

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

**Объединенная научная сессия
Отделения физических наук Российской академии наук
и Объединенного физического общества Российской Федерации**

(23 апреля 2003 г.)

23 апреля 2003 г. в конференц-зале Физического института им. П.Н. Лебедева РАН состоялась Объединенная научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук и Объединенного физического общества Российской Федерации. На сессии были заслушаны доклады:

1. **Забродский А.Г.** (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург). *Фазовый переход металл–изолятор в неупорядоченных полупроводниках.*

2. **Ипатов И.П.** (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург). *Неустойчивость твердых растворов полупроводников.*

3. **Яковлев Д.Г.** (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург). *Пикноядерные реакции и строение нейтронных звезд.*

4. **Чуразов Е.М.** (Институт космических исследований РАН, Москва). *Спектроскопия высокотемпературной плазмы и релятивистский газ в скоплениях галактик.*

5. **Бескин В.С.** (Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва). *Осесимметричные стационарные течения в астрофизике.*

6. **Очкин В.Н., Цхай С.Н.** (Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва). *Когерентное рассеяние света, стимулированное квазистатическим электрическим полем.*

7. **Белушкин А.В.** (Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл.). *Новые подходы к анализу структуры кристаллов. Нестандартный метод в изучении механизмов диффузии атомов и молекул.*

8. **Знаменский Н.В., Манькин Э.А., Самарцев В.В.** (Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва). *Фотонное эхо в примесных кристаллах.*

Краткое содержание докладов 5, 6 и 7 публикуется ниже.

PACS numbers: 04.70. –s, 95.30.Qd, 97.10.Gz

Осесимметричные стационарные течения в астрофизике

В.С. Бескин

1. Введение

Наблюдения показывают, что большое число астрофизических источников с хорошей точностью можно рассматривать как осесимметричные и стационарные. К этому классу объектов относятся как аккрецирующие звезды и черные дыры, так и аксиально симметричный звездный (солнечный) ветер, струйные выбросы из молодых звездных объектов и эжекция частиц из магнитосферы вращающихся нейтронных звезд. Подобные течения, по-видимому, реализуются и в магнитосферах сверхмассивных черных дыр, которые, как полагают, являются "центральной машиной" в активных галактических ядрах и квазарах [1, 2]. Неудивительно поэтому, что при описании таких течений активно используется аппарат идеальной магнитной гидродинамики, позволяющий достаточно просто формализовать задачу.

Дело в том, что благодаря осесимметричности и стационарности (а также условию вмерзновенности) в общем случае имеет место пять "интегралов движения", сохраняющихся на осесимметричных магнитных поверхностях. Этот замечательный факт позволяет отделить задачу о структуре полоидального поля (структуре полоидального течения в гидродинамике) от задачи об ускорении частиц и структуре электрических токов. При этом решение последней задачи в заданном полоидальном поле выражается достаточно простыми алгебраическими соотношениями. Важно, что подобный подход легко обобщается и на течения вблизи вращающейся черной дыры, поскольку метрика Керра также является осесимметричной и стационарной.

С другой стороны, задача о нахождении двумерной структуры полоидального магнитного поля (структуры гидродинамического течения) сталкивается с гораздо большими трудностями. Прежде всего, это связано со сложной структурой уравнения, описывающего стацио-

нарные осесимметричные течения. В общем случае оно оказывается нелинейным уравнением смешанного типа, меняющимся от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях и к тому же содержащим интегралы движения в виде свободных функций. Вообще говоря, аналогичные уравнения, восходящие к классическому уравнению Трикоми, обсуждались с начала прошлого века в связи с проблемой трансзвуковых гидродинамических течений [3]. Впоследствии осесимметричные стационарные уравнения равновесия стали называть уравнениями Грэда–Шафранова — по имени авторов, сформулировавших в конце 1950-х годов уравнение подобного вида в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза [4]. Это уравнение, однако, относилось лишь к равновесным статическим конфигурациям и требовало существенного изменения при обобщении на случай трансзвуковых течений. Полная версия такого уравнения, включающая в себя все пять интегралов движения, была сформулирована Л.С. Соловьевым в 1963 г. в третьем томе сборника *Вопросы теории плазмы* [5] и была хорошо известна среди физиков. Однако, как это часто бывает, в астрофизической литературе полная версия уравнения Грэда–Шафранова оставалась малоизвестной, так что оно неоднократно "переоткрывалось" заново [6].

Сложность, как оказалось, состоит в том, что сама постановка прямой задачи в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова оказывается нетривиальной. Так, например, в гидродинамическом пределе, когда имеется лишь три интеграла движения, задача требует четырех граничных условий для трансзвукового режима течения. Это значит, что на некоторой поверхности должны быть заданы, например, две термодинамические функции, а также две компоненты скорости. Однако для определения интеграла Бернулли, без знания которого уравнение равновесия, естественно, не может быть решено, необходимо задать все три компоненты скорости, что невозможно, поскольку третья компонента скорости сама должна быть найдена из решения. В такой непоследовательности и заключена, собственно, одна из основных сложностей рассматриваемого метода.

Тем не менее все же существуют подходы, позволяющие аналитически решать прямые задачи и в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова. Например, такая возможность возникает в том случае, если известно его точное решение, и мы исследуем течения, которые слабо отличаются от известного. Таким точным решением может служить сферически симметричная аккреция (эжекция) вещества. В результате, зная структуру течения в нулевом приближении, можно определить с нужной точностью как положение особых поверхностей, так и все интегралы движения непосредственно из граничных условий, что и позволяет решать уравнение равновесия в прямой постановке.

2. Уравнение Грэда–Шафранова

Рассмотрим осесимметричное стационарное течение плазмы в окрестности вращающейся черной дыры, т.е. в наиболее общей осесимметричной стационарной метрике [2]:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + g_{ik}(dx^i + \beta^i dt)(dx^k + \beta^k dt), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{\rho}{\Sigma} \sqrt{\Delta}, \quad \beta^r = \beta^\theta = 0, \quad \beta^\varphi = -\omega = -\frac{2aMr}{\Sigma^2},$$

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \rho^2, \quad g_{\varphi\varphi} = \varpi^2. \quad (2)$$

Здесь α — гравитационное красное смещение, равное нулю на горизонте $r_g = \mathcal{M} + \sqrt{\mathcal{M}^2 - a^2}$, ω — угловая скорость локально невращающихся наблюдателей (так называемая угловая скорость Лензе–Тирринга) и

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad \varpi = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta. \quad (3)$$

Как обычно, \mathcal{M} и a соответственно масса черной дыры и ее угловой момент, отнесенный к единице массы, т.е. $a = J/\mathcal{M}$. При этом индексы без шляпки будут обозначать компоненты векторов относительно координатного базиса, $\partial/\partial r$, $\partial/\partial \theta$, $\partial/\partial \varphi$, а индексы со шляпкой — их физические компоненты. Наконец, за исключением специально оговоренных случаев, всюду используется система единиц $c = G = 1$.

В дальнейшем мы везде будем использовать технику $3+1$ разложения [2]. В этом подходе физические величины выражаются через трехмерные векторы, которые в локальном эксперименте измерили бы наблюдатели, движущиеся вокруг вращающейся черной дыры с угловой скоростью ω . Удобство $3+1$ разложения состоит в том, что в этой технике многие выражения имеют тот же вид, что и в плоском пространстве. При этом все термодинамические величины определяются в сопутствующей системе координат.

Покажем теперь, как для осесимметричных стационарных течений возникают в общем случае пять "интегралов движения", постоянных на магнитных поверхностях. Для этого удобно ввести скалярную функцию $\Psi(r, \theta)$, имеющую смысл магнитного потока. В результате получаем для магнитного поля

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla \Psi \times \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi} - \frac{2I}{\alpha\varpi} \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \quad (4)$$

где $I(r, \theta)$ — полный электрический ток внутри области $\Psi < \Psi(r, \theta)$.

Будем считать, как обычно, что в магнитосфере содержится достаточное количество плазмы, необходимое для выполнения условия вмороженности, которое в $3+1$ разложении запишется, как и в плоском пространстве, в виде $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$. С другой стороны, вследствие стационарности (а также из условия нулевого продольного электрического поля) поле \mathbf{E} может быть записано как

$$\mathbf{E} = -\frac{\Omega_F - \omega}{2\pi\alpha} \nabla \Psi. \quad (5)$$

Подставляя теперь соотношение (5) в уравнения Максвелла, легко убедиться, что должно быть выполнено условие $\mathbf{B} \cdot \nabla \Omega_F = 0$, т.е. величина Ω_F должна быть постоянна на магнитных поверхностях (закон изоротации Ферраро): $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$.

Далее, благодаря уравнению Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, уравнению непрерывности и условию вмороженности,

мы можем записать 4-скорость вещества \mathbf{u} в виде

$$\mathbf{u} = \frac{\eta}{\alpha n} \mathbf{B} + \gamma(\Omega_F - \omega) \frac{\varpi}{\alpha} \mathbf{e}_\phi, \quad (6)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ есть лоренц-фактор вещества, а величина η имеет смысл отношения потока частиц к магнитному потоку. При этом, благодаря соотношению $\mathbf{V} \cdot (\eta \mathbf{B}_p) = 0$, она также должна быть постоянна на магнитных поверхностях $\Psi(r, \theta) = \text{const}$, т.е. $\eta = \eta(\Psi)$.

Следующие два интеграла движения связаны с осесимметричностью и стационарностью рассматриваемых течений, что приводит к сохранению потока энергии E и z -компоненты углового момента L_z :

$$E = E(\Psi) = \frac{\Omega_F I}{2\pi} + \mu\eta(\alpha\gamma + \omega u_\phi); \quad (7)$$

$$L = L(\Psi) = \frac{I}{2\pi} + \mu\eta\varpi u_\phi, \quad (8)$$

где $\mu = (\rho_m + P)/n$ — релятивистская энтальпия (ρ_m — плотность внутренней энергии, P — давление). Наконец, в осесимметричном случае условие изэнтропийности дает $s = s(\Psi)$, так что энтропия на одну частицу $s(\Psi)$ является, фактически, пятым интегралом движения.

Зная же пять интегралов движения $\Omega_F(\Psi)$, $\eta(\Psi)$, $s(\Psi)$, $E(\Psi)$ и $L(\Psi)$, а также полоидальное магнитное поле \mathbf{B}_p , можно восстановить тороидальное магнитное поле \mathbf{B}_θ и все остальные параметры плазмы:

$$\frac{I}{2\pi} = \frac{\alpha^2 L - (\Omega_F - \omega)\varpi^2(E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2}; \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha\mu\eta} \frac{\alpha^2(E - \Omega_F L) - M^2(E - \omega L)}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2}; \quad (10)$$

$$u_\phi = \frac{1}{\varpi\mu\eta} \frac{(E - \Omega_F L)(\Omega_F - \omega)\varpi^2 - LM^2}{\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2}, \quad (11)$$

где

$$M^2 = \frac{4\pi\eta^2\mu}{n}. \quad (12)$$

Легко видеть, что величина M^2 с точностью до коэффициента α^2 представляет собой квадрат числа Маха полоидальной скорости u_p по отношению к альфвеновской скорости $u_A = B_p/\sqrt{4\pi\eta\mu}$, т.е. $M^2 = \alpha^2 u_p^2/u_A^2$.

Поскольку $\mu = \mu(n, s)$, определение (12) позволяет выразить концентрацию n (а, значит, и удельную энтальпию μ) как функцию η , s и M^2 . Это означает, что, наряду с пятью интегралами движения, выражения для I , γ и u_ϕ зависят лишь от одной дополнительной величины — числа Маха M . Для определения же числа Маха следует воспользоваться очевидным соотношением $\gamma^2 - \mathbf{u}^2 = 1$, которое, благодаря выражениям (10) и (11), может быть переписано в виде

$$\frac{K}{\varpi^2 A^2} = \frac{1}{64\pi^4} \frac{M^4 (\nabla\Psi)^2}{\varpi^2} + \alpha^2 \eta^2 \mu^2, \quad (13)$$

где

$$A = \alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2 \quad (14)$$

и

$$K = \alpha^2 \varpi^2 (E - \Omega_F L)^2 [\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - 2M^2] + M^4 [\varpi^2 (E - \omega L)^2 - \alpha^2 L^2]. \quad (15)$$

Что же касается собственно уравнения Грэда–Шафранова — уравнения равновесия магнитных силовых линий, — то оно может быть записано в виде [7]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \nabla_k \left\{ \frac{1}{\alpha\varpi^2} [\alpha^2 - (\Omega_F - \omega)^2\varpi^2 - M^2] \nabla^k \Psi \right\} + \\ & + \frac{\Omega_F - \omega}{\alpha^2} (\nabla\Psi)^2 \frac{d\Omega_F}{d\Psi} + \frac{64\pi^4}{\alpha^2\varpi^2} \frac{1}{2M^2} \frac{\partial}{\partial\Psi} \left(\frac{G}{A} \right) - \\ & - 16\pi^3 \mu n \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\Psi} - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Psi} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$G = \alpha^2 \varpi^2 (E - \Omega_F L)^2 + \alpha^2 M^2 L^2 - M^2 \varpi^2 (E - \omega L)^2, \quad (17)$$

а производная $\partial/\partial\Psi$ действует лишь на интегралы движения. Подчеркнем, что вместе с соотношением (13) уравнение (16) содержит лишь функцию тока Ψ и пять интегралов движения.

Уравнение равновесия (16) является уравнением второго порядка, линейным относительно старших производных. Оно меняется от эллиптического к гиперболическому на особых поверхностях, на которых полоидальная скорость вещества сравнивается либо с быстрой или медленной магнитозвуковой скоростью, когда $D = 0$, либо с касповой скоростью, когда $D = -1$. На альфвеновской же поверхности $A = 0$ смены вида уравнения не происходит. Тем не менее альфвеновская поверхность все же является особой поверхностью уравнения равновесия, поскольку на ней должно быть выполнено условие регулярности.

3. Примеры

Аккреция Бонди–Хойла. В качестве первого примера рассмотрим гидродинамическую аккрецию на движущуюся черную дыру (аккреция Бонди–Хойла), которая является одной из классических задач современной астрофизики [1]. Сформулируем прежде всего гидродинамический предел уравнения Грэда–Шафранова, в котором мы можем пренебречь вкладом электромагнитного поля. В этом случае удобно ввести новый потенциал $\Phi(\Psi)$, удовлетворяющий условию $\eta(\Psi) = d\Phi/d\Psi$. Согласно определению (6), получаем

$$\alpha n \mathbf{u}_p = \frac{1}{2\pi\varpi} (\nabla\Phi \times \mathbf{e}_\phi). \quad (18)$$

Поверхности $\Phi(r, \theta) = \text{const}$ определяют линии тока вещества.

В гидродинамическом пределе имеется лишь три интеграла движения. Это поток энергии и z -компонента момента импульса:

$$E(\Phi) = \mu(\alpha\gamma + \varpi\omega u_\phi), \quad (19)$$

$$L(\Phi) = \mu\varpi u_\phi, \quad (20)$$

а также энтропия $s = s(\Phi)$. При этом алгебраическое уравнение Бернулли (13) имеет теперь вид

$$(E - \omega L)^2 = \alpha^2 \mu^2 + \frac{\hat{M}^4}{\varpi^2} L^2 + \frac{\hat{M}^4}{64\pi^4 \varpi^2} (\nabla\Phi)^2, \quad (21)$$

где квадрат "числа Маха" \hat{M}^2 определяется как $\hat{M}^2 = 4\pi\mu/n$. Уравнение же Грэда – Шафранова (16) переписывается в виде [7]

$$-\frac{1}{\alpha} \nabla_k \left(\frac{\hat{M}^2}{\alpha \varpi^2} \nabla^k \Phi \right) + \frac{64\pi^4}{\alpha^2 \varpi^2 \hat{M}^2} \left[\varpi^2 (E - \omega L) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{dE}{d\Phi} - \omega \frac{dL}{d\Phi} \right) - \alpha^2 L \frac{dL}{d\Phi} \right] - 16\pi^3 n T \frac{ds}{d\Phi} = 0, \quad (22)$$

где теперь

$$D = -1 + \frac{1}{u_p^2} \frac{c_s^2}{1 - c_s^2}. \quad (23)$$

Как мы видим, уравнение (22) содержит лишь одну особую поверхность — звуковую поверхность, определяемую из условия $D = 0$.

Для построения решения, соответствующего аккреции Бонди – Хойла, можно, как оказалось, искать решение уравнения на функцию потока $\Phi(r, \theta)$ как малую поправку к сферически симметричному решению. В результате при наличии малого параметра $\varepsilon_1 = v_\infty/c_\infty$, равного отношению скорости движения черной дыры к скорости звука на бесконечности, переменные разделяются, так что полное решение может быть представлено в виде

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 [1 - \cos \theta + \varepsilon_1 g_1(r) \sin^2 \theta]. \quad (24)$$

При этом радиальная функция $g_1(r)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (подробнее см. [8, 9]).

При современном уровне развития персональных компьютеров это означает, что нам удалось построить аналитическое решение поставленной задачи, которое позволяет получить исчерпывающую информацию о структуре течения. Например, звуковая поверхность имеет теперь несферическую форму

$$r_*(\theta) = r_* \left[1 + \varepsilon_1 \left(\frac{\Gamma + 1}{5 - 3\Gamma} \right) k_2 \cos \theta \right], \quad (25)$$

где численный коэффициент $k_2 = r_* g_1'(r_*)$ выражается через производную радиальной функции $g_1(r)$ в звуковой точке. Как показано на рис. 1, аналитическое решение находится в полном согласии с результатами численных

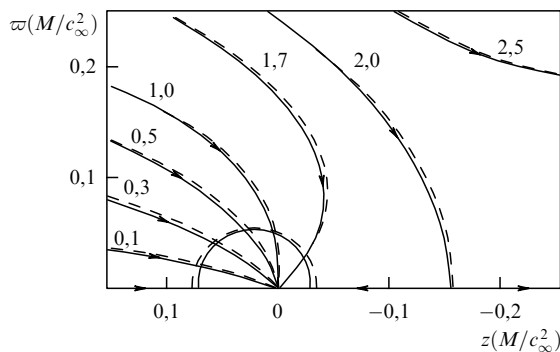


Рис. 1. Структура течения и форма звуковой поверхности для $\Gamma = 4/3$, $\varepsilon_1 = 0,6$ [8]. Числа у кривых обозначают величины Φ/Φ_0 , а штриховые линии показывают форму линий тока и звуковой поверхности, полученных численно в работе [10].

расчетов [10] несмотря на то, что параметр $\varepsilon_1 = 0,6$ здесь достаточно велик.

В связи с полученным выше решением необходимо сделать одно замечание. Как легко видеть, вне радиуса захвата наше основное предположение — малость возмущения сферически симметричного течения — нарушается. Тем не менее построенное решение остается справедливым. Это замечательное свойство связано с тем фактом, что при постоянной концентрации n уравнение Грэда – Шафранова становится линейным. Но как мы знаем из сферически-симметричной аккреции Бонди, вдали от звуковой поверхности $r \gg r_*$ плотность аккрецирующего вещества остается примерно постоянной. Соответственно, плотность постоянна и для однородного течения. В результате при условии, что радиус захвата $R_c \gg r_*$, которое выполняется для $\varepsilon_1 \ll 1$, вблизи и за пределами радиуса захвата (где возмущение $\sim \varepsilon_1 g_1(r)$ становится одного порядка с величиной нулевого приближения ~ 1) уравнение (22) становится линейным. В результате сумма двух решений, однородного и сферически симметричного, также является решением.

Тонкий транзвуковой диск. В качестве следующего примера рассмотрим внутреннюю двумерную структуру тонкого аккреционного диска. Здесь для простоты мы рассмотрим лишь случай невращающейся (шварцшильдовской) черной дыры [11]. Напомним, что согласно стандартной модели [12] аккрецирующее вещество образует равновесный диск, вращающийся вокруг гравитирующего центра с кеплеровской скоростью $v_K(r) = (GM/r)^{1/2}$. При этом диск будет тонким при условии, что его температура достаточно мала ($c_s \ll v_K$), поскольку, как следует из вертикального баланса сил гравитации и градиента давления, $H \approx r c_s / v_K$. Эффекты общей теории относительности приводят к двум важным свойствам: отсутствию устойчивых круговых орбит при $r < r_0 = 3r_g$ и транзвуковому режиму аккреции. При этом важно, что быстрое падение газа внутри последней устойчивой орбиты будет иметь место и при отсутствии вязкости. Поэтому можно предположить, что приближение идеальной гидродинамики является достаточно хорошим при описании течений во внутренних областях аккреционного диска.

До сих пор в большинстве работ, посвященных тонким аккреционным дискам, применялась процедура вертикального усреднения, причем вертикальная скорость u_θ в вертикальном балансе сил предполагалась равной нулю [13]. Поэтому и вертикальная компонента динамической силы $nu^b \nabla_b (\mu u_\theta)$ в уравнении Эйлера также предполагалась малой вплоть до горизонта черной дыры. По этой причине был сделан вывод, что толщина диска должна определяться градиентом давления и в сверхзвуковой области. Однако, как было показано в [11], предположение $u_\theta = 0$ вблизи звуковой поверхности не соответствует действительности. Как и в случае аккреции Бонди, динамическая сила становится существенной вблизи звуковой поверхности.

На рисунке 2 показана структура аккреционного диска вблизи звуковой поверхности при наличии малого параметра $\varepsilon_2 = u_0/c_0$, полученная в результате решения уравнения (22). Подчеркнем, что существование малого параметра $\varepsilon_2 \ll 1$, равного отношению радиальной скорости газа к скорости звука на последней устойчивой орбите, опирается на соотношение $v_r/v_K \approx \alpha_{SS} c_s^2 / v_K^2$ для радиальной скорости течения газа в аккреционном диске.

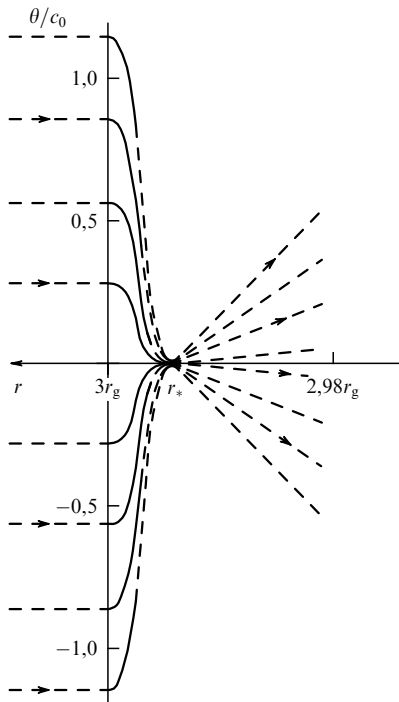


Рис. 2. Структура тонкого аккреционного диска (реальный масштаб) после прохождения последней устойчивой орбиты $r = 3r_g$, полученная в результате численного решения уравнения (22) для $c_0 = 10^{-2}$, $u_0 = 10^{-5}$. Сплошные линии соответствуют области параметров $u_p^2/c_0^2 < 0.2$. Штриховыми линиями показана экстраполяция решения к области звуковой поверхности. Вблизи звуковой поверхности течение имеет вид обыкновенного сопла.

В районе последней устойчивой орбиты такая оценка, по-видимому, не соответствует действительности. Тем не менее ниже мы будем считать параметр ε_2 малым, поскольку наличие малого параметра позволяет исследовать многие детали течения аналитически, и, кроме того, при наличии малого параметра обсуждаемый эффект оказывается более ярко выраженным.

Как мы видим, структура течения вблизи звуковой поверхности далека от радиальной. При этом существование узкой перетяжки имеет простое физическое объяснение. Действительно, при наличии малого параметра $\varepsilon_2 = u_0/c_0 \ll 1$ в дозвуковой области плотность остается примерно постоянной, а радиальная скорость меняется от u_0 до $c_* \sim c_0$, т.е. изменяется на несколько порядков. Поэтому вследствие уравнения непрерывности толщина диска H должна измениться в той же пропорции (см. рис. 2):

$$H(r_*) \approx \frac{u_0}{c_0} H(3r_g). \tag{26}$$

При этом чрезвычайно важно, что вблизи звуковой поверхности обе компоненты динамической силы становятся одного порядка с градиентом давления:

$$\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \approx u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \approx \frac{\nabla_\theta P}{\mu} \approx \frac{c_0^2}{u_0^2} \frac{\theta}{r}. \tag{27}$$

Здесь угол θ измеряется от экваториальной плоскости.

Иными словами, появление вертикальной компоненты скорости приводит к тому, что вблизи звуковой поверхности вкладом динамического слагаемого $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в вертикальном балансе сил уже нельзя пренебрегать [11].

Понятно, что это свойство останется справедливым для произвольной радиальной скорости течения, т.е. даже в том случае, когда поперечное сжатие диска не будет столь заметным. Учет же динамических сил приводит к появлению двух дополнительных степеней свободы, связанных со старшими производными в уравнении Грэда–Шафранова. По этой причине можно сделать еще один общий вывод, не зависящий от величины параметра ε_2 . В тонком аккреционном диске критическое условие на звуковой поверхности уже не фиксирует темп аккреции, а определяет изгиб линий тока в районе звуковой поверхности. Наконец, учет вертикальной скорости приводит к тому, что в районе звуковой поверхности неизбежно возникает малый продольный масштаб $\delta r_\parallel \approx H_*$, который для тонкого диска оказывается много меньше расстояния до черной дыры при любом значении параметра u_0/c_0 . При стандартном одномерном подходе такой малый масштаб не возникает. Что же касается сверхзвуковой области (и, в частности, области вблизи горизонта черной дыры), то здесь толщина диска будет определяться не градиентом давления, а формой баллистических траекторий, как и должно быть для сверхзвукового течения.

Процесс Блендфорда–Знайека. В заключение обсудим вопрос о потерях энергии черной дыры, помещенной во внешнее магнитное поле — так называемый процесс Блендфорда–Знайека [14], который рассматривается как наиболее предпочтительный механизм энерговыделения в активных галактических ядрах. Его основная идея основана на аналогии с процессом передачи энергии во внутренних областях магнитосферы радиопульсаров. Действительно, предположим, что в окрестности вращающейся черной дыры имеет место регулярное внешнее магнитное поле, вдоль которого протекает электрический ток I . Тогда за счет возникновения электрического поля \mathbf{E} , связанного с индукционным действием вращающейся с угловой скоростью Ω_F плазмы, и тороидального магнитного поля \mathbf{V}_ϕ , обусловленного продольным током I , происходит формирование потока электромагнитной энергии (потока вектора Пойнтинга), уносящего энергию вдоль магнитных силовых линий.

Конечно, в окрестности черной дыры по определению становятся существенными эффекты общей теории относительности. Поэтому не очевидно, что пульсарная аналогия может быть во всем полезна. Действительно, в магнитосфере радиопульсаров торможение нейтронной звезды обусловлено пондеромоторным действием поверхностных токов, замыкающих электрические токи, текущие в магнитосфере [15]. В случае же черной дыры подобные токи не могут приводить к торможению, хотя сами поверхностные токи формально могут быть введены в рамках так называемого мембранного подхода [2]. Дело в том, что горизонт не является физически выделенной поверхностью, не говоря уже о том, что он по определению причинно не связан с внешним пространством (см., например, работу [16], в которой был сделан вывод об отсутствии потока энергии вдоль силовых линий, проходящих через горизонт черной дыры).

Однако, как показал недавно более аккуратный анализ [17] (где, фактически, было построено первое решение уравнения Грэда–Шафранова для ненулевой массы частиц в метрике Керра), на самом деле тормозящий момент действует в области генерации плазмы над поверхностью черной дыры. Такой тормозящий момент

возникает за счет гравитомагнитных сил, которые являются дальнедействующими и проникают в области, причинно связанные с внешней магнитосферой. Горизонт же действительно находится в гиперболической области полного уравнения Грэда–Шафранова и, естественно, не может влиять на течение вдали от черной дыры (напомним, что в работе [14] анализ проводился в рамках бессилового приближения, когда уравнение Грэда–Шафранова остается эллиптическим вплоть до горизонта черной дыры). Поэтому вращающаяся черная дыра, как и вращающаяся нейтронная звезда, может работать как униполярный индуктор, эффективно передавая энергию на большие расстояния. В результате, имеем для мощности потерь $W_{\text{tot}} \approx W_{\text{BZ}}$, где

$$W_{\text{BZ}} = \frac{\Omega_{\text{F}}(\Omega_{\text{H}} - \Omega_{\text{F}})}{\Omega_{\text{H}}^2} \left(\frac{a}{M}\right)^2 B_0^2 r_{\text{g}}^2 c \approx \\ \approx 10^{45} \left(\frac{a}{M}\right)^2 \left(\frac{B_0}{10^4 \text{ Гс}}\right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_{\odot}}\right)^2 \text{ эрг с}^{-1}. \quad (28)$$

Как легко проверить, для предельно быстро вращающейся черной дыры при $B = B_{\text{Edd}} \approx \approx 10^4 (M/10^9 M_{\odot})^{-1/2}$ Гс потери W_{BZ} (28) совпадают с эддингтоновской светимостью.

Следует, однако, подчеркнуть, что, как видно из уравнения (28), необходимая мощность энерговыделения, характерная для активных галактических ядер, может быть достигнута лишь при предельных значениях массы черной дыры $\sim 10^9 M_{\odot}$, предельного магнитного поля в ее окрестности $B \sim B_{\text{Edd}}$, а также предельной скорости вращения $a \sim M$. Поэтому в последнее время появились работы, в которых эффективность процесса Блендфорда–Знайека в реальных астрофизических условиях подвергалась сомнению [18]. В частности, обращалось внимание на то, что при быстром вращении решение Уолда для вакуумной магнитосферы приводит к выталкиванию магнитного поля в эргосферу [2], что могло бы привести к дополнительному фактору $1 - a^2/M^2$ и в выражении (28).

В действительности же, как показано на рис. 3а, в случае магнитосферы черной дыры, заполненной плазмой, все силовые линии магнитного поля, пересекающие внутреннюю световую поверхность $\alpha^2 = (\Omega_{\text{F}} - \omega)^2 \varpi^2 + M^2$, в итоге пересекают горизонт черной дыры, и

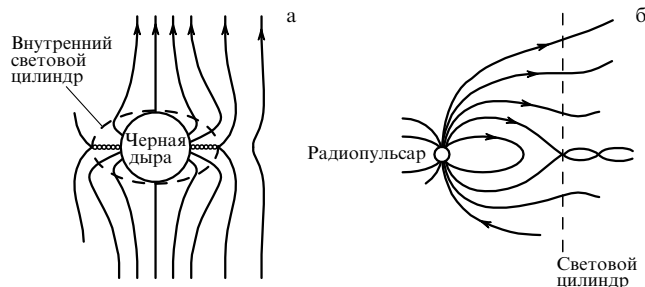


Рис. 3. (а) Структура магнитосферы черной дыры, полностью заполненной плазмой. Продольные токи, текущие вдоль силовых линий магнитного поля, проходящих через внутренний "световой цилиндр", направляют силовые линии по направлению к черной дыре. (б) Структура магнитосферы радиопульсаров. Силовые линии, выходящие за "световой цилиндр", не пересекают экваториальную плоскость, а уходят на бесконечность.

поэтому по порядку величины выделение энергии для предельно вращающейся черной дыры совпадает с выражением (28). Здесь имеется полная аналогия с магнитосферой радиопульсаров, когда силовые линии, выходящие за пределы светового цилиндра, не пересекают экваториальную плоскость (рис. 3б).

4. Заключение

Таким образом, в некоторых простейших случаях метод уравнения Грэда–Шафранова позволяет построить точное аналитическое решение задачи. В частности, использование этого подхода чрезвычайно удобно при исследовании аналитических свойств трансзвуковых течений и при определении количества необходимых граничных условий. С другой стороны, в общем случае в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова последовательной процедуры построения решения не существует. Дело в том, что положение особых поверхностей, на которых необходимо сформулировать критические условия, заранее неизвестно и должно само определяться из решения задачи. Более того, невозможно обобщить этот подход на случай неидеальных, неосесимметричных и нестационарных течений. Поэтому неудивительно, что подавляющее большинство исследователей, интересующихся прежде всего астрофизическими приложениями, в последнее время перенесли центр тяжести своих работ на совершенно другой класс уравнений, а именно на временные задачи установления, решение которых возможно лишь при использовании численных методов [19]. Хотелось бы только пожелать, чтобы при этом не были забыты ключевые физические результаты, полученные в рамках метода уравнения Грэда–Шафранова, которые, естественно, не зависят от метода вычислений.

Список литературы

1. Шапиро С, Тьюколски С *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды* Т. 1, 2 (М.: Мир, 1985)
2. *Черные дыры: мембранный подход* (Под ред. К С Торна, Р Х Прайса, Д А Мак-Дональда) (М.: Мир, 1988)
3. Гудерлей К Г *Теория околосветовых течений* (М.: ИЛ, 1960); Мизес Р *Математическая теория течений сжимаемой жидкости* (М.: ИЛ, 1961); Франкль Ф И *Избранные труды по газовой динамике* (М.: Наука, 1973)
4. Шафранов В Д *ЖЭТФ* **33** 710 (1957); *Grad H Rev. Mod. Phys.* **32** 830 (1960)
5. Соловьев Л С, в сб. *Вопросы теории плазмы* Т. 3 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1963) с. 245
6. Heinemann M, Olbert S *J. Geophys. Res.* **83** 2457 (1978); Okamoto I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **173** 357 (1975); Nitta S, Takahashi M, Tomimatsu A *Phys. Rev. D* **44** 2295 (1991)
7. Бескин В С, Парьев В И *УФН* **163** (6) 95 (1993)
8. Бескин В С, Пидопрыгора Ю Н *ЖЭТФ* **107** 1025 (1995)
9. Бескин В С *УФН* **167** 689 (1997)
10. Hunt R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **188** 83 (1979)
11. Бескин В С, Компанец Р Ю, Чеховской А Д *Письма в Астрон. журн.* **28** 616 (2002)
12. Шакура Н И *Астрон. журн.* **49** 921 (1972); Shakura N I, Sunyaev R A *Astron. Astrophys.* **24** 337 (1973); Novikov I D, Thorne K S, in *Black Holes* (Eds C DeWitt, B S DeWitt) (New York: Gordon and Breach, 1973) p. 343
13. Paczynski B, Bisnovatyi-Kogan G *Acta Astron.* **31** 283 (1981)
14. Blandford R D, Znajek R L *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **179** 433 (1977)
15. Бескин В С *УФН* **169** 1169 (1999)
16. Punsly B, Coroniti F V *Astrophys. J.* **350** 518 (1990)
17. Beskin V S, Kuznetsova I V *Nuovo Cimento B* **115** 795 (2000); astro-ph/0004021

18. Livio M, Ogilvie G I, Pringle J E *Astrophys. J.* **512** 100 (1999); Ghosh P, Abramowicz M A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **292** 887 (1997)
19. Hawley J F, Wilson J R, Smarr L L *Astrophys. J.* **277** 296 (1984); Petrich L I et al. *Astrophys. J.* **336** 313 (1989); Ustyugova G V et al. *Astrophys. J.* **439** L39 (1995); Koide S et al. *Astrophys. J.* **536** 668 (2000)

PACS numbers: 42.50.-p, 42.50.Hz, 42.65-k

Когерентное рассеяние света, стимулированное квазистатическим электрическим полем

В.Н. Очкин, С.Н. Цхай

1. Введение

В работе изучается излучение, возникающее на дипольно-запрещенном молекулярном переходе при невырожденном четырехволновом взаимодействии. Одна из волн не является световой и имеет частоту, равную или близкую к нулю. Параллельная регистрация интенсивности такого рассеяния и интенсивности антистоксова сигнала в вырожденном КАРС-процессе позволяет проводить абсолютные измерения напряженности статического поля, а поляризационные измерения — его направление. В силу когерентности и многофотонности процесса рассеяния его использование позволяет, в отличие от других известных методов штарковской спектроскопии, измерять параметры поля в газах и плазме при повышенных давлениях. Приводятся примеры измерений в газовых разрядах.

В присутствии электрического поля в изотропной среде для частиц с центральной симметрией правила отбора для дипольных переходов могут изменяться. Описание этих переходов, как продемонстрировал еще в 1932 г. Э. Кондон [1], может быть аналогичным описанию комбинационного рассеяния света при частоте рассеиваемой волны, стремящейся к нулю (постоянное поле). В дальнейшем были проведены измерения индуцированного электрическим полем поглощения инфракрасного (ИК) излучения гомоядерными молекулами H_2 , D_2 , N_2 [2–5], что позволило уточнить спектроскопические константы.

С развитием лазерной техники и нелинейной оптики появилось много работ, посвященных генерации когерентного излучения на гармониках и смешанных частотах, в том числе во внешнем электрическом поле, позволяющем ослабить альтернативный запрет. В ранних работах [6–8] была исследована генерация излучения на разностной частоте при вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР) рубинового и неодимового лазеров в H_2 в электрическом поле. Для ВКР, как известно, характерен высокий порог преобразования, и в экспериментах [6, 7] генерация возникала при давлении водорода $p > 5,5$ атм. Это обстоятельство, как и ограничение спектра лишь наиболее сильными переходами, существенно затрудняет применение ВКР для количественных измерений.

В данной работе представлены исследования индуцированного электрическим полем ИК излучения в водороде с применением бигармонической накачки колеба-

тельного перехода и применение этого излучения для измерения параметров поля, в частности, в задачах диагностики газоразрядной плазмы.

2. Методика. Экспериментальная техника

Мы будем проводить рассмотрение индуцированного электрическим полем перехода, как предлагалось и в работе [1], по аналогии с хорошо разработанной (см., например, [9]) схемой когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС). На рисунке 1 для наглядности представлены схемы переходов вырожденного (а) и невырожденного (б) КАРС, а также индуцированного полем E ($\omega = 0$) когерентного ИК перехода (в). В КАРС-спектроскопии под действием бигармонической накачки с помощью двух волн лазерного излучения ω_1 и ω_2 , таких, что разность частот $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$ соответствует частоте комбинационно-активного перехода молекулы $i \rightarrow f$, резонансно возбуждаются когерентные молекулярные колебания, на которых рассеивается одна из волн (на рис. 1а это волна с частотой ω_1). Очевидно, рассеиваемая волна может иметь и другую частоту (невырожденный КАРС, $\omega_3 \neq \omega_1$, рис. 1б). Нас интересует предельный случай с $\omega_3 = 0$ (постоянное электрическое поле, рис. 1в).

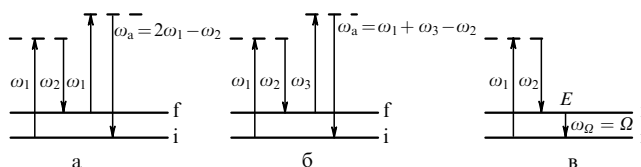


Рис. 1. Схемы переходов для вырожденного (а) и невырожденного (б) КАРС, а также для генерации ИК излучения в присутствии электрического поля (в).

Интенсивность вырожденного КАРС определяется выражением [9]

$$I_{\text{CARS}} \sim |\chi_{\text{CARS}}^{(3)}|^2 I_1^2 I_2, \quad (1)$$

где $\chi^{(3)}$ — восприимчивость третьего порядка, I_1 и I_2 — интенсивности лазерных пучков.

Продолжая аналогию с традиционной феноменологической КАРС-схемой, представим интенсивность индуцированного электрическим полем E излучения при бигармонической накачке в виде [10]

$$I_{\Omega} \sim |\chi_{\Omega}^{(3)}|^2 I_1 I_2 E^2. \quad (2)$$

Физический смысл возникновения ИК излучения достаточно прост. В отсутствие поля переход запрещен по четности, в присутствии поля в комбинирующие состояния "подмешиваются" иные электронные состояния с другой четностью [11].

Экспериментально это соотношение проверялось на установке на базе стандартного КАРС-спектрометра, описанного в [12, 13]. В качестве задающего генератора использовался Nd:YAG лазер с длиной волны излучения 1,06 мкм, частотой повторения импульсов 20 Гц и длительностью импульсов 10 нс. Излучение второй гармоники $\lambda = 532$ нм служило в качестве опорного (волна ω_1). Спектральная ширина линии $0,2 \text{ см}^{-1}$, диаметр пучка 7 мм, энергия в импульсе составляла 40 мДж.