

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

# Физические принципы обобщенной Больцмановской кинетической теории ионизованных газов

Б.В. Алексеев

*В последнее время удалось существенно уточнить кинетическое и гидродинамическое описание процессов переноса в рамках обобщенной Больцмановской физической кинетики. В обзоре изложены основные результаты обобщенной Больцмановской кинетической теории частично и полностью ионизованных газов и некоторые ее приложения.*

PACS numbers: 05.20.Dd, 51.10.+y, 52.25.Dg, 52.35.-g

## Содержание

1. Введение (145).
  2. Обобщенное уравнение Больцмана с учетом самосогласованных сил (150).
  3. Обобщенное уравнение Больцмана в физике слабоионизованного газа. Гидродинамические аспекты теории (155).
  4. Функция распределения заряженных частиц в газе Лоренца (158).
  5. Заряженные частицы в переменном электрическом поле (161).
  6. Проводимость слабоионизованного газа в скрещенных электрическом и магнитном полях (162).
  7. Дисперсионные уравнения для плазмы в рамках модели ОУБ с учетом столкновительного члена (164).
  8. Обобщенные дисперсионные уравнения плазмы: теория и эксперимент (168).
  9. Приложения (172).
    - П.1. Некоторые характерные масштабы в физике плазмы.
    - П.2. Дисперсионные уравнения в обобщенной Больцмановской кинетической теории без учета интегрального столкновительного члена.
- Список литературы (173).

## 1. Введение

Основой кинетической теории нейтральных и ионизованных газов является уравнение Больцмана (УБ), описывающее изменение одночастичной функции распределения  $f_1$  на временах порядка среднего времени между столкновениями и газодинамического времени течения. Уравнение Больцмана известно уже 130 лет [1] и, несмотря на определенные трудности ставшей уже

классической теории, до последних лет реальной альтернативы УБ как основы физической кинетики не было.

Слабое место классической Больцмановской кинетической теории — трактовка динамических свойств взаимодействующих частиц. С одной стороны, как следует из так называемого "физического" вывода УБ [1, 2], Больцмановские частицы рассматриваются как материальные точки, с другой стороны, интеграл столкновений в УБ приводит к появлению сечений столкновений. Строгий подход к выводу кинетического уравнения относительно  $f_1$  ( $KU_{f_1}$ ) основан на использовании иерархии уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ). Полученное с помощью метода многих масштабов  $KU_{f_1}$  превращается в УБ, если не учитывается изменение функции распределения (ФР) на временах порядка времени столкновения (или, что то же самое, на длинах порядка радиуса взаимодействия частиц). Важно отметить [3–5], что учет этого третьего из упомянутых масштабов приводит до введения любых аппроксимаций, направленных на расцепление цепочки Боголюбова, к появлению дополнительных и, вообще говоря, однопорядковых членов в УБ. Если  $KU_{f_1}$  выводится из ББГКИ методом корреляционных функций, то переход к УБ означает отказ от учета эффекта нелокальности и запаздывания.

Указанные трудности Больцмановской кинетической теории (БКТ) приводят к необходимости ответа на следующие связанные между собой вопросы: 1) что такое физически бесконечно малый объем и каким образом его введение (и, как следствие, неизбежное сглаживание ФР) отражается на кинетическом уравнении [3, 6]? 2) к каким изменениям уравнения Больцмана приводит последовательный учет собственного диаметра частиц при выводе  $KU_{f_1}$ ? Соответствующее уравнение  $KU_{f_1}$  в развиваемой нами теории будем называть обобщенным уравнением Больцмана (ОУБ).

Вывод обобщенного уравнения Больцмана и приложения обобщенной Больцмановской физической кинетики содержатся, в частности, в работах [3–5]. Предлагаемый вниманию читателя обзор является естествен-

**Б.В. Алексеев**, Государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова,  
119571 Москва, просп. Вернадского 86, Российская Федерация  
Тел. (095) 246-46-42, 247-16-56  
E-mail: bvalexeev@unesco.mitht.rssi.ru; b.alexeev@ru.net

Статья поступила 15 марта 2002 г.,  
после доработки 28 августа 2002 г.

ным продолжением работы [5], опубликованной в УФН и посвященной изложению основных представлений обобщенной Больцмановской кинетической теории в физике нейтральных разреженных газов. Там же содержится краткое историческое введение и общая характеристика проблемы. Поэтому во введении мы изложим, в чем же состоит суть физического обобщения УБ, а затем перейдем к исследованию особенностей вывода ОУБ, когда введение самосогласованного поля сил неизбежно, как это имеет место в физике плазмы.

Уравнение Больцмана играет роль фундаментального уравнения в теории процессов переноса (ТПП). Поэтому введение альтернативного КУ<sub>f<sub>i</sub></sub>, вообще говоря, приводит к перестройке всей теории процессов переноса, включая ее макроскопические (например, гидродинамические) аспекты. И наоборот, изменение макроскопического описания неизбежно отражается на кинетическом уровне описания. В силу трудности проблемы такая взаимосвязь прослеживается не всегда при решении конкретных задач ТПП. Следует подчеркнуть, что речь идет не об изменениях классических уравнений физической кинетики и гидродинамики, связанных с учетом некоторых дополнительных механизмов переноса (например, в реагирующих средах), а о ситуации, когда, по мнению исследователей, адекватное эксперименту исправление теории лежит за рамками классического описания. Альтернативные ТПП условно можно разделить следующим образом: 1) ТПП, связанные с изменением макроскопического (гидродинамического) описания без учета возможных изменений кинетического описания; 2) ТПП, приводящие к изменению кинетического описания на уровне КУ<sub>f<sub>i</sub></sub>, не согласованному со структурой всей цепочки уравнений БГКИ; 3) кинетические и гидродинамические альтернативные теории процессов переноса, согласованные с иерархией БГКИ.

Одной из иницирующих работ первого направления была статья Б.И. Давыдова [7], после публикации которой был осуществлен большой цикл исследований (см., например, [8–10]) по гиперболическому уравнению теплопроводности. Введение второй производной по времени от температуры позволило перейти от параболического к гиперболическому уравнению теплопроводности и, следовательно, ввести конечную скорость распространения теплоты. Но уже в работе 1935 г. Б.И. Давыдов указывал, что его метод "на трехмерный случай не обобщается". И далее: "Здесь предположение о том, что все частицы движутся с одинаковой скоростью, из шестимерного фазового пространства выделило бы пятимерное многообразие, так что задача не может быть ограничена координатным пространством". Отметим, однако, что и квазилинейные параболические уравнения также могут приводить к волновым решениям. Поэтому феноменологическая гиперболизация [8] уравнения теплопроводности без строгого кинетического обоснования не является оправданной. Гиперболическое уравнение теплопроводности появляется как результат применения метода Грэда решения УБ [10], при котором сохраняется внепорядковый (с позиции метода Чепмена–Энскога) член, содержащий производную от теплового потока по времени.

К серьезным трудностям привел вопрос о существовании и единственности решений уравнений Навье–Стокса. В работах О.А. Ладыженской было показано,

что для трехмерных течений задача однозначно разрешима при гладких начальных условиях только на конечном интервале времени. О.А. Ладыженская даже ввела "поправку" в уравнения Навье–Стокса с тем, чтобы его однозначная разрешимость была доказана. Оказалось, что в этом случае приходится допустить зависимость коэффициента вязкости от поперечных градиентов скорости потока. Однако при этом изменяется исходный смысл введения кинетических коэффициентов.

В обзоре Г. Уленбека [11], посвященном фундаментальным проблемам статистической механики, обсуждается, в частности, уравнение Крамерса [12], выведенное как следствие уравнения Фоккера–Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \beta \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v}f) + \frac{kT}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right], \quad (1.1)$$

где  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — функция распределения броуновских частиц,  $\mathbf{a}$  — ускорение, связанное с внешним полем сил,  $m\beta$  — коэффициент трения при движении коллоидной частицы в среде. Уленбек интересуется переходом Крамерса от уравнения Фоккера–Планка (1.1) к уравнению Эйнштейна–Смолуховского, которое носит характер гидродинамического уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\mathbf{a}}{\beta} \rho - \frac{kT}{m\beta} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность. Как пишет Уленбек, "доказательство этого перехода очень интересно, это типично крамерсовское доказательство. Оно, в сущности, простое, но вместе с тем содержит такие хитрости, что обсуждать его нелегко". Распределение по скоростям коллоидных частиц предполагается максвелловским. Однако "хитрость" заключается в том, что Крамерс использовал интегрирование вдоль линии  $\mathbf{r} + \mathbf{v}/\beta = \mathbf{r}_0$ , при этом оказалось, что плотность числа частиц вычисляется по формуле

$$n(\mathbf{r}_0, t) = \int f\left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{v}}{\beta}, \mathbf{v}, t\right) d\mathbf{v}. \quad (1.3)$$

Что же сделал Крамерс? Рассмотрим этот переход с позиций обобщенной Больцмановской кинетической теории (ОБКТ), используя, по возможности, наглядные качественные соображения.

Структура КУ<sub>f<sub>i</sub></sub>, вообще говоря, выглядит следующим образом:

$$\frac{Df_i}{Dt} = J^B + J^{td}, \quad (1.4)$$

где  $D/Dt$  — субстанциональная производная,  $J^B$  — Больцмановский (локальный) интеграл столкновений, а  $J^{td}$  — нелокальный интегральный член с учетом эффекта запаздывания. По сути, в обобщенной Больцмановской физической кинетике предлагается локальная аппроксимация для второго интеграла столкновений

$$J^{td} = \frac{D}{Dt} \left( \tau \frac{Df_i}{Dt} \right), \quad (1.5)$$

где  $\tau$  — среднее время между столкновениями частиц. Можно провести аналогию с аппроксимацией БГК

для  $J^B$ :

$$J^B = \frac{f_1^{(0)} - f_1}{\tau}, \quad (1.6)$$

популярность которой для больцмановского интеграла столкновений объясняется тем колоссальным упрощением, которое достигается при ее использовании. Порядок величины отношения второго и первого членов правой части (1.4)

$$\frac{J^{td}}{J^B} \approx O(Kn^2), \quad (1.7)$$

и при больших числах Кнудсена эти члены становятся однопорядковыми.

Казалось бы, при малых числах Кнудсена, отвечающих гидродинамическому описанию, вкладом второго члена правой части (1.4) можно пренебречь. Однако это не так. При переходе к гидродинамическому приближению (после умножения кинетического уравнения на инварианты столкновений и последующего интегрирования по скоростям) больцмановская интегральная часть обращается в нуль, а второй член правой части (1.4) дает однопорядковый вклад при обобщенном навье-стоксовском описании. С математической точки зрения, пренебрежение членом, содержащим малый параметр при старшей производной, недопустимо. С физической точки зрения, возникающие дополнительные члены, пропорциональные вязкости, соответствуют колмогоровской мелкомасштабной турбулентности [3, 5]. Итак, интегральный член  $J^{td}$  оказывается существенным в теории процессов переноса и при малых, и при больших числах Кнудсена.

Важный методический вопрос — взаимосвязь ОУБ с классическими законами сохранения. Макроскопический вывод законов сохранения в механике сплошной среды основан на введении контрольного объема, окруженного бесконечно тонкой поверхностью. Материальные точки (частицы газа) могут при движении располагаться либо внутри контрольного объема, либо снаружи, что и приводит при записи баланса массы, потоков импульса и энергии к классическим уравнениям неразрывности, движения и энергии. В частности, к уравнению неразрывности в форме

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0)^a = 0, \quad (1.8)$$

где  $\rho^a$  — плотность газа,  $\mathbf{v}_0^a$  — гидродинамическая скорость движения потока,  $(\rho \mathbf{v}_0)^a$  — плотность потока импульса без учета флуктуаций. Таким образом, больцмановские частицы полностью "упакованы" в контрольный объем. Казалось бы, в механике сплошной среды можно вообще отказаться от принципа дискретности материи, рассматривая среду как сплошную в буквальном смысле этого термина. Такой подход, конечно, возможен, и в гидродинамике он приводит к уравнениям Эйлера. Но если мы собираемся учесть эффекты вязкости и теплопроводности, то положение радикально меняется. Как известно, динамическая вязкость пропорциональна среднему времени  $\tau$  между столкновениями частиц и сплошная среда в эйлеровской модели при  $\tau = 0$  означает отсутствие вязкости и теплопроводности. Появление частиц конечного радиуса в контрольном контуре приводит к новым эффектам.

Пусть частица конечного радиуса характеризуется по-прежнему положением  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  ее центра масс, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$ . Тогда попадание центра масс частицы в контрольный объем не означает, что вся частица находится в этом объеме. Иначе говоря, в некоторый момент времени всегда найдутся частицы, которые располагаются частично внутри, а частично снаружи контрольной поверхности, что неизбежно должно приводить к флуктуациям массы, а следовательно, и других гидродинамических величин.

Важно отметить два обстоятельства. Первое — флуктуации будут пропорциональны среднему времени между столкновениями (а не времени столкновения). Строгое рассмотрение этого факта содержится в [3–5], но он становится очевидным из простых рассуждений. Пусть имеется газ в виде твердых сфер, заключенный в полость, ограниченную твердыми стенками (рис. 1). Введем контрольный контур, находящийся от стенки на расстоянии порядка диаметра частицы. Математическое ожидание числа частиц, движущихся через контрольную поверхность строго перпендикулярно твердой стенке, равно нулю. Поэтому флуктуации в первом приближении будут пропорциональны средней длине пробега (или, иначе, среднему времени между столкновениями). В результате в гидродинамических уравнениях появятся в явном виде флуктуации, пропорциональные  $\tau$ . Например, уравнение неразрывности видоизменяется и будет содержать члены, пропорциональные вязкости [3]. Если же контрольный объем занимает всю полость (и это второе из упомянутых обстоятельств), то должны выполняться классические законы сохранения, что и доказано в [5]. Однако здесь мы постараемся "угадать" структуру обобщенного уравнения неразрывности, исходя из изложенных выше соображений.

Без учета флуктуаций уравнение неразрывности должно иметь классическую форму (1.8), при этом

$$\rho^a = \rho - \tau A, \quad (1.9)$$

$$(\rho \mathbf{v}_0)^a = \rho \mathbf{v}_0 - \tau \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

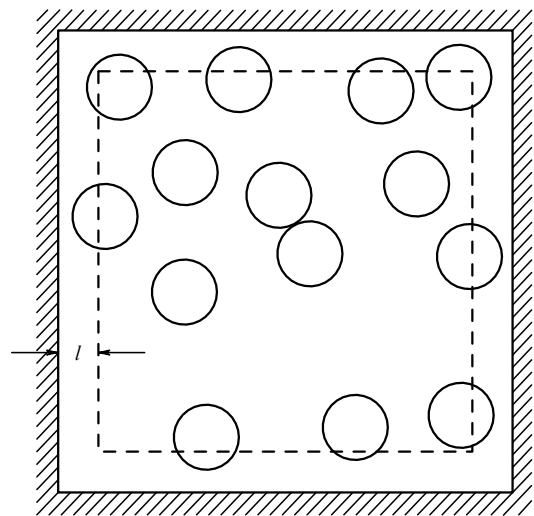


Рис. 1. Замкнутая полость и контрольный контур, содержащий частицы конечного диаметра.

Строго говоря, множители  $A$  и  $\mathbf{B}$  могут быть получены из обобщенного кинетического уравнения, в нашем случае из ОУБ. Тем не менее их вид может быть угадан и без обращения к КУ $_{f_i}$ .

Действительно, запишем обобщенное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho - \tau A) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 - \tau \mathbf{B}) = 0 \quad (1.11)$$

в безразмерном виде, используя в качестве масштаба длины  $l$  — расстояние от пробного контура до твердой стенки (см. рис. 1). Тогда вместо  $\tau$  в качестве коэффициентов при (уже безразмерных)  $A$  и  $\mathbf{B}$  появится множитель — число Кнудсена  $\text{Kn}_l = \lambda/l$ . При  $l \rightarrow 0$   $\text{Kn}_l \rightarrow \infty$ , контур занимает всю полость, ограниченную твердыми стенками, а флуктуации на стенке исчезают. Иначе говоря, на стенке должны выполняться классические уравнения неразрывности и движения. Используя гидродинамическую терминологию, отмечаем, что условия

$$A = 0, \quad \mathbf{B} = 0 \quad (1.12)$$

соответствуют ламинарному подслою в турбулентном течении. Если теперь использовать локально максвелловское распределение, то обобщенное уравнение неразрывности в приближении Эйлера записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \tau \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho \mathbf{v}_0 - \tau \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \bar{I} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \rho \mathbf{a} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В гидродинамическом приближении среднее время между столкновениями  $\tau$  связано с вязкостью  $\eta$ :  $\tau p = \Pi \eta$ , где множитель  $\Pi$  определяется моделью столкновения частиц, для нейтрального газа твердых сфер  $\Pi \approx 0,8$ . Угадать подобным образом обобщенные уравнения движения и энергии гораздо труднее и без ОУБ уже не обойтись. Отметим лишь трактовку ОУБ (1.4) с позиций теории флуктуаций:

$$\frac{Df^a}{Dt} = J^B(f), \quad (1.14)$$

где  $J^B(f)$  — больцмановский интеграл столкновений, а

$$f^a = f - \tau \frac{Df}{Dt}. \quad (1.15)$$

Таким образом,  $\tau Df/Dt$  — флуктуация функции распределения, а запись в форме (1.14) без учета (1.15) делает УБ незамкнутым. С точки зрения теории флуктуаций Больцман использовал простейшую процедуру замыкания

$$f^a = f. \quad (1.16)$$

Сравним теперь обобщенное уравнение неразрывности (1.13) с уравнением Эйнштейна–Смолуховского (1.2) с учетом метода Крамерса. Уравнение (1.13) сводится к (1.2), если: а) конвективный перенос, отвечающий гидродинамической скорости  $\mathbf{v}_0$ , не учитывается; б) градиент температуры менее существен, чем градиент плотности числа частиц,  $n \partial T / \partial \mathbf{r} \ll T \partial n / \partial \mathbf{r}$ ; в) временная часть флуктуации плотности не учитывается. По сути, интегрированием вдоль линии  $\mathbf{r} + \mathbf{v} / \beta = \mathbf{r}_0$  по скорости  $v$  от

$-\infty$  до  $+\infty$  Крамерс (см. также (1.3)) учел нелокальность столкновений, не принимая во внимание эффект запаздывания. В нашей теории коэффициент трения  $\beta = \tau^{-1}$ , что соответствует приближению парных столкновений. Если учет одновременного взаимодействия со многими частицами существен, то возникают дополнительные трудности, связанные с определением коэффициента трения  $\beta$ , а теория Эйнштейна–Смолуховского становится полуфеноменологической. Преодоление этих трудностей может вести к применению теории немарковских процессов при описании броуновского движения [13].

Отметим, что реализация указанных принципов приводит и к модификации системы уравнений Максвелла. Ее традиционная формулировка не содержит уравнения неразрывности, однако получена с явным использованием уравнения

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{j}^a = 0, \quad (1.17)$$

где  $\rho^a$  — заряд единицы объема,  $\mathbf{j}^a$  — плотность тока, вычисленные без учета флуктуаций. В результате система уравнений Максвелла, записанная в стандартных обозначениях,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{D} = \rho^a, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}^a + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

содержит  $\rho^a = \rho - \rho^{fl}$ ,  $\mathbf{j}^a = \mathbf{j} - \mathbf{j}^{fl}$ . Флуктуации  $\rho^{fl}$ ,  $\mathbf{j}^{fl}$ , вычисленные в рамках ОУБ, содержатся, например, в [3].

Обратимся теперь к подходам, связанным с возможным изменением КУ $_{f_i}$ , как правило, не согласованным с иерархией ББГКИ.

Неоднократно отмечалось, что использование различных функций распределения заряженных частиц может иметь катастрофическое влияние на макропараметры слабоионизованного газа. Приведем примеры такого влияния.

Как известно, первые исследования температурной зависимости плотности атомов, ионизованных в различной степени, в плазме были проведены Саха [14] и Эггертом [15]. Полученное ими уравнение для состояния термодинамического равновесия имеет вид

$$\frac{n_{j+1} n_e}{n_j} = \frac{s_{j+1}}{s_j} \frac{(2\pi m_e k T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{k T}\right), \quad (1.19)$$

где  $n_j$  — плотность числа  $j$ -кратно ионизованных атомов,  $n_e$  — плотность числа свободных электронов,  $m_e$  — масса электрона,  $k$  и  $h$  — константы Больцмана и Планка соответственно,  $s_j$  — сумма состояний для  $j$ -кратно ионизованного атома [16],  $\varepsilon_j$  — потенциал  $j$ -кратной ионизации. Уравнение Саха (1.19) выведено для случая максвелловского распределения и неизбежно должно быть модифицировано, если в плазме существует другое распределение частиц по скоростям. Этот вопрос был изучен в [17]. Для примера в [17] сравниваются величины  $n_{j+1} n_e / n_j$ , вычисленные по максвелловской функции распределения и по функции распределения Дрювестейна, когда средняя энергия распределения Дрювестейна равна средней энергии максвелловского распределения. Пусть  $T = 10^4$  К,  $n_e = 10^{14}$  см $^{-3}$ ,  $\varepsilon_j = 10$  эВ, зарядовое число

$Z = 1, s_{j+1}/s_j = 1$ . Тогда [17]

$$\frac{n_{j+1}n_e}{n_j} = 6 \times 10^2 \text{ (расчет с использованием распределения Дрювестейна),}$$

$$\frac{n_{j+1}n_e}{n_j} = 4,53 \times 10^{16} \text{ (расчет с использованием распределения Максвелла, формула Саха).}$$

Как пишет Э.М. Дивэн, "различие на четырнадцать порядков, полученное выше, очевидно, обусловлено тем, что в отличие от максвелловского распределения у распределения Дрювестейна нет "хвоста".

Второй пример связан с расчетом константы скорости ионизации и сечения этого процесса с использованием максвелловского распределения и распределения Дрювестейна. Расчеты приведены М. Грызинским и И. Кунком в [18]. Вводится сечение ионизации  $\sigma_i$  в соответствии с интерполяционной формулой, находящейся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_i^2} G_i(\xi, \zeta), \tag{1.20}$$

где  $\sigma_0 = 6,56 \times 10^{-14} \text{ см}^2 \text{ (эВ)}^2$ ,  $\varepsilon_i$  — потенциал ионизации атома,  $\xi$  — безразмерный параметр, характеризующий электронную оболочку атома:

$$\xi = \frac{W}{\varepsilon_i}, \tag{1.21}$$

где  $W$  — средняя кинетическая энергия атомных электронов, вычисляемая по формуле

$$W = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \varepsilon_j, \tag{1.22}$$

в которой  $N_e$  — число электронов в атоме,  $\varepsilon_j$  — потенциалы ионизации для последовательно удаляемых из атома электронов. Параметр  $\zeta$  определяется по формуле

$$\zeta = \frac{U_e}{\varepsilon_i}, \tag{1.23}$$

где  $U_e$  — энергия электронов, бомбардирующих атом. Предполагается, что скорости нейтральных частиц, много меньше средней скорости электронов, а плазма однородна. Тогда появляется возможность расчета среднего сечения ионизации

$$\bar{\sigma}_i = \int_0^\infty \sigma_i(v_e) f(v_e) dv_e \tag{1.24}$$

и скорости реакции ионизации

$$\bar{\sigma}_i v_e = \int_0^\infty \sigma_i(v_e) v_e f(v_e) dv_e, \tag{1.25}$$

если известна функция  $G_i(\xi, \zeta)$ , которая [18] определяется в виде

$$G_i(\xi, \zeta) = (\zeta - 1) \left( 1 + \frac{2}{3} \xi \right) \frac{1}{(\zeta + 1)(1 + \xi + \zeta)}. \tag{1.26}$$

**Таблица 1.** Сравнение сечений ионизации  $\bar{\sigma}_i$  и скорости  $\bar{\sigma}_i v_e$  ионизации, вычисленных с использованием ФР Максвелла и Дрювестейна, ( $\xi = 1$ )

$\hat{T}$	ФР Максвелла		ФР Дрювестейна	
	$\bar{\sigma}_i$	$\bar{\sigma}_i v_e$	$\bar{\sigma}_i$	$\bar{\sigma}_i v_e$
0,1	$4,206 \times 10^{-6}$	$1,184 \times 10^{-5}$	$1,278 \times 10^{-27}$	$4,077 \times 10^{-27}$
0,2	$8,262 \times 10^{-4}$	$1,184 \times 10^{-3}$	$4,382 \times 10^{-9}$	$1,011 \times 10^{-8}$
0,3	$5,029 \times 10^{-3}$	$9,251 \times 10^{-3}$	$2,128 \times 10^{-5}$	$4,135 \times 10^{-5}$
0,4	$1,259 \times 10^{-2}$	$2,103 \times 10^{-2}$	$5,403 \times 10^{-4}$	$9,405 \times 10^{-4}$
0,5	$2,194 \times 10^{-2}$	$3,415 \times 10^{-2}$	$2,773 \times 10^{-3}$	$4,466 \times 10^{-3}$
0,6	$3,180 \times 10^{-2}$	$4,687 \times 10^{-2}$	$7,305 \times 10^{-3}$	$1,110 \times 10^{-2}$
0,7	$4,143 \times 10^{-2}$	$5,842 \times 10^{-2}$	$1,376 \times 10^{-2}$	$1,998 \times 10^{-2}$
0,8	$5,047 \times 10^{-2}$	$6,857 \times 10^{-2}$	$2,145 \times 10^{-2}$	$3,001 \times 10^{-2}$
0,9	$5,875 \times 10^{-2}$	$7,733 \times 10^{-2}$	$2,973 \times 10^{-2}$	$4,033 \times 10^{-2}$
1	$6,624 \times 10^{-2}$	$8,482 \times 10^{-2}$	$3,813 \times 10^{-2}$	$5,039 \times 10^{-2}$
2	$1,079 \times 10^{-1}$	$1,171 \times 10^{-1}$	$9,918 \times 10^{-2}$	$1,132 \times 10^{-1}$
3	$1,195 \times 10^{-1}$	$1,190 \times 10^{-1}$	$1,233 \times 10^{-1}$	$1,312 \times 10^{-1}$
4	$1,209 \times 10^{-1}$	$1,137 \times 10^{-1}$	$1,311 \times 10^{-1}$	$1,717 \times 10^{-1}$
5	$1,185 \times 10^{-1}$	$1,069 \times 10^{-1}$	$1,320 \times 10^{-1}$	$1,298 \times 10^{-1}$
6	$1,146 \times 10^{-1}$	$9,992 \times 10^{-2}$	$1,299 \times 10^{-1}$	$1,243 \times 10^{-1}$
7	$1,102 \times 10^{-1}$	$9,326 \times 10^{-2}$	$1,263 \times 10^{-1}$	$1,184 \times 10^{-1}$
8	$1,056 \times 10^{-1}$	$8,704 \times 10^{-2}$	$1,222 \times 10^{-1}$	$1,125 \times 10^{-1}$
9	$1,010 \times 10^{-1}$	$8,123 \times 10^{-2}$	$1,179 \times 10^{-1}$	$1,069 \times 10^{-1}$
10	$9,662 \times 10^{-2}$	$7,589 \times 10^{-2}$	$1,137 \times 10^{-1}$	$1,017 \times 10^{-1}$

В таблице 1 приведены примеры расчетов  $\bar{\sigma}_i$  и  $\bar{\sigma}_i v_e$  для  $\xi = 1$  при различных  $\hat{T} = kT_e/\varepsilon_i$ . Как видим, различия в расчетах для разных ФР могут быть весьма значительны и даже катастрофически велики при относительно малых  $\hat{T}$ . Итак, надежный расчет ФР в задачах физики плазмы остается весьма актуальной задачей и слабое влияние формы ФР на ее моменты является чаще всего лишь исключением из правила.

К необходимости использования "самосогласованных" с кинетическими уравнениями сечений столкновений приводит и известная теория Энскога умеренно плотных газов [19]. Энског предпринял попытку описать свойства умеренно плотных газов, выделив нелокальную часть из локального, по сути, интеграла столкновений Больцмана. Полученные на основе модели твердых сфер коэффициенты переноса приводили к неверной температурной зависимости кинетических коэффициентов. Для исправления ситуации была введена модель "мягких" сфер, позволившая подогнать расчетные данные к экспериментальным значениям (см., например, [20]).

В теории так называемых кинетически согласованных разностных схем [21] ФР разлагается во временной ряд, отвечающий неполному второму приближению при "физическом" выводе уравнения Больцмана [5]. В результате полученные разностные схемы содержат лишь специально выбранную искусственную схемную вязкость. В ряде работ, следуя идеям Давыдова, предлагается дополнить кинетические уравнения для быстрых процессов членом  $\partial^2 f / \partial t^2$ . А.С. Бакай и Ю.С. Сигов в [22] обсуждают возможность использования подобного члена в уравнении, описывающем флуктуации ФР в турбулентной плазме. При этом в уравнение вводится "параметр упорядочения", меняющий тип уравнения. Для описания пространственной нелокальности предлагается дополнить кинетическое уравнение членом  $\partial^2 f / \partial x^2$  и производными более высокого порядка, включая перекрестные производные время-координаты, что, возможно, обеспечит описание негауссовых случайных источников в уравнениях Ланжевена [23]. Интересно отметить, что ОУБ позволяет включить в рассмотрение

и высшие производные от ФР (см. аппроксимацию (5.8) в [5]).

Очевидно, подходы к модификации  $KU_{f_i}$  должны базироваться на некоторых принципах, которые мы кратко сформулируем. Наиболее последовательным является третий из указанных подходов, когда явно прослеживается связь альтернативных  $KU_{f_i}$  с иерархией ББГКИ. Обобщенное  $KU_{f_i}$  должно удовлетворять некоторым общим требованиям.

1. Поскольку искусственное расщепление иерархии ББГКИ неизбежно при переходе к одночастичному описанию, вывод обобщенного  $KU_{f_i}$  должен проследиваться в рамках известных методов в теории кинетических уравнений — метода многих масштабов, метода корреляционных функций, итеративных методов и т.д., а также их комбинаций. Каждый из этих подходов высвечивает свои особенности альтернативного  $KU_{f_i}$ .

2. Должна существовать явная связь  $KU_{f_i}$  с трактовкой физически бесконечно малого объема, а следовательно, с флуктуациями моментов в контрольном контуре с прозрачными границами из-за конечного размера частиц.

3. В нерелятивистском случае  $KU_{f_i}$  должно удовлетворять преобразованию Галилея.

4.  $KU_{f_i}$  должно приводить к связи с классической Н-теоремой и ее обобщениями.

5.  $KU_{f_i}$  должно приводить к разумному усложнению теории.

Последнее требование нуждается в дополнительных комментариях. Интегральные столкновительные члены весьма сложны — бальцмановский локальный интеграл, в частности, а нелокальный интеграл с запаздыванием, в особенности. По образному выражению Ю.Л. Климонтовича, "кариатура" БГК на бальцмановский интеграл столкновений оказалась весьма удачной, и эта алгебраическая аппроксимация бальцмановского интеграла столкновений широко используется в кинетической теории нейтральных и ионизованных газов. Обобщенное уравнение Бальцмана вводит локальную дифференциальную аппроксимацию для нелокального интеграла столкновений с запаздыванием. По сути, мы имеем дело с "экономической" проблемой "цена-качество". Иначе говоря, какую цену мы согласны заплатить в виде усложнения кинетического уравнения за новое качество теории? Ответ на этот вопрос может дать только опыт решения практических задач.

Последовательная теория, отвечающая перечисленным выше требованиям, развивается, в частности, в работах Климонтовича [6, 24] и, как представляется автору, в рамках ОУБ. Можно усмотреть определенную идеологическую общность упомянутых подходов. Однако если в работах Ю.Л. Климонтовича трактовка физически бесконечно малого объема переносится на "верхний эшелон" иерархии ББГКИ и приводит к изменению уравнения Лиувилля, то в теории ОУБ оказывается возможным введение аппроксимации нелокальных членов сразу на уровне одночастичного описания. При этом в теории ОУБ мы не связаны с необходимостью задавать заранее форму сглаживания, изменение которой в теории Ю.Л. Климонтовича неизбежно приводит к изменению альтернативного  $KU_{f_i}$ .

А.А. Власов предлагал для описания нелокальных эффектов ввести дополнительные независимые динамические переменные (производные от скорости) в одно-

частичную функцию распределения [25]. Однако, прежде всего в силу требования разумного усложнения теории при решении прикладных задач этот подход нам представляется преждевременным, пока не исчерпаны резервы традиционного описания ФР.

С этой точки зрения можно сказать, что появление флуктуационных членов в ОУБ обусловлено введением контрольного объема как элемента измерения в системе частиц конечного диаметра при сохранении ФР в виде, используемом для описания точечных бесструктурных частиц.

Подробный обзор некоторых других альтернативных ТПП можно найти в монографии В.Я. Рудяка [26], а также в [5].

Остается лишь отметить, что перечисленные эффекты всегда будут иметь место в кинетической теории при одночастичном описании, в том числе и в жидкости, и в плазме, где введение самосогласованных сил и соответствующего обрезания радиуса их действия расширяет возможности ОУБ.

## 2. Обобщенное уравнение Бальцмана с учетом самосогласованных сил

Запишем безразмерное уравнение иерархии Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) относительно  $s$ -частичной функции распределения  $f_s$  ( $s = 1, \dots, N$ ,  $N$  — число частиц в системе)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{t}_b} + \sum_{i=1}^s \hat{\mathbf{v}}_{ib} \cdot \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{ib}} + \sum_{ij=1}^s \hat{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{ib}} + \alpha \sum_{i=1}^s \hat{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{ib}} = \\ = -\varepsilon \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N \int \hat{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{ib}} \hat{f}_{s+1}(\hat{t}, \hat{\Omega}_1, \dots, \hat{\Omega}_s, \hat{\Omega}_j) d\hat{\Omega}_j, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\hat{f}_s = f_s v_{0b}^{3s} n^{-s}$ ;  $v_{0b}$  — характерная скорость столкновений;  $n$  — плотность числа частиц;  $\alpha = F_{0z}/F_0$  — отношение масштабов внешних и внутренних сил;  $d\hat{\Omega}_j = = d\mathbf{r}_j d\mathbf{v}_j$  — элементарный фазовый объем частицы  $j$ , положение которой определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}_j$ , а ее скорость равна  $\mathbf{v}_j$ , точка обозначает скалярное произведение.

Для обезразмеривания пространственной переменной используем длину взаимодействия  $r_b$ , а характерный временной масштаб образуется как  $r_b v_{0b}^{-1}$ ;  $\varepsilon$  соответствует числу частиц в объеме взаимодействия  $v_{int}$ , которое служит малым параметром в кинетической теории нейтральных разреженных газов. На самом деле в разреженном газе можно ввести, по крайней мере, три группы масштабов. Помимо указанных  $r_b, v_{0b}, t_{0b} = r_b/v_{0b}$ , существуют  $\lambda$ -масштабы, соответствующие средней длине пробега (средняя длина пробега между столкновениями  $\lambda$ , средняя скорость частиц между столкновениями  $v_{0\lambda}$  и временной масштаб  $\lambda/v_{0\lambda}$ ), и  $L$ -масштабы, отвечающие гидродинамическим параметрам течения (характерный гидродинамический размер  $L$ , гидродинамическая скорость  $v_{0L}$  и гидродинамическое время  $L/v_{0L}$ ).

Принципиальной особенностью физики плазмы является многочастичное взаимодействие. Выбор характерных масштабов, определяющих эволюцию плазменного объема и использованных далее в методе многих масштабов, обсуждается в приложении 1. Введем малый

параметр  $\varepsilon = nr_b^3 = v_{\text{int}}$ , предполагая, что энергия взаимодействия, приходящаяся на одну частицу, много меньше ее кинетической энергии. Считаем также, что условие невырожденности плазмы выполнено, и обратимся к методу многих масштабов. В дальнейшем нас будет интересовать описание физической системы на уровне одночастичной функции распределения  $f_1$  в масштабах  $r_b \equiv l, \lambda, L$  ( $l$  — длина Ландау,  $\lambda$  — средняя длина пробега пробной частицы между близкими столкновениями,  $L$  — гидродинамический масштаб). Отметим, что средняя длина пробега  $\lambda_n$  частицы в плазме вводится как

$$\lambda_n = A^{-1} \lambda, \quad (2.2)$$

где  $A$  — кулоновский логарифм. Средняя длина пробега  $\lambda_n$  или соответствующее среднее время между столкновениями участвует в определении кинетических коэффициентов [27]. В методе многих масштабов [28, 29]  $\hat{f}_s$  представляется в виде асимптотического ряда

$$\hat{f}_s = \sum_{v=0}^{\infty} \hat{f}_s^v(\hat{t}_b, \hat{\mathbf{r}}_{1b}, \hat{\mathbf{v}}_{1b}; \hat{t}_\lambda, \hat{\mathbf{r}}_{1\lambda}, \hat{\mathbf{v}}_{1\lambda}; \hat{t}_L, \hat{\mathbf{r}}_{1L}, \hat{\mathbf{v}}_{1L}) \varepsilon^v, \quad (2.3)$$

в котором функции  $\hat{f}_s^v$  зависят от всех трех групп переменных.

Определяя производные, входящие в левую часть этого уравнения ББКИ, по правилу вычисления производных от сложных функций и приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , находим

$$\frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} = 0, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} + \varepsilon_2 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_\lambda} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1\lambda}} + \\ & + \varepsilon_2 \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1\lambda}} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_L} + \varepsilon_1 \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1L}} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1L}} = \\ & = - \sum_{\delta=1}^{\mu} \frac{N_\delta}{N} \int \hat{\mathbf{F}}_{1,j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} \hat{f}_{2,j \in N_\delta}^0 d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где для многокомпонентной ( $\mu$ -компонентной) смеси газов указывается принадлежность частицы к числу частиц  $N_\delta$  сорта  $\delta$ ,  $\varepsilon_1 = \lambda/L$  (число Кнудсена),  $\varepsilon_2 = v_{0\lambda}/v_{0b}$ ,  $\varepsilon_3 = v_{0L}/v_{0\lambda}$ . Интегрирование в (2.5) осуществляется в  $r_b$ -масштабе. Важно отметить, что здесь никаких ограничений на число Кнудсена не накладывается. Уравнение (2.4) показывает, что функция  $\hat{f}_1^0$  в  $r_b$ -масштабе не изменяется вдоль фазовой траектории или, иначе говоря, после интегрирования в  $r_b$ -масштабе

$$\hat{f}_1^0 = \hat{f}_1^0(\hat{t}_\lambda, \hat{\mathbf{v}}_{1\lambda}, \hat{\mathbf{r}}_{1\lambda}; \hat{t}_L, \hat{\mathbf{v}}_{1L}, \hat{\mathbf{r}}_{1L}). \quad (2.6)$$

Если функция (2.6) известна, то из уравнения (2.5) следует найти  $\hat{f}_1^1$ . Это возможно при некоторых дополнительных предположениях относительно функции  $\hat{f}_2^0$ , входящей в правую, интегральную часть выражения (2.5). Итак, система уравнений содержит зацепляющиеся члены. На самом деле зависимость (2.6) заранее неизвестна. Тогда уравнение (2.5) может служить для определения  $\hat{f}_1^0$  в  $\lambda$ - и  $L$ -масштабах, но в этом случае оно становится дважды зацепляющимся и

по нижнему индексу "2" и по верхнему индексу "1". В результате возникает проблема расщепления уравнений.

Запишем аналог уравнения (2.4) для двухчастичной функции  $\hat{f}_2^0$ , зависящей от времени и динамических переменных для частиц 1 и  $j$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{j \in N_\delta, b}} + \hat{\mathbf{F}}_{1,j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} + \\ & + \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta, 1} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, 1}} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введем новую переменную  $\hat{\mathbf{x}}_{1,j \in N_\delta} = \hat{\mathbf{r}}_{1b} - \hat{\mathbf{r}}_{j \in N_\delta, b}$  и из уравнения (2.7) найдем

$$\begin{aligned} & - \hat{\mathbf{F}}_{1,j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} = \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \\ & + (\hat{\mathbf{v}}_{1b} - \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}) \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{1,j \in N_\delta}} + \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta, 1} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}} + \\ & + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя (2.8), получаем следующее представление для интеграла в уравнении (2.5):

$$\begin{aligned} & - \int \hat{\mathbf{F}}_{1,j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} \hat{f}_2^0(\hat{t}, \hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_{j \in N_\delta}) d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} = \\ & = \int (\hat{\mathbf{v}}_{1b} - \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}) \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{1,j \in N_\delta}} d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} + \\ & + \int \left( \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} + \right. \\ & \left. + \alpha \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}} \right) d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} + \\ & + \int \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta, 1} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}} d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Последний интеграл в правой части (2.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta, 1} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}} d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} = \\ & = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta, 1} \hat{f}_2^0) d\hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta} \right] d\hat{\mathbf{r}}_{j \in N_\delta}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Но внутренний интеграл в выражении (2.10) может быть преобразован в соответствии с теоремой Гаусса — Остроградского в интеграл по бесконечно удаленной поверхности в пространстве скоростей, который равен нулю, поскольку  $\hat{f}_2^0 \rightarrow 0$  при  $\hat{v}_j \rightarrow \infty$ .

Введем двухчастичные корреляционные функции  $\hat{W}_2(\hat{t}, \hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_{j \in N_\delta})$  (далее функция  $f_j$  — одночастичная функция, соответствующая частицам  $N_j$ ):

$$\hat{f}_2^0(\hat{t}, \hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_j) = \hat{f}_1^0(\hat{t}, \hat{\Omega}_1) \hat{f}_{j \in N_\delta}^0(\hat{t}, \hat{\Omega}_{j \in N_\delta}) + \hat{W}_2^0(\hat{t}, \hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_{j \in N_\delta}). \quad (2.11)$$

В результате предпоследний интеграл в формуле (2.9) записывается так:

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta}} \right) d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} = \\ & = \int \left[ \hat{f}_{j \in N_\delta}^0 \left( \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} \right) \right] d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} + \\ & + \int \hat{f}_1^0 \frac{\partial \hat{f}_{j \in N_\delta}^0}{\partial \hat{t}_b} d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} + \\ & + \alpha \int \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta, b}} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta} \hat{f}_1^0 \hat{f}_{j \in N_\delta}^0) d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} + \\ & + \int \left( \frac{\partial \hat{W}_2^0}{\partial \hat{t}_b} + \hat{\mathbf{v}}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{W}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1b}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{W}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} + \right. \\ & \left. + \alpha \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{W}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta}} \right) d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В выражении (2.12) справа первый интеграл равен нулю в силу соотношения (2.4), третий интеграл равен нулю по тем же причинам, что и в уравнении (2.10). Ситуация со вторым и четвертым интегралами требует более детального рассмотрения. Обратимся прежде всего к интегралу

$$A = \int \hat{f}_1^0 \frac{\partial \hat{f}_{j \in N_\delta}^0}{\partial \hat{t}_b} d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta}. \quad (2.13)$$

Динамические переменные, определяющие движение выделенных частиц 1 и  $j$ , коррелируют при столкновении частиц, т.е. в  $r_b$ -масштабе. В системе центра масс уравнения движения этих частиц имеют вид

$$\dot{\mathbf{v}}_{1b} = \mathbf{F}_{1j}; \quad \dot{\mathbf{v}}_{jb} = \mathbf{F}_{j1}; \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_j, \quad (2.14)$$

где точка означает дифференцирование по времени, а  $\mathbf{p}$  — импульс частицы.

Используя формулу (2.14) и интегрируя по частям, имеем

$$A \cong -\hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a \cdot \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}}, \quad (2.15)$$

где  $\hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a$  — средняя сила, действующая на частицу 1 при ее столкновении с частицей  $j$ , имеющей произвольные скорость и положение в  $r_b$ -масштабе (частицы  $j$  принадлежат химическому компоненту  $\delta$ ):

$$\hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a = \int \hat{f}_j \hat{\mathbf{F}}_{1j} d\hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta} d\hat{\mathbf{r}}_{j \in N_\delta}. \quad (2.16)$$

Таким образом, интеграл  $A$  обращается в нуль, если только оказывается возможным пренебречь самосогласованной силой внутреннего происхождения, в частности, по сравнению с внешней силой, действующей на частицу 1. Продолжим преобразование интеграла  $A$ , используя разложение (2.2):

$$A \cong -\hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} - \varepsilon \hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}}. \quad (2.17)$$

Последний член в (2.17) обеспечивает, как мы увидим далее, симметрию записи обобщенного кинетического уравнения.

Рассмотрим теперь четвертый, последний, интеграл в правой части формулы (2.12). С этой целью запишем уравнение относительно двухчастичной функции  $f_2$  цепочки Боголюбова, в которой в данном случае не выделяются группы частиц, отвечающие некоторому химическому компоненту. Двухчастичная функция  $f_2$  соответствует динамическим переменным частиц  $N_1, N_2$  и для краткости записывается в виде  $f_2 = f_2(1, 2)$ . Итак,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_{21} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2} + \\ & + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2} = \\ & = - \int \left\{ \mathbf{F}_{13} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} [f_1(1)f_1(2)f_1(3) + f_1(1)W_2(2, 3) + \right. \\ & + f_1(2)W_2(1, 3) + f_1(3)W_2(1, 2)] + \\ & + \mathbf{F}_{23} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} [f_1(1)f_1(2)f_1(3) + f_1(1)W_2(2, 3) + \\ & \left. + f_1(2)W_2(1, 3) + f_1(3)W_2(1, 2)] \right\} d\Omega_3, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где для трехчастичной функции  $f_3$  введена аппроксимация через корреляционные функции:

$$\begin{aligned} f_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, t) &= f_1(\Omega_1, t) f_1(\Omega_2, t) f_1(\Omega_3, t) + \\ & + f_1(\Omega_1, t) W_2(\Omega_2, \Omega_3, t) + f_1(\Omega_2, t) W_2(\Omega_1, \Omega_3, t) + \\ & + f_1(\Omega_3, t) W_2(\Omega_1, \Omega_2, t) + W_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Влиянием корреляционной функции  $W_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, t)$  пренебрегается.

Уравнение (2.18), записанное в нулевом приближении по  $\varepsilon$  (относительно  $f_2^0$ ), совпадает с уравнением (2.7) только в случае, когда корреляционные функции нулевого приближения равны нулю:

$$\begin{aligned} W_2^0(\Omega_2, \Omega_3, t) &= 0, \quad W_2^0(\Omega_1, \Omega_3, t) = 0, \\ W_2^0(\Omega_1, \Omega_2, t) &= 0, \quad W_3^0(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

а силы взаимодействия, отвечающие влиянию третьей частицы на первую и вторую при их "близком" столкновении, малы, т.е.  $F_{13} \approx 0$ ,  $F_{23} \approx 0$ . Следовательно, в методе многих масштабов поляризационные члены в правой части (2.18) появляются в следующем приближении  $o(\varepsilon^2)$ .

Итак, при использовании метода многих масштабов в силу условий (2.20) последний интеграл правой части формулы (2.12) обращается в нуль. Интегральное соотношение (2.9) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & - \int \hat{\mathbf{F}}_{1, j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} \hat{f}_2^0(\hat{t}, \hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_{j \in N_\delta}) d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} = \\ & = \int (\hat{\mathbf{v}}_{1b} - \hat{\mathbf{v}}_{j \in N_\delta}) \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{1, j \in N_\delta}} d\hat{\Omega}_{j \in N_\delta} - \\ & - \hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}} - \varepsilon \hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1b}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Вводим цилиндрическую систему координат  $\hat{l}, \hat{b}, \varphi$  с началом координат в точке  $\mathbf{r}_1$  и осью  $\hat{l}$ , параллельной вектору относительной скорости сталкивающихся частиц 1 и  $j$ . Тогда  $\hat{b}$  — прицельное (безразмерное) расстояние, а  $\varphi$  — азимутальный угол, и, следовательно, первый



член правой части (2.21) записывается как

$$\begin{aligned} \hat{J}^{\text{st},0} &= \sum_{\delta=1}^{\mu} \frac{N_{\delta}}{N} \int \hat{g}_{j \in N_{\delta},1} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial l} dl \right] \hat{b} d\hat{b} d\varphi d\hat{v}_{j \in N_{\delta},b} = \\ &= \sum_{\delta=1}^{\mu} \frac{N_{\delta}}{N} \int [\hat{f}_2^0(+\infty) - \hat{f}_2^0(-\infty)] \hat{g}_{j \in N_{\delta},1} \hat{b} d\hat{b} d\varphi d\hat{v}_{j \in N_{\delta},b}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Интегрирование в формуле (2.22) выполнено в  $r_b$ -масштабе, т.е. функции распределения  $\hat{f}_2^0(+\infty)$ ,  $\hat{f}_2^0(-\infty)$  вычислены для скоростей  $\hat{v}'_1$ ,  $\hat{v}'_{j \in N_{\delta}}$  и  $\hat{v}_1$ ,  $\hat{v}_{j \in N_{\delta}}$ , когда частицы находятся вне зоны их взаимодействия, иначе говоря, до столкновения и после столкновения, при этом скорости частиц после столкновения отмечены штрихом. Если до столкновения в  $\lambda$ -масштабе выполняются условия молекулярного хаоса, то двухчастичные ФР могут быть представлены в виде произведения одночастичных ФР. В этом случае  $\hat{J}^{\text{st},0}$  есть больцмановский интеграл столкновений:

$$\hat{J}^{\text{st},0} = \sum_{\delta=1}^{\mu} \frac{N_{\delta}}{N} \int [\hat{f}_1^{\prime 0} \hat{f}_{j \in N_{\delta}}^{\prime 0} - \hat{f}_1^0 \hat{f}_{j \in N_{\delta}}^0] \hat{g}_{j \in N_{\delta},1} \hat{b} d\hat{b} d\varphi d\hat{v}_{j \in N_{\delta}}. \quad (2.23)$$

В работах Ленарда и Балеску [30, 31] найдено решение уравнения для корреляционной функции  $W_2$  при условии ослабления начальной корреляции и без учета временного запаздывания и пространственной неоднородности ФР  $f_1$ . Соответствующий интеграл столкновений (интеграл столкновений Балеску – Ленарда) учитывает поляризацию плазмы и позволяет устранить логарифмическую расходимость больцмановского интеграла столкновений в кулоновской плазме [30–33]. Если использовать все же больцмановский интеграл столкновений для плазмы, то приходится применять процедуру обрезания, используя дебаевское экранирование.

Кинетическое уравнение (2.5) с учетом выражений (2.20) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial t_b} + \hat{v}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{r}_{1b}} + (\alpha \hat{\mathbf{F}}_1 + \varepsilon \hat{\mathbf{F}}_1^a) \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{v}_{1b}} + \varepsilon_2 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial t_{\lambda}} + \hat{v}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{r}_{1\lambda}} + \\ + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial t_L} + \varepsilon_1 \hat{v}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{r}_{1L}} + \hat{\mathbf{F}}_1^a \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{v}_{1b}} + \varepsilon_2 \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{v}_{1\lambda}} + \\ + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{v}_{1L}} = \hat{J}^{\text{st},0}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где

$$\hat{\mathbf{F}}_1^a = \sum_{\delta=1}^{\mu} \frac{N_{\delta}}{N} \hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a.$$

Отметим, что в размерном виде множитель

$$\varepsilon \hat{\mathbf{F}}_{1\delta}^a = \frac{1}{v_{0b}^2/r_b} \int f_{j \in N_{\delta}} \mathbf{F}_{1,j \in N_{\delta}} d\mathbf{v}_{j \in N_{\delta}} d\mathbf{r}_{j \in N_{\delta}}, \quad (2.25)$$

если учесть, что

$$\begin{aligned} \varepsilon &= n r_b^3, \quad \hat{f} = f v_{0b}^3 n^{-1}, \quad \hat{v} = \frac{v}{v_{0b}}, \\ \hat{r} &= \frac{r}{r_b}, \quad \hat{F}_{1j} = \frac{F_{1j}}{v_{0b}^2/r_b}. \end{aligned}$$

Масштаб внутренней силы  $F_{1j}$  отвечает выбору длины Ландау  $l$  в качестве  $r_b$ . Запишем теперь уравнение (2.24) в форме (ср. с (2.10) [5])

$$\frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_b} + \frac{d_1 \hat{f}_1^0}{d \hat{t}_{b,\lambda,L}} = \hat{J}^{\text{st},0}, \quad (2.26)$$

где введены следующие обозначения:

$$\frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_b} = \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial t_b} + \hat{v}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{r}_{1b}} + (\alpha \hat{\mathbf{F}}_1 + \varepsilon \hat{\mathbf{F}}_1^a) \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{v}_{1b}}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d_1 \hat{f}_1^0}{d \hat{t}_{b,\lambda,L}} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial t_{\lambda}} + \hat{v}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{r}_{1\lambda}} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial t_L} + \varepsilon_1 \hat{v}_{1b} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{r}_{1L}} + \\ &+ \hat{\mathbf{F}}_1^a \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{v}_{1b}} + \varepsilon_2 \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{v}_{1\lambda}} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{v}_{1L}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Мы намерены использовать уравнение (2.26) для описания эволюции функции распределения  $\hat{f}_1^0$ , но это уравнение содержит однопорядковый член  $D_1 \hat{f}_1^1 / D \hat{t}_b$ , зацепляющийся по верхнему индексу. Возникает проблема аппроксимации этого члена, в определенном смысле аналогичная проблеме аппроксимации двухчастичной ФР в интеграле столкновений. Для рассматриваемого члена возможно точное представление с помощью ряда (2.3)

$$\frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_b} = \frac{D_1}{D \hat{t}_b} \left[ \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}. \quad (2.29)$$

Член  $D_1 \hat{f}_1^1 / D \hat{t}_b$  описывает изменение функции распределения на временах порядка времени столкновения или, что то же самое, в  $r_b$ -масштабе. Если он не учитывается, то с точки зрения вывода иерархии кинетических уравнений это означает, что

1) изменение функции распределения в  $r_b$ -масштабе не происходит (если не учитывается также средняя внутренняя сила, приводящая к появлению второго и третьего члена справа в формуле (2.21));

2) частицы являются точечными и бесструктурными;

3) изменение ФР в результате столкновений происходит мгновенно и описывается источниковым членом  $\hat{J}^{\text{st},0}$ .

Однако при полевом описании ФР  $f_1$  в масштабе взаимодействия ( $r_b$ -масштабе) зависит от  $\varepsilon$  через динамические переменные  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $t$ , связанные законами классической механики, и, следовательно, возможна аппроксимация [3–5]

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{D \hat{t}_b} \left[ \left( \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] &\cong \frac{D_1}{D(-\hat{t}_b)} \left[ \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial(-\hat{t}_b)} \left( \frac{\partial(-\hat{t}_b)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \right. \\ &+ \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{r}_{1b}} \cdot \frac{\partial \hat{r}_{1b}}{\partial(-\hat{t}_b)} \left( \frac{\partial(-\hat{t}_b)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \\ &+ \left. \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{v}_{1b}} \cdot \frac{\partial \hat{v}_{1b}}{\partial(-\hat{t}_b)} \left( \frac{\partial(-\hat{t}_b)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] = \\ &= - \frac{D_1}{D \hat{t}_b} \left[ \left( \frac{\partial \hat{t}_b}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{D_1 \hat{f}_1}{D \hat{t}_b} \right] \cong - \frac{D_1}{D \hat{t}_b} \left[ \left( \frac{\partial \hat{t}_b}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_b} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

В выражении (2.30) введена аппроксимация против направления стрелы времени, что соответствует условию отсутствия корреляций при  $t_0 \rightarrow -\infty$ , где  $t_0$  — некоторый

момент времени в  $r_b$ -масштабе, определяющий начало взаимодействия частиц. Тем самым из возможных стохастических процессов выделяются марковские процессы.

Используем ФР для частиц химического сорта  $\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, \mu$ ) в соответствии с нормировкой

$$f_\alpha = \frac{f_1 N_\alpha}{N}, \quad \int f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha = n_\alpha, \quad \int n_\alpha d\mathbf{r} = N_\alpha. \quad (2.31)$$

В формуле (2.31)  $f_1$  — одночастичная ФР. Возвратимся теперь к размерной записи (2.26), свернув многомасштабные субстанциональные производные:

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left[ \tau_\alpha \frac{Df_\alpha}{Dt} \right] = \sum_{\beta=1}^{\mu} \int [f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta] g_{\beta\alpha} b db d\varphi d\mathbf{v}_\beta, \quad (2.32)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{sc}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}, \quad \mathbf{F}_\alpha^{\text{sc}} = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha^{\text{a}}. \quad (2.33)$$

Прокомментируем уравнение (2.32).

1. Считаем, что частица, выделенная под номером 1 в многокомпонентной системе, принадлежит некоторому компоненту  $\alpha$ , что и отмечено нижним индексом  $\alpha$  при символе ФР, в котором также опущен верхний индекс 0. Сохранение этого индекса не имеет смысла, поскольку уже все уравнения здесь и далее содержат только функции нулевого приближения в разложении по параметру плотности  $\varepsilon$ .

2. Параметр  $\tau_\alpha$  записывается в виде

$$\tau_\alpha = \frac{\varepsilon}{[\partial \varepsilon / \partial t]_{\varepsilon=0}}, \quad (2.34)$$

где  $\varepsilon$  — число частиц всех сортов, оказавшихся в объеме взаимодействия частицы  $\alpha$  к моменту времени  $t$ ; если ввести  $\varepsilon^{\text{eq}}$  ("равновесная" плотность частиц в объеме близкого взаимодействия), то уравнение (2.34) можно записать в типичной релаксационной форме

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon^{\text{eq}}}{\tau_\alpha}. \quad (2.35)$$

Знаменатель формулы (2.34) расшифровывается следующим образом: сколько частиц окажется в объеме взаимодействия некоторой частицы, принадлежащей компоненту  $\alpha$ , за единицу времени; указанная производная вычисляется при дополнительном условии  $\varepsilon = 0$ . Очевидно, их будет столько, сколько столкновений произойдет в объеме взаимодействия за единицу времени. Следовательно,  $\tau_\alpha$  — среднее время между столкновениями частицы сорта  $\alpha$  с частицами всех сортов. Во время столкновения частиц учитывается действие самосогласованной силы  $\mathbf{F}^{\text{sc}}$ , являющейся суммой внешней силы и силы  $\mathbf{F}^{\text{a}}$  внутреннего происхождения.

Как следует из вывода формулы (2.34),  $\tau_\alpha$  определяется в плазме близкими столкновениями. По аналогии с выражением (2.2) имеем

$$\tau_\alpha^n = \Lambda^{-1} \tau_\alpha, \quad (2.36)$$

где  $\tau_\alpha^n$  — среднее время между столкновениями частиц.

В гидродинамическом приближении время  $\tau_\alpha$  может быть записано через вязкость  $\eta_\alpha$  компонента  $\alpha$  [27, 34], например, для ионов

$$\tau_\alpha = \Lambda \Pi \eta_\alpha \rho_\alpha^{-1}. \quad (2.37)$$

В уравнение (2.37) входят коэффициент  $\Pi$ , определяемый моделью взаимодействия частиц (для ионов  $\Pi = 1,04$  [27, 35]), и статическое давление

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha. \quad (2.38)$$

Обобщенное уравнение Больцмана инвариантно относительно преобразования Галилея и имеет правильные свободномолекулярную и максвелловскую асимптотики. Другие подходы к выводу КУ $_{f_i}$  рассмотрены в [5].

Приведем теперь систему обобщенных гидродинамических уравнений. Они уже были ранее получены [3–5] для газовых систем, находящихся во внешнем поле сил. Отличие приведенных далее обобщенных уравнений Энского заключается во введении в уравнения самосогласованных сил  $\mathbf{F}^{\text{sc}}$  (см. формулу (2.33)). Уравнение неразрывности для компонента  $\alpha$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B}^{\text{sc}} \right] \right\} = R_\alpha, \end{aligned} \quad (2.39)$$

уравнение движения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B}^{\text{sc}} \right] \right\} - \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} \left[ \rho_\alpha - \tau_\alpha \left( \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \right) \right] - \\ & - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B}^{\text{sc}} \right] \right\} \times \mathbf{B}^{\text{sc}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha (\bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha (\bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B}^{\text{sc}}) \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha (\bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B}^{\text{sc}}) \right] \right\} = \bar{\mathbf{I}}_{\alpha, \text{mot}}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

уравнение энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_\alpha v_\alpha^2}{2} + \varepsilon_\alpha n_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_\alpha v_\alpha^2}{2} + \varepsilon_\alpha n_\alpha \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right) - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right) - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \rho_\alpha \overline{v_\alpha^2 \mathbf{F}_\alpha^{\text{sc}}} - \varepsilon_\alpha n_\alpha \overline{\mathbf{F}_\alpha^{\text{sc}}} \Bigg\} - \\
& - \left\{ \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} \cdot \overline{\mathbf{v}_\alpha} - \tau_\alpha \left[ \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \overline{\mathbf{v}_\alpha}) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha \overline{\mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha} - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}} - q_\alpha n_\alpha \overline{\mathbf{v}_\alpha} \times \mathbf{B}^{\text{sc}} \right) \right] \right\} = \overline{\mathbf{I}}_{\alpha, \text{en}} \\
& (\alpha = 1, \dots, \mu), \tag{2.41}
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}_\alpha^{\text{sc}}$  — суммарная самосогласованная сила, действующая на единицу массы частицы сорта  $\alpha$ ,  $\mathbf{F}_\alpha^{(1)\text{sc}}$  — составляющая самосогласованной силы, не зависящая от скорости движения заряженной частицы,  $\mathbf{B}^{\text{sc}}$  — магнитная индукция,  $q_\alpha$  — заряд частицы  $\alpha$ ,  $\varepsilon_\alpha$  — ее внутренняя энергия,  $\rho_\alpha$  — плотность компонента  $\alpha$ ; черта означает усреднение по скорости.

Таким образом, в обобщенные гидродинамические уравнения Энскога входят самосогласованные силы, обусловленные коллективным характером взаимодействия частиц в плазме. В следующих разделах рассмотрена возможность приложения развитой теории к решению задач физики плазмы.

### 3. Обобщенное уравнение Больцмана в физике слабоионизованного газа. Гидродинамические аспекты теории

Традиционной областью приложений больцмановской кинетической теории (БКТ) является физика слабоионизованного газа. Интересно проанализировать результаты, которые в этом случае доставляет ОУБ, и их отличие от классической теории. Сосредоточив внимание именно на этом принципиальном вопросе, остановимся на классической лоренцевской постановке проблемы. Рассмотрим случай пространственно однородного слабоионизованного газа, считая, что столкновениями между заряженными частицами можно пренебречь:

$$v_e \ll \delta v_{ea},$$

где  $v_e$  — частота столкновений между заряженными частицами;  $v_{ea}$  — частота столкновений между заряженными и нейтральными частицами;  $\delta$  — относительное количество энергии, которое теряется заряженной частицей за одно соударение с нейтральной частицей. Считаем, что магнитное поле отсутствует или имеет постоянную составляющую  $B_z$ , а электрическое поле направлено вдоль оси  $x$ ; всеми неупругими взаимодействиями пренебрегаем. Классическое УБ в данном случае имеет вид

$$\frac{Df_e}{Dt} \equiv \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} = J_{ea}, \tag{3.1}$$

где  $\mathbf{F}_e = q_e \mathbf{E}/m_e$  — сила, действующая на единицу массы заряженной частицы,  $q_e$  — заряд частицы. ОУБ записывается следующим образом:

$$\frac{Df_e}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left( \tau_{ea} \frac{Df_e}{Dt} \right) = J_{ea}. \tag{3.2}$$

В уравнении (3.2)  $\tau_{ea}$  — среднее время между столкновениями нейтральных и заряженных частиц. Как следует из теории ОУБ [3–5], интеграл столкновений можно ис-

пользовать в больцмановской форме. После умножения (3.1) и (3.2) на инварианты столкновений  $m_e, m_e v_e, m_e v_e^2/2$  и последующего интегрирования по скоростям  $\mathbf{v}_e$  получаются классические гидродинамические уравнения (ГУ) и обобщенные гидродинамические уравнения (ОГУ), которые приобретают замкнутую форму, если существует способ расчета моментов от интегралов столкновений. При этом

$$\int J_{ea} m_e d\mathbf{v}_e = 0 \tag{3.3}$$

в силу закона сохранения массы при упругих нерелятивистских столкновениях. Но интегралы

$$\int J_{ea} m_e v_e d\mathbf{v}_e \quad \text{и} \quad \int J_{ea} \frac{m_e v_e^2}{2} d\mathbf{v}_e$$

могут быть вычислены в конечном виде только для специальных моделей взаимодействия частиц. Воспользуемся максвелловской моделью взаимодействия, для которой сила  $F_{ea}$  межмолекулярного взаимодействия обратна пятой степени расстояния:

$$F_{ea} = \frac{\chi_{ea}}{r^5}. \tag{3.4}$$

Для указанной модели известны [36, 37] упомянутые интегралы и вычислена величина  $\tau_{ea}$  (в дальнейшем индекс  $ea$  опускается):

$$\tau = \left[ 0,422 \, 2\pi \left( \frac{\chi(m_e + m_a)}{m_e m_a} \right)^{1/2} n_a \right]^{-1}. \tag{3.5}$$

Если ввести

$$A = \frac{8\sqrt{\pi}}{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) 0,422 (m_e + m_a)^{-1} \left( \frac{\chi}{m_a M_e} \right)^{1/2} \tag{3.6}$$

и

$$M_a = \frac{m_a}{m_a + m_e}, \quad M_e = \frac{m_e}{m_a + m_e}, \tag{3.7}$$

то частота столкновений  $\nu$  заряженных и нейтральных частиц может быть представлена в виде

$$\nu = n_a (m_a + m_e) A, \tag{3.8}$$

при этом  $\tau = \nu^{-1}$ , а  $n_a$  — плотность числа нейтральных частиц.

Уравнения неразрывности, полученные из (3.1) и (3.2), приводят к условию  $n_e = \text{const}$ , а ОУБ в данном случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} - \tau \left( \frac{\partial^2 f_e}{\partial t^2} + 2\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial t} + \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial \mathbf{v}_e} : \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e \right) = J_{ea}. \tag{3.9}$$

Здесь и далее двоеточие означает двойное скалярное произведение тензоров.

Введем дрейфовую скорость  $v_{ex}$  в соответствии с определением

$$\overline{v_{ex}} = \frac{1}{n_e} \int f_e v_{ex} d\mathbf{v}_e. \tag{3.10}$$

Тогда уравнение движения из системы ОГУ принимает вид

$$\tau \frac{d^2 \bar{v}_{ex}}{dt^2} - \frac{d \bar{v}_{ex}}{dt} - Am_a n_a \bar{v}_{ex} + q_e E m_e^{-1} = 0. \quad (3.11)$$

При записи (3.11) использованы результаты [36, 37]

$$\int m_e v_{ex} J_{ea} dv_e = -Am_a n_a \bar{v}_{ex} m_e n_e.$$

Решение (3.11) имеет вид

$$\bar{v}_{ex}^{\text{ОУБ}} = \left( \bar{v}_{ex}^0 - \frac{q_e E}{m_e m_a n_a A} \right) \exp \left[ -\frac{t}{2\tau} \left( \sqrt{4M_a + 1} - 1 \right) \right] + \frac{q_e E}{m_e m_a n_a A}. \quad (3.12)$$

Верхний индекс 0 соответствует начальному моменту времени. Решение в рамках УБ сформулированной задачи о временной релаксации максвелловских частиц в электрическом поле известно [37] и для дрейфовой скорости приводит к результату

$$\bar{v}_{ex}^{\text{УБ}} = \left( \bar{v}_{ex}^0 - \frac{q_e E}{m_e m_a n_a A} \right) \exp(-t A n_a m_a) + \frac{q_e E}{m_e m_a n_a A}. \quad (3.13)$$

Пусть, например,  $m_e \ll m_a$ . Тогда из (3.12), (3.13) следует

$$\bar{v}_{ex}^{\text{ОУБ}} = (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau) \exp \left( -\frac{0,618t}{\tau} \right) + F_{ex} \tau, \quad (3.14)$$

$$\bar{v}_{ex}^{\text{УБ}} = (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) + F_{ex} \tau. \quad (3.15)$$

Итак, при прочих равных условиях релаксация скорости дрейфа  $\bar{v}_{ex}$  в рамках БКТ происходит скорее, чем в обобщенной БКТ, а стационарные скорости дрейфа оказываются одинаковыми.

Перейдем теперь к уравнению энергии. Введем энергетические температуры  $\hat{T}_e$  и  $\tilde{T}_e$  в соответствии с определениями

$$\hat{T}_e = \frac{m_e}{3n_e} \int f_e v_e^2 dv_e, \quad (3.16)$$

$$\tilde{T}_e = \frac{m_e}{3n_e} \int f_e (\mathbf{v}_e - \bar{\mathbf{v}}_e)^2 dv_e.$$

Естественно, использование той или иной температуры — вопрос удобства, при этом в данном случае

$$\hat{T}_e = \tilde{T}_e + \frac{1}{3} m_e \bar{v}_{ex}^2. \quad (3.17)$$

Вычислим моменты в левой части кинетических уравнений. Например,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_e v_e^2}{2} f_e dv_e = \frac{3}{2} n_e \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial t}, \quad (3.18)$$

$$\int \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial t} \frac{m_e v_e^2}{2} dv_e = -F_{ex} m_e n_e \frac{\partial \bar{v}_{ex}}{\partial t}, \quad (3.19)$$

$$\int \frac{m_e v_e^2}{2} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial \mathbf{v}_e} : \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e dv_e = F_{ex}^2 m_e n_e. \quad (3.20)$$

Соответствующий интеграл в правой части вычислен в [37]

$$\int J_{ea} \frac{m_e v_e^2}{2} dv_e = -\frac{3(\hat{T}_e - \tilde{T}_a)}{m_e + m_a} Am_e m_a n_e n_a. \quad (3.21)$$

В результате имеем следующее неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{T}_e}{dt^2} - \frac{1}{\tau} \frac{d \tilde{T}_e}{dt} - 2 \frac{\hat{T}_e - \tilde{T}_a}{m_e + m_a} \frac{A}{\tau} m_a m_e n_a = \\ = \frac{1}{3} \frac{m_e}{\tau} \frac{d}{dt} \bar{v}_{ex}^2 - \frac{2}{3} \frac{m_e}{\tau} F_{ex} \bar{v}_{ex} - \frac{1}{3} m_e \frac{d^2}{dt^2} \bar{v}_{ex}^2 + \\ + \frac{4}{3} F_{ex} m_e \frac{d \bar{v}_{ex}}{dt} - \frac{2}{3} m_e F_{ex}^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Опуская громоздкие, но вполне очевидные вычисления, приходим к следующим результатам. Например, при  $m_e \ll m_a$  имеем из ОУБ

$$\begin{aligned} \tilde{T}_e^{\text{ОУБ}} = \tilde{T}_a + C_2 \exp \left( -2 \frac{m_e t}{m_a \tau} \right) - \\ - 2,175 m_e \tau F_{ex} (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau) \exp \left( -0,618 \frac{t}{\tau} \right) - \\ - \frac{1}{3} m_e (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau)^2 \exp \left( -1,236 \frac{t}{\tau} \right) + \frac{2}{3} F_{ex}^2 \tau^2 m_a, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} C_2 = \tilde{T}_e^0 - \tilde{T}_a + 2,157 m_e \tau F_{ex} (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau) + \\ + \frac{1}{3} m_e (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau)^2 - \frac{2}{3} F_{ex}^2 \tau^2 m_a. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты из УБ таковы:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_e^{\text{УБ}} = \tilde{T}_a + C_2 \exp \left( -2 \frac{m_e t}{m_a \tau} \right) - \\ - \frac{4}{3} m_e \tau F_{ex} (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) - \\ - \frac{1}{3} m_e (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau)^2 \exp \left( -2 \frac{t}{\tau} \right) + \frac{1}{3} F_{ex}^2 \tau^2 m_a. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_2 = \tilde{T}_e^0 - \tilde{T}_a + \frac{4}{3} m_e \tau F_{ex} (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau) + \\ + \frac{1}{3} m_e (\bar{v}_{ex}^0 - F_{ex} \tau)^2 - \frac{1}{3} F_{ex}^2 \tau^2 m_a. \end{aligned}$$

В стационарном режиме существует следующая связь между приведенными решениями:

$$(\tilde{T}_e - \tilde{T}_a)_{\text{st}}^{\text{ОУБ}} = 2(\tilde{T}_e - \tilde{T}_a)_{\text{st}}^{\text{УБ}}. \quad (3.25)$$

Верхние индексы в (3.25), как и выше, отражают принадлежность разности энергетических температур к решениям ОУБ и УБ.

Теперь приведем решения для энергетических температур  $\hat{T}_e$ ; из ОУБ имеем

$$\begin{aligned} \hat{T}_e = \hat{T}_a + & \left[ \hat{T}_{ea}^0 - \frac{2}{3} F_{ex} \tau \frac{m_e}{M_a(2M_e - 1)} \times \right. \\ & \times \sqrt{4M_a + 1} \left( \bar{v}_{ex}^0 - \frac{F_{ex} \tau}{M_a} \right) - \\ & - \frac{\tau^2}{3} \frac{F_{ex}^2}{M_a^2} (1 + M_a)(m_e + m_a) \left. \right] \times \\ & \times \exp \left[ -\frac{t}{2\tau} \left( \sqrt{8M_a M_e + 1} - 1 \right) \right] + \\ & + \frac{2}{3} F_{ex} \tau \frac{m_e}{M_a(2M_e - 1)} \sqrt{4M_a + 1} \left( \bar{v}_{ex}^0 - \frac{F_{ex} \tau}{M_a} \right) \times \\ & \times \exp \left[ -\frac{t}{2\tau} \left( \sqrt{4M_a + 1} - 1 \right) \right] + \\ & + \frac{\tau^2}{3} \frac{F_{ex}^2}{M_a^2} (m_e + m_a)(1 + M_a), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $\hat{T}_{ea}^0 = \hat{T}_e^0 - \hat{T}_a^0$ .

В рамках классического уравнения Больцмана находим [29]

$$\begin{aligned} \hat{T}_e = \hat{T}_a + & \left[ \hat{T}_{ea}^0 - \frac{2}{3} F_{ex} \tau \frac{m_e}{M_a(2M_e - 1)} \left( \bar{v}_{ex}^0 - \frac{F_{ex} \tau}{M_a} \right) - \right. \\ & - \frac{\tau^2}{3} \frac{F_{ex}^2}{M_a^2} (m_e + m_a) \left. \right] \exp \left( -2M_a M_e \frac{t}{\tau} \right) + \\ & + \frac{2}{3} F_{ex} \tau \frac{m_e}{M_a(2M_e - 1)} \left( \bar{v}_{ex}^0 - \frac{F_{ex} \tau}{M_a} \right) \exp \left( -M_a \frac{t}{\tau} \right) + \\ & + \frac{\tau^2}{3} \frac{F_{ex}^2}{M_a^2} (m_e + m_a). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Отметим, что обращение в нуль члена  $2M_e - 1$  в знаменателе в формулах (3.26) и (3.27) на самом деле не ведет к особенностям при  $M_e = 0,5$ , поскольку из-за равенства экспоненциальных членов соответствующие слагаемые взаимно уничтожаются. Из (3.26), (3.27) следует

$$\hat{T}_{ea, st}^{ОУБ} = (1 + M_a) \hat{T}_{ea, st}^{УБ}. \quad (3.28)$$

Таким образом, в отличие от результатов расчетов скорости дрейфа ОУБ ведет не только к изменениям в ходе релаксационных кривых, но и к иным стационарным значениям энергетических температур. Для слабоионизованного газа Лоренца можно пренебречь влиянием самосогласованных сил электромагнитного происхождения. Тогда после умножения ОУБ (см. также (2.39)–(2.41)) на инварианты столкновений

$$m_\alpha, m_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \varepsilon_\alpha$$

( $\varepsilon_\alpha$  — внутренняя энергия частиц компонента) и последующего интегрирования по скоростям получаем систему обобщенных гидродинамических уравнений (ОГУ) Энского, в которой учитывается действие только внешних сил:

уравнение неразрывности для компонента  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B} \right] \right\} = R_\alpha, \end{aligned} \quad (3.29)$$

уравнение движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B} \right] \right\} - \\ - \left\{ \mathbf{F}_\alpha^{(1)} \left[ \rho_\alpha - \tau_\alpha \left( \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \right) \right] \right\} - \\ - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B} \right] \right\} \times \mathbf{B} + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{F}_\alpha^{(1)} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha [\bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B}] \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha [\bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B}] \right] \right\} = \bar{\mathbf{J}}_{\alpha, mot}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

уравнение энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_\alpha \bar{v}_\alpha^2}{2} + \varepsilon_\alpha n_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_\alpha \bar{v}_\alpha^2}{2} + \varepsilon_\alpha n_\alpha \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{1}{2} \rho_\alpha \bar{v}_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right) - \mathbf{F}_\alpha^{(1)} \cdot \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \rho_\alpha \bar{v}_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \tau_\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_\alpha \bar{v}_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{1}{2} \rho_\alpha \bar{v}_\alpha^2 \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha + \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \right) - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \rho_\alpha \bar{v}_\alpha^2 \bar{\mathbf{F}}_\alpha - \varepsilon_\alpha n_\alpha \bar{\mathbf{F}}_\alpha \right] \right\} - \\ - \left\{ \bar{\mathbf{v}}_\alpha \cdot \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \tau_\alpha \left[ \bar{\mathbf{F}}_\alpha^{(1)} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \rho_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{(1)} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha \times \mathbf{B} \right) \right] \right\} = \bar{\mathbf{J}}_{\alpha, en}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $v_0$  — гидродинамическая скорость,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $\mathbf{F}_\alpha^{(1)}$  — внешние силы немагнитного происхождения, отнесенные к единице массы частицы  $\alpha$ ,  $q_\alpha$  — заряд. В правые части уравнений (3.30), (3.31) входят интегральные релаксационные члены  $\bar{\mathbf{J}}_{\alpha, mot}$  и  $\bar{\mathbf{J}}_{\alpha, en}$ , удовлетворяющие в силу законов сохранения импульса и энергии соотношениям

$$\sum_{\alpha=1}^{\mu} \bar{\mathbf{J}}_{\alpha, mot} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{\mu} \bar{\mathbf{J}}_{\alpha, en} = 0. \quad (3.32)$$

Однако для систем, далеких от равновесия, приходится вводить аппроксимации для  $\bar{J}_{z, \text{mot}}, \bar{J}_{z, \text{en}}$ . Это может быть сделано различными способами, в частности применением метода Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК) или его обобщений [38].

Обобщенное уравнение Больцмана и система ОГУ могут быть использованы для исследования плазмы в электрическом поле, в частности для исследования эффекта "убегания энергии" электронов [39, 40]. Далее рассмотрены решения классических задач физики плазмы на основе обобщенной больцмановской кинетической теории.

#### 4. Функция распределения заряженных частиц в газе Лоренца

Расчет в электрическом поле функции распределения заряженных частиц, составляющих примесь к нейтральному газу, — классическая задача физики газового разряда, имеющая давнюю историю. Еще в 1913 г. Пиддак [41] предпринял попытку рассчитать скорость дрейфа ионов в газах. Можно указать работы Комптона, посвященные расчетам функции распределения заряженных частиц и ее моментов [42, 43]. В более поздних работах Дрювестейна [44, 45] и Давыдова [46] получены аналитические представления для функции распределения и транспортные коэффициенты при учете упругих столкновений. Последующие работы, из которых отметим монографию [47], были направлены прежде всего на исследование влияния неупругих столкновений в рамках БКТ на ФР и процессы переноса. Важно отметить, что результаты расчетов ФР весьма сильно зависят от использованной модели взаимодействия частиц, в конечном счете — от сечений столкновений. Например, распределение Давыдова – Дрювестейна, полученное в предположении постоянства средней длины пробега  $l$  заряженных частиц в газе при упругих столкновениях, приводит к сильному обеднению "горячих" частиц в хвосте ФР и в итоге к неприемлемым результатам [47] при обобщении теории для расчета кинетики неупругих процессов.

Рассмотрим стационарное состояние заряженных частиц во внешнем стационарном электрическом поле в лоренцевском газе в рамках обобщенного уравнения Больцмана

$$\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} - \tau \frac{\partial^2 f_e}{\partial v_e \partial v_e} : \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e = J_{ea}, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}/m_e$ . Для решения кинетического уравнения Больцмана обычно используется разложение ФР по шаровым функциям нулевого порядка, т.е. по полиномам Лежандра. Соответствующая система зацепляющихся уравнений получена в [48, 49]. Решение ОУБ (4.1) удобно искать в виде следующего разложения по шаровым функциям:

$$f(\mathbf{v}_e) = f_0(v_e) + \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e f_1(v_e) + \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e : \mathbf{v}_e^0 \mathbf{v}_e f_2(v_e) + \dots \quad (4.2)$$

Здесь  $\mathbf{v}_e^0 \mathbf{v}_e$  — тензор с нулевым следом. При последующих вычислениях в этом разделе предполагается, что сила  $\mathbf{F}_e$  направлена вдоль положительного направления некоторой выделенной оси координат.

Подставим (4.2) в (4.1) и преобразуем соответствующие члены; имеем, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} (f_2 \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e : \mathbf{v}_e \mathbf{v}_e) &= \\ &= \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^3}{v_e} \frac{\partial f_2}{\partial v_e} - \frac{1}{3} F_e^2 v_e (\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e) \frac{\partial f_2}{\partial v_e} + \frac{4}{3} F_e^2 f_2 (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{F}_e), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v_e \partial v_e} : \{f_2 (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_e : \mathbf{v}_e^0 \mathbf{v}_e) \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e\} &= \\ &= 5F_e^2 \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^2}{v_e} \frac{\partial f_2}{\partial v_e} + 2f_2 F_e^4 + \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^4}{v_e^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial v_e^2} - \\ &- \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^4}{v_e^3} \frac{\partial f_2}{\partial v_e} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 F_{ei}^2 F_e^2 \frac{\partial^2}{\partial v_{ei}^2} (f_2 v_e^2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

В результате левая часть  $\Lambda$  обобщенного уравнения Больцмана приобретает вид

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e) \frac{1}{v_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + F_e^2 f_1 + \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^2}{v_e} \frac{\partial f_1}{\partial v_e} + \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^3}{v_e} \frac{\partial f_2}{\partial v_e} - \\ &- \frac{1}{3} F_e^2 v_e (\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e) \frac{\partial f_2}{\partial v_e} + \frac{4}{3} F_e^2 f_2 (\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e) - \\ &- \tau \left[ \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^2}{v_e} \frac{\partial}{\partial v_e} \left( \frac{1}{v_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} \right) + \frac{F_e^2}{v_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + 3F_e^2 \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)}{v_e} \frac{\partial f_1}{\partial v_e} - \right. \\ &- \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^3}{v_e^3} \frac{\partial f_1}{\partial v_e} + \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^3}{v_e^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_e^2} + 4F_e^2 \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^2}{v_e} \frac{\partial f_2}{\partial v_e} + \\ &+ \frac{4}{3} f_2 F_e^4 + \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^4}{v_e^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial v_e^2} - \frac{1}{3} F_e^2 (\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial v_e^2} - \\ &\left. - \frac{(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e)^4}{v_e^3} \frac{\partial f_2}{\partial v_e} - \frac{1}{3} F_e^4 v_e \frac{\partial f_2}{\partial v_e} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Обозначим угол между векторами  $\mathbf{F}_e$  и  $\mathbf{v}_e$  через  $\vartheta$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ), умножим ОУБ на  $d \cos \vartheta$  и проинтегрируем в указанном интервале. Находим

$$\begin{aligned} f_1 + \frac{1}{3} v_e \frac{\partial f_1}{\partial v_e} - \frac{\tau}{3} \left( \frac{2}{v_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_e^2} + \frac{12}{5} v_e \frac{\partial f_2}{\partial v_e} F_e^2 + \right. \\ \left. + 4f_2 F_e^2 + \frac{4}{15} F_e^2 v_e^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial v_e^2} \right) = \frac{1}{F_e^2} J_{ea}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогичная процедура после умножения ОУБ на  $\cos \vartheta d \cos \vartheta$  дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + \frac{4}{15} F_e^2 v_e^2 \frac{\partial f_2}{\partial v_e} + \frac{4}{3} F_e^2 v_e f_2 - \\ - \frac{3}{5} \tau F_e^2 \left( 4 \frac{\partial f_1}{\partial v_e} + v_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_e^2} \right) = -\frac{3}{2} \frac{1}{F_e} J_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Как указывалось, столкновительные члены  $J_{ea}$  и  $J_1$  могут быть взяты в обобщенной больцмановской кинетической теории (ОБКТ) в обычном для уравнения Больцмана виде. В рассматриваемом далее случае при условии, что изменение энергии электрона при упругом столкновении (примерно равно  $(m_e/m_a)^{1/2} \varepsilon_e$ ) много меньше энергии  $\varepsilon_e$  электрона до столкновения в прибли-

жении Фоккера – Планка (см., например, [50]), имеем

$$J_{ea} = \frac{m_e \hat{T}_a}{m_a v_e^2} \frac{\partial}{\partial v_e} \left[ v_e^3 v \left( \frac{f_0}{\hat{T}} + \frac{1}{m_e v_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} \right) \right], \quad (4.8)$$

$$J_1 = \frac{2}{3} F_e \frac{v_e^2}{l} f_1, \quad (4.9)$$

где  $\hat{T}_a$  — энергетическая температура нейтрального газа ( $\hat{T}_a = kT_a$ ),  $v$  — частота столкновений, которая, вообще говоря, может зависеть от скорости,  $l$  — средняя длина пробега между столкновениями нейтральных и заряженных частиц. Соотношения (4.6)–(4.9) и доставляют необходимую расчетную базу для определения ФР и ее моментов. Традиционно выделяются два предельных случая: 1) постоянное значение частоты столкновений:  $v = \text{const}$ ,  $v = \tau^{-1} = v_e l^{-1}$ , 2) постоянная средняя длина свободного пробега между столкновениями заряженных и нейтральных частиц:  $l = \text{const}$ .

Обратимся к первому случаю. Умножим левую и правую части уравнения (4.6) на  $3v_e^2$  и используем (4.8). Тогда уравнение может быть приведено к виду

$$F_e^2 \frac{d}{dv_e} \left( v_e^3 f_1 - \tau v_e^2 \frac{df_0}{dv_e} \right) = \frac{3\hat{T}_a m_e}{\tau m_a} \frac{d}{dv_e} \left[ v_e^3 \left( \frac{f_0}{\hat{T}} + \frac{1}{m_e v_e} \frac{df_0}{dv_e} \right) \right] \quad (4.10)$$

или после интегрирования по  $v_e$

$$f_1 v_e = \left( \tau + \frac{3\hat{T}_a}{F_e^2 m_a \tau} \right) \frac{df_0}{dv_e} + \frac{3}{F_e^2} \frac{m_e}{m_a} \frac{v_e}{\tau} f_0, \quad (4.11)$$

поскольку постоянная интегрирования равна нулю из-за обращения в нуль левой и правой частей (4.11) при  $v_e = 0$ . Уравнение (4.11) получено при условии, которое будет использовано и далее: малые члены, пропорциональные  $f_2$ , могут быть опущены. Подставляя теперь (4.11) в (4.9), а затем используя полученный результат для исключения  $f_1$  из (4.7), находим

$$v_e^2 \left( \tau + \frac{3\hat{T}_a}{F_e^2 m_a \tau} \right) \frac{d^3 f_0}{dv_e^3} + v_e \left( 2\tau + \frac{3m_e}{F_e^2 m_a \tau} v_e^2 + \frac{6\hat{T}_a}{F_e^2 m_a \tau} \right) \frac{d^2 f_0}{dv_e^2} + \left( -2\tau - \frac{10}{3\tau F_e^2} v_e^2 - \frac{5\hat{T}_a}{\tau^3 F_e^4 m_a} v_e^2 + \frac{12m_e}{F_e^2 m_a \tau} v_e^2 - \frac{6\hat{T}_a}{F_e^2 m_a \tau} \right) \frac{df_0}{dv_e} - \frac{5m_e}{F_e^4 \tau^3 m_a} v_e^3 f_0 = 0. \quad (4.12)$$

Для решения уравнения (4.12) необходимы три крайних условия. Они очевидны. Действительно, при  $v_e = 0$  может быть задано некоторое значение  $f_0$ , определяемое лишь нормировкой функции. Из (4.12) видно также, что  $f_0' = 0$  при  $v_e = 0$ . Наконец, разделив на  $v_e^3$ , найдем, что  $f_0 \rightarrow 0$  при  $v_e \rightarrow \infty$ . Таким образом, решение (4.12) может быть легко получено, например, с помощью численного метода прогонки. Для этого уравнение (4.12) удобно привести к безразмерному виду, используя следующие безразмерные величины, отмеченные сверху дугой:

$$\check{v}_e = \frac{v_e}{F_e \tau}, \quad \check{\varepsilon} = \frac{m_e F_e^2 \tau^2}{\hat{T}_a}, \quad \check{f}_0 = \frac{f_0}{f_0(v_e = 0)}. \quad (4.13)$$

В результате имеем

$$\check{v}_e^2 \left( 1 + \frac{3m_e}{m_a \check{\varepsilon}} \right) \frac{d^3 \check{f}_0}{d\check{v}_e^3} + \check{v}_e \left( 2 + \frac{6m_e}{m_a \check{\varepsilon}} + \frac{3m_e \check{v}_e^2}{m_a} \right) \frac{d^2 \check{f}_0}{d\check{v}_e^2} - \left[ 2 + \frac{6m_e}{m_a \check{\varepsilon}} + \check{v}_e^2 \left( \frac{10}{3} + \frac{5m_e}{m_a \check{\varepsilon}} - 12 \frac{m_e}{m_a} \right) \right] \frac{d\check{f}_0}{d\check{v}_e} - 5 \frac{m_e}{m_a} \check{v}_e^3 \check{f}_0 = 0. \quad (4.14)$$

Используем для энергетической температуры заряженных частиц следующее определение:

$$\hat{T}_e = \frac{1}{3n_e} \int f_e m_e v_e^2 dv_e \cong \frac{1}{3n_e} \int f_0 m_e v_e^2 dv_e. \quad (4.15)$$

Это означает, например, что в терминах (4.13) максвелловская функция  $\check{f}_M$  имеет вид

$$\check{f}_M = \exp \left( -\frac{\hat{T}_a \check{\varepsilon}}{2\hat{T}_e} \check{v}_e^2 \right). \quad (4.16)$$

Рассмотрим асимптотику функции  $f_0$  при больших значениях скорости  $v_e$ . Из (4.14) следует, что при  $v_e \rightarrow \infty$  справедливо уравнение

$$\frac{d^2 f_0}{dv_e^2} - \frac{5}{3F_e^2 \tau^2} f_0 = 0, \quad (4.17)$$

имеющее решение

$$f_0 \approx \exp \left( -\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{v_e}{F_e \tau} \right). \quad (4.18)$$

Отметим, что в рассматриваемом предельном случае классическое решение [50] уравнения Больцмана приводит к максвелловской функции с температурой  $\hat{T}_e$ , отличной от температуры нейтрального газа  $\hat{T}_a$ . Таким образом, решение ОУБ доставляет большее количество "горячих" заряженных частиц в хвосте функции распределения.

Конечно, моменты функции распределения — температура  $\hat{T}_e$  и скорость дрейфа  $\bar{v}_{ex}$  — могут быть найдены соответствующим интегрированием ФР после решения (4.14). Однако в этом нет необходимости. Действительно, проведем почленное интегрирование (4.14) после предварительного умножения на  $v_e$ :

$$\left( \frac{3\hat{T}_a}{m_a \tau^2 F_e^2} + 2 \right) \int_0^\infty f_0 v_e^2 dv_e = \frac{m_e}{m_a \tau^2 F_e^2} \int_0^\infty f_0 v_e^4 dv_e. \quad (4.19)$$

Считая, как и в (4.15), что

$$\int f dv_e \cong \int f_0 dv_e = 4\pi \int_0^\infty f_0 v_e^2 dv_e = n_e, \quad (4.20)$$

находим

$$\hat{T}_e = \hat{T}_a + \frac{2}{3} m_a \tau^2 F_e^2. \quad (4.21)$$

Аналогично, без явного решения (4.11), (4.12), может быть определена и скорость дрейфа. Для этого умножим

почленно (4.11) на  $v_e^3$  и проинтегрируем:

$$\int_0^\infty f_1 v_e^4 dv_e = \left( \tau + \frac{3\hat{T}_a}{F_e^2 m_a \tau} \right) \int_0^\infty v_e^3 \frac{df_0}{dv_e} dv_e + \frac{3}{F_e^2} \frac{m_e}{m_a \tau} \int_0^\infty f_0 v_e^4 dv_e, \quad (4.22)$$

что приводит к результату

$$\bar{v}_{ex} = \frac{3(\hat{T}_e - \hat{T}_a)}{m_a \tau F_e} - \tau F_e, \quad (4.23)$$

поскольку по определению

$$\bar{v}_{ex} = \frac{1}{n_e} \int f v_{ex} dv_e = \frac{4\pi F_e}{3n_e} \int_0^\infty f_1 v_e^4 dv_e. \quad (4.24)$$

Используя теперь (4.21), (4.23), находим

$$\bar{v}_{ex} = \tau F_e. \quad (4.25)$$

Сравнивая полученные результаты (4.21) и (4.25) с известными классическими результатами [50, с. 108], приходим к выводу, что в предельном случае  $v = \text{const}$  дрейфовая скорость не изменяется, а  $\hat{T}_e$  увеличивается (в соответствующем (классическом) соотношении вместо коэффициента  $2/3$  в (4.21) стоит  $1/2$ ). Заканчивая рассмотрение этого предельного случая, приведем для него форму уравнения (4.14) ( $m_e \ll m_a$ ) при  $\check{\epsilon} \gtrsim 1$

$$\check{v}_e^2 \frac{d^3 \check{f}_0}{d\check{v}_e^3} + \left( 2 + 3 \frac{m_e}{m_a} \check{v}_e^2 \right) \check{v}_e \frac{d^2 \check{f}_0}{d\check{v}_e^2} - \left( 2 + \frac{10}{3} \check{v}_e^2 \right) \frac{d\check{f}_0}{d\check{v}_e} - 5 \frac{m_e}{m_a} \check{v}_e^3 \check{f}_0 = 0. \quad (4.26)$$

Отметим также как тест на проверку правильности результатов, что если  $F_e \equiv 0$ , то уравнение (4.11), как и следовало ожидать, приводит к максвелловской функции распределения  $f_{0M}$

$$\frac{df_0}{dv_e} = -\frac{m_e v_e}{\hat{T}} f_0, \quad (4.27)$$

$$f_{0M} = C \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2\hat{T}}\right). \quad (4.28)$$

Перейдем теперь к рассмотрению второго предельного случая  $l = \text{const}$  [51]. В этом случае аналог уравнения (4.11) выглядит следующим образом:

$$f_1 v_e = \left( \tau + \frac{3\hat{T}v_e}{F_e^2 m_a l} \right) \frac{df_0}{dv_e} + \frac{3}{F_e^2} \frac{m_e}{m_a} \frac{v_e^2}{l} f_0. \quad (4.29)$$

Действуя так же, как в рассмотренном выше предельном случае  $v = \text{const}$ , приходим к следующему уравнению относительно  $f_0$ :

$$\begin{aligned} v_e^2 \left( \tau + \frac{3\hat{T}v_e}{F_e^2 m_a l} \right) \frac{d^3 f_0}{dv_e^3} + \left( 2\tau + \frac{12\hat{T}v_e}{m_a l F_e^2} v_e + \frac{3m_e v_e^3}{m_a l F_e^2} \right) v_e \frac{d^2 f_0}{dv_e^2} + \\ + \left( 18 \frac{m_e}{m_a l F_e^2} v_e^3 - 2\tau - \frac{5v_e^2}{3\tau F_e^2} - \right. \\ \left. - \frac{5}{3F_e^2 l} v_e^3 - \frac{5\hat{T}v_e}{\tau F_e^4 m_a l^2} v_e^4 \right) \frac{df_0}{dv_e} + \\ + v_e^2 \left( 12 \frac{m_e}{F_e^2 m_a l} - 5 \frac{m_e}{\tau F_e^4 m_a l^2} v_e^3 \right) f_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Как и в предыдущем случае, нетрудно убедиться после почленного умножения (4.30) на  $F_e^4$ , что обращение в нуль внешней силы  $F_e$  приводит к уравнению (4.27), а затем, после интегрирования, к максвелловской функции (4.28). Граничные условия для (4.30) таковы: задается  $f_0$  при  $v_e = 0$  в силу выбранной нормировки; при  $v_e = 0$ , как следует из (4.30),  $f_0' = 0$ , и, наконец,  $f_0 \rightarrow 0$  при  $v_e \rightarrow \infty$ . Последний результат очевиден, если предварительно разделить левую и правую части уравнения (4.30) на  $v_e^5$ .

Для численного интегрирования уравнение (4.30) удобно привести к безразмерному виду, используя безразмерные величины

$$\check{v}_e = \frac{v_e}{l/\tau}, \quad \check{\epsilon} = \frac{m_e F_e^2 \tau^2}{\hat{T}_a}, \quad \check{A} = \frac{F_e^2 \tau^4}{l^2}. \quad (4.31)$$

В результате (4.30) приобретает вид

$$\begin{aligned} \check{v}_e^2 \check{A} \left( 1 + 3 \frac{m_e}{m_a} \frac{\check{v}_e}{\check{\epsilon}} \right) \frac{d^3 \check{f}_0}{d\check{v}_e^3} + \\ + \left[ \check{A} \left( 2 + 12 \frac{m_e}{m_a} \frac{\check{v}_e}{\check{\epsilon}} \right) + 3 \frac{m_e}{m_a} \check{v}_e^3 \right] \check{v}_e \frac{d^2 \check{f}_0}{d\check{v}_e^2} + \\ + \left[ -2\check{A} - \frac{5}{3} \check{v}_e^2 - \left( \frac{5}{3} - 18 \frac{m_e}{m_a} \right) \check{v}_e^3 - 5 \frac{m_e}{m_a} \frac{\check{v}_e^4}{\check{\epsilon}} \right] \frac{d\check{f}_0}{d\check{v}_e} + \\ + \check{v}_e^2 \frac{m_e}{m_a} \left( 12 - 5 \frac{\check{v}_e^3}{\check{A}} \right) \check{f}_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

с краевыми условиями

$$\check{f}_0(0) = 1, \quad \check{f}_0'(0) = 0, \quad \check{f}_0(\infty) = 0. \quad (4.33)$$

Процедура почленного интегрирования уже не приводит здесь к изящным результатам типа (4.21), (4.25). Тем не менее укажем полезную формулу для расчета скорости дрейфа  $\bar{v}_{ex}$ , полученную из (4.32) после умножения на  $v_e^3$  и последующего интегрирования:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ex} = \frac{4\pi F_e}{3n_e} \left( \frac{18}{5} \frac{\hat{T}_a \tau}{m_a} \int_0^\infty f_0 dv_e + C \frac{6}{5} \tau^2 l F_e^2 + \right. \\ \left. + 2l \int_0^\infty f_0 v_e dv_e - \frac{9}{10} \frac{m_e}{\pi m_a} \tau n_e \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $C = f_0(v_0 = 0)$ . Использование (4.34), конечно, возможно только после численного интегрирования (4.33), однако интересно отметить, что в отличие от (4.25) в этом предельном случае скорость дрейфа является нелинейной функцией  $F_e$ .

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов функций распределения заряженных частиц во внешнем электрическом поле при использовании обобщенного уравнения Больцмана [51].

На рисунке 2 изображена безразмерная функция распределения  $\check{f}_0$  в зависимости от безразмерной скорости  $\check{v}_e$  при  $\check{\epsilon} = 10^{-3}$  и  $\tau = \text{const}$ . Кривая 1 соответствует максвелловской функции, а кривая 2 — функции распределения, найденной с помощью ОУБ. При уменьшении  $\check{\epsilon}$  упомянутые распределения сближаются. Отметим, что функция  $\check{f}_0^{\text{ОУБ}}$  лежит выше максвелловской функции. На рисунках 3 и 4 приведены результаты расчета  $\check{f}_0$  при  $l = \text{const}$ . Рисунок 3 соответствует случаю  $\check{\epsilon} = 10^{-2}$ ,



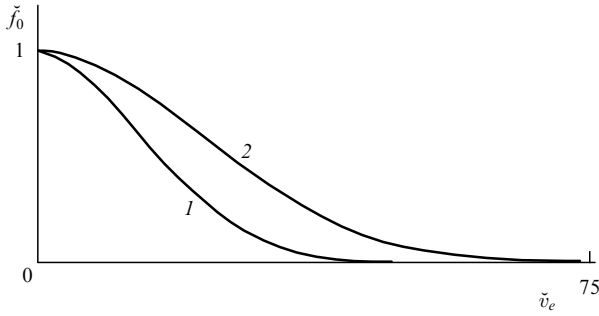


Рис. 2. Зависимость  $\tilde{f}_0$  от  $\tilde{v}_e$  при  $\tau = \text{const}$ : 1 — максвелловская функция, 2 —  $\tilde{f}_0^{\text{ОУБ}}$ .

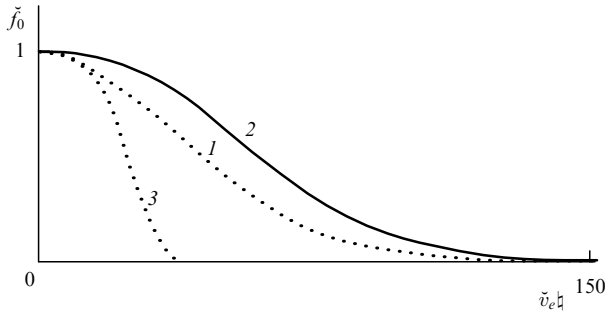


Рис. 3. Зависимость  $\tilde{f}_0$  от  $\tilde{v}_e$  при  $l = \text{const}$ ,  $\check{\epsilon} = 10^{-2}$ ,  $\check{A} = 1$ : 1 — максвелловская функция, 2 —  $\tilde{f}_0^{\text{ОУБ}}$ , 3 — функция распределения Дрювестейна.

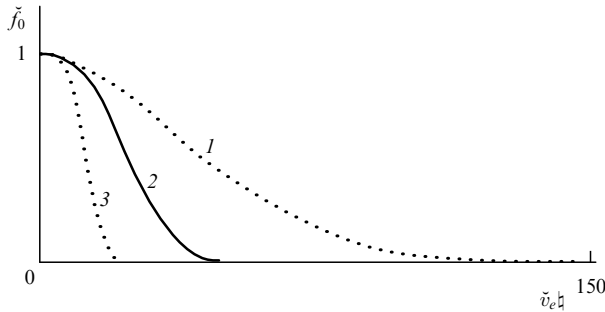


Рис. 4. Зависимость  $\tilde{f}_0$  от  $\tilde{v}_e$  при  $l = \text{const}$ ,  $\check{\epsilon} = 10^{-2}$ ,  $\check{A} = 10^{-1}$ : 1 — максвелловская функция, 2 —  $\tilde{f}_0^{\text{ОУБ}}$ , 3 — функция распределения Дрювестейна.

$\check{A} = 1$ , а рис. 4 — условиям  $\check{\epsilon} = 10^{-2}$ ,  $\check{A} = 10^{-1}$ . На рисунках 3 и 4 кривые 1, 2 и 3 отвечают соответственно максвелловской функции, обобщенному уравнению Больцмана и функции распределения Дрювестейна. Интересно отметить, что функция распределения  $\tilde{f}_0^{\text{ОУБ}}$  может располагаться как между функциями Максвелла и Дрювестейна, так и выше этих функций. Отметим еще раз, что в практических расчетах функции распределения могут быть нормированы на плотности заряженных частиц.

## 5. Заряженные частицы в переменном электрическом поле

Рассмотрим следующий пример приложения ОУБ — временную эволюцию ФР заряженных частиц в переменном электрическом поле. Будем учитывать только упру-

гие столкновения; ОУБ имеет вид

$$\left( \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} \right) \left( 1 - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) - \tau \left( \frac{\partial^2 f_e}{\partial t^2} + 2\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} + \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial \mathbf{v}_e} : \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e \right) = J_{ea}. \quad (5.1)$$

Используем разложение

$$f(\mathbf{v}_e, t) = f_0(v_e, t) + \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_e f_1(v_e, t) + \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e : \mathbf{v}_e^0 \mathbf{v}_e f_2(v_e, t). \quad (5.2)$$

Тогда аналогично описанной выше процедуре приходим к следующим уравнениям относительно функций  $f_0$  и  $f_1$ :

$$\left( 1 - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + F_e^2 f_1 + \frac{1}{3} F_e^2 v_e \frac{\partial f_1}{\partial v_e} \right) - \tau \left( \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + \frac{1}{3} F_e^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_e^2} + \frac{2}{3} F_e^2 \frac{1}{v_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + \frac{3}{2} f_1 \frac{\partial F_e^2}{\partial t} + 2F_e^2 \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_e^2}{\partial t} v_e \frac{\partial f_1}{\partial v_e} + \frac{2}{3} F_e^2 v_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_e \partial t} \right) = J_{ea}, \quad (5.3)$$

$$\left( 1 - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \left( F_e \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + v_e \frac{\partial F_e}{\partial t} f_1 + F_e v_e \frac{\partial f_1}{\partial t} \right) - \tau \left( 2F_e \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_e \partial t} + \frac{\partial F_e}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} + 2v_e \frac{\partial F_e}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_e \frac{\partial^2 F_e}{\partial t^2} f_1 + F_e v_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{12}{5} F_e^3 \frac{\partial f_1}{\partial v_e} + \frac{3}{5} F_e^3 v_e \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_e^2} \right) = -\frac{2}{3} J_1, \quad (5.4)$$

где, например  $J_1 = (2/3)F_e f_1 v_e^2 / l$ .

Рассмотрим случай, когда среднее время между столкновениями  $\tau = 1/v_e$  не зависит от скорости. Существует возможность определить моменты функции распределения  $\bar{v}_{ex}$  и  $\hat{T}_e$  без непосредственного решения уравнений (5.3), (5.4). Для этого умножаем почленно уравнение (5.4) на  $v_e^3$  и интегрируем по всем значениям модуля скорости. Воспользовавшись дополнительно условиями

$$\int_0^\infty f_1 v_e^4 dv_e = \frac{3n_e}{4\pi F_e} \bar{v}_{ex}, \quad \int_0^\infty f_0 v_e^2 dv_e = \frac{n_e}{4\pi},$$

$$\int_0^\infty f_0 v_e^4 dv_e = \frac{3}{4\pi} n_e \frac{\hat{T}_e}{m_e},$$

находим

$$\tau \frac{d^2 \bar{v}_{ex}}{dt^2} - \frac{d\bar{v}_{ex}}{dt} - \frac{1}{\tau} \bar{v}_{ex} + F_e - \tau \frac{dF_e}{dt} = 0. \quad (5.5)$$

Пусть, например, зависимость внешней силы от времени можно представить в виде

$$F_e = \frac{eE_0}{m_0} \cos \omega t,$$

где  $\omega$  — частота, связанная с напряженностью внешнего электрического поля. Решение неоднородного дифферен-

циального уравнения (5.5) записывается как

$$\bar{v}_{ex}^{OУБ} = C_1 \exp\left(-\frac{at}{\tau}\right) + \frac{b\tau}{(\omega\tau)^4 + 3(\omega\tau)^2 + 1} [\cos \omega t + \omega t(2 + \omega^2\tau^2) \sin \omega t], \quad (5.6)$$

где  $b = eE_0/m_e$ , а  $C_1$  — постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями задачи.

Классический результат, который может быть получен из УБ для квазистационарного случая, имеет вид

$$\bar{v}_{ex}^{УБ} = \frac{b\tau}{(\omega\tau)^2 + 1} (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t). \quad (5.7)$$

Введение подвижности  $K$ , которая обычно определяется соотношением

$$\bar{v}_{ex} = K \frac{m_e}{e} F_e,$$

нецелесообразно из-за появления возможных сингулярностей при  $F_e = 0$ .

Теперь обратимся к уравнению (5.3). Умножим почленно это уравнение на  $v_e^4$  и проинтегрируем по всем  $v_e$ :

$$\frac{d^2 \hat{T}_e}{dt^2} - \frac{1}{\tau} \frac{dT_e}{dt} - \frac{2m_e}{m_a \tau^2} (\hat{T}_e - \hat{T}_a) = -\frac{2}{3} m_e \frac{F_e}{\tau} \bar{v}_{ex} - \frac{2}{3} m_e F_e^2 + \frac{2}{3} m_e \bar{v}_{ex} \frac{dF_e}{dt} + \frac{4}{3} m_e F_e \frac{d\bar{v}_{ex}}{dt}, \quad (5.8)$$

где  $F_e = b \sin \omega t$  и соответственно

$$\bar{v}_{ex} = C_1 \exp\left(-a \frac{t}{\tau}\right) + \frac{b\tau}{(\omega\tau)^4 + 3(\omega\tau)^2 + 1} \times [\sin \omega t - (2 + (\omega\tau)^2) \omega t \cos \omega t]. \quad (5.9)$$

Дифференциальное уравнение (5.8) интегрируется в конечном виде

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ea} = & C_1 \exp\left(-d \frac{t}{\tau}\right) + \exp\left(-a \frac{t}{\tau}\right) \times \\ & \times \frac{\tau^2 Z \omega \tau}{[(d+a+1)^2 + \omega^2 \tau^2][(d-a)^2 + \omega^2 \tau^2]} \times \\ & \times \left\{ \sin \omega t [\omega^2 \tau^2 (2\sqrt{5} - 2(d+a+1) + \right. \\ & + \omega^2 \tau^2 (\sqrt{5} - 1 - d - a)) + (d-a) \times \\ & \times (2\omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4 + \omega^2 \tau^2 \sqrt{5} (d+a+1) + \\ & + 2\sqrt{5} (d+a+1))] + \\ & + \cos \omega t [(d-a) \omega \tau (2\sqrt{5} + \omega^2 \tau^2 (\sqrt{5} - 1 - d - a) - \\ & - 2(d+a+1)) - \omega \tau (2\omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4 + \\ & + \omega^2 \tau^2 \sqrt{5} (d+a+1) + 2\sqrt{5} (d+a+1))] \left. \right\} + \\ & + Z \tau^2 \left\{ \frac{\sin^2 \omega t}{2(d^2 + 4\omega^2 \tau^2)[(d+1)^2 + 4\omega^2 \tau^2]} \times \right. \\ & \times [4d(d+1) - 2d(d+1)\omega^2 \tau^2 - 4\omega^2 \tau^2 - \\ & - 2d(d+1)\omega^4 \tau^4 - 28\omega^4 \tau^4 - 16\omega^6 \tau^6] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \cos^2 \omega t \frac{\omega^2 \tau^2 (2 + \omega^2 \tau^2) d(d+1)}{[(d+1)^2 + 4\omega^2 \tau^2][d^2 + 4\omega^2 \tau^2]} - \\ & - \omega \tau \cos \omega t \sin \omega t \frac{\omega^2 \tau^2 (d^2 + d + 14) + 4d + 4}{(d^2 + 4\omega^2 \tau^2)[(d+1)^2 + 4\omega^2 \tau^2]} + \\ & + \omega^2 \tau^2 [9d^2 + 9d + 4 + \omega^2 \tau^2 (12d^2 + 10d + 18) + \\ & + 4\omega^4 \tau^4 (d^2 + d + 2)] \times \\ & \times [d(d+1)((d+1)^2 + 4\omega^2 \tau^2)(d^2 + 4\omega^2 \tau^2)]^{-1} \left. \right\}, \quad (5.10) \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad d = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8 \frac{m_e}{m_a}} - 1 \right) \cong 2 \frac{m_e}{m_a} \ll 1, \\ Z = \frac{2}{3} \frac{m_e b^2}{\omega^4 \tau^4 + 3\omega^2 \tau^2 + 1}.$$

В квазистационарном предельном случае при условии  $\omega\tau \gg 1$

$$\hat{T}_{ea} = -\tau^2 Z \frac{\omega^2 \tau^2}{2} \sin^2 \omega t + \tau^2 Z \frac{\omega^2 \tau^2}{2d} \quad (5.11)$$

или, учитывая, что средняя по времени величина

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} \ll d^{-1},$$

находим

$$\hat{T}_e = \frac{m_a}{6} \left( \frac{eE_0}{m_e \omega} \right)^2. \quad (5.12)$$

Таким образом, в предельном случае  $l = \text{const}$

$$\hat{T}_e^{УБ} = \hat{T}_e^{OУБ}. \quad (5.13)$$

В противоположном предельном случае  $\omega\tau \ll d \ll 1$

$$\hat{T}_{ea} = \tau^2 Z \frac{2}{d} \sin^2 \omega t$$

или после усреднения

$$\hat{T}_{ea} = \frac{m_a \tau^2}{3} \left( \frac{eE_0}{m_e} \right)^2 \quad (5.14)$$

получаем результат, соответствующий решению классического уравнения Больцмана [50].

## 6. Проводимость слабоионизованного газа в скрещенных электрическом и магнитном полях

Рассмотрим проводимость слабоионизованного газа, находящегося в скрещенных магнитном и переменном электрическом полях, с помощью ОУБ, используя БГК-аппроксимацию для интеграла упругих столкновений. Кинетическое уравнение для БГК-приближения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} - \tau \left( \frac{\partial^2 f_e}{\partial t^2} + 2\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f_e}{\partial \mathbf{v}_e \partial \mathbf{v}_e} : \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e + \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} \mathbf{F}_e : \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \mathbf{F}_e \right) = -\frac{f_e - f_e^0}{\tau}, \quad (6.1) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_e^{(1)} + \mathbf{F}_B$  — сила Лоренца, учитывающая в рассматриваемом случае влияние переменного электрического поля

$$F_e^{(1)} = \frac{eE^0}{m_e} \exp(i\omega t),$$

направленного вдоль оси  $x$ , и постоянного магнитного поля, индукция которого направлена вдоль оси  $z$ . Уравнение движения (3.30) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{v}_e - \tau \left( \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} - \frac{e\mathbf{E}^0}{m_e} \exp(i\omega t) - \frac{e}{m_e} \bar{v}_e \times \mathbf{B} \right) \right] - \\ - \frac{e\mathbf{E}^0}{m_e} \exp(i\omega t) - \frac{e}{m_e} \left[ \bar{v}_e - \tau \left( \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} - \frac{e\mathbf{E}^0}{m_e} \exp(i\omega t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e}{m_e} \bar{v}_e \times \mathbf{B} \right) \right] \times \mathbf{B} = -\frac{\bar{v}_e}{\tau}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для определения составляющих дрейфовой скорости  $\bar{v}_e$  по осям  $x$  и  $y$  имеем следующие уравнения ( $\bar{v}_{ez} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{v}_{ex} - \tau \left( \frac{\partial \bar{v}_{ex}}{\partial t} - \frac{eE^0}{m_e} \exp(i\omega t) - \frac{e}{m_e} \bar{v}_{ey} B \right) \right] - \\ - \frac{eE^0}{m_e} \exp(i\omega t) - \frac{e}{m_e} \left( B \bar{v}_{ey} - \tau B \frac{\partial \bar{v}_{ey}}{\partial t} \right) = \\ = -\frac{\bar{v}_{ex}}{\tau} - \frac{e^2 \tau}{m_e^2} B^2 \bar{v}_{ex}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{v}_{ey} - \tau \left( \frac{\partial \bar{v}_{ey}}{\partial t} + \frac{e}{m_e} \bar{v}_{ex} B \right) \right] - \\ - \frac{e}{m_e} \left( -\bar{v}_{ex} B + \tau B \frac{\partial \bar{v}_{ex}}{\partial t} - \frac{eE^0}{m_e} \exp(i\omega t) \tau B \right) = \\ = -\frac{\bar{v}_{ey}}{\tau} - \frac{e^2 \tau}{m_e^2} B^2 \bar{v}_{ey}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Решение уравнения (6.2) естественно искать в форме  $\bar{v} = \bar{v}^0 \exp(i\omega t)$ , что приводит к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ex}^0 \left[ i\omega + \tau(\omega^2 + \omega_B^2) + \frac{1}{\tau} \right] = \\ = \frac{eE^0}{m_e} + \bar{v}_{ey}^0 \omega_B (1 - 2i\omega\tau) - i\omega\tau \frac{eE^0}{m_e}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ey}^0 \left[ i\omega + \tau(\omega^2 + \omega_B^2) + \frac{1}{\tau} \right] = \\ = \bar{v}_{ex}^0 \omega_B (2i\omega\tau - 1) - \omega_B \tau \frac{eE^0}{m_e}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $\omega_B = eB/m_e$ . Из этих уравнений нетрудно найти составляющие  $\bar{v}_{ex}$  и  $\bar{v}_{ey}$  дрейфовой скорости, а следовательно, и компоненты тензора проводимости. В данном случае комплексная проводимость  $\sigma_x$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_0 [1 + 2\omega^2 \tau^2 + i(\omega_B^2 \tau^2 - \omega^2 \tau^2) \omega\tau] \times \\ \times [1 + \omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4 + 3\omega_B^2 \tau^2 + \omega_B^4 \tau^4 - \\ - 2\omega^2 \tau^2 \omega_B^2 \tau^2 + 2i\omega\tau(1 + \omega^2 \tau^2 - \omega_B^2 \tau^2)]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

если учесть, что

$$\sigma_x = \frac{en_e \bar{v}_{ex}^0}{E^0}, \quad \sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}.$$

Выделяя реальную часть  $\sigma_x$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{Re } \sigma_x = \sigma_0 [1 + 3\omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4 + \omega_B^2 \tau^2 (3 + 6\omega_B^2 \tau^2 + \omega_B^4 \tau^4)] \times \\ \times \left\{ [1 + \omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4 + \omega_B^2 \tau^2 (3 + \omega_B^2 \tau^2 - 2\omega_B^4 \tau^4)]^2 + \right. \\ \left. + 4\omega^2 \tau^2 (1 + \omega^2 \tau^2 - \omega_B^2 \tau^2)^2 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Теория Больцмана, как известно, приводит к следующим результатам:

$$\text{Re } \sigma_x = \frac{\sigma_0 (1 + \omega^2 \tau^2 + \omega_B^2 \tau^2)}{1 + 2\omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4 + \omega_B^2 \tau^2 (2 - 2\omega^2 \tau^2 + \omega_B^2 \tau^2)}, \quad (6.9)$$

$$\sigma_x = \sigma_0 \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_B^2 - \omega^2) \tau^2 + 2i\omega\tau}. \quad (6.10)$$

В традиционно рассматриваемых частных случаях из (6.7)–(6.10) следует:

а)  $\omega = 0$ , постоянное электрическое поле:

$$\text{Re } \sigma_x^{\text{ОУБ}} = \sigma_0 \frac{1}{1 + 3\omega_B^2 \tau^2 + \omega_B^4 \tau^4},$$

$$\text{Re } \sigma_x^{\text{УБ}} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega_B^2 \tau^2};$$

б)  $\omega_B = 0$ , магнитное поле отсутствует:

$$\text{Re } \sigma_x^{\text{ОУБ}} = \frac{\sigma_0 (1 + 3\omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4)}{(1 + \omega^2 \tau^2 + \omega^4 \tau^4)^2 + 4\omega^2 \tau^2 (1 + \omega^2 \tau^2)^2},$$

$$\text{Re } \sigma_x^{\text{УБ}} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2};$$

в)  $\omega = \omega_B$ :

$$\text{Re } \sigma_x^{\text{ОУБ}} = \sigma_0 \frac{1 + 6\omega^2 \tau^2 + 8\omega^4 \tau^4}{1 + 12\omega^2 \tau^2 + 16\omega^4 \tau^4},$$

$$\text{Re } \sigma_x^{\text{УБ}} = \sigma_0 \frac{1 + 2\omega^2 \tau^2}{1 + 4\omega^2 \tau^2};$$

г)  $\omega = \omega_B$ ,  $\omega\tau \gg 1$ , условие циклотронного резонанса:

$$\text{Re } \sigma_x^{\text{ОУБ}} = \text{Re } \sigma_x^{\text{УБ}} = \frac{1}{2} \sigma_0.$$

Наконец, из системы уравнений (6.3), (6.4) находим дрейфовую скорость вдоль оси  $y$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ey}^0 \text{ОУБ} = \frac{eE^0}{m_e} \omega_B \tau^2 [(\omega^4 - \omega_B^4) \tau^4 - 3(\omega^2 + \omega_B^2) \tau^2 - \\ - 2 + i\omega\tau(3\omega^2 \tau^2 + \omega_B^2 \tau^2)] D^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = 1 + (\omega^6 + \omega_B^6) \tau^6 + 4\omega_B^2 \tau^2 + 4\omega^2 \tau^2 \omega_B^2 \tau^2 - \\ - \omega^4 \tau^4 \omega_B^2 \tau^2 + 4\omega_B^4 \tau^4 - \omega^2 \tau^2 \omega_B^4 \tau^4 + \\ + i\omega\tau(3\omega^4 \tau^4 - 5\omega^2 \tau^2 + 3 + 3\omega_B^2 \tau^2 - \\ - 2\omega^2 \tau^2 \omega_B^2 \tau^2 - \omega_B^4 \tau^4). \end{aligned}$$

Отметим, что из УБ следует

$$\bar{v}_{ey}^0 \text{УБ} = -\frac{eE^0}{m_e} \omega_B \tau^2 \frac{1}{1 + (\omega_B^2 - \omega^2) \tau^2 + 2i\omega\tau}.$$

В частности, если

а)  $\omega = 0$ ,

$$\operatorname{Re} \bar{v}_{ey}^{0\text{ОУБ}} = -\frac{eE^0}{m_e} \omega_B \tau^2 \frac{\omega_B^4 \tau^4 + 3\omega_B^2 \tau^2 + 2}{\omega_B^6 \tau^6 + 4\omega_B^4 \tau^4 + 4\omega_B^2 \tau^2 + 1},$$

$$\operatorname{Re} \bar{v}_{ey}^{0\text{УБ}} = -\frac{eE^0}{m_e} \omega_B \tau^2 \frac{1}{\omega_B^2 \tau^2 + 1},$$

б)  $\omega = \omega_B$ ,

$$\operatorname{Re} \bar{v}_{ey}^{0\text{ОУБ}} = -\frac{eE^0}{m_e} \omega \tau^2 \times \frac{2 + 14\omega^2 \tau^2 + 28\omega^4 \tau^4 + 56\omega^6 \tau^6}{(1 + 4\omega^2 \tau^2 + 8\omega^4 \tau^4)^2 + \omega^2 \tau^2 (3 - 2\omega^2 \tau^2)^2},$$

$$\operatorname{Re} \bar{v}_{ey}^{0\text{УБ}} = -\frac{eE^0}{m_e} \omega \tau^2 \frac{1}{1 + 4\omega^2 \tau^2}.$$

Приведенные расчеты показывают, что УБ и ОУБ могут приводить как к весьма существенному различию результатов, качественному и количественному, так и к их совпадению. Исчерпывающий ответ на вопрос о масштабах подобных различий может дать только решение конкретных задач. В частности, обобщенное уравнение Больцмана с успехом применялось для исследования процессов переноса в частично ионизованном газе с учетом неупругих столкновений [52].

## 7. Дисперсионные уравнения для плазмы в рамках модели ОУБ с учетом столкновительного члена

Обобщенное уравнение Больцмана описывает изменение одночастичной функции распределения  $f_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, \mu$ ) в  $\mu$ -компонентной смеси газов на временах порядка времени между столкновениями, гидродинамического времени течения и, в отличие от уравнения Больцмана, на временах порядка времени столкновения. ОУБ для плазмы имеет вид

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left( \tau_\alpha \frac{Df_\alpha}{Dt} \right) = J_\alpha, \quad (7.1)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \quad (7.2)$$

— субстанциональная производная, содержащая самоогласованную силу  $\mathbf{F}_\alpha$ ,  $J_\alpha$  — классический (больцмановский) интеграл столкновений,  $\tau_\alpha$  — среднее время между "близкими" столкновениями частиц. В гидродинамическом режиме время  $\tau_\alpha$  может быть представлено через кулоновский логарифм  $A$ , вязкость  $\eta_\alpha$ , статическое давление  $p_\alpha$  и коэффициент  $\Pi$ , определяемый моделью взаимодействия частиц (см. (2.37)).

Обобщенное уравнение Больцмана вообще и для плазмы в частности обладает принципиально важной особенностью — дополнительные члены, входящие в ОУБ, оказываются порядка числа Кнудсена. Это не означает, что в гидродинамическом пределе, когда числа Кнудсена  $\text{Kn}$  малы, можно пренебречь этими членами. Дело в том, что число Кнудсена входит в данном случае в ОУБ как малый параметр при старшей

производной. Следовательно, дополнительные члены в ОУБ (по сравнению с УБ) оказываются существенными при любых  $\text{Kn}$  и невозможно заранее предсказать порядок величины различий между решениями УБ и ОУБ (см. [3]).

В этой связи интересно получить в рамках модели ОУБ дисперсионное уравнение для плазмы в отсутствие магнитного поля. Сделаем те же предположения, что и при выводе этого уравнения в рамках модели, соответствующей УБ: а) интегральным столкновительным членом пренебрегается; б) эволюция электронов и ионов в самосогласованном электрическом поле соответствует одномерной нестационарной модели; в) отклонения функций распределения для ионов  $f_i$  и электронов  $f_e$  от равновесных  $f_{0i}$  и  $f_{0e}$  считаются малыми; г) рассматривается волновой режим, отвечающий некоторому вещественному волновому числу  $k$  и комплексной частоте  $\omega$ ; д) квадратичными членами в ОУБ, определяющими отклонение от равновесных значений ФР, пренебрегается; е) самосогласованные силы  $F_i$  и  $F_e$  малы.

Соответствующие расчеты приведены в приложении 2. Получим теперь дисперсионное уравнение в указанных выше предположениях, отказавшись лишь от одного из них. Вместо условия а) в правую часть ОУБ вводится столкновительный член в форме Бхатнагара — Гроса — Крука (БГК)

$$J_\alpha = -\frac{f_\alpha - f_{0\alpha}}{v_\alpha^{-1}}. \quad (7.3)$$

Здесь  $f_{0\alpha}$  — некоторая равновесная функция распределения для частиц сорта  $\alpha$ ,  $v_\alpha^{-1} = \tau_{p\alpha}$  — время релаксации для частиц сорта  $\alpha$ . Используя соотношения (П2.9) и (7.1), приходим к дисперсионному уравнению

$$1 = -\frac{e^2}{\epsilon_0 k} \left\{ \frac{1}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\partial f_{0e}/\partial u) [i - \tau_e(\omega - ku)]}{i(\omega - ku) - \tau_e(\omega - ku)^2 - v_e} du + \frac{1}{m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\partial f_{0i}/\partial u) [i - \tau_i(\omega - ku)]}{i(\omega - ku) - \tau_i(\omega - ku)^2 - v_i} du \right\}. \quad (7.4)$$

Аналогом (7.4) в кинетической теории Больцмана является уравнение [53]

$$1 = -\frac{e^2}{\epsilon_0 k} \left\{ \frac{1}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{0e}/\partial u}{\omega - ku + iv_e} du + \frac{1}{m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{0i}/\partial u}{\omega - ku + iv_i} du \right\}. \quad (7.5)$$

Найдем решения уравнения (7.4), используя дополнительные предположения. Пусть ионы покоятся, температура электронов и их средняя скорость равны нулю. Тогда функция распределения электронов может быть представлена через дельта-функцию

$$f_{0e}(u) = n_e \delta(u). \quad (7.6)$$

После интегрирования по частям в (7.5) приходим к уравнению (индекс "e" у  $v_e$ ,  $\tau_e$  далее для краткости опускается)

$$1 + \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(u) \{ [1 + i\tau(\omega - ku)]^2 + v\tau \}}{[i(\omega - ku) - \tau(\omega - ku)^2 - v]^2} du = 0. \quad (7.7)$$

В частном случае бoльцмановской бесстолкновительной плазмы из (7.7) следует классическая формула

$$1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(u)}{(\omega - ku)^2} du = 0. \quad (7.8)$$

Используя свойства дельта-функции и выполняя интегрирование в (7.7), находим

$$\omega_e^2 = - \frac{(v\tau + \omega^2 \tau^2 - i\omega\tau)^2}{\tau^2(1 + v\tau - \omega^2 \tau^2 + 2i\omega\tau)}, \quad (7.9)$$

где  $\omega_e = \sqrt{e^2 n_e / \varepsilon_0 m_e}$  — плазменная частота.

Рассмотрим предельные случаи (7.9). Пусть  $|\omega|\tau \ll 1$ , тогда разделение действительной и мнимой частей в (7.9) приводит к результату

$$\omega_e^2 = - \frac{v}{1 + v\tau} \frac{(1 + v\tau)v + 2\omega''}{1 + v\tau - 4\omega''\tau}, \quad (7.10)$$

$$\omega' \frac{1 + 2v\tau}{(1 + v\tau)(1 + v\tau - 4\omega''\tau)} = 0, \quad (7.11)$$

где  $\omega = \omega' + i\omega''$ . Из (7.11) следует

$$\omega' = 0, \quad (7.12)$$

а из (7.10)

$$\omega'' = - \frac{1}{2} \frac{(1 + v\tau)[(1 + v\tau)\omega_e^2 + v^2]}{v - 2\omega_e^2 \tau(1 + v\tau)}. \quad (7.13)$$

Если  $\omega_e^2 \tau^2 \ll 1$ , то

$$\omega'' = - \frac{1}{2} v(1 + v\tau). \quad (7.14)$$

Таким образом, условие  $|\omega|\tau \ll 1$  ведет к быстрому затуханию возмущения (П2.2) в соответствии с решением (П2.4).

В противоположном предельном случае  $|\omega|\tau \gg 1$  ( $\omega'\tau \gg 1$ ,  $\omega''\tau \gg 1$ ) из соотношения

$$\omega_e^2 = - \frac{(\omega^2 \tau^2 - i\omega\tau)^2}{\tau^2(-\omega^2 \tau^2 + 2i\omega\tau)}$$

находим, что

$$\omega^2 = \omega_e^2. \quad (7.15)$$

Таким образом, для функции распределения электронов в форме (7.6) асимптотические решения дисперсионного уравнения (7.9) имеют прозрачный физический смысл.

Пусть теперь ионы покоятся, а электронная компонента имеет максвелловское распределение по скоростям частиц

$$f_{0e} = n_e \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m_e V^2}{2k_B T} \right),$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана. Тогда (7.4) принимает вид

$$1 + \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 k m_e} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} [i - \tau(\omega - ku)] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial u} \exp \left( - \frac{m_e u^2}{2k_B T} \right) [i(\omega - ku) - \tau(\omega - ku)^2 - v]^{-1} du = 0, \quad (7.16)$$

где введено прежнее обозначение для скорости ( $u \equiv V_x$ ) одномерного нестационарного волнового движения. Из (7.16) следует

$$1 + \frac{1}{r_D^2 k^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T}} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{[i - \tau(\omega - ku)]\omega - v\} \exp(-m_e u^2 / 2k_B T)}{i(\omega - ku) - \tau(\omega - ku)^2 - v} du \right] = 0, \quad (7.17)$$

где  $r_D = \sqrt{\varepsilon_0 k_B T / n_e e^2}$  — радиус Дебая–Хюккеля.

Введем безразмерные переменные

$$\hat{u} = u \sqrt{\frac{m_e}{2k_B T}}, \quad \hat{\omega} = \omega \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m_e}{2k_B T}}, \quad (7.18)$$

$$\hat{v} = v \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m_e}{2k_B T}}, \quad \hat{\tau} = \tau k \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e}}$$

и перепишем (7.17), используя (7.18), в следующем виде:

$$1 + \frac{1}{r_D^2 k^2} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{[i - \hat{\tau}(\hat{\omega} - \hat{u})]\hat{\omega} - \hat{v}\} \exp(-\hat{u}^2)}{i(\hat{\omega} - \hat{u}) - \hat{\tau}(\hat{\omega} - \hat{u})^2 - \hat{v}} d\hat{u} \right] = 0. \quad (7.19)$$

Рассмотрим обращение в нуль знаменателя комплексного подынтегрального выражения в (7.19). Квадратное уравнение

$$\hat{\tau}y^2 - iy + \hat{v} = 0, \quad y = \hat{\omega} - \hat{u}, \quad (7.20)$$

имеет корни

$$y_1 = \frac{i}{2\hat{\tau}} (1 + \sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}), \quad y_2 = \frac{i}{2\hat{\tau}} (1 - \sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}). \quad (7.21)$$

Следовательно, уравнение (7.19) может быть представлено как

$$1 + \frac{1}{r_D^2 k^2} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{1}{\hat{\tau}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{[i + \hat{\tau}(\hat{u} - \hat{\omega})]\hat{\omega} - \hat{v}\} \exp(-\hat{u}^2)}{(\hat{u} - \hat{u}_1)(\hat{u} - \hat{u}_2)} du \right] = 0, \quad (7.22)$$

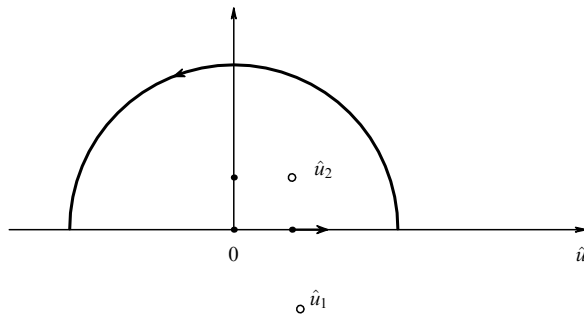
где

$$\hat{u}_1 = \hat{\omega} - y_1, \quad \hat{u}_2 = \hat{\omega} - y_2. \quad (7.23)$$

Преобразуем (7.22) к виду

$$1 + \frac{1}{r_D^2 k^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \left( \frac{i\hat{v} + 0,5\hat{\omega}}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} - 0,5\hat{\omega} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\hat{u}^2)}{\hat{u}_1 - \hat{u}} d\hat{u} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{i\hat{v} + 0,5\hat{\omega}}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} + 0,5\hat{\omega} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\hat{u}^2)}{\hat{u}_2 - \hat{u}} d\hat{u} \right] \right\} = 0. \quad (7.24)$$

Уравнение (7.24) содержит несобственные интегралы типа Коши, которые могут быть вычислены с помощью теории вычетов. Прежде всего проанализируем условия, при которых возможно затухание плазменных волн. Для этого необходимо, чтобы, во-первых (см. (П2.4)), для мнимой части комплексной частоты выполнялось



**Рис. 5.** Контур интегрирования при вычислении комплексных интегралов в (7.24). Показаны возможные положения полюсов  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$ , соответствующие поиску решения дисперсионного уравнения в режиме затухающих плазменных колебаний и определяемых выражениями (7.26), (7.27).

условие

$$\omega'' < 0 \quad (7.25)$$

и, во-вторых, при вычислении интегралов в (7.24) полюсы находились в верхней полуплоскости (см. рис. 5, где изображен контур интегрирования). Поскольку

$$\hat{u}_1 = \hat{\omega}' + i \left( \hat{\omega}'' - \frac{1 + \sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}}{2\hat{\tau}} \right), \quad (7.26)$$

$$\hat{u}_2 = \hat{\omega}' + i \left( \hat{\omega}'' - \frac{1 - \sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}}{2\hat{\tau}} \right), \quad (7.27)$$

второе условие выполняется для интеграла

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\hat{u}^2)}{\hat{u} - \hat{u}_2} d\hat{u}$$

при

$$\hat{\omega}'' + \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{2\hat{\tau}} > 0. \quad (7.28)$$

Аналогичное условие для интеграла

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\hat{u}^2)}{\hat{u} - \hat{u}_1} d\hat{u} \quad (7.29)$$

не может быть удовлетворено. Для этого интеграла полюсы находятся в нижней полуплоскости и, следовательно,

$$I_2 = 2\pi i \operatorname{res}(\hat{u} = \hat{u}_2), \quad (7.30)$$

$$I_1 = 0. \quad (7.31)$$

В результате из (7.24) получаем дисперсионное уравнение, допускающее решение в виде затухающих плазменных волн

$$\exp(\hat{u}_2^2) \frac{1 + r_D^2 k^2}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\hat{v}}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} - \frac{i\hat{\omega}'}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} \right), \quad (7.32)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{u}_2^2 &= \left[ \hat{\omega}' + i \left( \hat{\omega}'' + \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{2\hat{\tau}} \right) \right]^2 = \\ &= \hat{\omega}'^2 - \hat{\omega}''^2 - \hat{\omega}'' \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}} - \frac{1 + 2\hat{\tau}\hat{v} - \sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}}{2\hat{\tau}^2} + \\ &+ i \left( 2\hat{\omega}'' + \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}} \right) \hat{\omega}'. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Время релаксации  $\tau_{\text{rel}}$  может быть оценено через среднее время  $\tau$  между близкими столкновениями и кулоновский логарифм [35]:

$$\tau_{\text{rel}} = \tau \Lambda^{-1}. \quad (7.34)$$

В результате можно записать

$$\tau v = \Lambda, \quad \hat{\tau} \hat{v} = \Lambda. \quad (7.35)$$

Комплексную часть экспоненты в (7.32) представим в тригонометрической форме

$$\begin{aligned} \exp \left[ -i\hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}} \right) \right] &= \\ &= \cos \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}} \right) \right] - \\ &- i \sin \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}} \right) \right] \end{aligned}$$

и отделим в (7.32) действительную и мнимую части. Для действительной части имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 + r_D^2 k^2}{2\sqrt{\pi}} \exp \left( \hat{\omega}'^2 - \hat{\omega}''^2 - \hat{\omega}'' \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\Lambda} - 1}{\Lambda} - \right. \\ \left. - \hat{v}^2 \frac{1 + 2\Lambda - \sqrt{1 + 4\Lambda}}{2\Lambda^2} \right) = \\ = \left( \frac{\hat{v}}{\sqrt{1 + 4\Lambda}} + 0,5\hat{\omega}'' + \frac{0,5\hat{\omega}''}{\sqrt{1 + 4\Lambda}} \right) \times \\ \times \cos \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\Lambda} - 1}{\Lambda} \right) \right] - \\ - 0,5\hat{\omega}' \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\Lambda}} \right) \sin \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\Lambda} - 1}{\Lambda} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Аналогично для мнимой части находим

$$\begin{aligned} 0,5\hat{\omega}' \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\Lambda}} \right) \cos \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\Lambda} - 1}{\Lambda} \right) \right] + \\ + \left( \frac{\hat{v}}{\sqrt{1 + 4\Lambda}} + 0,5\hat{\omega}'' + \frac{0,5\hat{\omega}''}{\sqrt{1 + 4\Lambda}} \right) \times \\ \times \sin \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\Lambda} - 1}{\Lambda} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Система сложных трансцендентных уравнений (7.36), (7.37), вообще говоря, может быть решена только путем численного расчета на ЭВМ. Но решение этой системы находится с помощью обычного калькулятора, если при достаточно больших значениях кулоновского логарифма  $\Lambda$  пренебречь членами порядка  $\Lambda^{-1/2}$ . Тогда система уравнений (7.36), (7.37) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1 + r_D^2 k^2}{\sqrt{\pi}} \exp(\hat{\omega}'^2 - \hat{\omega}''^2) = \\ = \hat{\omega}'' \cos(2\hat{\omega}'\hat{\omega}'') - \hat{\omega}' \sin(2\hat{\omega}'\hat{\omega}''), \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\hat{\omega}' \cos(2\hat{\omega}'\hat{\omega}'') + \hat{\omega}'' \sin(2\hat{\omega}'\hat{\omega}'') = 0. \quad (7.39)$$

Введем обозначения

$$\alpha = 2\hat{\omega}'\hat{\omega}'' \quad \text{и} \quad \beta = 1 + r_D^2 k^2 \quad (7.40)$$

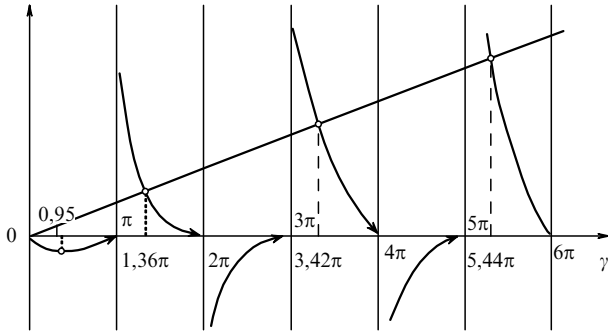


Рис. 6. Графическое решение уравнения (7.41), приводящее к дискретному спектру.

и заметим, что

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'^2 &= -\frac{1}{2} \alpha \tan \alpha, & \hat{\omega}''^2 &= -\frac{1}{2} \alpha \cot \alpha, \\ \hat{\omega}'^2 - \hat{\omega}''^2 &= \alpha \cot 2\alpha. \end{aligned}$$

Тогда из (7.38), (7.39) следует

$$-\sin 2\alpha \exp(2\alpha \cot 2\alpha) = \frac{\pi}{\beta^2} \alpha.$$

Если теперь ввести переменную  $\gamma = -2\alpha = -4\hat{\omega}'\hat{\omega}''$ , то задача сведется к решению трансцендентного уравнения

$$-\exp(\gamma \cot \gamma) \sin \gamma = \frac{\pi}{2\beta^2} \gamma, \tag{7.41}$$

которое решается графически или итеративным путем [54]. Графическое решение представлено на рис. 6 для  $\beta^2 = 1$  (это соответствует условию  $r_D^2 k^2 \ll 1$ ). Оно свидетельствует о появлении в данном случае дискретного спектра колебаний даже для неограниченной среды. Первые семь значений  $\gamma$  таковы:  $\gamma_1 = 1,361\pi$ ,  $\gamma_2 = 3,418\pi$ ,  $\gamma_3 = 5,439\pi$ ,  $\gamma_4 = 7,449\pi$ ,  $\gamma_5 = 9,460\pi$ ,  $\gamma_6 = 11,465\pi$ ,  $\gamma_7 = 13,469\pi$ .

В асимптотике при больших нечетных положительных целых числах  $n$  ( $n \geq 301$ ) имеем

$$\gamma_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi. \tag{7.42}$$

Безразмерные частоты  $\hat{\omega}'_n$ ,  $\hat{\omega}''_n$  вычисляются по формулам

$$\hat{\omega}'_n = \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma_n \tan \frac{\gamma_n}{2}}, \tag{7.43}$$

$$\hat{\omega}''_n = -\frac{1}{2} \sqrt{-\gamma_n \cot \frac{\gamma_n}{2}}. \tag{7.44}$$

Их асимптотические значения таковы:

$$\hat{\omega}'_n = \frac{\sqrt{\gamma_n}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)}, \tag{7.45}$$

$$\hat{\omega}''_n = -\frac{\sqrt{\gamma_n}}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)}. \tag{7.46}$$

Например,  $\hat{\omega}'_2 = 1,866$ ,  $\hat{\omega}''_2 = -1,438$  и  $\hat{\omega}'_3 = 2,221$ ,  $\hat{\omega}''_3 = -1,510$ .

В классической больцмановской кинетической теории поиск режима затухания плазменных волн в отсутствие столкновений приводит к необходимости вычисления комплексных интегралов типа (П2.12), полюсы подынтегральных выражений которых не находятся в верхней (при выбранном виде решения (П2.4)) полуплоскости. В результате требуется применение искусственного приема — правила Ландау обхода снизу полюса, расположенного на действительной оси. Покажем, каким образом из дисперсионного уравнения (7.32) можно получить результаты, отвечающие "классическому" затуханию в столкновительной и бесстолкновительной плазме. С этой целью необходимо исследовать асимптотическое поведение дисперсионных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{1 + r_D^2 k^2}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ \hat{\omega}'^2 - \hat{\omega}''^2 - \hat{\omega}'' \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}\hat{v}} - \right. \\ &\quad \left. - \hat{v}^2 \frac{1 + 2\hat{\tau}\hat{v} - \sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}}{2(\hat{\tau}\hat{v})^2} \right\} = \\ &= \left[ \frac{\hat{v}}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} + 0,5\hat{\omega}'' \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} \right) \right] \times \\ &\times \cos \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}\hat{v}} \right) \right] - \\ &- 0,5\hat{\omega}' \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} \right) \sin \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}\hat{v}} \right) \right], \tag{7.47} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0,5\hat{\omega}' \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} \right) \cos \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}\hat{v}} \right) \right] + \\ &+ \left[ \frac{\hat{v}}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} + 0,5\hat{\omega}'' \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}}} \right) \right] \times \\ &\times \sin \left[ \hat{\omega}' \left( 2\hat{\omega}'' + \hat{v} \frac{\sqrt{1 + 4\hat{\tau}\hat{v}} - 1}{\hat{\tau}\hat{v}} \right) \right] = 0. \tag{7.48} \end{aligned}$$

Переход к классическому столкновительному случаю осуществляется при  $\tau \rightarrow 0$  (см. ОУБ (7.1)–(7.3)) и фиксированной частоте  $v$ . Для раскрытия неопределенностей разложим соответствующие члены в ряд по малому параметру  $\hat{\tau}\hat{v}$  и сохраним два первых члена разложения в (7.47), (7.48), но в последнем члене в фигурной скобке (7.47) надо сохранить и квадратичный член. В результате получим

$$\begin{aligned} &\frac{1 + r_D^2 k^2}{2\sqrt{\pi}} \exp [\hat{\omega}'^2 - (\hat{\omega}'' + v)^2] = \\ &= (\hat{\omega}'' + \hat{v}) \cos [2\hat{\omega}'(\hat{\omega}'' + \hat{v})] - \hat{\omega}' \sin [2\hat{\omega}'(\hat{\omega}'' + \hat{v})], \tag{7.49} \end{aligned}$$

$$\hat{\omega}' \cos [2\hat{\omega}'(\hat{\omega}'' + \hat{v})] + (\hat{\omega}'' + \hat{v}) \sin [2\hat{\omega}'(\hat{\omega}'' + \hat{v})] = 0. \tag{7.50}$$

Уравнения (7.49), (7.50) могут быть записаны в такой же форме, как и система уравнений (7.38), (7.39):

$$\begin{aligned} &\frac{1 + r_D^2 k^2}{2\sqrt{\pi}} \exp (\hat{\omega}'^2 - \hat{\omega}_1''^2) = \\ &= \hat{\omega}_1'' \cos (2\hat{\omega}'\hat{\omega}_1'') - \hat{\omega}' \sin (2\hat{\omega}'\hat{\omega}_1''), \tag{7.51} \end{aligned}$$

$$\hat{\omega}' \cos (2\hat{\omega}'\hat{\omega}_1'') + \hat{\omega}_1'' \sin (2\hat{\omega}'\hat{\omega}_1'') = 0, \tag{7.52}$$

если ввести вместо  $\omega''$  переменную  $\omega_1'' = \omega'' + v$ . Следует также отметить, что в рассматриваемой асимптотике в

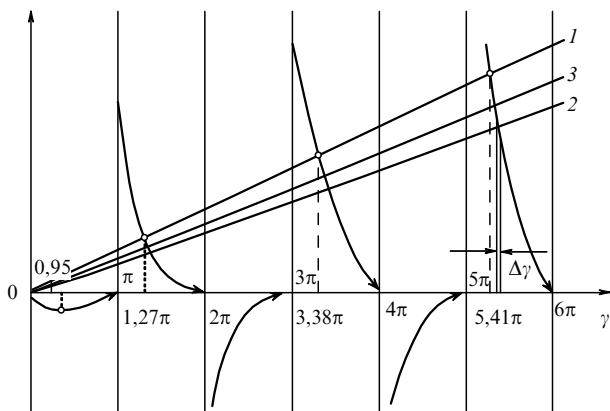


Рис. 7. Графическое решение дисперсионного уравнения (7.55).

левой части (7.51) появляется дополнительный множитель 0,5. В результате решение уравнений (7.51), (7.52) находится совершенно аналогично и для больших значений  $n$  имеет вид

$$\hat{\omega}'_n = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \left( n + \frac{1}{2} \right)}, \quad \hat{\omega}''_n = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi \left( n + \frac{1}{2} \right)} - \hat{v}. \quad (7.53)$$

Соответствующий полюс расположен в верхней полуплоскости (см. рис. 5) внутри контура интегрирования, а ордината полюса равна  $\omega'' + v$ . Теперь можно определить спектр частот, соответствующий классическому режиму бесстолкновительного затухания (затухания Ландау). Для этого необходимо в формулах (7.53) устремить  $v \rightarrow 0$ . Введем обозначения (7.40). Тогда из (7.51), (7.52) следует

$$-\sin 2\alpha \exp(2\alpha \cot 2\alpha) = \frac{4\pi}{\beta^2} \alpha. \quad (7.54)$$

Если теперь ввести переменную  $\gamma = -2\alpha = -4\hat{\omega}'\hat{\omega}''$ , то задача сводится к решению трансцендентного уравнения

$$-\exp(\gamma \cot \gamma) \sin \gamma = \frac{2\pi}{\beta^2} \gamma, \quad (7.55)$$

которое решается графически или итеративным путем. Графическое решение представлено на рис. 7 для  $\beta^2 = 1$ , что соответствует условию  $r_D^2 k^2 \ll 1$  (длинноволновое приближение). Оно свидетельствует о появлении в данном случае дискретного спектра колебаний даже для неограниченной среды. Первые семь значений  $\gamma$  таковы:  $\gamma_1 = 1,271\pi$ ,  $\gamma_2 = 3,379\pi$ ,  $\gamma_3 = 5,410\pi$ ,  $\gamma_4 = 7,432\pi$ ,  $\gamma_5 = 9,444\pi$ ,  $\gamma_6 = 11,452\pi$ ,  $\gamma_7 = 13,458\pi$ . В асимптотике при больших нечетных положительных целых числах  $n$  ( $n > 301$ ) имеем

$$\gamma_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (7.56)$$

Безразмерные частоты  $\hat{\omega}'_n$ ,  $\hat{\omega}''_n$  вычисляются по формулам (7.43), (7.44), их размерная запись имеет вид

$$\omega'_n = k \sqrt{-\frac{k_B T}{2m_e} \gamma_n \tan \frac{\gamma_n}{2}}, \quad \omega''_n = -k \sqrt{-\frac{k_B T}{2m_e} \gamma_n \cot \frac{\gamma_n}{2}}. \quad (7.57)$$

Асимптотические значения частот таковы:

$$\hat{\omega}'_n = \frac{\sqrt{\gamma_n}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \left( n + \frac{1}{2} \right)}, \quad (7.58)$$

$$\hat{\omega}''_n = -\frac{\sqrt{\gamma_n}}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi \left( n + \frac{1}{2} \right)}.$$

Укажем еще первые семь пар безразмерных частот [55]:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'_1 &= 1,484, & \hat{\omega}''_1 &= -0,673; & \hat{\omega}'_2 &= 1,979, & \hat{\omega}''_2 &= -1,341; \\ \hat{\omega}'_3 &= 2,379, & \hat{\omega}''_3 &= -1,786; & \hat{\omega}'_4 &= 2,691, & \hat{\omega}''_4 &= -2,169; \\ \hat{\omega}'_5 &= 2,975, & \hat{\omega}''_5 &= -2,493; & \hat{\omega}'_6 &= 3,235, & \hat{\omega}''_6 &= -2,780; \\ \hat{\omega}'_7 &= 3,473, & \hat{\omega}''_7 &= -3,043. \end{aligned} \quad (7.59)$$

### 8. Обобщенные дисперсионные уравнения плазмы: теория и эксперимент

Обсудим теоретические результаты с позиции экспериментальных данных Луни и Брауна [56]. В 1954 г. Луни и Браун опубликовали результаты своих экспериментов по обнаружению плазменных волн, возбуждаемых пучком электронов. На рисунке 8 приведена схема экспериментальной установки Луни и Брауна, представлявшей собой колбу диаметром около 10 см, в которой создавалась ртутная плазма низкого давления ( $3 \times 10^{-3}$  мм рт. ст.) с помощью электрического разряда между двумя катодами  $K$  и анодным кольцом  $A$ . Электронный пучок, сформированный в боковом отводе, ускорялся напряжением в несколько сот вольт и вводился в плазму через отверстие диаметром 1 мм в стенке колбы. Между ускоряющим анодом  $A$  и анодным диском  $D$ , расстояние между которыми составляло 1,5 см, образовывалось ионное облако. Электроны пучка возбуждали колебания в области  $AD$ . Для регистрации колебаний использовался подвижный зонд, присоединенный к детектору. На рисунке 9 приведены результаты эксперимента Луни и Брауна в том виде, как они были представлены авторами. Поскольку плотность электронного пучка пропорциональна току разряда, Луни и Браун привели свои результаты в форме зависимости квадрата частоты колебаний от плотности  $n_e$ . На рисунке 9 слева показано распределение электрического поля в области  $AD$ , пунктирная прямая отвечает дисперсионному уравнению

$$\omega = \omega_{pe}, \quad (8.1)$$

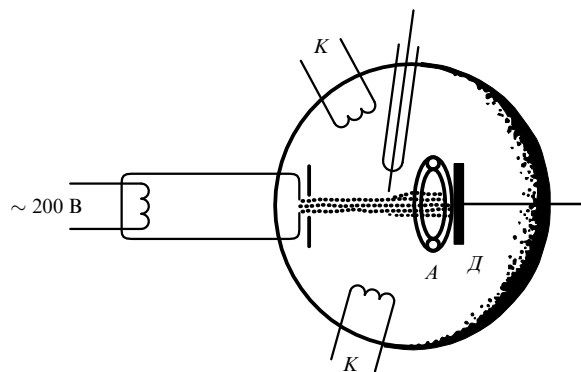


Рис. 8. Схема эксперимента Луни и Брауна по возбуждению плазменных колебаний.



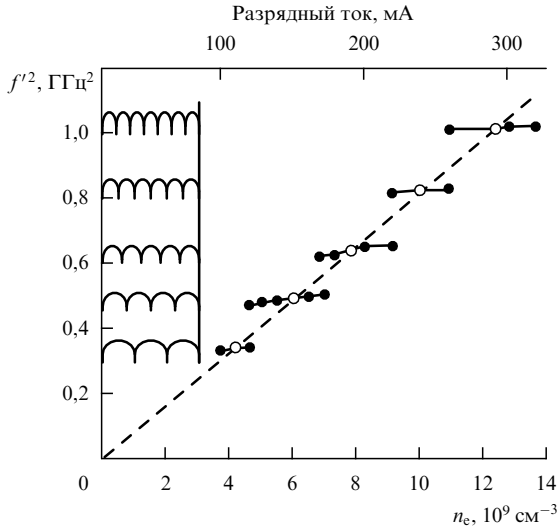


Рис. 9. Зависимость квадрата наблюдавшихся частот в эксперименте Луни и Браун от электронной плотности плазмы. На вставке показаны наблюдавшиеся колебания в анодном промежутке АД.

где  $\omega_{pe}$  — частота ленгмюровских колебаний электронов. Уравнение (8.1) является следствием одномерного гидродинамического уравнения движения без учета влияния конвективных членов и градиента давления. Его более общая запись с учетом давления электронной компоненты имеет вид

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 = \frac{3}{2} k^2 v_T^2, \quad (8.2)$$

где  $v_T^2 = 2k_B T/m_e$ . Член в правой части (8.2) опущен при построении пунктирной линии на рис. 9 для лучшего согласования теоретических и экспериментальных данных [56, 57].

Луни и Браун указали на принципиальное противоречие между дисперсионными уравнениями (8.1), (8.2), приводящими к сплошному спектру, и данными эксперимента, в котором обнаружен дискретный спектр колебаний. Более того, как следует из рис. 9, с ростом электронной плотности наблюдалась ступенчатая кривая с разрывами и слабым увеличением наклона ступенек в пределах площадки, т.е., по сути, наблюдался полосатый спектр колебаний. Полосатая структура спектра (при исследовании затухания электронных плазменных волн в бесстолкновительной плазме) наблюдалась и в более поздних экспериментах (см., например, [58]). С помощью уравнений (8.1), (8.2) или качественных соображений, основанных на теории стоячих волн, невозможно объяснить результаты эксперимента. Перейдем теперь к трактовке экспериментальных данных на основе обобщенных дисперсионных уравнений (7.51), (7.52). Прежде всего отметим, что исследование на уровне дисперсионных уравнений не может дать полную картину физических процессов в рассматриваемой системе. Поэтому расчет  $\omega(\lambda)$  отражает лишь принципиальные качественные и количественные особенности системы, если известны длины наблюдающихся волн и гидродинамические параметры, прежде всего концентрации компонентов и ионная и электронная температуры.

А. Дисперсионное уравнение (7.55) приводит к дискретному спектру решений  $\gamma_n$  и, следовательно, 4 УФН, т. 173, № 2

$\omega_n'(\lambda_n, T)$ ,  $\omega_n''(\lambda_n, T)$ . Дискретный спектр частот наблюдается в эксперименте. Для перехода к количественным оценкам необходимо оценить температуру пучка. Из условия совпадения расчетного значения квадрата линейной частоты

$$f_1'^2 = \hat{\omega}_1'^2 \frac{2k_B T}{\lambda_1^2 m_e} \quad (8.3)$$

и ее экспериментального значения ( $f_1'^2 = 3 \times 10^{17}$  Гц<sup>2</sup>) следует  $T \approx 40$  эВ. Прямое измерение температуры в эксперименте не проводилось, но указанное значение согласуется с косвенными данными эксперимента. При этом, как следует из эксперимента, для нижнего уровня частоты длина волны  $\lambda_1 \approx 1$  см и  $r_D^2 k^2 \approx 0,2$ . Следовательно, в эксперименте не реализуются условия

$$r_D^2 k^2 \ll 1, \quad \lambda \gg r_D,$$

при которых формально находят решение классического дисперсионного уравнения, отвечающего затуханию Ландау [59]. Приведенные выше решения уравнения (7.55) найдены для предельного случая

$$\beta^2 = 1. \quad (8.4)$$

Однако прямая  $2\pi\gamma$  пересекает (см. рис. 7) кривую  $\Phi(\gamma) = -\exp(\gamma \cot \gamma) \sin \gamma$  в области быстрого возрастания функции  $\Phi(\gamma)$ . В результате вариации тангенса угла наклона прямой в области существования решения уравнения (7.55) приводит лишь к малому изменению решения  $\gamma_n$ . Для оценки

$$f_n'^2 = \hat{\omega}_n'^2 \frac{2k_B T}{\lambda_n^2 m_e} \quad (8.5)$$

следует использовать расчетные значения  $\hat{\omega}_n'^2$  и экспериментальные величины  $\lambda_n$  и  $T$ . Температуры электронов в экспериментах, приводящих к частотам  $f_n'$ , можно оценить из простейшего условия равновесия пучка

$$p_e = p_{pl}, \quad (8.6)$$

где  $p_e$  — давление, созданное электронами пучка, а  $p_{pl}$  — давление ртутной плазмы. В результате появляется разумное (с точностью от 20 до 50 %) количественное согласование теоретических и экспериментальных данных со второго по пятый наблюдавшихся уровней  $f_n'^2$ .

Б. Прямая линия 1 на рис. 7 при условии (8.4) имеет максимально возможный наклон. Положение прямой линии 2 отвечает некоторому значению  $r_D^2 k^2$ , отличному от нуля, и носит иллюстративный характер. Пусть теперь концентрация пучковых электронов  $n_e$  начинает увеличиваться, при этом в первом приближении остальные параметры плазмы считаются постоянными. Увеличение  $n_e$  приводит к уменьшению (см. (П1.5)) радиуса Дебая–Хюккеля  $r_D$  и росту угла наклона прямой линии 2, перемещающейся в положение 3. Прямая линия приближается к положению 1. Вместо некоторого дискретного набора  $\gamma_n$  появится набор возможных интервалов  $\Delta\gamma_n$ , а следовательно, и интервалов  $\Delta\omega_n'$ ,  $\Delta\omega_n''$ . В результате появляются площадки наблюдаемых в эксперименте величин  $\omega_n'^2$ .

В. Можно убедиться прямым расчетом, что функция

$$F(\gamma_n) = \frac{\gamma_n}{4} \tan\left(-\frac{\gamma_n}{2}\right) \quad (8.7)$$

растет с уменьшением  $\gamma_n$ . Следовательно, квадрат частоты  $\omega_n'^2$  с увеличением концентрации пучковых электронов будет слегка расти в пределах площадки

$$\omega_{n,\gamma-\Delta\gamma}'^2 = \omega_{n,\gamma}'^2 + o(|\Delta\gamma_n|). \quad (8.8)$$

Этот эффект также наблюдается в эксперименте.

Г. Квадрат частоты колебаний плазменных волн  $\omega_n'^2$  пропорционален энергии волн. Следовательно, энергия плазменных волн квантуется, причем с ростом  $n$  в асимптотике

$$\hat{\omega}_n'^2 = \frac{\pi}{4} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (8.9)$$

и квадраты возможных безразмерных значений частот становятся эквидистантными:

$$\hat{\omega}_{n+1}'^2 - \hat{\omega}_n'^2 = \frac{\pi}{4}. \quad (8.10)$$

Д. Исследуем влияние движения ионов на решение дисперсионного уравнения. Распределение электронов по скорости считается максвелловским, тепловым движением ионов пренебрегается. Функция распределения для ионов записывается в таком случае в виде

$$f_i = n_i \delta(v_i). \quad (8.11)$$

Обобщенное дисперсионное уравнение в бесстолкновительной асимптотике приобретает вид

$$1 + \frac{1}{r_D^2 k^2} [1 + 2\pi i \hat{\omega} \exp(-\hat{\omega}'^2 + \hat{\omega}''^2 - 2i\hat{\omega}'\hat{\omega}'') ] = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad (8.12)$$

где  $\omega_{pi}$  — ионная ленгмюровская частота.

Введем параметр

$$\varepsilon = \frac{m_e n_i}{2m_i n_e}. \quad (8.13)$$

Тогда уравнение (8.12) записывается в виде

$$1 + r_D^2 k^2 + 2\pi i \hat{\omega} \exp(-\hat{\omega}'^2 + \hat{\omega}''^2 - 2i\hat{\omega}'\hat{\omega}'') = \frac{\varepsilon}{\hat{\omega}^2}. \quad (8.14)$$

В условиях обсуждаемого эксперимента  $\varepsilon$  — малая величина. Однако в общем случае, если  $n_i \gg n_e$  и параметр  $\varepsilon$  не слишком мал, может возникнуть необходимость учета движения ионов. Для решения уравнения (8.14) можно использовать метод возмущений, представив частоты в виде рядов

$$\hat{\omega}' = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{\omega}'^{(k)}, \quad (8.15)$$

$$\hat{\omega}'' = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{\omega}''^{(k)}. \quad (8.16)$$

Тогда при  $k=0$  в первом приближении получаем частный случай уравнений (7.49), (7.50) как результат разделения действительной и мнимой частей уравнения (8.14).

Во втором приближении ( $k=1$ ) имеем

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'^{(1)} \left( \cos \frac{\gamma_0}{2} - \frac{\gamma_0}{2} \cot \frac{\gamma_0}{2} \right) + \hat{\omega}''^{(1)} \left( \sin \frac{\gamma_0}{2} + \frac{\gamma_0}{2} \right) = \\ = \frac{\sin^2 \gamma_0}{\gamma_0 \sqrt{\pi}} \exp \left( \frac{\gamma_0}{2} \cot \gamma_0 \right) - \hat{\omega}'^{(0)}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'^{(1)} \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \hat{\omega}'^{(0)} \exp \left( \frac{\gamma_0}{2} \cot \gamma_0 \right) - \frac{\gamma_0}{2} - \sin \frac{\gamma_0}{2} \right] - \\ - \hat{\omega}''^{(1)} \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \hat{\omega}''^{(0)} \exp \left( \frac{\gamma_0}{2} \cot \gamma_0 \right) + \cos \frac{\gamma_0}{2} + \frac{\gamma_0}{2} \tan \frac{\gamma_0}{2} \right] = \\ = \frac{\sin 2\gamma_0}{2\gamma_0 \sqrt{\pi}} \exp \left( \frac{\gamma_0}{2} \cot \gamma_0 \right) + \hat{\omega}''^{(0)}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

где  $\gamma_0$  — результат решения уравнения (8.14), отвечающего первому приближению. Для оценки эффекта приведем результат расчета коэффициентов разложений (8.15), (8.16) во втором приближении:

$$\hat{\omega}'^{(1)} = 3,05; \quad \hat{\omega}''^{(1)} = -0,87.$$

Полное решение краевой задачи о пространственной и временной эволюции плазмы в установке Луни и Брауна может быть получено лишь в результате решения ОУБ. Тем не менее исследованное дисперсионное уравнение правильно отражает основные, характерные черты экспериментальных результатов.

Перейдем теперь к сравнению теоретических результатов с данными математического эксперимента. Обширное математическое моделирование затухания ленгмюровских волн в плазме было проведено в 70–80-х годах в Институте ядерной физики СО АН СССР (см., например, [60–63]). Для нас здесь представляет интерес постановка задачи, близкая к классической формулировке Ландау [64–66]. Рассматривается одномерная плазменная система с периодическими граничными условиями. Для электронов плазмы задается максвелловское распределение по скоростям, а ионы считаются неподвижными ( $m_i/m_e = 10^4$ ) и равномерно распределенными по длине системы. В некоторый начальный момент времени задается возмущение плотности и скорости электронов

$$\frac{\delta n}{n_0} = \frac{k_0 E_0}{4\pi e n_0} \sin(\omega_0 t - k_0 x), \quad (8.19)$$

$$\delta v = \frac{\omega_0 E_0}{4\pi e n_0} \sin(\omega_0 t - k_0 x),$$

соответствующее линейной волне

$$E(x, t) = E_0 \sin(\omega_0 t - k_0 x),$$

где  $\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + (3/2)k_0^2 v_T^2$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ . Амплитуда поля  $E_0$ , потенциал  $\varphi_0$ , длина волны  $\lambda_0$ , частота  $\omega_0$ , волновое число  $k_0$  соответствуют начальному моменту времени. Численное интегрирование проводится методом "частиц в ячейках". Число частиц не велико. Авторы [60–63] использовали обычно число частиц  $N = 10^4$ , а число частиц в ячейках порядка  $10^2$ . Для понижения начального уровня шумов применяется метод "спокойного старта", при использовании которого функция распределения электронов по скоростям и координатам задается одинаковой во всех ячейках. В таком случае, как отмечается в [61], уровень шумов определяется ошибками счета, но нарастает при выбранной схеме счета. При этом уровень шума увеличивается с ростом  $E_0$  и уменьшением  $\lambda_0$ . Расчет имеет смысл до тех пор, пока уровень шума остается малым по сравнению с уровнем возникающих гармоник исследуемого эффекта.

Расчеты в [60–63] проведены в широком диапазоне начальных параметров волны. Зависимость напряженно-

Таблица 2. Сравнение аналитических результатов с данными математического моделирования

$N$	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	I-6	I-7	I-8
$\frac{v_\phi}{\sqrt{k_B T/m}}$	2,46	2,95	4,2	6,9	9,4	11,2	16	22,4
$\frac{i_0}{r_D}$	11	15	24	42	58	70	100	140
$k_0 r_D$	0,57	0,42	0,26	0,15	0,11	0,09	0,063	0,045
$(k_0 r_D)^2$	$3,3 \times 10^{-1}$	$1,7 \times 10^{-1}$	$6,8 \times 10^{-2}$	$2,2 \times 10^{-2}$	$1,2 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-3}$	$3,9 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$
$\hat{E}_0$	1–60	11–60	26–70	70–170	119–250	170–250	240–450	333–591
$\frac{\sqrt{e\phi_0/m}}{\sqrt{k_B T/m}}$	0,2–1,6	0,8–1,9	1,6–2,6	3,5–5,4	5,3–7,6	6,9–8,4	9,8–13,5	13,7–18,3
$\frac{\sqrt{e\phi_0/m}}{v_\phi}$	$8 \times 10^{-2}$ –0,8	0,28–0,65	0,38–0,62	0,5–0,78	0,56–0,81	0,61–0,75	0,61–0,84	0,61–0,82
$\frac{e\phi_0}{k_B T}$	$4 \times 10^{-2}$ –2,7	0,7–3,6	2,5–6,8	11,9–28,5	28–58,4	48–70,5	96,7–181	188–334
$\frac{\Delta N}{N}, \%$	0–20	1–13	1–7	1–11	1–12	2–7,5	1–13	0,5–10
$\frac{\gamma_L}{\omega_{pe}}$	0,32	0,17	$6 \times 10^{-3}$	$10^{-8}$	$4 \times 10^{-17}$	$2 \times 10^{-25}$	$6 \times 10^{-53}$	$2 \times 10^{-105}$
$\frac{\gamma}{\omega_{pe}}$	0,32–1	0,17–0,96	0,03–0,4	0,03–0,65	0,03–0,8	0,04–0,2	0,03–0,8	0,02–0,3
$\frac{\gamma_A}{\omega_{pe}}$	0,522	0,4	0,247	0,143	0,105	0,0857	0,06	0,0428
$\frac{\gamma}{\gamma_L}$	1,0–3,4	1,0–5,6	5–60	$\sim 10^6$ – $10^8$	$\sim 10^{15}$ – $10^{16}$	$\sim 10^{23}$ – $10^{24}$	$\sim 10^{50}$ – $10^{52}$	$\sim 10^{102}$ – $10^{104}$

сти поля от времени носит сложный характер, но начальная стадия всегда соответствует затуханию волны, при этом с ростом амплитуды и фазовой скорости  $v_\phi$  в области  $e\phi_0/(k_B T) > 1$  (и соответственным уменьшением параметра  $k_0 r_D$ ) декремент затухания резко возрастает по сравнению с декрементом затухания Ландау [64]. В таблице 2 приведены результаты математического моделирования [62, 63], отвечающие серии математических экспериментов с I-1 до I-8. В левом столбце таблицы использованы следующие обозначения, нуждающиеся в дополнительных пояснениях:  $\hat{E}_0 = E_0 e \tau_{0p}^2 / m r_D$  — безразмерная нормированная амплитуда волны,  $\tau_{0p}$  — период плазменных колебаний,  $\Delta N/N$  — число захваченных электронов в процентах,  $\gamma$  — декремент затухания, определенный в математическом эксперименте,  $\gamma_A = -\omega_1''$  — декремент затухания, найденный как асимптотика решения обобщенного уравнения Больцмана и вычисленный по первому декременту из дискретного спектра решений. В таблице 2 приведен декремент затухания  $\gamma_L = -\omega_L''$ , вычисленный по модифицированной формуле Ландау [67]. Существует очень большое расхождение между декрементами  $\gamma$ ,  $\gamma_A$  и  $\gamma_L$  в длинноволновом пределе, когда  $k_0 r_D \ll 1$ . С точки зрения математического расчета появление столь большого расхождения легко объяснить. С этой целью запишем

формулу Ландау в классическом виде

$$\frac{\gamma}{\omega_{pe}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{k_0^3 r_D^3} \exp\left(-\frac{1}{2k_0^2 r_D^2}\right). \quad (8.20)$$

При  $k_0 r_D \ll 1$  декремент затухания, вычисленный по формуле (8.20), становится весьма малым, в то время как расчетный декремент затухания не слишком сильно отличается от плазменной частоты. Применение асимптотики ОУБ для решения классической проблемы затухания Ландау позволяет добиться вполне удовлетворительного согласования с данными физического и математического экспериментов даже в линейной постановке, предложенной Ландау.

Приведенные выше результаты составляют лишь небольшую часть обобщенной больцмановской кинетической теории, которая развивается уже 15 лет. Хотелось бы сделать одно общее заключительное замечание — многолетний опыт использования обобщенного уравнения Больцмана показывает, что оно является весьма эффективным средством решения многих физических задач там, где классическая теория приводит к затруднениям.

Автор считает своим долгом принести глубокую благодарность В.Л. Гинзбургу за внимание к работе и

направлению исследований, неизвестному рецензенту за весьма ценные рекомендации, редакции журнала *УФН* за помощь при подготовке обзора к опубликованию.

## 9. Приложения

### П.1. Некоторые характерные масштабы в физике плазмы

Принципиальной особенностью физики плазмы является многочастичное взаимодействие в системе. Поэтому выбор характерных масштабов, определяющих эволюцию плазменного объема, требует обоснования. Длина Ландау  $l$ , на которой характерная кинетическая энергия теплового движения  $k_B T$  оказывается равной потенциальной энергии взаимодействия зарядов  $e$ , определяется равенством

$$l = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T} = \frac{1,67 \times 10^{-5}}{T} \text{ м}, \quad (\text{П1.1})$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $k_B$  — постоянная Больцмана.

Парные столкновения, для которых прицельные расстояния меньше или равны длине Ландау, считаются близкими. Вводится отношение длины Ландау к среднему расстоянию  $n^{-1/3}$  между частицами плазмы

$$\beta = ln^{1/3} = 1,67 \times 10^{-5} n^{1/3} T^{-1}, \quad (\text{П1.2})$$

где  $n$  — плотность числа частиц,  $\text{м}^{-3}$ .

Обычно (в лабораторной плазме, солнечных короне и атмосфере, ионосфере, межзвездном газе) параметр взаимодействия  $\beta$  мал, но для свободных электронов в металле он может достигать значения  $\sim 10^2$ . Сечение  $\sigma_b$  близких столкновений определяется равенством

$$\sigma_b = \pi l^2, \quad (\text{П1.3})$$

а средняя длина пробега пробной частицы между двумя близкими столкновениями

$$\lambda = \frac{1}{\pi n l^2} = \frac{1}{\pi n^{1/3} \beta^2} = 1,1 \times 10^9 \frac{T^2}{n} \text{ м}. \quad (\text{П1.4})$$

Взаимодействие между парами частиц в плазме эффективно простирается до расстояния, определяемого радиусом Дебая – Хюккеля  $r_D$ ,

$$r_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T}{ne^2}} = \frac{1}{n^{1/3} \sqrt{4\pi\beta}} = 0,69 \times 10^2 \sqrt{\frac{T}{n}} \text{ м}. \quad (\text{П1.5})$$

Можно считать, что при размерах системы, меньших  $r_D$ , плазменные коллективные свойства исчезают. Существует следующая взаимосвязь характерных длин в плазме:

$$l : n^{-1/3} : r_D : \lambda = \beta : 1 : \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}} : \frac{1}{\pi\beta^2}. \quad (\text{П1.6})$$

Соотношение (П1.6) должно быть дополнено гидродинамическим масштабом  $L$ , являющимся характерным размером системы; обычно  $L$  существенно превышает  $\lambda$ . Указанные масштабы не исчерпывают перечня характерных величин в плазме. Дополнительные масштабы могут возникать при исследовании процессов в быстропеременных полях, когда расстояние, проходимое частицей за период колебания поля, оказывается меньше радиуса действия сил.

### П.2. Дисперсионные уравнения в обобщенной бальмановской кинетической теории без учета интегрального столкновительного члена

Рассмотрим в рамках модели ОУБ дисперсионное уравнение для плазмы в отсутствие магнитного поля. Сделаем те же предположения, что и при выводе этого уравнения в рамках модели, соответствующей УБ: а) интегральным столкновительным членом пренебрегаем; б) эволюцию электронов и ионов в самосогласованном электрическом поле полагаем соответствующей одномерной нестационарной модели; в) отклонения функции распределения для ионов  $f_i$  и электронов  $f_e$  от равновесных  $f_{0i}$  и  $f_{0e}$  считаем малыми:

$$f_i = f_{0i}(u) + \delta f_i(x, u, t), \quad (\text{П2.1})$$

$$f_e = f_{0e}(u) + \delta f_e(x, u, t); \quad (\text{П2.2})$$

г) рассматриваем волновой режим, отвечающий некоторому вещественному волновому числу  $k$  и комплексной частоте  $\omega$ , что позволяет искать решение ОУБ в форме

$$\delta f_i = \langle \delta f_i \rangle \exp [i(kx - \omega t)], \quad (\text{П2.3})$$

$$\delta f_e = \langle \delta f_e \rangle \exp [i(kx - \omega t)]; \quad (\text{П2.4})$$

д) квадратичными членами в ОУБ, определяющими отклонение от равновесных значений ФР, пренебрегаем; е) самосогласованные силы  $F_i$  и  $F_e$  считаем малыми:

$$F_i = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\text{П2.5})$$

$$F_e = -\frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\text{П2.6})$$

где  $e$  — абсолютное значение заряда электрона,  $m_i$  и  $m_e$  — массы ионов и электронов;

$$\varphi = \langle \varphi \rangle \exp [i(kx - \omega t)]. \quad (\text{П2.7})$$

В этих предположениях ОУБ записывается следующим образом (для определенности решение ОУБ ищем для ионной компоненты плазмы):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + u \frac{\partial f_i}{\partial x} + F_i \frac{\partial f_i}{\partial u} - \tau_i \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + 2F_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial u} + \frac{\partial F_i}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial u} + F_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + u \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial u} + \right. \\ \left. + F_i^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} + 2u F_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial u \partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П2.8})$$

Используя указанные предположения, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} = -i\omega \delta f_i, \quad u \frac{\partial f_i}{\partial x} = iku \delta f_i, \\ F_i \frac{\partial f_i}{\partial u} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_{0i}}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = -\omega^2 \delta f_i, \\ 2u \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x} = 2\omega u k \delta f_i, \quad u^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} = -u^2 k^2 \delta f_i, \end{aligned} \quad (\text{П2.9})$$

$$2F_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial u \partial t} = 0, \quad \frac{\partial F_i}{\partial t} \frac{\partial f_i}{\partial u} = -\frac{e}{m_i} \omega k \varphi \frac{\partial f_{0i}}{\partial u},$$

$$F_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial F_i}{\partial x} = \frac{e}{m_i} k^2 u \varphi \frac{\partial f_{0i}}{\partial u},$$

$$F_i^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial u \partial x} 2u F_i = 0.$$

Подставляя (П2.9) в (П2.8), получаем уравнение

$$i(ku - \omega)\langle \delta f_i \rangle - i \frac{e}{m} k \langle \varphi \rangle \frac{\partial f_{0i}}{\partial u} - (ku - \omega) \tau_i \left[ -(ku - \omega)\langle \delta f_i \rangle + \langle \varphi \rangle \frac{ek}{m_i} \frac{\partial f_{0i}}{\partial u} \right] = 0, \quad (\text{П2.10})$$

откуда следует выражение для флуктуации плотности ионов

$$\langle \delta n_i \rangle = -\frac{e}{m_i} \langle \varphi \rangle k \int \frac{\partial f_{0i}}{\partial u} \frac{1}{\omega - ku} du \quad (\text{П2.11})$$

и аналогично электронов

$$\langle \delta n_e \rangle = \frac{e}{m_e} \langle \varphi \rangle k \int \frac{\partial f_{0e}}{\partial u} \frac{1}{\omega - ku} du. \quad (\text{П2.12})$$

Соотношения (П2.11), (П2.12) в точности совпадают с аналогичными соотношениями, полученными в рамках модели УБ. Подставляя (П2.11), (П2.12) в уравнение Пуассона

$$\varepsilon_0 k^2 \varphi = e(\delta n_i - \delta n_e), \quad (\text{П2.13})$$

получаем классическое дисперсионное уравнение (см., например, [53])

$$1 = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 k} \left( \frac{1}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{0e}}{\partial u} \frac{1}{\omega - ku} du + \frac{1}{m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{0i}}{\partial u} \frac{1}{\omega - ku} du \right). \quad (\text{П2.14})$$

Результаты (П2.11), (П2.12) являются следствием общего утверждения: в отсутствие интегрального столкновительного члена соотношение

$$\frac{Df_x}{Dt} = 0 \quad (\text{П2.15})$$

(уравнение Власова) является решением уравнения

$$\frac{Df_x}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left( \tau_x \frac{Df_x}{Dt} \right) = 0. \quad (\text{П2.16})$$

Тем не менее проведенное выше рассмотрение показало, что, применяя метод возмущений к ОУБ, можно получить правильный и ожидаемый результат.

## Список литературы

1. Boltzmann L *Wien. Ber.* **66** (2) 275 (1872)
2. Чепмен С, Каулинг Т *Математическая теория неоднородных газов* (М.: ИЛ, 1960)
3. Alexeev V V *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **349** 417 (1994)
4. Alexeev V V *Physica A* **216** 459 (1995)
5. Алексеев Б В *УФН* **170** 649 (2000)
6. Климонтович Ю Л *Статистическая теория открытых систем* (М.: Янус-К, 1995)
7. Давыдов Б И *ДАН СССР* **2** 474 (1935)
8. Cattaneo S *C.R. Acad. Sci.* **247** 431 (1958)
9. Соболев С Л *УФН* **167** 1095 (1997)
10. Жданов В М, Ролдугин В И *ЖЭТФ* **122** 789 (2002)
11. Уленбек Г *УФН* **103** 275 (1971)
12. Kramers H A *Physica* **7** (4) 284 (1940)
13. Морозов А Н *ЖЭТФ* **109** 1304 (1996)
14. Saha M N *Philos. Mag.* **40** 472 (1920)
15. Eggert J *Phys. Z.* **20** 570 (1919)
16. Fowler R H, Guggenheim E A *Statistical Thermodynamics* (Cambridge: The Univ. Press, 1939)
17. Dewan E M *Phys. Fluids* **4** (6) 243 (1961)
18. Gryzinski M, Kunc J, Zgorzelski M *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **6** 2292 (1973)
19. Enskog D *Kgl. Svenska Vetenskaps Akademiens Handl.* **63** (4) 87 (1921); in *Kinetic Theory* Vol. 3 (Ed. S G Brush) (Oxford: Pergamon Press, 1972)
20. Coremans J M J, Beenakker J J M *Physica* **26** 653 (1960)
21. Четверушкин Б Н *Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике: Новая модель вязкого газа, алгоритмы, параллельная реализация, приложения* (М.: Изд-во МГУ, 1999)
22. Бакай А С, Сигов Ю С "Многоликая турбулентность", в сб. *Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур* (Отв. ред. И М Макаров) (М.: Наука, 1996) с. 10
23. Решетняк С А, Шелепин Л А *Квазистационарные распределения в кинетике* (М.: ИПО "Автор", 1996)
24. Климонтович Ю Л *УФН* **167** 23 (1997)
25. Власов А А *Нелокальная статистическая механика* (М.: Наука. Физматлит, 1978)
26. Рудяк В Я *Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях* (Новосибирск: Наука, 1987)
27. Брагинский С И, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 1 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 183
28. Nayfeh A H *Perturbation Methods* (New York: Wiley, 1973)
29. Алексеев Б В *Математическая кинетика реагирующих газов* (М.: Наука, 1982)
30. Lenard A *Ann. Phys.* (New York) **10** 390 (1960)
31. Balescu R *Phys. Fluids* **3** 52 (1960)
32. Балеску Р *Равновесная и неравновесная статистическая механика* Т. 1, 2 (М.: Мир, 1978)
33. Климонтович Ю Л *Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы* (М.: Наука, 1975)
34. Алексеев Б В, Грушин И Т *Процессы переноса в реагирующих газах и плазме* (М.: Энергоатомиздат, 1994)
35. Трубников Б А, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 1 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 98
36. Goldman E, Sirovich L *Phys. Fluids* **10** 1928 (1967)
37. Morse T F *Phys. Fluids* **6** 1420 (1963)
38. Шахов Е М *Метод исследования движений разреженного газа* (М.: Наука, 1974)
39. Голант В Е, Жилинский А П, Сахаров И Е *Основы физики плазмы* (М.: Атомиздат, 1977)
40. Гуревич А В, Живлюк Ю Н *ЖЭТФ* **49** 214 (1965)
41. Pidduck F B *Proc. R. Soc. London Ser. A* **88** 296 (1913)
42. Compton K T *Phys. Rev.* **7** 489 (1916)
43. Compton K T *Phys. Rev.* **7** 509 (1916)
44. Druyvesteyn M J *Physica* **10** 61 (1930)
45. Druyvesteyn M J *Z. Phys.* **64** 781 (1930)
46. Давыдов Б И *ЖЭТФ* **6** 463 (1936)
47. Иванов Ю А, Лебедев Ю А, Полак Л С *Методы контактной диагностики в неравновесной плазмохимии* (М.: Наука, 1981)
48. Гинзбург В Л, Гуревич А В *УФН* **70** 201 (1960)
49. Гинзбург В Л, Гуревич А В *УФН* **70** 393 (1960)
50. Смирнов Б М *Физика слабоионизованного газа в задачах с решениями* (М.: Наука, 1985)
51. Алексеев Б В *ТВТ* **33** 838 (1995)
52. Алексеев Б В, Лебедев Ю А, Михайлов В В *ТВТ* **35** (2) 209 (1997)
53. Арцимович Л А, Сагдеев Р З *Физика плазмы для физиков* (М.: Атомиздат, 1979)
54. Алексеев Б В *ТВТ* **38** 374 (2000)
55. Алексеев Б В *ТВТ* **39** 693 (2001)
56. Looney D H, Brown S C *Phys. Rev.* **93** 965 (1954)
57. Чен Ф *Введение в физику плазмы* (М.: Мир, 1987)
58. Franklin R N, Hamberger S M, Smith G J *Phys. Rev. Lett.* **29** 914 (1972)
59. Климонтович Ю Л *Статистическая теория неравновесных процессов в плазме* (М.: Изд-во МГУ, 1964)
60. Бучельникова Н С, Маточкин Е П, Препринт № 77-15 (Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1976)

61. Бучельникова Н С, Маточкин Е П, Препринт № 77-39 (Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1977)
62. Бучельникова Н С, Маточкин Е П, Препринт № 79-112 (Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1979)
63. Бучельникова Н С, Маточкин Е П *Физика плазмы* **6** 1097 (1980)
64. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **16** 574 (1946)
65. Ландау Л Д *УФН* **93** 527 (1967)
66. Landau L D *J. Phys. USSR* **10** 25 (1946)
67. Клеммоу Ф, Доуэрти Дж *Электродинамика частиц и плазмы* (М.: Мир, 1996)

### Physical fundamentals of the generalized Boltzmann's kinetic theory of ionized gases

**B.V. Alekseev**

*M.V. Lomonosov Moscow Fine Chemical Technology Institute,  
prosp. Vernadskogo 86, 119571 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 246-46 42, 247-16 56  
E-mail: bvalexeev@unesco.mihht.rssi.ru; b.alexeev@ru.net*

In recent years the kinetic and hydrodynamic descriptions of transport phenomena have been improved significantly through the extension of Boltzmann's physical kinetics. In this review the basic results of the generalized kinetic theory of partially and fully ionized gases are presented and some of its applications are discussed.

PACS numbers: 05.20.Dd, **51.10.** + y, 52.25.Dg, **52.35.** – g

Bibliography — 67 references

*Received 15 March 2002, revised 28 August 2002*