

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Счет числа вакуумов в суперсимметричной теории Янга – Миллса

К.Г. Селиванов

Этот обзор посвящен недавнему прогрессу с вычислением индекса Виттена в $N = 1$ суперсимметричной теории Янга – Миллса. Противоречие со счетом числа вакуумов в этой теории существовало с 1982 г. Первоначальное вычисление индекса Виттена противоречило предсказаниям, основанным на картине нарушения киральной симметрии. Противоречие было разрешено в 1998 г. Виттеном, который обнаружил дополнительные компоненты пространства классических вакуумов в теории Янга – Миллса, скомпактифицированной на трехмерный тор. Мы описываем эти дополнительные компоненты и соответствующие им конфигурации калибровочных полей. Мы также обсуждаем, каким образом индекс Виттена "чувствует" конфайнмент и нарушение киральной симметрии.

PACS numbers: 02.20 – a, 11.15. – q, 11.30.Pb

Содержание

1. Введение (729).
 2. Исходное вычисление Виттена (731).
 3. Дополнительные компоненты в пространстве классических вакуумов и их вклады в индекс Виттена (733).
 4. Калибровочные поля в дополнительных вакуумах (736).
 5. Индекс Виттена и физика конфайнмента и нарушения киральной симметрии (738).
 6. Заключение (739).
 7. Приложение. Словарь (740).
- Список литературы (741).

1. Введение

Хотя суперсимметрия в нашем мире очевидным образом нарушена (известные частицы не ложатся в представления алгебры суперсимметрии), нет никаких сомнений в том, что это одна из наиболее фундаментальных составляющих нашего знания. В суперсимметрии скрыто некое волшебство. Она легко решает самые серьезные проблемы. Рассмотрим, например, энергию вакуума, т.е. сумму энергий нулевых колебаний $\sum_i(\omega_i/2)$ моря осцилляторов, составляющих теорию поля. Без учета гравитации эта энергия ненаблюдаема, но если включить гравитацию, то ее эффект трудно не заметить. Юный Вольфганг Паули в середине 20-х годов прошлого столетия

показал, что если учесть энергию вакуума в правой части уравнений Эйнштейна, то радиус Вселенной был бы не больше, чем расстояние от Земли до Луны. Что касается суперсимметрии, в теории с ненарушенной суперсимметрией вакуумная энергия бозонных осцилляторов в точности сокращается с вакуумной энергией фермионных осцилляторов, так что полная вакуумная энергия в точности равна нулю.

Другой впечатляющий пример — проблема ультрафиолетовых расходимостей. В принципе эта проблема была решена без суперсимметрии, в том смысле, что существует большой класс теорий, в которых известен рецепт, как обращаться с расходимостями и доказаны сложные теоремы о непротиворечивости соответствующих процедур. Тем не менее весьма вдохновляет тот факт, что в теории с суперсимметрией ультрафиолетовые расходимости, благодаря сокращению между бозонными и фермионными вкладами, всегда более мягкие, а иногда и просто отсутствуют, как, например, в максимально суперсимметричной теории Янга – Миллса. Мы, однако, не будем касаться ультрафиолетовых расходимостей в этом обзоре.

Алгебраическое объяснение, почему энергия суперсимметричного вакуума равна нулю, весьма прозрачно. Гильбертово пространство \mathcal{H} суперсимметричной теории состоит из бозонных и фермионных состояний, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Существует оператор суперзаряда Q , действующий в гильбертовом пространстве. Он превращает бозонные состояния в фермионные, и наоборот. Гамильтониан имеет вид (см., например, обзор [1])

$$H = Q^2. \quad (1)$$

Будучи квадратом эрмитова оператора, гамильтониан положительно определен. Все состояния в теории имеют положительную энергию. Если состояние в теории супер-

К.Г. Селиванов. Институт теоретической и экспериментальной физики,
117218 Москва, ул. Б. Черемушкинская 25, Российская Федерация
Тел. (095) 123-83-93
E-mail: selivano@heron.itep.ru

Статья поступила 12 сентября 2001 г.

симметрично, т.е. аннигилируется действием Q , тогда оно также аннигилируется действием H . Используя положительную определенность нормы в гильбертовом пространстве, легко доказать обратное утверждение, а именно, что любое состояние с нулевой энергией аннигилируется действием Q . Таким образом, при условии, что суперсимметрия не нарушена, основное состояние обязательно имеет нулевую энергию.

Еще одно замечательное свойство суперсимметрии заключается в том, что в суперсимметрических теориях очень часто удается получить точные результаты там, где в теориях без суперсимметрии можно только строить предположения или пользоваться упрощенной моделью. Киральные конденсаты и точные β -функции являются яркими примерами такого типа (см., например, обзор [2]).

Одним из эффективных инструментов в суперсимметрических теориях является индекс Виттена. Он был введен в [3] специально с целью подсчета числа вакуумов в суперсимметрических теориях и, таким образом, для решения вопроса о том, нарушена ли суперсимметрия или нет. Определение индекса Виттена очень просто. Индекс определяется как след оператора $(-1)^F$ по пространству состояний нулевой энергии (т.е. по пространству суперсимметрических вакуумов). Оператор $(-1)^F$ по определению равен +1 на бозонных состояниях и -1 на фермионных, так что

$$I_W = \text{tr}_{\mathcal{H}_0} (-1)^F = n_B - n_F, \quad (2)$$

где \mathcal{H}_0 — пространство состояний нулевой энергии, а n_B и n_F — числа бозонных и фермионных вакуумов, соответственно. Таким образом, при ненулевом I_W в теории обязательно есть суперсимметрические вакуумы и, следовательно, суперсимметрия не нарушена. Если $I_W = 0$, это не значит, что суперсимметрия нарушена, поскольку это может быть при $n_B = n_F \neq 0$. В этом случае можно попытаться использовать более тонкую версию индекса Виттена, например, вычислять след по какому-нибудь суперсимметрическому подпространству в \mathcal{H}_0 . В некоторых случаях можно привлечь дополнительные аргументы, позволяющие изучать отдельно n_B и n_F .

Эффективность индекса Виттена обусловлена его инвариантностью относительно широкого класса деформаций теории. Инвариантность индекса Виттена основана на том, что, вследствие соотношения (1), состояния с ненулевой энергией $E \neq 0$ спарены действием Q , так что для каждого бозонного состояния $|a\rangle$ существует фермионное состояние $|b\rangle$, такое, что

$$|b\rangle = \frac{Q}{\sqrt{E}} |a\rangle, \quad |a\rangle = \frac{Q}{\sqrt{E}} |b\rangle. \quad (3)$$

Таким образом, если в процессе деформации энергия некого бозонного состояния с ненулевой энергией уменьшается и в некоторый момент это состояние становится вакуумом, то же самое происходит и с его фермионным супер搭档ом, причем индекс Виттена не меняется. И наоборот, если в некоторой точке деформации бозонное вакуумное состояние получает положительную энергию и, таким образом, перестает быть вакуумом, оно обязательно сопровождается фермионным вакуумным состоянием, и индекс Виттена опять не меняется. В аргументации такого типа надо только иметь в виду возможность, что, в принципе, вакуумное состояние может "уплыть"

на бесконечность (или "приплывать" с бесконечности) в конфигурационном пространстве. Такое состояние остается вакуумом до тех пор, пока не исчезнет вообще, так что в этом случае возможно изменение индекса Виттена. Такая ситуация исключена, когда потенциальная энергия растет на бесконечности в конфигурационном пространстве.

В порядке отступления заметим, что ввиду "спаривания" (3) определение (2) может быть переписано следующим образом:

$$I_W = \text{tr}_{\mathcal{H}} (-1)^F \exp(-\beta H), \quad (4)$$

где след теперь берется по всему гильбертову пространству \mathcal{H} (вклады бозонных и фермионных состояний ненулевой энергии сокращают друг друга в (4)). Правая часть (4) очень похожа на статистическую сумму, единственная разница — присутствие оператора $(-1)^F$ под следом. Это выражение иногда называют *градуированной* статистической суммой. Она может быть удобным образом переписана в виде функционального интеграла, причем β превращается в период по евклидову времени, а интегрирование по фермионным полям производится с периодическими по β условиями (в обычной статистической сумме фермионные поля удовлетворяют антипериодическому условию по евклидову времени).

В этом месте важно сказать об одной тонкости. Переход от (2) к (4) корректен только в теории с дискретным спектром, в противном случае бозонные и фермионные состояния с ненулевой энергией, будучи спаренными, могут, тем не менее, иметь разные плотности состояний, что приводит к отличию (4) от (2). В этом случае (4) должно совпадать с (2) только в пределе $\beta \rightarrow \infty$ (см. детальное обсуждение в [4]).

Чтобы избежать усложнений такого рода, обычно определяют теорию на пространственном торе так, чтобы спектр теории был дискретным (при этом важно, что суперсимметрия на торе не нарушена, это связано с тем фактом, что на торе не нарушена трансляционная инвариантность). Все состояния, имеющие нулевую энергию при любом конечном объеме, будут иметь нулевую энергию и в бесконечном объеме, так что суперсимметрический вакуум в конечном объеме переходит в суперсимметрический вакуум в бесконечном объеме (при условии, что ни один из них не упывает на бесконечность, как мы обсуждали выше). Дополнительные вакуумные состояния могут, в принципе, появляться в бесконечном объеме, поскольку возможно, что существует состояние, энергия которого, будучи положительной при любом конечном объеме, асимптотически зануляется в пределе бесконечного объема. Но подобные состояния опять-таки должны быть спарены, и их вклад не может изменить индекс.

Далее используется инвариантность индекса Виттена, который, в частности, не должен зависеть от размера тора. Можно взять тор маленького радиуса (много меньше, чем $\Lambda_{\text{QCD}}^{-1}$). Следуя стандартной логике компактификации, мы получаем теорию с двумя шкалами: жесткие моды, которые описываются полями с нетривиальной зависимостью от пространственных координат, и мягкие моды, которые описываются полями координат. В пределе малого размера тора жесткие моды отцепляются, и остается посчитать число вакуумов в суперсимметрической квантовой механике на пространстве мягких мод. Возможно дальнейшее упрощение

щение. Поскольку энергетический спектр полученной квантовой механики дискретен, можно квантовать не все пространство мягких мод, а только пространство классических вакуумов, и затем просто посчитать размерность полученного гильбертова пространства (со знаком $(-1)^F$).

Таким способом I_W был посчитан Виттеном в 1982 г. в исходной работе [3]. Он рассмотрел, в частности, $N = 1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса, т.е. теорию с лагранжианом

$$L = \frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{tr} \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} \bar{\lambda} i\Gamma \cdot D\lambda \right) + \frac{\theta}{8\pi^2} \int \operatorname{tr} F \wedge F, \quad (5)$$

где λ — это фермион положительной спиральности в присоединенном представлении, $\bar{\lambda}$ — соответствующий сопряженный фермион. Было получено, что $I_W = r + 1$ для любой калибровочной группы, где r — ранг калибровочной группы.

В этот момент возникает противоречие с другими фактами, известными в $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Напомним, что в теории на классическом уровне существует так называемая R-симметрия. Это $U(1)$ группа, которая действует на глюонные поля киральной фазовым преобразованием. Данная $U(1)$ группа нарушена аномалией, так что только ее дискретная подгруппа Z_{2h} выживает как точная квантовая симметрия на операторном уровне (h — так называемое дуальное число Кокстера, важная целочисленная характеристика простой группы Ли). Здесь $2h$ появляется, поскольку это индекс оператора Дирака на глюино на фоне инстантона, так что 'т хофтovская инстантонная вершина ([5], см. также обзор [6]) включает $2h$ глюинных полей положительной киральнойности. Глюино положительной киральнойности имеет R-заряд -1 , так что 'т хофтovская вершина нарушает $U(1)$ группу, но оставляет ненарушенной ее подгруппу Z_{2h} .

Z_{2h} действует как точная симметрия в гильбертовом пространстве теории, но вакуумы $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса не инвариантны относительно ее действия. Z_{2h} спонтанно нарушена до Z_2 выбором вакуумного состояния (Z_2 действует на глюино как -1 и не может быть спонтанно нарушена, поскольку совпадает с 2π -лоренцевым поворотом). Параметром порядка, различающим различные вакуумы, является фаза глюинного кирального конденсата [7–10]:

$$\langle e^{\alpha\beta}\lambda_\alpha^\alpha\lambda_\beta^\alpha \rangle_k = \text{const } A_{\text{QCD}}^3 \exp\left(\frac{2\pi ik}{h}\right). \quad (6)$$

Смысл уравнения (6) в том что в k -м вакууме $\lambda\lambda$ развивает конденсат, значение которого зависит от k .

Таким образом, имеется h различных вакуумов¹. Можно привести аргументы в пользу того, что все эти

вакуумы бозонные (более точно, все они имеют одинаковое число $(-1)^F$). Это, на самом деле, более или менее очевидно из того факта, что благодаря конфайнменту, все фермионы отделены от вакуума массовой щелью. Таким образом, из физики в бесконечном объеме мы должны констатировать, что $I_W = h$. Это явное противоречие, поскольку для многих групп $h > r + 1$. На самом деле, уже в исходной работе [3] в 1982 г. Виттен подчеркнул, что результат $I_W = r + 1$ в случае ортогональных групп противоречит картине нарушения киральной симметрии.

Это противоречие оставалось неразрешенным довольно длительное время. Выход был найден совсем недавно, в 1998 г., самим Виттеном [11] (см. также прекрасный "римейк" [12] исходной работы [3]), и это вызвало некоторый прогресс в классической теории групп (!) [13, 14], а также привело к некоторому новому знанию в теории струнной компактификации [15, 16].

В разделе 2 мы приводим первоначальный вывод I_W [3]. В разделе 3 мы объясняем, как было разрешено противоречие. Раздел 4 посвящен явным конструкциям конфигураций калибровочных полей, возникающих при разрешении противоречия. В разделе 5 мы обсуждаем, каким образом физика конфайнмента и нарушения киральной симметрии в $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса отражается в (уточненной версии) индекса Виттена. Раздел 6 содержит заключение. В приложении приведен словарь, включающий математические определения, которые могут быть полезны для читателя-физика.

2. Исходное вычисление Виттена

Следуя обсуждению в предыдущем разделе, рассмотрим $N = 1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса на $T^3 \times R$, где R — ось времени, а T^3 — маленький пространственный тор с периодами L . Будем работать в калибровке $A_0 = 0$.

Границные условия, которые следует наложить на калибровочные потенциалы A на T^3 , классифицируются 'т хофтovскими магнитными потоками [17] (см. раздел 5). Однако естественно ожидать, что физика в бесконечном объеме не должна зависеть от типа граничных условий. Заметим, между прочим, что зависимость (уточненной версии) индекса Виттена от магнитных и электрических потоков прекрасно согласуется с конфайнментом и киральным нарушением симметрии [12]. Мы обсудим это в разделе 5, а сейчас остановимся на периодических граничных условиях:

$$\begin{aligned} A_i(x+1, y, z) &= A_i(x, y, z), \\ A_i(x, y+1, z) &= A_i(x, y, z), \\ A_i(x, y, z+1) &= A_i(x, y, z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим пространство классических вакуумов. Очевидно, оно состоит из калибровочных потенциалов с нулевой кривизной,

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j] = 0 \quad (8)$$

по модулю калибровочных преобразований на T^3 .

Такие калибровочные поля в случае связной, односвязной, компактной калибровочной группы характери-

¹ Существенно, что в бесконечном объеме нет туннелирования между вакуумами с разными фазами кирального конденсата, вот почему в каждом из них Z_{2h} симметрия спонтанно нарушена. В этом отношении вакуумы с разным значением фазы кирального конденсата отличаются от классических вакуумов, классифицирующихся элементами $\pi_3(G)$. Последние связаны инстантонами и не выживают как квантовые вакуумы. Вместо этого, они дают единственный вакуум в каждом секторе суперотбора, параметризованном знаменитым θ -углом.

зуются классами сопряженности монодромий (в физических терминах, вильсоновскими петлями) по трем независимым окружностям на T^3 :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= P \exp \left[\int_0^L A_1(x, 0, 0) dx \right], \\ \Omega_2 &= P \exp \left[\int_0^L A_2(0, y, 0) dy \right], \\ \Omega_3 &= P \exp \left[\int_0^L A_3(0, 0, z) dz \right].\end{aligned}\quad (9)$$

Вследствие условия нулевой кривизны (8) монодромии не зависят от выбора пути и попарно коммутируют. Калибровочные преобразования (периодические) действуют на Ω сопряжениями.

Естественно предположить, что три коммутирующих групповых элемента Ω_i , $i = 1, 2, 3$, могут быть представлены как экспоненты трех коммутирующих Ли алгебраических элементов:

$$\Omega_i = \exp(2\pi i C_i), [C_i, C_j] = 0, i, j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Здесь C_i , $i = 1, 2, 3$, являются координатами на пространстве классических вакуумов. Они, очевидно, отождествляются с x, y, z -независимыми гармониками периодических калибровочных потенциалов, $A_j = (2\pi i/L) C_j$, $j = 1, 2, 3$. Поскольку C_j , $j = 1, 2, 3$ — суть коммутирующие элементы алгебры Ли, они могут быть одновременно приведены x, y, z -независимым калибровочным преобразованием в так называемую картановскую подалгебру, т.е. максимальную коммутативную подалгебру алгебры Ли.

Из формулы (10) ясно, что C_i , $i = 1, 2, 3$, на самом деле принадлежит картановской подалгебре, профакторизованной по так называемой решетке корней (поскольку к C_i можно добавить любой элемент α^v , где $\exp(2\pi i \alpha^v) = 1$, не меняя Ω_i). Можно сказать иначе: существуют калибровочные преобразования, которые зависят от x, y, z , но переводят x, y, z -независимые калибровочные потенциалы в x, y, z -независимые же; такие калибровочные преобразования добавляют к C_i элементы вида α^v . Таким образом, C_i для каждого $i = 1, 2, 3$ принадлежит картановскому тору T_C .

Даже после приведения калибровочных потенциалов на картановский тор, остаются некоторые калибровочные преобразования, которые следует учесть, а именно, преобразования, представляющие группу Вейля W — дискретную группу, действующую на картановском торе. Например, в случае $SU(N)$, W действует на диагональные матрицы перестановкой матричных элементов. Так что окончательно бозонная компонента пространства классических вакуумов имеет вид

$$\mathcal{M} = \frac{T_C \times T_C \times T_C}{W}. \quad (11)$$

Заметим, что вместо того, чтобы рассматривать функции на \mathcal{M} , часто удобнее рассматривать W -инвариантные функции на $T_C \times T_C \times T_C$.

Учтем теперь фермионы. Состав полей $N = 1$ суперсимметричной теории Янга — Миллса включает калибровочные потенциалы (глюоны) A_μ , которые являются один-формами со значениями в присоединенном представлении, глюино положительной киральности λ_α , $\alpha = 1, 2$ и их комплексное сопряжение $\bar{\lambda}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, все со

значениями в присоединенном представлении. По суперсимметрии очевидно, что фермионная часть пространства классических вакуумов порождается x, y, z -независимыми λ_α , $\alpha = 1, 2$, и $\bar{\lambda}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, со значениями в картановской подалгебре. Заметим, что пространство, порожденное λ_α и $\bar{\lambda}_\alpha$, является скорее фазовым пространством (а не лагранжевым), поскольку $\bar{\lambda}_\alpha$ канонически сопряжено к λ_α . При квантовании надо рассматривать только функции от, скажем, λ_α , $\alpha = 1, 2$. Кроме того, как следствие калибровочной симметрии, надо рассматривать только W -инвариантные функции от λ_α , $\alpha = 1, 2$. Очевидно, из-за грассмановой природы λ_α любая функция от λ_α является, на самом деле, полиномом, так что следует рассматривать только W -инвариантные полиномы.

Существует очевидный инвариант

$$v = \varepsilon^{\alpha\beta} \delta_{ab} \lambda_\alpha^a \lambda_\beta^b, \quad (12)$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — стандартный антисимметричный тензор, а δ_{ab} — ограничение формы Киллинга на картановскую подалгебру. Полиномы от v дают $r + 1$ W -инвариантных функций, где r (rank) — ранг калибровочной группы, который, по определению, есть размерность картановской подалгебры. Можно доказать, что не существует других W -инвариантных функций λ_α , $\alpha = 1, 2$. Это более или менее понятно: высшие симметричные инвариантные тензоры типа d^{abc} не работают вследствие грассмановой природы λ_α (см. строгое доказательство, например, в приложении к [13]).

Ограничивающая гамильтониан $N = 1$ суперсимметричной теории Янга — Миллса на пространство не зависящих от x, y, z , принимающих значения в картановской подалгебре A_j , λ_α , $\bar{\lambda}_\alpha$, несложно получить эффективный гамильтониан

$$H \propto \frac{\partial}{\partial A_j^a} \frac{\partial}{\partial A_j^a}, \quad (13)$$

т.е. просто лапласиан на $T_C \times T_C \times T_C$. Он происходит из члена E^2 (E — электрическое поле) в стандартном гамильтониане Янга — Миллса. Фермионы входят в лагранжиан с первой производной по времени, так что в эффективном гамильтониане (13) фермионов не остается. Члены с первой производной по времени в лагранжиане определяют канонический антикоммутатор

$$\{\bar{\lambda}_\alpha^a, \lambda_\beta^b\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{ab}, \quad (14)$$

так что можно взять λ_α в качестве операторов рождения и $\bar{\lambda}_\alpha$ в качестве операторов уничтожения.

Здесь уместно сделать следующее предостережение. На самом деле надо не просто ограничить гамильтониан на пространство классических вакуумов, но вычислить эффективный гамильтониан в рамках приближения Борна — Оппенгеймера. В рассматриваемом случае эти две процедуры дают один и тот же результат — уравнение (13). Это не так в случае, когда включена киральная материя (см. детальное обсуждение в работах [18, 19]).

Понятно, что в полученной квантовой механике волновая функция вакуума ψ была бы полиномом по v с зависимыми от A_j^a коэффициентами, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{\partial}{\partial A_j^a} \frac{\partial}{\partial A_j^a} \psi = 0. \quad (15)$$

Единственным решением уравнения Лапласа на торе является константа, поэтому коэффициенты ψ на самом деле от A_j^a не зависят. То есть остаются только полиномы от v с постоянными коэффициентами, так что имеется ровно $r + 1$ бозонных вакуумов (более точно, все вакуумы имеют одно и то же число $(-1)^F$, поскольку v из (12) является бозонным оператором).

Таким образом, согласно описанному рассмотрению, индекс Виттена равен $r + 1$ (точнее, он равен $r + 1$ с точностью до знака, см. обсуждение в разделе 5). Как объяснялось во введении, это значение противоречит другим фактам, известным в данной теории. Мы что-то упустили из виду.

Просматривая приведенный выше вывод, легко увидеть одно возможное упущение: пространство \mathcal{M} (11) имеет особенности. В самом деле, на некоторых подмногообразиях в $T_C \times T_C \times T_C$ группа Вейля действует тривиально. Например, в случае $SU(N)$ это подмногообразия, на которых совпадают n -е и $(n+1)$ -е собственные значения у всех трех диагональных матриц A_j . Указанные подмногообразия выделены также тем, что на них ненарушенная калибровочная группа становится неабелевой (в точке общего положения это $U(1)^r$). На этих многообразиях некоторые дополнительные бозонные и фермионные моды имеют нулевую энергию, и построенное выше эффективное описание разрушается. Данное направление было одним из основных в попытке разрешить описанное противоречие.

Можно, однако, утверждать, что указанные особенности не отвечают за противоречие. Один из возможных аргументов основан на том, что в случае $SU(N)$ можно вычислить индекс, используя отличные от (7) граничные условия, при которых указанные особенности не возникают. А именно, можно вычислить индекс в присутствии единичного т'хоофтовского магнитного потока, скажем, в плоскости xy на торе. Из общих соображений (см. также раздел 5) можно ожидать, что индекс не зависит от выбора магнитного потока. Технически подсчет числа вакуумов в этом случае сильно отличается от подсчета, приведенного выше: не существует непрерывного пространства классических вакуумов, существует лишь $r + 1$ изолированных классических вакуумов, что, тем не менее, показывает, что $I_N = r + 1$. Мораль состоит в том, что подсчет, приведенный выше, был корректен несмотря на наличие сингулярностей, по крайней мере в $SU(N)$ -случае.

Более прямая аргументация основана на недавнем прогрессе (см. [4, 20–28] и более ранние работы [29]) касательно индекса Виттена в несколько отличной ситуации. Рассмотрим суперсимметричную теорию Янга–Миллса, пространственно редуцированную на $(0+1)$ измерение. Размерная редукция предполагает, что поля просто считаются не зависящими от части координат. В результате получается квантовая механика с некомпактными направлениями (нет факторизации по решетке корней!). В этом случае непрерывный спектр начинается прямо от нулевой энергии. Тем не менее можно задать вопрос, существует ли нормируемое состояние с нулевой энергией. В максимально суперсимметричной теории Янга–Миллса такое состояние необходимо по дуальности М-теории и ПА струны [39–43]. Из совокупности цитированных новых результатов следует, что квантовая механика, получаемая редукцией из $N = 1$ $d = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, не содержит нормиро-

ванием нулевой моды. В приложении к нашей проблеме это значит, что не существует вакуумных состояний, локализованных вблизи особенностей на \mathcal{M} (11). Следует также отметить, что вакуумные волновые функции, описанные выше, не перестают быть нормируемыми вблизи этих особенностей (см. обсуждение в [12, с. 46–47]).

Так как же все-таки разрешается противоречие? Оказывается [11], что в тех случаях, когда $n > r + 1$, пространство классических вакуумов имеет дополнительные несвязные компоненты, которые дают дополнительный вклад в индекс. Естественное предположение (10) оказывается ошибочным. Существуют тройки групповых элементов, которые попарно коммутируют, но не могут быть одновременно приведены на картановский тор сопряжениями (или, что то же самое, не могут быть представлены как экспоненты от коммутирующих Ли алгебраических элементов)². В следующем разделе мы описываем эти тройки и объясняем, каким образом вклады различных компонент пространства классических вакуумов суммируются в правильное значение индекса Виттена.

3. Дополнительные компоненты в пространстве классических вакуумов и их вклады в индекс Виттена

Вернемся к началу предыдущего раздела и пройдем его вплоть до уравнения (10). В этот момент мы должны осознать, что существуют такие коммутирующие тройки, которые не могут быть продеформированы одна в другую, и, соответственно, существуют различные несвязные компоненты пространства классических вакуумов. Читатель может представить себе картину с потенциальной энергией, обращающейся в нуль в различных несвязных областях в пространстве всех полей. Мы должны посчитать число вакуумов в каждой компоненте. Простейшая и наибольшая компонента пространства классических вакуумов характеризуется свойством (10). Ее бозонная часть описывается уравнением (11). Ее вклад в индекс равен $r + 1$.

До того, как описывать общую ситуацию с дополнительными компонентами, рассмотрим пример нетривиальной тройки и покажем, каким образом ее вклад разрешает парадокс.

По-видимому, простейший случай, когда нетривиальная тройка возможна, это $Spin(7)$ (мы говорим $Spin(7)$ вместо $SO(7)$, чтобы исключить ситуацию, когда монодромии могут коммутировать на элемент центра; с тем же успехом можно работать с $SO(7)$, требуя, чтобы в любом направлении был нулевой магнитный момент). Для $Spin(7)$ существует единственная (с точностью до сопряжений) нетривиальная тройка. Ее можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \gamma_{1234}, \\ \Omega_2 &= \gamma_{1256}, \\ \Omega_3 &= \gamma_{1357},\end{aligned}\tag{16}$$

где использовано обозначение

$$\gamma_{ijk\dots} = \gamma_i \gamma_j \gamma_k \gamma_l \dots\tag{17}$$

²Как обсуждается ниже, два коммутирующих элемента всегда могут быть приведены на картановский тор.

и γ_i , $i = 1, \dots, 7$ – гамма-матрицы. Ω в (16) взаимно коммутируют, но не могут быть приведены на картановский тор (не могут быть представлены в виде экспонент от взаимно коммутирующих Ли алгебраических элементов, см., например, простое доказательство данного факта в [31]). Эта тройка полностью нарушает $\text{Spin}(7)$, в том смысле, что ни один из генераторов $\text{Spin}(7)$ не коммутирует со всеми тремя Ω . Следовательно, такая тройка представляет единственный дополнительный изолированный классический вакуум, поэтому соответствующий вклад в индекс равен 1. Таким образом, суммарно мы получаем $I_W = r + 1 + 1 = 5$, что есть в точности h для $\text{Spin}(7)$.

Существование таких троек и пример, приведенный выше, были рассмотрены в [30]. В работе [11] было осознано, что нетривиальные тройки разрешают парадокс с подсчетом числа вакуумов. Там же было проведено правильное вычисление для случая ортогональных групп. Случай G_2 был разобран в [31]. Полная классификация таких троек была проведена в [13] и в [32]. Те же результаты были получены другим методом и были развиты в некоторых направлениях в работе [14]. В частности, в [14] были классифицированы тройки, коммутирующие с точностью до элементов центра, и было вычислено число Черна–Саймонса для нетривиальных троек.

Обратимся к общей теории нетривиальных троек. Заметим сначала, что два коммутирующих групповых элемента в связной, односвязной, компактной калибровочной группе всегда могут быть одновременно приведены с помощью сопряжений на картановский тор. Это гарантируется теоремой Ботта, которая утверждает, что централизатор³ любого элемента связной, односвязной, компактной группы связан. Предположим, что Ω_1 лежит в картановском торе (любой элемент группы может быть приведен в картановский тор). Ω_2 должно лежать в централизаторе Ω_1 (поскольку они коммутируют). Ω_2 может быть приведена на картановский тор в централизаторе. Тогда, ввиду того, что картановский тор всей группы принадлежит централизатору Ω_1 , и, поскольку централизатор связан, обе Ω_1 и Ω_2 оказались приведены на картановский тор всей группы.

Обратимся к тройкам. Возьмем Ω_3 в картановском торе. Ω_1 и Ω_2 должны лежать в централизаторе Ω_3 , который, по теореме Ботта, связан. Этот централизатор состоит из произведения некоторого числа $U(1)$ групп и полупростой части G_{Ω_3} . Генераторы $U(1)$ групп относятся к картановской подалгебре исходной группы, так что эти $U(1)$ очевидным образом несущественны для построения нетривиальных троек. Теперь, если полупростая часть G_{Ω_3} односвязна, тогда, будучи парой коммутирующих элементов в связной, односвязной, компактной группе, Ω_1 и Ω_2 могут быть одновременно сопряжены на картановский тор, поэтому нетривиальной тройки не получается.

Значит, мы должны выбрать Ω_3 таким образом, чтобы полупростая часть ее централизатора G_{Ω_3} была неодносвязной. Такая группа может быть рассмотрена как фактор односвязной группы \tilde{G}_{Ω_3} по какой-нибудь подгруппе D ее центра. Нетривиальная тройка возникает, когда Ω_1 и Ω_2 , как элементы \tilde{G}_{Ω_3} , коммутируют на

элемент D :

$$\Omega_1 \Omega_2 = \varepsilon \Omega_2 \Omega_1, \quad \varepsilon \in D. \quad (18)$$

Два таких элемента называются гейзенберговской парой. Ясно, что они коммутируют в G_{Ω_3} , и, следовательно, Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 коммутируют в исходной группе. Они не могут быть одновременно сопряжены на картановский тор, поскольку Ω_1 и Ω_2 не могут быть сопряжены на картановский тор в централизаторе Ω_3 .

Опишем теперь, при каком выборе Ω_3 полупростая часть ее централизатора будет неодносвязной. Чтобы это сделать, нам потребуется некоторый формализм из теории групп. Ниже, по мере необходимости, мы будем сообщать некоторые сведения из теории групп. Основные определения собраны также в словаре в приложении.

Во-первых, нам будут нужны так называемые расширенные диаграммы Дынкина (см. рис.). Узлы обычных диаграмм Дынкина соответствуют так называемым простым корням, которые образуют базис в пространстве корней (пространство корней — это пространство линейных форм на картановской подалгебре). Расширенная диаграмма Дынкина включает также узел, соответствующий старшему корню, взятому с обратным знаком, так что всего диаграмма Дынкина содержит $r + 1$ узел, где $r = \text{rank}(G)$. Существует естественное отображение из пространства корней в картановскую подалгебру, которое отображает корни в кокорни. Дуальные метки Дынкина являются коэффициентами разложения кокорня старшего корня по простым кокорням. Дуаль-

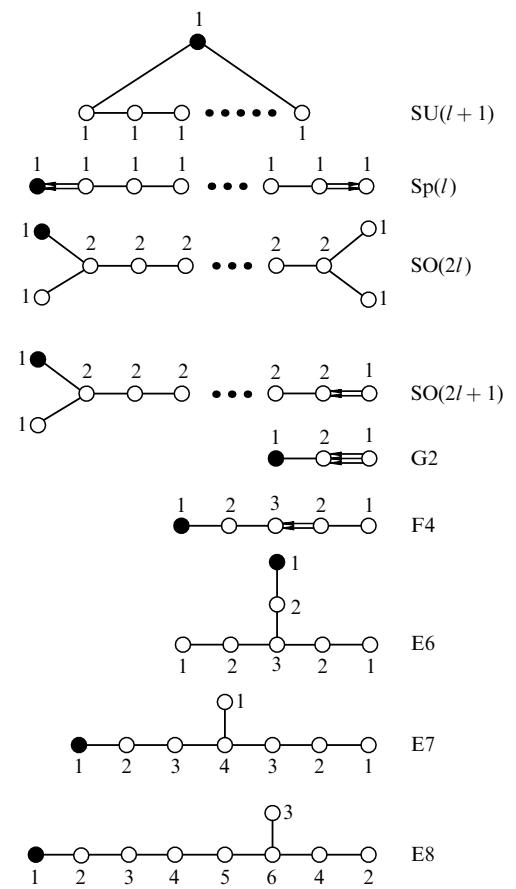


Рис. Расширенные диаграммы Дынкина с дуальными метками Дынкина. Выделены узлы, отвечающие старшему корню.

³ Централизатором группового элемента Ω называется подгруппа, коммутирующая с Ω .

ные метки Дынкина на узле, отвечающем самому кокорню старшего корня, по определению, равны 1. Заметим, между прочим, что дуальное число Кокстера h равно сумме дуальных меток Дынкина. Из рисунка немедленно видно, что для $SU(N)$ и для $SP(N)$ случаев $h = r + 1$. В других случаях $h > r + 1$, поскольку некоторые из дуальных меток Дынкина имеют нетривиальные (т.е. отличные от 1) делители. Эти нетривиальные делители лежат в основе конструкции нетривиальных троек.

Чтобы получить нетривиальную тройку, Ω_3 следует выбрать в виде

$$\Omega_3 = \exp \left[2\pi i \sum_{j=1}^{\mu(m)} C_j \omega_j \right], \quad (19)$$

где сумма берется по узлам с дуальными метками Дынкина, имеющими общий делитель m ; $\mu(m)$ — число таких узлов; ω_j — так называемый фундаментальный ковес, соответствующий j -му узлу. Фундаментальные ковеса образуют базис в картановской подалгебре, определенный так, что

$$\langle \alpha_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad (20)$$

где α_i — простые корни и \langle , \rangle — спаривание между пространством корней и картановской подалгеброй. Коэффициенты C_j , $C_j \geq 0$, удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\mu(m)} a_j C_j = 1, \quad (21)$$

где a_j — метки Дынкина, т.е. коэффициенты в разложении старшего корня по простым корням. Элемент (19), построенный по узлам с общим делителем m , был назван в [13] m -исключительным элементом.

При коэффициентах C_j общего положения централизатор Ω_3 имеет вид

$$U(1)^{\mu(m)-1} \times \frac{SU(N_1) \times \dots \times SU(N_l)}{D}, \quad (22)$$

где D — подгруппа центра,

$$D \subset Z_{N_1} \times \dots \times Z_{N_l}. \quad (23)$$

Возможно следующее описание полупростой части централизатора. Можно доказать [33], что его диаграмма Дынкина получается из расширенной диаграммы Дынкина (см. рис.) вычеркиванием узлов, содержащихся в сумме (19). Например, вычеркивание узлов, имеющих общий делитель 4, из расширенной диаграммы Дынкина группы E_8 дает диаграмму Дынкина группы $SU(2) \times SU(4) \times SU(4)$.

Структура подгруппы D группы центра может быть определена из следующего общего факта: $\pi_1(G) = P^\vee(G)/Q^\vee(G)$, где $P^\vee(G)$ — решетка ковесов, а $Q^\vee(G)$ — решетка кокорней. Например, не так сложно увидеть, что π_1 централизатора Ω_3 представляет собой произведение $Z^{\mu(m)-1}$ и циклической группы порядка m . $Z^{\mu(m)-1}$, разумеется, относится к абелевой части централизатора, в то время как циклическая группа порядка m — не что иное, как D . Можно также увидеть, что D такова, что если забыть обо всех Z_{N_j} кроме одного в (23), то D проектируется на этот один эпиморфно (т.е. "на").

Как объяснялось выше, для того, чтобы получить нетривиальную тройку, две другие монодромии Ω_1 , Ω_2

берутся в виде гейзенберговской пары (18). Когда ε в (18) является порождающим элементом⁴ D , такая пара единственна (с точностью до сопряжений) и полностью нарушает полупростую часть централизатора (22) (т.е. ни один из генераторов полупростой части не коммутирует с Ω_1 и Ω_2). Следовательно, нетривиальная тройка Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 в случае общего положения нарушает исходную группу до $U(1)^{\mu(m)-1}$. Такая тройка — построенная на узлах с дуальными метками Дынкина, делящимися на m , была названа в [13] m -исключительной.

Теперь понятно, что пространство модулей m -исключительных троек — это $(\mu(m) - 1)$ -мерное пространство, параметризованное коэффициентами C_j в (19). Та же логика, что и в разделе 2, приводит нас к заключению, что это на самом деле

$$\frac{T^{\mu(m)-1} \times T^{\mu(m)-1} \times T^{\mu(m)-1}}{Z_{\mu(m)}}, \quad (24)$$

где $Z_{\mu(m)}$ появилось, поскольку это часть группы Вейля исходной группы, действующая на $U(1)^{\mu(m)-1}$. Тогда счет, аналогичный проведенному в разделе 2, показывает, что данная компонента пространства классических вакуумов дает $\text{rank } + 1 = \mu(m)$ квантовых вакуумов⁵.

Покажем теперь, что суммирование всех дополнительных вкладов дает как раз h вакуумов для всех калибровочных групп. Число m -исключительных троек равно $P(m)$, где $P(m)$ — число натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m . $P(m)$ появляется, поскольку это число порождающих элементов в группе D (заметим, что тройки с гейзенберговскими парами Ω_1 , Ω_2 , коммутирующими на не производящий элемент D , появляются в m -исключительных троеках с меньшим m). Как мы видели, m -исключительные тройки дают $\mu(m)$ квантовых вакуумов, где, напомним, $\mu(m)$ — число дуальных меток Дынкина с делителем m . Окончательно, суммируя все вклады, получаем правильное число вакуумов:

$$\sum_m P(m) \mu(m) = \sum_i a_i^\vee = h. \quad (25)$$

Последнее равенство — просто определение h , а первое — следствие того факта из теории чисел, что для любого натурального числа a

$$a = \sum_{m|a} P(m)$$

($m|a$ означает, что m является делителем a).

В принципе, это конец истории с противоречием. Физику, однако, может быть интересно, как выглядят калибровочные потенциалы в нетривиальных вакуумах. Этот сюжет был проанализирован в [35, 36] и рассматривается в следующем разделе. Те, кто не заинтересован в явных конструкциях, могут перейти сразу к разделу 5.

⁴ Элемент циклической группы называется порождающим, если его степени порождают все элементы циклической группы; например, в Z_l с простым l все элементы порождающие.

⁵ Разумеется, при специальном выборе коэффициентов C_j в (19) можно нарушить исходную группу до подгруппы ранга $\mu(m) - 1$, большей, чем $U(1)^{\mu(m)-1}$. Это, однако, не должно повлиять на число вакуумов (см. обсуждение в конце раздела 2). Заметим также, что мы молчаливо предполагаем, что все вакуумы — бозонные, хотя, в принципе, это требует отдельного анализа (см. раздел 5).

4. Калибровочные поля в дополнительных вакуумах

Построение в работе [36] было основано на следующей логике: понятно, что калибровочные потенциалы существенно нетривиальны только в $SU(N_j)$ факторах в (22), поэтому описываются $SU(N_j)$ калибровочные поля и способ, каким соответствующая $SU(N)$ вложена в исходную группу. Это напоминает построение инстантонов, где описывается $SU(2)$ инстантон и способ, каким $SU(2)$ вкладывается в группу.

Монодромия Ω_3 (19) раскладывается как некий элемент $U(1)^{\mu(m)-1}$ и элемент центра в произведении $SU(N_j)$ в (22). На самом деле, можно понять, что соответствующий элемент центра тривиален (равен 1) во всех $SU(N_j)$, кроме той, которая содержит (минус) кокорень старшего корня, где это порождающий элемент центра. Глядя на диаграммы Дынкина (см. рис.), легко убедиться, что в случае m -исключительного элемента Ω_3 , подгруппа центризатора, содержащая (минус) кокорень старшего корня, всегда $SU(m)$. Поэтому в терминах произведения (22), опуская несущественную $U(1)^{\mu(m)-1}$ часть, раскладываем Ω_3 следующим образом:

$$\left(1, 1, \dots, 1, \exp\left(2\pi i \frac{q}{m}\right)\right), \quad (26)$$

где последний член в скобках относится к $SU(m)$, содержащей (минус) кокорень старшего корня, q — натуральное число, взаимно простое с m , $q < m$, а единицы относятся к другим $SU(N_j)$ факторам в (22).

Соответственно, гейзенберговская пара Ω_1, Ω_2 берется в виде

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (\Omega_1^{(1)}, \Omega_1^{(2)}, \dots), \\ \Omega_2 &= (\Omega_2^{(1)}, \Omega_2^{(2)}, \dots), \end{aligned} \quad (27)$$

так что Ω_1, Ω_2 коммутируют на элемент $\varepsilon \in D$ (22):

$$\varepsilon = (\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots), \quad (28)$$

где $\Omega_1^{(j)}, \Omega_2^{(j)}$ и $\varepsilon^{(j)}$ принадлежат j -му $SU(N)$ фактору в (22).

Таким образом, мы видим, что задача может быть рассмотрена по отдельности в каждом $SU(N_j)$ факторе. Наиболее труден случай, когда все три монодромии нетривиальны, что имеет место только в $SU(m)$, содержащей (минус) кокорень старшего корня. Итак, рассмотрим случай $SU(m)$ и построим калибровочный потенциал с монодромиями Ω_1, Ω_2 и Ω_3 , такими, что

$$\Omega_1 \Omega_2 = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) \Omega_2 \Omega_1 \quad (29)$$

и

$$\Omega_3 = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) \quad (30)$$

(мы рассматриваем только примитивные корни из 1 в уравнениях (29), (30); обобщение приведенной ниже конструкции на другие элементы центра Z_m тривиально).

В работе [17] было показано, что любая гейзенберговская пара в $SU(N)$, удовлетворяющая (29), может быть

сопряжена к

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= P = \exp i\delta_P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \epsilon^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \\ \Omega_2 &= Q = \exp i\delta_Q \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее, калибровочное поле нулевой кривизны может быть приведено к виду

$$A_i = U^{-1} \partial_i U, \quad (32)$$

и мы ищем матрицу $U(x, y, z)$ из калибровочной группы, удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{aligned} U(x+1) &= PU(x) P^{-1}, \\ U(y+1) &= QU(y) Q^{-1}, \\ U(z+1) &= \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) U(z), \end{aligned} \quad (33)$$

где зависимость от несущественных координат (y, z — в первой строчке и т.д.) не указывается, и периоды тора положены равными единице. Случай, когда $\Omega_3 = 1$, соответствует U , периодическому в направлении z . Такое $U(x, y, z)$ представляет элемент $\pi_3(SU(m))$.

Очевидно, уравнения (32), (33) дают правильные монодромии, но непериодические калибровочные потенциалы:

$$\begin{aligned} A_i(x+1, y, z) &= PA_i(x, y, z) P^{-1}, \\ A_i(x, y+1, z) &= QA_i(x, y, z) Q^{-1}, \\ A_i(x, y, z+1) &= A_i(x, y, z). \end{aligned} \quad (34)$$

Обращаясь к исходной группе, мы таким образом получим калибровочные потенциалы, которые периодичны в направлении z и сопрягаются элементами Ω_1 и Ω_2 при сдвигах на период в направлениях x и y . Заметим теперь, что любые два коммутирующих групповых элемента в исходной группе могут быть сопряжены на картановский тор. Следовательно, существует непериодическое калибровочное преобразование, которое преобразует калибровочные потенциалы в периодические. Это калибровочное преобразование, разумеется, не меняет монодромии. Так что переходим к построению матрицы $U(x, y, z)$, удовлетворяющей (33).

Начнем с антеза

$$U = \exp [2\pi i T(x, y)], \quad (35)$$

где $T(x, y)$ — эрмитова бесследовая матрица, сопряженная к матрице

$$T_0 = \frac{1}{m} \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 1-m). \quad (36)$$

Очевидно, $U|_{z=0} = 1$ и $U|_{z=1} = \varepsilon$, так что третье условие из (33) выполнено. Другие два условия для $T(x, y)$ дают

$$\begin{aligned} T(x+1) &= PT(x) P^{-1}, \\ T(y+1) &= QT(y) Q^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Довольно просто разрешить эти условия и для $SU(2)$. Если $P = i\sigma_3$ и $Q = i\sigma_1$ (гейзенберговская пара для $SU(2)$), то можно выбрать, например,

$$T(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 \cos(\pi x) + \sigma_3 \cos(\pi y) + \sigma_2 \cos[\pi(x+y)]}{\sqrt{\cos^2(\pi x) + \cos^2(\pi y) + \cos^2[\pi(x+y)]}}, \quad (38)$$

где квадратный корень в знаменателе нужен для правильной нормировки. Однако далеко не очевидно, как (38) обобщается на высшие ранги.

Для того чтобы решить (37) для произвольного ранга, заметим сначала, что матрицы, сопряженные к T_0 , образуют $CP^{m-1} = SU(m)/[SU(m-1) \times U(1)]$ орбиты $SU(m)$. Они удобно параметризуются следующим образом:

$$T_{ij}(x, y) = \frac{1}{m} \delta_{ij} - \psi_i(x, y) \psi_j^\dagger(x, y), \quad (39)$$

где ψ_i — m -компонентный комплексный столбец, нормированный на 1:

$$\psi^\dagger \psi = 1, \quad (40)$$

ψ — элемент фундаментального представления для $SU(m)$, так что представление (39) можно назвать фундаментализацией. Бесследовая эрмитова матрица $T(x, y)$ в (39) имеет $2m - 2$ вещественных параметра (m комплексных параметров в столбце ψ_j минус один вещественный параметр на нормировку (40) и минус один вещественный параметр на несущественную в (39) общую фазу ψ_j), что равно размерности $SU(m)/[SU(m-1) \times U(1)]$ пространства.

Границное условие (37) сводится к условию на ψ :

$$\begin{aligned} \psi(x+1) &= \exp[i\alpha(x, y)] P \psi(x), \\ \psi(y+1) &= \exp[i\beta(x, y)] Q \psi(y), \end{aligned} \quad (41)$$

где вещественные $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ должны быть выбраны так, чтобы скомпенсировать нетривиальный коммутант (18) матриц P и Q и сделать $\psi(x+1, y+1)$ хорошо определенным. Это последнее условие предполагает, что

$$\begin{aligned} \exp[-i\alpha(x, y)] \exp[-i\beta(x+1, y)] \exp[i\alpha(x, y+1)] \times \\ \times \exp[i\beta(x, y)] = \omega_1 = \epsilon, \end{aligned} \quad (42)$$

и мы выберем

$$\alpha(x, y) = \frac{2\pi iy}{m}, \quad \beta(x, y) = 0. \quad (43)$$

Фазы $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ можно интерпретировать как вектор-потенциалы $A_{x,y}$ вспомогательного абелева магнитного поля с потоком $\Phi = 1/m$ на двумерном торе.

Уравнение (41) означает, что мы должны построить глобальное сечение $SU(m) \times U(1)/Z_m = U(m)$ расслоения над T^2 с типичным слоем C^m ($\exp[i\alpha(x, y)] P$ и $\exp[i\beta(x, y)] Q$ — матрицы переклейки). Первый класс Черна этого расслоения равен 1:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int \text{Tr}\{F\} = m\Phi = 1. \quad (44)$$

Такие расслоения естественным образом строятся в терминах якобиевых Θ -функций с рациональными характеристиками (см., например, [34]).

Заметим, что Q действует на столбец ψ , циклически сдвигая каждый элемент на один шаг вверх. Следовательно, второе уравнение (41) просто выражает ψ_j через ψ_1 :

$$\psi_{1+j}(x, y) = \psi_1(x, y + j) \quad (45)$$

и требует периодичности ψ_1 , когда y сдвигается на m :

$$\psi_1(x, y + m) = \psi_1(x, y). \quad (46)$$

Все другие компоненты ψ_j , вследствие (45), тоже удовлетворяют (46).

Ввиду (45), (31), (43), первое из условий (41) сводится к виду

$$\psi_1(x+1, y) = \exp\left(\frac{2\pi iy}{m}\right) \psi_1(x, y). \quad (47)$$

Уравнения (46), (47) очевидным образом удовлетворяются выбором

$$\psi_1(x, y) = N(x, y) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left[-\pi\left(n + \frac{y}{m}\right)^2 + 2\pi ix\left(n + \frac{y}{m}\right)\right], \quad (48)$$

где $N(x, y)$ — периодическая функция x и y с периодом 1. Другие ψ_j определены уравнением (45). $N(x, y)$ выбирается так, чтобы выполнялось условие нормировки (40). Для того чтобы $N(x, y)$ была хорошо определена, надо проверить, что ψ_j не имеют общих нулей. Для этого удобно выразить ψ_j в терминах Θ -функций Якоби. Используя определение тэта-функций $\Theta_{l/m, j/m}(z, \tau)$ с рациональными характеристиками $l/m, j/m$ (см. [34])

$$\begin{aligned} \Theta_{l/N, m/N}(z, \tau) = \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left[i\pi\tau\left(n + \frac{l}{N}\right)^2 + 2\pi i\left(n + \frac{l}{N}\right)\left(z + \frac{m}{N}\right)\right], \end{aligned} \quad (49)$$

легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \psi_j(x, y) &= N(x, y) \exp\left[-\pi\left(\frac{y}{m}\right)^2 + 2\pi ix\frac{y}{m}\right] \times \\ &\times \Theta_{(j-1)/m, 0}\left(x + i\frac{y}{m}, i\right). \end{aligned} \quad (50)$$

$\Theta_{l/m, j/m}(z, \tau)$ имеет нули при $z = (l/m + p + 1/2)\tau + (j/m + q + 1/2)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, так что ψ_j , $j = 1, \dots, m$, не имеют общих нулей. Множитель N , таким образом, равен

$$N(x, y) = \frac{\exp[\pi(y/m)^2]}{\sqrt{\sum_{l=0}^{m-1} |\Theta_{l/m, 0}[x + i(y/m), i]|^2}}. \quad (51)$$

Подставляя (50) в (39), (35) и (32), получаем искомые калибровочные поля. Все другие калибровочные поля, удовлетворяющие (33), получают из предъявленных калибровочными преобразованиями, включая преобразования, представляющие $\pi_3(SU(m))$.

Вычислим теперь число Черна – Саймонса (CS):

$$N_{\text{CS}} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{T^3} \text{Tr}\left(A \text{d}A + \frac{2}{3} A^3\right), \quad (52)$$

которое нормировано так, что на двух конфигурациях калибровочных полей, связанных инстантоном, CS отличается на 1. Поскольку интересующее нас калибровочное поле имеет нулевую кривизну, (52) сводится к виду

$$N_{\text{CS}} = -\frac{1}{8\pi^2} \int d\mathbf{x} \text{Tr}\{(\partial_x U^{-1} \partial_y U - \partial_y U^{-1} \partial_x U) U^{-1} \partial_z U\}. \quad (53)$$

Для многообразия S^3 число N_{CS} целое.

Чтобы вычислить интеграл (53), заметим, что $U^{-1} \partial_z U = 2\pi i T$. Чтобы найти $\partial_{x,y} U^{-1}$, $\partial_{x,y} U$, удобно представить U и U^{-1} следующим образом:

$$U = \exp\left(\frac{2\pi iz}{N}\right)\left\{1 + [\exp(-2\pi iz) - 1]\Pi\right\}, \quad (54)$$

где $\Pi_{ij} = \psi_i \psi_j^+$, $\Pi^2 = \Pi$. Тогда (53) сводится к виду

$$\begin{aligned} N_{\text{CS}} = & \frac{1}{\pi i} \int dx dy dz \sin^2(\pi z) \text{Tr}\left\{[(\partial_x \Pi)(\partial_y \Pi) - \right. \\ & \left. - (\partial_y \Pi)(\partial_x \Pi)]\Pi\right\} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int dx dy [\partial_x(\psi^\dagger \partial_y \psi) - \partial_y(\psi^\dagger \partial_x \psi)]. \end{aligned} \quad (55)$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле является полной производной, и интеграл легко берется с использованием граничных условий (41). Результат выражается только через абелевы потенциалы $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ и совпадает с потоком вспомогательного магнитного поля, так что

$$N_{\text{CS}} = \frac{1}{m}. \quad (56)$$

Ясно, что U^p дает конфигурацию с $\Omega_3 = \exp(2\pi ip/m)$ и с $N_{\text{CS}} = p/m$. В частности, U^m дает элемент $\pi_3(\text{SU}(m))$.

5. Индекс Виттена и физика конфайнмента и нарушения киральной симметрии

В этом разделе мы хотели бы обсудить тот интересный факт, что в индексе Виттена содержится некоторая информация о таких, казалось бы, чисто динамических сюжетах, как конфайнмент и нарушение киральной симметрии. Подробнее обсуждение этого вопроса может быть найдено в [12].

Чтобы "прощупать" конфайнмент, нужна более тонкая версия индекса Виттена, чем обсуждалась выше, а именно, нужен индекс Виттена $I_W(e, m)$ в секторе с фиксированным магнитным потоком m и электрическим потоком e . Потоки m и e можно ввести [17] в том случае, когда группа неодносвязна, что, однако, не является чем-то исключительным. Рассмотрим, например, присоединенную форму $\text{SU}(N)$ группы, $\text{SU}(N)/Z_N$.

Фундаментальная группа в этом случае есть $\pi_1(\text{SU}(N)/Z_N) = Z_N$. Магнитные потоки на пространственном торе T^3 появляются, когда калибровочные потенциалы периодичны только с точностью до калибровочных преобразований:

$$A(x_i + L) = \Omega_i^{-1} A(x_i) \Omega_i, \quad (57)$$

а матрицы Ω_i и Ω_j , определяющие граничные условия в i -м и j -м направлениях, рассматриваемые как элементы

группы $\text{SU}(N)$, коммутируют на элемент центра:

$$\Omega_i \Omega_j = \exp\left(\frac{2\pi i m_{ij}}{n}\right) \Omega_j \Omega_i. \quad (58)$$

Целые числа m_{ij} определяют конфигурацию магнитных потоков.

Определение электрического потока более понятно в случае двумерного пространственного тора T^2 , поэтому рассмотрим сначала этот случай. Рассмотрим калибровочное преобразование на T^2 , т.е. отображение $g(x, y)$ из T^2 в калибровочную группу G . Его ограничение на нетривиальные 1-циклы на T^2 определяет гомоморфизм фундаментальной группы тора, $\pi_1(T^2)$, в фундаментальную группу группы G , $\pi_1(G)$. Калибровочное преобразование может быть стянуто в единицу, если и только если этот гомоморфизм тривиален. Обозначим через W_0 группу калибровочных преобразований, стягиваемых к единице, и через W — группу всех калибровочных преобразований. При квантовании калибровочной теории необходимо требовать только W_0 -инвариантности, так как только W_0 -инвариантность подразумевается законом Гаусса. Фактор-группа $\Gamma = W/W_0 = \text{Hom}(\pi_1(T^2), \pi_1(G))$ может нетривиально действовать в гильбертовом пространстве теории, \mathcal{H} . Значит, гильбертово пространство раскладывается по характерам e группы Γ :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_e \mathcal{H}_e, \quad (59)$$

где характеры e — это мультипликативные функции на Γ со значениями в $\text{U}(1)$, $e \in \text{Hom}(\Gamma, \text{U}(1))$. Если мы работаем в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_m с заданным магнитным моментом m , тогда

$$\mathcal{H}_m = \bigoplus_e \mathcal{H}_{e,m}. \quad (60)$$

В случае трехмерного тора T^3 , нетривиальность фактор-группы $\Gamma = W/W_0$ обусловлена не только нетривиальной группой $\pi_1(G)$, но и нетривиальной группой $\pi_3(G)$, хорошо известной в инстанционной физике [6]; Γ содержит подгруппу, изоморфную $\pi_3(G)$. Поскольку при квантовании калибровочной теории обычно работают в θ -секторе суперотбора, следует рассматривать только такие элементы Γ , которые на калибровочных преобразованиях, представляющих порождающий элемент $\pi_3(G)$, действуют как $\exp(i\theta)$.

Рассмотрим сначала случай нулевого магнитного момента, $m = 0$. Вследствие конфайнмента основное состояние теории должно иметь нулевой электрический поток (или, что то же самое, основное состояние должно быть Γ -инвариантно). Таким образом, вследствие конфайнмента в $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса естественно ожидать, что

$$I_W(e, 0) = 0, \text{ если } e \neq 0. \quad (61)$$

Как объясняется в [12], формула (61) подразумевает, что индекс Виттена I_W (тот, который обсуждался в предыдущих разделах, а не $I_W(e, m)$) не должен зависеть от типа граничных условий, накладываемых на калибровочные поля на T^3 .

Более интересна ситуация в присутствии ненулевого магнитного потока, $m \neq 0$. Напомним, во-первых, идею

"косого" (oblique) конфайнмента [17]. Нормальный конфайнмент обусловлен конденсацией монополей (так же, как хиггсовская фаза обусловлена конденсацией зарядов). Косой конфайнмент обусловлен конденсацией диодов. Далее, при адиабатическом изменении θ -параметра, $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$, монополи получают электрический заряд [37]. Если исходно был нормальный конфайнмент, то в результате мы получим косой конфайнмент. Оказывается, что при таком изменении θ -параметра, $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$, электрический поток тоже меняется на величину, зависящую от m

$$e \rightarrow e + \Delta(m) \quad (62)$$

(мы объяснили выше, что e — это функция на Γ со значениями в $U(1)$; в формуле (62) подразумевается, что e — это фаза элемента $U(1)$; соответственно, $\Delta(m)$ определено с точностью до целого числа). Величина $\Delta(m)$ была названа в [12] спектральным потоком. В работе [12] было также показано, что $\Delta(m)$ равна дробной части инстанционного числа (которое, вообще говоря,дробно, если $m \neq 0$).

Подчеркнем, что при сдвиге $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ мы должны оказаться в той же теории, но, быть может, в другом вакуумном состоянии. Если исходно мы находились в фазе "нормального" конфайнмента, то вакуумное состояние было Γ -инвариантно, т.е. имело нулевой электрический поток. После сдвига $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ оно перешло в вакуумное состояние с электрическим потоком (62). Таким образом, если $I_W(0, m) \neq 0$, то и $I_W(\Delta(m), m) \neq 0$, и мы приходим к заключению, что на основании конфайнмента естественно ожидать

$$I_W(e, m) = 0, \text{ если только } e \text{ не кратно } \Delta(m). \quad (63)$$

Уравнения (61) и (63), являющиеся нетривиальными следствиями предположения о конфайнменте в рассматриваемой теории, были получены в [12] также и из микроскопического вычисления подобно тому, как обсуждалось в разделах 2 и 3.

Обратимся теперь к киральному нарушению симметрии. Как мы обсуждали во введении, в бесконечном объеме подгруппа Z_h группы Z_{2h} переставляет вакуумы, описываемые разными фазами кирального конденсата. Можно рассмотреть линейные комбинации этих вакуумов, которые имели бы определенный киральный заряд (киральный заряд определен с точностью до $2h$, поскольку $U(1)$ нарушена до Z_{2h}). Можно ожидать, что вакуумы, описанные в разделе 3, характеризуются тем же набором киральных зарядов, что и вакуумы в бесконечном объеме. В работе [12] было показано, что так оно и есть (!).

Напомним, что в разделе 3 вакуумные состояния получались квантованием нескольких несвязанных компонент пространства классических вакуумов. Каждая компонента давала состояние, описываемое единичной волновой функцией, и некоторое число состояний, получаемых из единичного применением оператора $\lambda\lambda$. Очевидным образом $\lambda\lambda$ меняет киральный заряд на 2. Важно было понять, какой киральный заряд несет единичная волновая функция в каждой компоненте пространства классических вакуумов. Ситуация здесь очень похожа на ситуацию с (дробным) фермионным зарядом на солитоне; и тут, и там надо учитывать заряд, распределенный по дираковскому морю. Как оказалось, киральный заряд состояний с единичными

волновыми функциями в каждой компоненте пространства классических вакуумов выразился через числа Черна–Саймонса соответствующих калибровочных полей.

Заметим, что вычисление фермионного заряда состояний с единичной волновой функцией в каждой компоненте пространства классических вакуумов было также необходимо, чтобы удостовериться, что все несвязанные компоненты дают вклад одного знака в (25) [12, 14].

На этом завершается наше обсуждение того, каким образом индекс Виттена "чувствует" физику конфайнмента и кирального нарушения симметрии.

6. Заключение

Мы рассказали, как был разрешен существовавший длительное время парадокс со счетом числа вакуумов в $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Правильный счет, совместный с физикой в бесконечном объеме, восстанавливается, если учесть дополнительные несвязанные компоненты пространства классических вакуумов в теории Янга–Миллса на торе. Эти дополнительные компоненты характеризуются такими тройками монодромий (вильсоновских петель) калибровочных полей нулевой кривизны, которые не могут быть одновременно приведены на картановский тор в калибровочной группе. Замечательным образом новая физика привела к прогрессу в классической теории групп — была построена классификация таких исключительных троек.

Интересен вопрос, найдут ли многомерные обобщения таких троек (n -ки) свое место в физике. Заметим, что пары монодромий (которые, в отличие от троек, всегда могут быть одновременно приведены на картановский тор) появляются в 3d суперсимметричной теории Янга–Миллса (при специальном значении θ -параметра, см. [38]) и дают $I_W = 1$, тройки появляются в трехмерном случае и дают $I_W = h$. Можно ли продолжить эту последовательность? Вопрос открыт.

Мы также хотели бы упомянуть о другой роли, которую исключительные n -ки могут играть в физике. Рассмотрим компактификацию типа Калуцы–Клейна на n -мерный тор. Хорошо известно, что калибровочная группа может быть нарушена монодромиями калибровочного поля по периодам тора. Монодромии должны коммутировать вследствие накладываемого при редукции условия зануления компонент кривизны вдоль тора. Если монодромии могут быть одновременно приведены на картановский тор (что обычно предполагается), то исходная группа может быть нарушена только до подгруппы того же ранга. Если же монодромии образуют исключительную n -ку, то при компактификации ранг калибровочной группы уменьшается. Из рассмотрения в разделе 3 понятно, что нетривиальная тройка может полностью нарушить, например, группу E_8 . Мы предоставляем читателю убедиться, что существует множество способов выбрать коэффициенты C_j в уравнении (19) так, чтобы нарушить E_8 до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Калибровочные поля, отвечающие исключительным тройкам монодромий, описаны в разделе 4. Очень интересно было бы найти решения уравнений Янга–Миллса, интерполирующие между тривиальным и нетривиальным, или двумя нетривиальными классиче-

скими вакуумами. Есть определенные указания на то, что должны существовать самодуальные решения такого типа.

Можно надеяться, что раздел 5, где обсуждается, каким образом информация о конфайнменте и нарушении киральной симметрии закодирована в индексе Виттена, убедит скептиков-прагматиков в том, что красивые абстрактные рассмотрения могут иногда приносить пользу.

Благодарности. Мне приятно поблагодарить А. Герасимова, А. Морозова и В. Рубакова за обсуждения и А. Смилгу за обсуждения, сотрудничество и гостеприимство во время моего визита в SUBATECH и в университет г. Нант, Франция. Мне также хотелось бы поблагодарить А. Морозова, Л. Окуни и А. Смилгу за чтение статьи в рукописи и за критические замечания, которые помогли ее улучшить. Работа была поддержана грантами CRDF RP1-2108, INTAS-00-334 и грантом РФФИ для поддержки научных школ 00-15-96562.

7. Приложение. Словарь

Мы начинаем словарь с некоторых определений из теории групп. Эти определения даны в логическом (не алфавитном) порядке.

Картановская подалгебра — это (с точностью до некоторых тонкостей) максимальная коммутативная подалгебра полупростой алгебры Ли. Например, в случае $SU(N)$ картановская подалгебра состоит из бесследовых диагональных матриц.

Ранг r — размерность картановской подалгебры.

Корни — линейные формы на картановской подалгебре (т.е. если дан корень α и элемент a картановской подалгебры, то можно получить число $\alpha(a)$, линейное по a и по α), которые нумеруют собственные подпространства действия элементов картановской подалгебры на алгебре Ли. Говорится, что элемент e_α алгебры Ли относится к корневому подпространству, отвечающему корню α , если

$$[a, e_\alpha] = \alpha(a)e_\alpha \quad (\text{П.1})$$

для любого элемента a картановской подалгебры. Для любого корня α , $-\alpha$ — тоже корень, т.е. существует алгебраический элемент $e_{-\alpha}$, такой, что

$$[a, e_{-\alpha}] = -\alpha(a)e_\alpha. \quad (\text{П.2})$$

Множество всех корней может быть разделено на множество положительных и множество отрицательных корней.

Простые корни — это корни, которые не могут быть представлены в виде суммы положительных корней. Они образуют базис в линейном пространстве всех корней.

Старший корень — это такой корень, что его сумма с любым положительным корнем не является корнем. Для простых алгебр существует единственный старший корень.

Решетка корней — это решетка, образованная всевозможными целочисленными линейными комбинациями простых корней. Стоит предупредить, что не все элементы решетки корней являются корнями!

Форма Киллинга — каноническая инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на про-

стой алгебре Ли. Она единственна с точностью до нормировки. На нее можно смотреть как на метрику. Ее ограничение на картановскую подалгебру определяет метрику на картановской подалгебре. Физики используют ее в виде $\text{tr}(ab)$, где a, b — элементы алгебры Ли.

Кокорни — элементы картановской подалгебры, которые соответствуют корням следующим образом. Договоримся рассматривать элементы картановской подалгебры как векторы с верхними индексами. Тогда корни можно рассматривать как векторы с нижними индексами. Форма Киллинга позволяет посыпать корни в кокорни и обратно. Таким образом, если задан корень α_j , то можно построить соответствующий кокорень $\alpha^{\vee j}$

$$\alpha^{\vee j} = \frac{2g^{jk}\alpha_k}{g^{mn}\alpha_m\alpha_n}, \quad (\text{П.3})$$

где g^{ij} — это (обратная) метрика на картановской подалгебре, полученная из формы Киллинга. Для любого кокорня α^\vee имеет место свойство

$$\exp(2\pi i\alpha^\vee) = 1. \quad (\text{П.4})$$

Кокорни, отвечающие простым корням, образуют базис в картановской подалгебре.

Решетка кокорней — это решетка, образованная всевозможными целочисленными линейными комбинациями кокорней, отвечающих простым корням.

Картановский тор — максимальная компактная коммутативная подгруппа группы Ли. Элементы картановского тора получаются как экспоненты элементов картановской подалгебры. Ввиду свойства (П.4) картановский тор можно рассматривать как фактор картановской подалгебры по решетке кокорней.

Фундаментальные ковеса ω^j , $j = 1, \dots, r$, вводятся как элементы картановской подалгебры, образующие базис, дуальный базису α_j , $j = 1, \dots, r$, простых корней в пространстве корней, т.е.

$$\alpha_j(\omega^k) = \delta_j^k. \quad (\text{П.5})$$

Целочисленные линейные комбинации фундаментальных весов образуют решетку весов для присоединенной формы группы Ли.

Группа Вейля может быть определена как группа, действующая в пространстве корней отражениями относительно гиперплоскостей, ортогональных корням:

$$W_\alpha : \beta \rightarrow \beta - \alpha \beta(\alpha^\vee), \quad (\text{П.6})$$

где W_α — элемент группы Вейля, построенный по корню α . Посредством формы Киллинга действие группы Вейля может быть определено на картановской подалгебре. Заметим, что любая группа действует на себе и на своей алгебре сопряжениями. Большинство сопряжений не сохраняет картановскую подалгебру. Некоторые сопряжения переводят картановскую подалгебру саму в себя. Такие сопряжения образуют группу, действующую на картановской подалгебре, и эта группа совпадает с группой Вейля, как она была определена выше.

Мы заканчиваем нашу экскурсию по теории групп. Ниже приведены еще некоторые определения математических терминов, используемых в статье.

Монодромия связности A по контуру C в физических терминах означает вильсоновскую петлю $P \exp(\int_C A)$ калибровочного поля A по контуру C .

Централизатор элемента Ω группы G — это подгруппа группы G , состоящая из элементов группы, коммутирующих с Ω .

Эпиморфно означает "на", т.е. если множество X отображается на множество Y эпиморфно, то любой элемент Y может быть получен как образ какого-нибудь элемента X при таком отображении.

Список литературы

1. Генденштейн Л Е, Криве И В УФН **146** 553 (1985)
2. Шифман М А, Вайнштейн А И, Захаров В И УФН **146** 683 (1985)
3. Witten E *Nucl. Phys. B* **202** 253 (1982)
4. Sethi S, Stern M *Commun. Math. Phys.* **194** 675 (1998); hep-th/9705046
5. 't Hooft G *Phys. Rev. D* **14** 3432 (1976); Erratum: *Phys. Rev. D* **18** 2199 (1978)
6. Вайнштейн А И и др. УФН **136** 553 (1982)
7. Affleck I, Dine M, Seiberg N *Nucl. Phys. B* **241** 493 (1984); **256** 557 (1985)
8. Amati D et al. *Phys. Rep.* **162** 169 (1988)
9. Shifman M A, Vainshtein A I *Nucl. Phys. B* **296** 445 (1988)
10. Morozov A, Ol'shanetsky M, Shifman M *Nucl. Phys. B* **304** 291 (1988)
11. Witten E *JHEP* **9802** 006 (1998)
12. Witten E, hep-th/0006010
13. Kac V G, Smilga A V, in *The Many Faces of the Superworld: Yuri Gelfand Memorial Volume* (Ed. M Shifman) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 185; hep-th/9902029
14. Borel A, Friedman R, Morgan J W, math.GR/9907007
15. de Boer J et al. *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** 995 (2002); hep-th/0103170
16. Keurentjes A *Phys. Rev. D* **65** 026007 (2002); hep-th/0105101
17. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **138** 1 (1978); **153** 141 (1979); **190** 455 (1981)
18. Blok B Yu, Smilga A V *Nucl. Phys. B* **287** 589 (1987)
19. Смилга А В ЖЭТФ **91** 8 (1986)
20. Green M B, Gutperle M *JHEP* **9801** 005 (1998)
21. Moore G, Nekrasov N, Shatashvili S *Commun. Math. Phys.* **209** 77 (2000); hep-th/9803265
22. Yi P *Nucl. Phys. B* **505** 307 (1997)
23. Porrati M, Rozenberg A *Nucl. Phys. B* **515** 184 (1998)
24. Kac V G, Smilga A V *Nucl. Phys. B* **571** 515 (2000); hep-th/9908096
25. Hoppe J, Yau S-T, hep-th/9711169
26. Staudacher M *Phys. Lett. B* **488** 194 (2000)
27. Krauth W, Staudacher M *Nucl. Phys. B* **584** 641 (2000); *Phys. Lett. B* **435** 350 (1998)
28. Krauth W, Nicolai H, Staudacher M *Phys. Lett. B* **431** 31 (1998)
29. Смилга А В ЯФ **43** 215 (1986)
30. Borel A *Tohoku Math. J.* **13** 216 (1961)
31. Keurentjes A, Rosly A, Smilga A V *Phys. Rev. D* **58** 081701 (1998)
32. Keurentjes A *JHEP* **9905** 001, 014 (1999)
33. Kac V G *Infinite Dimensional Lie Algebras* 3rd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
34. Mumford D *Tata Lectures on Theta* (Boston: Birkhäuser, 1983)
35. Selivanov K *Phys. Lett. B* **471** 171 (1999)
36. Selivanov K G, Smilga A V *Phys. Rev. D* **63** 125020 (2001)
37. Witten E *Phys. Lett. B* **86** 283 (1979)
38. Witten E, hep-th/9903005
39. Horowitz G T, Strominger A *Nucl. Phys. B* **360** 197 (1991)
40. Townsend P K *Phys. Lett. B* **350** 184 (1995); hep-th/9501068
41. Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 335 (1996); hep-th/9510135
42. Polchinski J, Chaudhuri S, Johnson C V, hep-th/9602052; Polchinski J, hep-th/9611050
43. Witten E *Nucl. Phys. B* **443** 85 (1995); hep-th/9503124

Counting vacua in supersymmetric Yang–Mills theory

K.G. Selivanov

*Institute of Theoretical and Experimental Physics,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 123-8393
E-mail: selivano@heron.itep.ru*

Recent progress in calculating the Witten index in $N = 1$ supersymmetric Yang-Mills theory is reviewed. Since 1982 there has been a controversy over counting vacua in this theory. Early Witten index calculations were in disagreement with the chiral symmetry breaking picture. This controversy was resolved in 1998 by Witten, who discovered additional components in the space of classical vacua in Yang–Mills theory compactified on a three-dimensional torus. The present paper describes these additional components and the corresponding gauge fields. The way the Witten index ‘feels’ confinement and chiral symmetry breaking is also discussed.

PACS numbers: **02.20–a, 11.15.–q, 11.30.Pb**

Bibliography — 43 references

Received 12 September 2001