плотность этого шума, как нетрудно показать, равна

$$S(\omega) = \hbar |\operatorname{Im} \chi(\omega)|. \quad (7.27)$$

Легко заметить, что алгебраические свойства операторов $a(\omega)$ и $a^\dagger(\omega)$ в точности совпадают со свойствами

операторов рождения и уничтожения квантов. Следовательно, термостат (при любом его внутреннем устройстве) можно рассматривать как набор бесконечного количества гармонических осцилляторов, для которых введенные в формуле (7.24) операторы $\hat{a}(\omega)$ и $\hat{a}^\dagger(\omega)$ являются операторами рождения и уничтожения.

7.2. Вычисление средних значений и спектральных плотностей флуктуаций для величин типа энергии или мощности

В этом приложении будут вычислены среднее значение и спектральная плотность флуктуаций в нулевом состоянии для оператора вида

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t) = \int_0^\infty & \left(Q_1(\omega, \omega') \hat{a}(\omega) \hat{a}(\omega') \exp[-i(\omega + \omega')t] + \right. \\ & + Q_2(\omega, \omega') \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}(\omega') \exp[i(\omega' - \omega)t] + \\ & + Q_2^*(\omega, \omega') \hat{a}(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') \exp[i(\omega - \omega')t] + \\ & \left. + Q_1^*(\omega, \omega') \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') \exp[i(\omega + \omega')t] \right) \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned} \quad (7.28)$$

где $Q_{1,2}(\omega, \omega')$ — некоторые функции.

Мы будем полагать, что этот оператор является эрмитовым:

$$\hat{Q}^\dagger(t) = \hat{Q}(t). \quad (7.29)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(Q_2(\omega, \omega') \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}(\omega') \exp[i(\omega' - \omega)t] + \right. \\ & \left. + Q_2^*(\omega, \omega') \hat{a}(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') \exp[i(\omega - \omega')t] \right) \frac{d\omega}{2\pi} = \\ & = \int_0^\infty \left(Q_2^*(\omega, \omega') \hat{a}^\dagger(\omega') \hat{a}(\omega) \exp[i(\omega - \omega')t] + \right. \\ & \left. + Q_2(\omega, \omega') \hat{a}(\omega') \hat{a}^\dagger(\omega) \exp[i(\omega' - \omega)t] \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Эта формула упрощается с помощью коммутатора (7.25), давая в итоге условие на функцию Q_2 :

$$\int_0^\infty Q_2(\omega, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_0^\infty Q_2^*(\omega, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (7.31)$$

Из вида формулы (7.28) следует также, что функцию Q_1 можно считать симметричной относительно перестановки ее аргументов:

$$Q_1(\omega, \omega') = Q_1(\omega', \omega), \quad (7.32)$$

поскольку интеграл, содержащий антисимметричную часть, тождественно равен нулю.

Действуя оператором $\hat{Q}(t)$ на нулевое состояние, получим

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t)|0\rangle = \int_0^\infty & \left(Q_1^*(\omega, \omega') \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') \exp[i(\omega + \omega')t] + \right. \\ & \left. + Q_2^*(\omega, \omega') \hat{a}(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') \exp[i(\omega' - \omega)t] \right) \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |0\rangle. \end{aligned} \quad (7.33)$$

С помощью коммутатора (7.25) и очевидного равенства $\hat{a}(\omega)|0\rangle = 0$ эта формула преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t)|0\rangle = & \left(\int_0^\infty Q_1^*(\omega, \omega') \hat{a}^\dagger(\omega) \hat{a}^\dagger(\omega') \times \right. \\ & \times \exp[i(\omega + \omega')t] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} + \\ & \left. + \int_0^\infty Q_2^*(\omega, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Следовательно, среднее значение $\hat{Q}$ равно

$$\langle \hat{Q} \rangle = \langle 0 | \hat{Q}(t) | 0 \rangle = \int_0^\infty Q_2(\omega, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (7.35)$$

Для того, чтобы вычислить спектральную плотность флуктуаций $\hat{Q}$, найдем сначала ее несимметризованную корреляционную функцию

$$B'(t) = \langle 0 | (\hat{Q}(0) - \langle \hat{Q} \rangle) (\hat{Q}(t) - \langle \hat{Q} \rangle) | 0 \rangle. \quad (7.36)$$

Используя опять формулу (7.33), получим

$$\begin{aligned} B'(t) = & \int_0^\infty Q_1(\omega, \omega') Q_1^*(\omega_1, \omega'_1) \times \\ & \times \langle 0 | \hat{a}(\omega) \hat{a}(\omega') \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{a}^\dagger(\omega'_1) | 0 \rangle \times \\ & \times \exp[i(\omega_1 + \omega'_1)t] \frac{d\omega d\omega' d\omega_1 d\omega'_1}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Входящий в эту формулу матричный элемент вычисляется путем систематического перетаскивания операторов $\hat{a}$ направо, а операторов $\hat{a}^\dagger$ — налево и использования условий, что $\hat{a}(\omega)|0\rangle = 0$ и $\langle 0 | \hat{a}^\dagger(\omega) = 0$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}(\omega) \hat{a}(\omega') \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{a}^\dagger(\omega'_1) | 0 \rangle = \\ = (2\pi)^2 (\delta(\omega - \omega_1) \delta(\omega' - \omega'_1) + \delta(\omega' - \omega) \delta(\omega - \omega'_1)). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Следовательно,

$$B'(t) = 2 \int_0^\infty |Q_1(\omega, \omega')|^2 \exp[i(\omega + \omega')t] \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \quad (7.39)$$

Собственно корреляционная функция получается путем симметризации $B'(t)$:

$$\begin{aligned} B(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \langle 0 | (\hat{Q}(0) - \langle \hat{Q} \rangle) (\hat{Q}(t) - \langle \hat{Q} \rangle) | 0 \rangle + \right. \\ & \left. + \langle 0 | (\hat{Q}(t) - \langle \hat{Q} \rangle) (\hat{Q}(0) - \langle \hat{Q} \rangle) | 0 \rangle \right\} = \\ = & 2 \int_0^\infty |Q_1(\omega, \omega')|^2 \cos(\omega + \omega')t \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Спектральная плотность флуктуаций находится отсюда с помощью теоремы Винера – Хинчина (1.3):

$$\begin{aligned} S(\Omega) = & \int_0^\infty |Q_1(\omega, \omega')|^2 (\delta(\omega + \omega' - \Omega) + \\ & + \delta(\omega + \omega' + \Omega)) \frac{d\omega d\omega'}{2\pi} = \\ = & \int_0^{|\Omega|} |Q_1(\omega, |\Omega| - \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

7.3. Колебательные моды для системы "осциллятор + термостат"

Из радиофизики хорошо известно, что полубесконечную двухпроводную линию, если проводить измерения только на ее конце, в принципе невозможно отличить от обычного сопротивления. Поэтому мы возьмем ее в качестве модели термостата. Вначале рассмотрим линию конечной длины l , а затем перейдем к предельному случаю $l \rightarrow \infty$.

Система уравнений движения для LC-контура с подключенной к нему линией с волновым сопротивлением R и скоростью распространения сигнала v имеет вид

$$\frac{\partial \hat{U}(t, x)}{\partial t} = -Rv \frac{\partial \hat{I}(t, x)}{\partial x}, \quad (7.42a)$$

$$\frac{\partial \hat{I}(t, x)}{\partial t} = -\frac{v}{R} \frac{\partial \hat{U}(t, x)}{\partial x}, \quad (7.42б)$$

$$\hat{q}(t) + \omega_0^2 \hat{q}(t) = \frac{\omega_0}{\rho_0} \hat{U}(t, 0), \quad (7.42в)$$

$$\hat{q}(t) = -\hat{I}(t, 0), \quad (7.42г)$$

где $U(x, t)$ и $I(x, t)$ — соответственно, напряжение и ток в линии, $q(t)$ — заряд на емкости контура.

К этим уравнениям следует еще добавить граничное условие на дальнем (от LC-контура) конце линии. Конкретный вид этого граничного условия значения не имеет. Будем считать, например, что дальний конец линии разомкнут:

$$\hat{I}(l, t) = 0. \quad (7.42д)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде

$$\hat{U}(t, x) = \sum_n U_n(x) \hat{a}_n \exp(-i\omega_n t) + \text{h.c.}, \quad (7.43a)$$

$$\hat{I}(t, x) = \sum_n I_n(x) \hat{a}_n \exp(-i\omega_n t) + \text{h.c.}, \quad (7.43б)$$

$$\hat{q}(t) = \sum_n q_n \hat{a}_n \exp(-i\omega_n t) + \text{h.c.}, \quad (7.43в)$$

где ω_n — собственные частоты мод системы, $\hat{a}_n$ — операторы уничтожения для этих мод, и суммирование производится по всем модам.

Подстановка этих выражений в уравнения (7.42) дает:

$$i\omega_n U_n(x) = Rv \frac{\partial I_n(x)}{\partial x}, \quad (7.44a)$$

$$i\omega_n I_n(x) = \frac{v}{R} \frac{\partial U_n(x)}{\partial x}, \quad (7.44б)$$

$$(\omega_0^2 - \omega_n^2) q_n = \frac{\omega_0}{\rho_0} \hat{U}_n(0), \quad (7.44в)$$

$$i\omega_n q_n = I_n(0), \quad (7.44г)$$

$$I_n(l) = 0. \quad (7.44д)$$

Из этих формул следует, что

$$U_n(x) = A_n \cos \frac{\omega_n}{v} (x - l), \quad (7.45a)$$

$$I_n(x) = \frac{iA_n}{R} \sin \frac{\omega_n}{v} (x - l), \quad (7.45б)$$

$$q_n = -\frac{A_n}{R} \sin \omega_n \tau, \quad (7.45в)$$

где $\tau = l/v$, а собственные частоты ω_n определяются из уравнения

$$\tan \omega_n \tau = -\frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2}, \quad (7.46)$$

$$\gamma = \frac{\omega_0 R}{2\rho_0}. \quad (7.47)$$

Амплитуды A_n должны быть определены из условия, что полная энергия в каждой моде в нулевом состоянии равна $\hbar\omega_n/2$. Эта энергия может быть представлена в виде суммы:

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{\text{LC}} + \mathcal{E}_n^{\text{line}}, \quad (7.48)$$

где

$$\mathcal{E}_n^{\text{line}} = \frac{1}{2v} \int_0^l \left(\frac{|U_n|^2}{R} + R|I_n|^2 \right) dx = \frac{\tau}{2R} |A_n|^2 \quad (7.49)$$

— часть энергии, находящаяся в линии, и

$$\mathcal{E}_n^{\text{LC}} = \frac{\rho_0}{2\omega_0} (\omega_n^2 + \omega_0^2) |q_n|^2 = \frac{\gamma(\omega_n^2 + \omega_0^2)}{R|\mathcal{L}(\omega_n)|^2} |A_n|^2 \quad (7.50)$$

— часть энергии, находящаяся в LC-контуре. Следовательно,

$$|A_n|^2 = \frac{\hbar\omega_n R}{\tau + 2\gamma(\omega_n^2 + \omega_0^2)/|\mathcal{L}(\omega_n)|^2}. \quad (7.51)$$

Теперь мы можем вычислить полную энергию в LC-контуре:

$$\mathcal{E}_{\text{LC}} = \sum_n \mathcal{E}_n^{\text{LC}} = \hbar\gamma \sum_n \frac{\omega_n(\omega_n^2 + \omega_0^2)}{\tau|\mathcal{L}(\omega_n)|^2 + 2\gamma(\omega_n^2 + \omega_0^2)}. \quad (7.52)$$

Уже из этого выражения хорошо видно, что логарифмическая расходимость на высоких частотах действительно имеет место, и ее причиной действительно является энергия нулевых колебаний высокочастотных мод системы.

Перейдем теперь к предельному случаю бесконечной длинной линии. Перепишем уравнение (7.46) в виде

$$\omega_n = \frac{\pi n}{\tau} - \frac{1}{\tau} \arctan \frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2}. \quad (7.53)$$

Отсюда можно вычислить плотность мод:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \left(\frac{d\omega_n}{dn} \right)^{-1} = \frac{\tau}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\omega} \arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \\ &= \frac{\tau|\mathcal{L}(\omega)|^2 + 2\gamma(\omega_0^2 + \omega^2)}{\pi|\mathcal{L}(\omega)|^2}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Заменяя суммирование в последней формуле интегрированием по правилу

$$\sum_n \rightarrow \int_0^\infty d\omega D(\omega), \quad (7.55)$$

получим выражение, в точности совпадающее с формулой (3.22).

7.4. Собственные состояния для LC-контра, параметрически связанного с механическим осциллятором

Гамильтониан системы, изображенной на рис. 3, равен

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_e \left(\hat{n}_e + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\hat{x}}{d} \right) + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_m^2 \hat{x}^2}{2}, \quad (7.56)$$

где $\hat{n}_e$ — оператор числа квантов в LC-контуре, p — импульс механического осциллятора, m — его масса. Найдем собственные значения $\mathcal{E}$ и собственные состояния $|\psi\rangle$ для этого гамильтониана:

$$\hat{\mathcal{H}}|\Psi\rangle = \mathcal{E}|\Psi\rangle. \quad (7.57)$$

Будем искать собственные состояния в виде

$$|\Psi\rangle = |\psi(n_e)\rangle |n_e\rangle, \quad (7.58)$$

где $|n_e\rangle$ — состояния с заданным числом квантов n_e для LC-контра, $|\psi(n_e)\rangle$ — волновая функция механического осциллятора (зависящая от n_e как от параметра). Подставив $|\Psi\rangle$ в уравнение (7.57), получим уравнение для $|\psi(n_e)\rangle$:

$$\begin{aligned} \left[-\hbar\omega_e \left(n_e + \frac{1}{2} \right) \frac{\hat{x}}{d} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_m^2 \hat{x}^2}{2} \right] |\psi(n_e)\rangle = \\ = \left[\mathcal{E} - \hbar\omega_e \left(n_e + \frac{1}{2} \right) \right] |\psi(n_e)\rangle. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Оно может также быть записано в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}(X_{n_e}) \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_m^2 \hat{x}^2}{2} - \frac{m\omega_m^2 X_{n_e}^2}{2} \right] \hat{\mathcal{D}}^\dagger(X_{n_e}) |\psi(n_e)\rangle = \\ = \left[\mathcal{E} - \hbar\omega_e \left(n_e + \frac{1}{2} \right) \right] |\psi(n_e)\rangle, \end{aligned} \quad (7.60)$$

где

$$X_{n_e} = \frac{\hbar\omega_e}{m\omega_m^2 d} \left(n_e + \frac{1}{2} \right) \quad (7.61)$$

— величина смещения положения равновесия механического осциллятора под действием силы притяжения со стороны LC-контра,

$$\hat{\mathcal{D}}(\xi) = \exp \left(-\frac{i\hat{p}\xi}{\hbar} \right) \quad (7.62)$$

— унитарный оператор сдвига, основное свойство которого выражается формулой

$$\hat{\mathcal{D}}^\dagger(\xi) \hat{x} \hat{\mathcal{D}}(\xi) = \hat{x} + \xi. \quad (7.63)$$

Собственные решения уравнения (7.60) представляют собой собственные состояния механического осциллятора $|n_m\rangle$, модифицированные действием оператора сдвига:

$$|\psi_{n_m}(n_e)\rangle = \hat{\mathcal{D}}(X_{n_e}) |n_m\rangle. \quad (7.64)$$

Следовательно, собственные значения энергии для полной системы равны

$$\mathcal{E}_{n_e n_m} = \hbar\omega_e \left(n_e + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_m \left(n_m + \frac{1}{2} \right) - \frac{m\omega_m^2 X_{n_e}^2}{2}, \quad (7.65)$$

а собственные состояния —

$$|\Psi_{n_e n_m}\rangle = \hat{\mathcal{D}}(X_{n_e})|n_m\rangle|n_e\rangle. \quad (7.66)$$

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Наука, 1976)
2. Callen H B, Welton T A *Phys. Rev.* **83** 34 (1951)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974)
4. Перина Я *Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений* (М.: Мир, 1987)
5. Vorontsov Yu I, Rembovsky Yu A *Phys. Lett. A* **285** 251 (2001)
6. Брагинский В Б, Воронцов Ю И, Халили Ф Я *ЖЭТФ* **73** 1340 (1977)
7. Климонтович Ю Л *УФН* **151** 309 (1987)
8. Klimontovich Yu L *Phys. Vibrations* **8** 260 (2000)
9. Климонтович Ю Л *Статистическая теория открытых систем* Т. III (М.: Янус-К, 2001)
10. Татарский В И *УФН* **151** 273 (1987)
11. Гинзбург В Л, Питаевский Л П *УФН* **151** 333 (1987)
12. Braginsky V B, Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **167** 1 (1992)
13. Braginsky V B, Khalili F Ya *Quantum Measurement* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
14. Casimir H B G *Proc. K. Ned. Akad. Wetensc.* **51** 793 (1948)
15. Sparnnay M Y *Physica* **24** 751 (1958)
16. Barton G J *Phys. A: Math. Gen.* **24** 991 (1991)
17. Barton G J *Phys. A: Math. Gen.* **24** 5533 (1991)
18. Braginsky V B, Khalili F Ya *Phys. Lett. A* **161** 197 (1991)
19. Turneure I P, Nguen Tuong Viet *Appl. Phys. Lett.* **16** 33 (1970)
20. Брагинский В Б, Митрофанов В П, Токмаков К В *Изв. РАН. Сер. физ.* **64** 1671 (2000)
21. Мостепаненко В М, Трунов Н Н *УФН* **156** 385 (1988)
22. Braginsky V B, Khalili F Ya, Sazhin M V *Phys. Lett. A* **208** 177 (1995)
23. Брагинский В Б *УФН* **173** 89 (2003)
24. Люисселл У *Излучение и шумы в квантовой электронике* (М.: Наука, 1972)

Zero-point oscillations, zero-point fluctuations, and fluctuations of zero-point oscillations

F.Ya. Khalili

M.V. Lomonosov Moscow State University, Physics Department,

Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russian Federation

Tel. (7-095) 939-12 24. Fax (7-095) 932-88 20

E-mail: farid@hbar.phys.msu.su

Several physical effects and methodological issues relating to the ground state of an oscillator are considered. Even in the simplest case of an ideal lossless harmonic oscillator, its ground state exhibits properties unusual from the classical point of view. In particular, the mean value of the product of two non-negative observables, kinetic and potential energies, is negative in the ground state. It is shown that semi-classical and rigorous quantum approaches yield substantially different results for the ground state energy fluctuations of an oscillator with finite losses. The dependence of zero-point fluctuations on the boundary conditions is considered. Using this dependence, it is possible to transmit information without emitting electromagnetic quanta. Fluctuations of zero-point oscillations electromagnetic pressure are analyzed, and the corresponding mechanical friction is considered. This friction can be viewed as the most fundamental mechanism limiting the quality factor of mechanical oscillators. Observation of these effects exceeds the possibilities of contemporary experimental physics but almost undoubtedly will be possible in the near future.

PACS numbers: 03.65.Ta, 03.65.Yz, 03.67.Hk

Bibliography — 24 references

Received 13 November 2002, revised 16 December 2002