

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

**"Отрицательная теплоемкость"
стратифицированных жидкостей**

Л.Х. Ингель

В "дважды неравновесных" жидких средах (например, в стратифицированных по температуре и концентрации примеси растворах в поле силы тяжести) возможны ситуации, когда добавление тепла приводит к понижению температуры среды, и наоборот. Это продемонстрировано на ряде простых примеров.

PACS numbers: 44.35.+c, 47.27.Fe, 92.60.Ek

Содержание

1. Введение (691).
 2. Пример точного решения: конвекция от источника тепла, вытянутого по вертикали (691).
 3. Задачи типа задач Рэлея – Бенара (693).
 4. Течения в среде, неоднородно нагреваемой сверху (695).
 5. Заключение (698).
- Список литературы (699).

1. Введение

В последние годы в геофизической литературе появились сообщения о некоторых парадоксальных результатах натурных измерений [1, 2]: "Показания спущенных в скважину (в антарктическом шельфовом леднике — Л.И.) приборов выявили неожиданный парадокс: морская вода, находящаяся подо льдом, в зимний сезон обладает более высокой температурой, чем летом" [2]. Иными словами, в каком-то смысле можно говорить об отрицательной теплоемкости данной геофизической среды.

Подобные результаты, конечно, нуждаются в тщательной проверке. Но в любом случае имеет смысл вопрос: возможны ли в принципе такие эффекты в относительно простых гидродинамических системах, обычно рассматриваемых в геофизической гидродинамике? В настоящей статье приведено несколько простых примеров, демонстрирующих, что в стратифицированных по температуре жидкостях подобные эффекты действительно вполне возможны, особенно в двухкомпонент-

ных, "дважды неравновесных" средах, например в воде, стратифицированной как по температуре, так и по солености, или в воздухе, стратифицированном по температуре и влажности. Ранее, насколько нам известно, на это обычно не обращалось внимания (за исключением отдельных работ [3]), вследствие чего упомянутые экспериментальные результаты и выглядят парадоксальными.

**2. Пример точного решения:
конвекция от источника тепла,
вытянутого по вертикали**

Рассмотрим неограниченный объем раствора, плотность которого ρ в обычно используемом приближении [4–6] линейно зависит от температуры T и концентрации примеси s :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)] . \quad (1)$$

Здесь α — термический коэффициент расширения среды, β — соответствующий коэффициент для концентрации примеси (в океанологии его называют коэффициентом соленостного сжатия). Индексом "0" обозначены "отсчетные" значения соответствующих величин. В простейших моделях стратифицированных сред предполагается, что температура, концентрация примеси и плотность среды линейно зависят от вертикальной координаты z (ось z направлена противоположно силе тяжести):

$$\bar{\rho}(z) = \rho_0 [1 + (-\alpha\gamma_T + \beta\gamma_s) z] , \quad (2)$$

где $\gamma_T = d\bar{T}/dz$, $\gamma_s = d\bar{s}/dz$ — постоянные градиенты¹; чертой обозначены "фоновые" значения величин (для отличия от рассматриваемых ниже возмущений, связанных с тепловыделением и возникающей конвекцией).

Л.Х. Ингель. Институт экспериментальной метеорологии НПО "Тайфун",
249038 г. Обнинск, Калужская обл., просп. Ленина 82,
Российская Федерация
Тел./факс (08439) 66735
E-mail: lingel@obninsk.com

Статья поступила 21 января 2002 г.,
после доработки 13 марта 2002 г.

¹ Если градиенты γ_T и γ_s постоянны, то может возникнуть вопрос о неограниченном росте или убывании температуры, концентрации примеси и плотности среды при $z \rightarrow \pm\infty$. Эта формальная трудность несущественна, поскольку в реальных ситуациях речь, разумеется, идет о слоях среды конечной толщины.

Ограничиваемся здесь для простоты случаем, когда плотностная стратификация среды нейтральна (стратификации температуры и концентрации примеси компенсируют друг друга в поле плотности):

$$-\alpha\gamma_T + \beta\gamma_s = 0, \quad \bar{\rho}(z) = \rho_0 = \text{const}. \quad (3)$$

Рассмотрим простейшую задачу о конвекции в такой среде — об отклике среды на мгновенное тепловыделение, равномерно распределенное вдоль вертикальной оси z [7]. Выражение для источника тепла имеет вид

$$Q(r, t) = Q_0 \frac{\delta(r) \delta(t)}{2\pi r}, \quad (4)$$

где δ — дельта-функция, r — расстояние от оси z , Q_0 имеет смысл амплитуды источника. Поскольку источник не зависит от координаты z , будем искать и не зависящее от z решение. Обоснование и пределы применимости такого "одномерного режима" конвекции обсуждаются, например, в [8, 9].

Систему уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси рассматриваем в приближении, часто используемом для задач конвекции — в приближении Буссинеска [4–6]. В этом приближении считается пренебрежимо малой сжимаемость среды, но учитывается зависимость ее плотности от температуры и концентрации примеси. Уравнение неразрывности в этом приближении имеет вид $\text{div } \mathbf{v} = 0$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости. Отсюда в сочетании с условием $\partial/\partial z = 0$ следует отсутствие радиальных движений (перпендикулярных оси z). Тогда упомянутая система уравнений имеет вид (для однокомпонентной среды она более подробно выведена, например, в [9])

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla(v \nabla w) + g(\alpha T' - \beta s'), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \gamma_T w = \nabla(\kappa \nabla T') + Q, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \gamma_s w = \nabla(\chi \nabla s'). \quad (7)$$

Здесь w — составляющая скорости вдоль оси z (другие компоненты скорости в данной задаче отсутствуют), t — время, штрихом обозначены отклонения от фонового состояния, описанного выше. Подчеркнем, что полная система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси свелась к довольно простой системе (5)–(7) (линейной, если коэффициенты обмена ν , κ , χ не зависят от скорости и других неизвестных) только благодаря симметрии задачи, без каких-либо допущений о малости амплитуд возмущений.

В качестве краевых условий предполагается, прежде всего, затухание возмущений вдали от источника (при $r \rightarrow \infty$). Кроме того, из соображений симметрии при $t > 0$ имеем

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial T'}{\partial r} = \frac{\partial s'}{\partial r} = 0, \quad \text{если } r = 0. \quad (8)$$

Поставленная задача особенно легко решается в случае постоянства и равенства между собой коэффициентов обмена для различных субстанций: $\nu = \kappa = \chi = \text{const} = K$ (это упрощение очень часто принимается в геофизических приложениях, когда речь идет

об эффективных коэффициентах турбулентного обмена). Умножим уравнение (6) на α , (7) — на β и вычтем из первого второе. С учетом (3) получаем следующее уравнение для безразмерной плавучести $b = \alpha T' - \beta s'$:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial b}{\partial r} + \alpha Q. \quad (9)$$

Это стандартное уравнение диффузии (теплопроводности), решение которого для мгновенного источника (4) имеет вид

$$b = \frac{\alpha Q_0}{4\pi K t} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right). \quad (10)$$

Величина b с точностью до множителя является источником в уравнении (5). Решение последнего, как легко проверить, можно выразить в виде

$$w = gtb = \frac{\alpha g Q_0}{4\pi K} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right). \quad (11)$$

Найдем теперь температурное возмущение. Перепишем уравнение (6) с учетом (11):

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T'}{\partial r} - g\gamma_T tb + Q. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) можно представить в виде суммы двух слагаемых, соответствующих двум источникам в правой части (12). Одно из этих слагаемых соответствует источнику Q ; это — хорошо известная функция Грина уравнения теплопроводности. Второй источник ($-g\gamma_T tb = -\gamma_T w$), как легко проверить, вносит в решение вклад, равный

$$-\frac{1}{2} g\gamma_T t^2 b = -\frac{1}{2} \gamma_T t w.$$

Итак, с тепловыделением связано температурное возмущение

$$\begin{aligned} T' &= \frac{Q_0}{4\pi K t} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha g \gamma_T t Q_0}{4\pi K} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) = \\ &= \frac{Q_0}{4\pi K t} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \alpha g \gamma_T t\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично можно найти и выражение для возмущения концентрации примеси (в нем содержится аналог только второго из двух слагаемых в (13)).

Первое слагаемое в правой части (13) не нуждается в комментариях — оно описывает обычную диффузию тепла, выделившегося при $t = 0$ на оси z . Второе слагаемое описывает изменения температуры, связанные с адвекцией тепла — переносом тепла возникшими конвективными вертикальными движениями в стратифицированной среде. Особенность второго слагаемого, прежде всего, в том, что оно не затухает со временем по амплитуде (как первое), а усиливается. Нарастающий со временем отклик на сколь угодно малое начальное возмущение — признак неустойчивой системы. В этом смысле можно говорить о новом (видимо, не обсуждавшемся ранее) типе неустойчивости.

Другая особенность второго слагаемого в (13) заключается в том, что его знак может (при $\gamma_T > 0$) быть противоположным знаку первоначального тепловыделения.

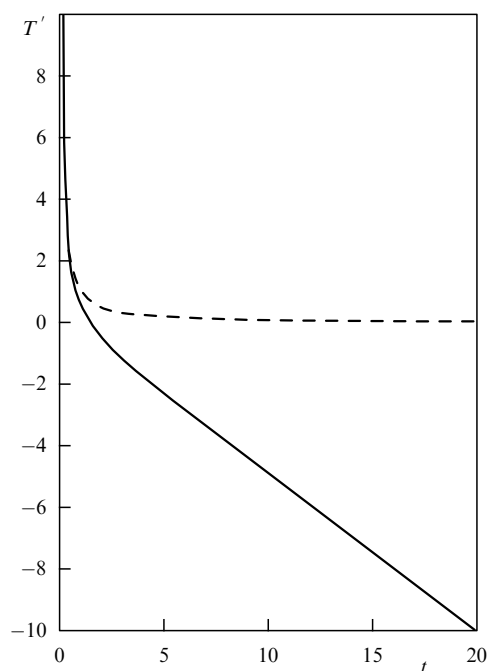


Рис. 1. Эволюция температурного возмущения на оси $z = 0$. Температура нормирована на $Q_0(\alpha g \gamma_T)^{1/2}/4\pi K$, время — на $(\alpha g \gamma_T)^{-1/2}$. Штрихом схематически изображена аналогичная кривая для нестратифицированной среды.

На рисунке 1 представлена зависимость температурного возмущения на оси z от времени при $\gamma_T > 0$. На малых временах преобладает первое слагаемое в (13) — имеет место обычное "диффузионное распыливание" выделившегося тепла. Но затем температурное возмущение меняет знак — в ответ на выделившееся тепло в системе нарастает отрицательное отклонение температуры (снизу поступает более холодная жидкость). В этом смысле можно говорить об эффективной отрицательной теплоемкости рассматриваемой среды.

Пример задачи конвекции может показаться весьма специальным и искусственным (рассматривается источник тепла бесконечной длины в неограниченной среде). Но такой пример использован здесь лишь для простоты и получения точного аналитического решения. Легко убедиться, что в "дважды неравновесных" средах (стратифицированных как по температуре, так и по концентрации примеси) подобные результаты можно получить и для других, хорошо известных форм конвекции от локальных источников — конвективных струй и изолированных термиков [10]. Физический механизм вполне прозрачен. Объем среды, получивший дополнительное тепло, очевидно, всплывает; при этом вполне возможны ситуации, когда он становится холоднее окружающей среды (поскольку переносит вверх более холодную жидкость), но продолжает при этом всплывать (за счет вклада в плавучесть отрицательного возмущения концентрации примеси). Таким образом, в ответ на полученное жидкой системой дополнительное тепло в ней нарастает отрицательное отклонение температуры! В [11], где решена задача о конвекции у бесконечной вертикальной пластины в бинарной смеси, показано, что качественно аналогичные эффекты возможны и при устойчивой стратификации плотности.

3. Задачи типа задач Рэлея–Бенара

Рассмотрим теперь задачи конвекции от плоских горизонтальных источников, например конвекцию в горизонтальном слое. Хорошо известно, что подобные задачи весьма содержательны и бывают очень трудными для анализа даже в случае однокомпонентных сред (см., например, [5, 8]). Для описания турбулентной конвекции в задачах такой геометрии в [12] была предложена теоретическая схема, допускающая аналитическое исследование. Эта нелинейная модель основана на соображениях размерности и подобия, а также выводится из полуэмпирической теории турбулентности; в дальнейшем она была развита теоретически и в какой-то мере апробирована экспериментально [13–16]. Такой подход нетрудно обобщить на случай двухкомпонентной среды [17].

Будем, как правило, рассматривать ситуации, когда плотностная стратификация достаточно неустойчива, так что число Рэлея велико, и конвекция носит турбулентный характер. При этом не исключается, что стратификация по температуре или по концентрации примеси (ниже для краткости в ряде случаев будем говорить о солености) может быть устойчивой. Иными словами, вклады температуры и концентрации примеси в вертикальный градиент плотности могут иметь противоположные знаки.

В рамках используемой теоретической схемы [12] вертикальный конвективный турбулентный перенос тепла (плавучести) описывается с помощью квазилинейного уравнения типа уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (14)$$

(в данном разделе T , s и ρ обозначают соответствующие величины, усредненные по турбулентным пульсациям). Эффективный коэффициент турбулентного обмена K , описывающий конвективный перенос тепла (плавучести), зависит от степени конвективной неустойчивости, т.е. от вертикального градиента плотности $\partial \rho / \partial z$. Из соображений размерности и подобия либо из уравнения баланса турбулентной энергии [18] можно получить

$$K = l^2 \sqrt{\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} \geq 0. \quad (15)$$

Здесь ρ_0 — некоторое среднее ("отсчетное") значение плотности среды, l — масштаб турбулентности. В обычно используемом приближении [4, 5, 12]

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho_0 \alpha \frac{\partial T}{\partial z},$$

откуда

$$K = l^2 \sqrt{-g \alpha \frac{\partial T}{\partial z}}, \quad (16)$$

где предполагается, что $\partial T / \partial z \leq 0$.

Чтобы обобщить указанную модель на случай бинарной смеси, прежде всего следует добавить уравнение переноса примеси, аналогичное (14):

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (17)$$

Градиент плотности в данном случае складывается из двух составляющих — термической и соленостной:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho_0 \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \beta \frac{\partial s}{\partial z} \right). \quad (18)$$

Из (18) и (15) имеем

$$K = l^2 \sqrt{g \left(-\alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \beta \frac{\partial s}{\partial z} \right)}, \quad (19)$$

где предполагается, что

$$-\alpha \frac{\partial T}{\partial z} + \beta \frac{\partial s}{\partial z} \geq 0. \quad (20)$$

Система (14), (17), (19) описывает нелинейное взаимодействие полей температуры и концентрации примеси посредством их влияния на конвекцию (на коэффициент K). Для замыкания этой системы необходима дополнительная гипотеза относительно масштаба турбулентности l . В простейшем случае имеются основания принимать l пропорциональным толщине турбулизованного слоя [19, 12]. Иногда требуется более детальное описание, учитывающее убывание l при приближении к границам конвективной области.

В качестве наиболее простого примера рассмотрим стационарную (в среднем) турбулентную конвекцию в горизонтальном слое двухкомпонентной среды. Обозначим Q_T и Q_s средние стационарные потоки тепла и примеси через рассматриваемый слой $0 < z < H$:

$$c_p \rho_0 K \frac{dT}{dz} = -Q_T, \quad (21)$$

$$\rho_0 K \frac{ds}{dz} = -Q_s, \quad (22)$$

где c_p — удельная теплоемкость среды. Линейная комбинация последних двух равенств дает

$$\rho_0 K \left(\beta \frac{ds}{dz} - \alpha \frac{dT}{dz} \right) = \frac{\alpha Q_T}{c_p} - \beta Q_s. \quad (23)$$

В соответствии с (20) левая часть (23) предполагается неотрицательной. Это означает ограничение на соотношение потоков тепла и примеси:

$$Q_s \leq \frac{\alpha Q_T}{\beta c_p} \quad (24)$$

(в противном случае стратификация плотности будет устойчивой и рассматриваемая модель заведомо неприемима).

Из (23) и (19) получаем

$$\beta \frac{ds}{dz} - \alpha \frac{dT}{dz} = \left(\frac{\alpha Q_T / c_p - \beta Q_s}{\rho_0 g^{1/2} l^2} \right)^{2/3}, \quad (25)$$

$$K = \left[\frac{l^4 g}{\rho_0} \left(\frac{\alpha Q_T}{c_p} - \beta Q_s \right) \right]^{1/3}. \quad (26)$$

Тогда из (21) и (22) имеем

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{Q_T / c_p}{[g \rho_0^2 l^4 (\alpha Q_T / c_p - \beta Q_s)]^{1/3}}, \quad (27)$$

$$\frac{ds}{dz} = - \frac{Q_s}{[g \rho_0^2 l^4 (\alpha Q_T / c_p - \beta Q_s)]^{1/3}}. \quad (28)$$

Равенства (26)–(28) содержат достаточную информацию о вертикальных профилях K , T и s , если считать известным профиль $l(z)$. В частности, если вблизи нижней границы слоя $z = 0$ принять гипотезу $l \sim z$, то получим хорошо известные [18] асимптотики

$$\frac{dT}{dz} \sim z^{-4/3}, \quad \frac{ds}{dz} \sim z^{-4/3}, \quad K \sim z^{4/3}.$$

Перепад температур в рассматриваемом слое можно представить как²

$$\begin{aligned} \Delta T &\equiv T|_{z=0} - T|_{z=H} = - \int_0^H \frac{dT}{dz} dz = \\ &= \frac{Q_T / c_p}{[g \rho_0^2 (\alpha Q_T / c_p - \beta Q_s)]^{1/3}} \int_0^H \frac{dz}{l^{4/3}(z)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для анализа последнего выражения удобно записать его в безразмерном виде

$$\hat{T} = \frac{\hat{Q}_T}{(\hat{Q}_T - \hat{Q}_s)^{1/3}}, \quad (30)$$

где введены безразмерные величины

$$\hat{T} = \alpha \Delta T, \quad \hat{Q}_T = \frac{\alpha Q_T}{c_p \rho_0 w}, \quad \hat{Q}_s = \frac{\beta Q_s}{\rho_0 w},$$

$$w^{-1} = \left[\frac{1}{g} \left(\int_0^H \frac{dz}{l^{4/3}} \right)^3 \right]^{1/2} = \left[\frac{H^3}{g (l^{4/3})^3} \right]^{1/2}.$$

Черта означает усреднение по толщине рассматриваемого слоя.

На рисунке 2 приведена выражаемая уравнением (30) связь перепада температуры в слое с потоком тепла для различных знаков стратификаций концентрации примеси и при отсутствии этой стратификации. Согласно условию (20) все три зависимости определены в областях, находящихся на рис. 2 правее значений $\hat{Q}_T$, соответствующих нейтральным стратификациям плотности. В однокомпонентной среде (кривая 2) $\Delta T \sim Q_T^{2/3}$. Вид кривых 1 и 2 на рис. 2 вполне согласуется с интуитивными представлениями о том, что потоки тепла должны быть монотонными функциями перепадов температур, и наоборот. В этом смысле представляется нетривиальным поведение кривой 3, содержащей нисходящий участок в интервале $\hat{Q}_s < \hat{Q}_T < (3/2) \hat{Q}_s$ (на правой границе этого интервала выражение (30) как функция $\hat{Q}_T$ принимает минимальное значение $3(\hat{Q}_s/2)^{2/3}$). Эта кривая относится к случаю, когда конвекция происходит "вопреки" устойчивой стратификации примеси, за счет нагрева жидкого слоя снизу или его охлаждения сверху.

Пусть, например, фиксирована температура на нижней границе слоя. Как изменится температура на верхней,

² Выражение (29) не учитывает перепады температур в тонких ламинарных слоях у горизонтальных границ рассматриваемой области. Поскольку вклад этих слоев в общий вертикальный перепад температур может быть очень большим, то надо иметь в виду, что ниже подразумевается перепад только в турбулентном слое. Более корректной была бы модель, включающая все упомянутые слои и описывающая их взаимодействие. Но здесь нам представляется целесообразным ограничиться максимально простой моделью с тем, чтобы сосредоточиться на качественных особенностях решения.

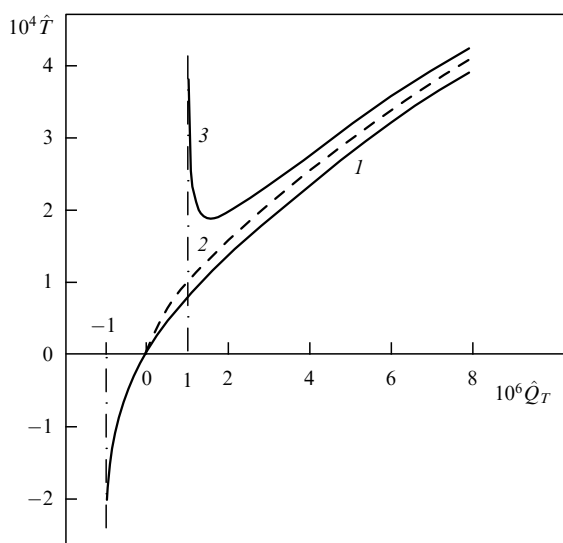


Рис. 2. Связь вертикального перепада температур в горизонтальном слое с потоком тепла. Кривые 1, 2, 3 соответствуют неустойчивой ($\hat{Q}_s = -10^{-6}$), нейтральной ($\hat{Q}_s = 0$) и устойчивой ($\hat{Q}_s = 10^{-6}$) стратификациям концентрации примеси соответственно. Штрихпунктирные прямые — вертикальные асимптоты кривых 1 и 3.

если при прочих равных условиях на верхней границе усилить отток тепла (увеличивая тем самым поток тепла Q_T через слой)? На первый взгляд, кажется очевидным, что усиление оттока тепла должно привести к понижению температуры на верхней границе. Но из полученных выше результатов следует, что в упомянутом интервале $\hat{Q}_s < \hat{Q}_T < (3/2)\hat{Q}_s$ температура изменится в противоположную сторону — повысится! Действительно, на указанном интервале перепад температур убывает с ростом Q_T . Следовательно, температура верхней границы с ростом Q_T (с увеличением оттока тепла на верхней границе) должна приближаться к фиксированной температуре нижней границы, т.е. возрастать.

Хотя этот результат и выглядит неожиданным, он вполне объясним, если исходить из следующих физических соображений. При увеличении оттока тепла на верхней границе усиливаются конвекция и перемешивание в рассматриваемом слое. Следовательно, усиливается поступление тепла вверх от нижней границы, температура которой фиксирована. И этот фактор в указанном интервале изменения параметра Q_T оказывается более существенным, чем непосредственное охлаждение при отводе тепла от верхней границы. Такой результат можно интерпретировать в терминах эффективной "отрицательной теплоемкости" рассматриваемой среды в упомянутом диапазоне параметров.

Отметим еще одну особенность полученного результата — возможность неединственности решений. Одному и тому же значению вертикального перепада температуры ΔT на кривой 3 соответствуют (за исключением одной точки) два разных значения потока Q_T и, следовательно, два разных режима турбулентной конвекции. Вопрос о реализуемости каждого из этих режимов, видимо, не может быть решен без анализа соответствующих нестационарных задач. На возможность неединственности режимов при турбулентной конвекции применительно к другой задаче недавно было обращено внимание в [20].

В [17] рассмотрен также пример нестационарной задачи — развитие турбулентной конвекции в стратифицированной соленой воде при охлаждении ее поверхности. Если температура и соленость вносят вклады противоположного знака в фоновую стратификацию плотности, нетривиальные эффекты возможны и в этом случае. Импульсное охлаждение поверхности сначала, естественно, приводит к понижению ее температуры. Но это отрицательное отклонение температуры со временем затухает. Вместе с тем охлаждение поверхности может инициировать развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора. Связанное с этим конвективное перемешивание верхнего слоя стратифицированной жидкости сопровождается изменением температуры поверхности, зависящим от первоначальной температурной стратификации. Указанное изменение температуры при этом может уже не затухать, а усиливаться со временем. Кроме того, знак этого изменения зависит от знака γ_T (первоначального вертикального градиента температуры); в частности, он может быть положительным. Иными словами, на импульсное охлаждение поверхности жидкая среда может реагировать нарастающим повышением температуры этой поверхности! Это возможно в ситуациях, когда вклады температуры и концентрации примеси в первоначальную стратификацию плотности имеют противоположные знаки.

4. Течения в среде, неоднородно нагреваемой сверху

Возникновение конвекции часто связывают с нагревом среды снизу (или охлаждением сверху). Но горизонтально-неоднородное охлаждение снизу или нагрев сверху также приводит к конвекции даже в ситуациях, когда плотность всюду убывает с высотой. Образующиеся в таких случаях течения вызваны горизонтальными градиентами давления. Подобные задачи имеют много приложений в геофизике, где указанные течения чаще называют не "конвекцией", а "термическими циркуляциями". Исследованию таких течений посвящена обширная литература. Но, насколько нам известно, лишь в последнее время было обращено внимание на некоторые качественные особенности подобных задач для двухкомпонентных сред, например соленой воды или влажного воздуха [21, 22].

Рассмотрим полуграниченный слой воды $z \leq 0$, стратифицированный по температуре и солености таким образом, что гидростатическое равновесие устойчиво (при этом взятая в отдельности температурная или соленостная стратификация может быть и неустойчивой, но устойчива суммарная плотностная стратификация). Квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести) [5, 8] складывается из "термической" и "соленостной" составляющих:

$$N^2 = N_T^2 + N_s^2, \quad (31)$$

где $N_T^2 = \alpha g \gamma_T$, $N_s^2 = -\beta g \gamma_s$.

Для описания возмущений малой амплитуды, вызываемых стационарным неоднородным нагревом и (или) "осолонением" на поверхности $z = 0$, используем линеаризованную стационарную систему уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси в приближении

Буссинеска [5, 6]:

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha T - \beta s) \mathbf{e}_z, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \\ \gamma_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = \kappa \nabla^2 T, \quad \gamma_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = \chi \nabla^2 s. \quad (32)$$

Здесь T и s — возмущения температуры и солености соответственно; $\mathbf{v}$ — трехмерный вектор возмущения поля скорости; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор в направлении оси z .

Предполагаем, что на поверхности воды $z = 0$ заданы возмущения вертикальных потоков тепла и соли, гармонически зависящие от горизонтальных координат x и y :

$$c_p \rho_0 \kappa \frac{\partial T}{\partial z} = Q_T \cos k_x x \cos k_y y \\ \rho_0 \chi \frac{\partial s}{\partial z} = Q_s \cos k_x x \cos k_y y, \quad \text{при } z = 0, \quad (33)$$

где смысл параметров Q_T , Q_s , k_x , k_y очевиден. Пренебрегаем деформациями поверхности воды и касательными напряжениями на ней:

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (34)$$

где u , v , w — составляющие скорости вдоль осей x , y и z соответственно. Предполагаем, что вдали от поверхности (при $z \rightarrow -\infty$) все возмущения затухают.

Ищем решения, гармонически зависящие от горизонтальных координат:

$$w(x, y, z) = W(z) \cos k_x x \cos k_y y, \\ u(x, y, z) = U(z) \sin k_x x \cos k_y y, \\ v(x, y, z) = V(z) \cos k_x x \sin k_y y \quad (35)$$

и т.д. Исключая из (32) все неизвестные, кроме w , нетрудно получить уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 W = k^6 S W, \quad (36)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$,

$$S = \frac{1}{k^4 \nu} \left(\frac{N_T^2}{\kappa} + \frac{N_s^2}{\chi} \right) = R_T + \frac{R_s}{\tau}, \quad \tau = \frac{\chi}{\kappa}, \quad (37) \\ R_T = \frac{N_T^2}{\nu \kappa k^4}, \quad R_s = \frac{N_s^2}{\nu \chi k^4}$$

— аналоги чисел Рэлея. Безразмерный параметр S имеет смысл некоторого обобщенного числа Рэлея. Для устойчивых фоновых состояний он неотрицателен.

Решение уравнения (36) находится стандартным образом в виде линейной комбинации экспонент $\exp(q_i kz)$, где q_i — корни характеристического уравнения

$$(q^2 - 1)^3 = S.$$

В общем случае решение выглядит довольно громоздко [21]. Приведем наиболее интересную асимптотику для больших значений обобщенного числа Рэлея S (это соответствует существенной роли устойчивой стра-

тификации плотности). При $S \gg 1$

$$w \approx \frac{Q_T \kappa S^{1/6}}{2 c_p \rho_0 \gamma_T} \frac{(1 + P/\tau)}{(1 + N_s^2/\tau N_T^2)} \left[\exp(S^{1/6} kz) - \right. \\ \left. - 2 \exp\left(\frac{1}{2} S^{1/6} kz\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} S^{1/6} kz - \frac{\pi}{3}\right) \right] \times \\ \times \cos k_x x \cos k_y y, \quad (38)$$

$$T \approx \frac{Q_T}{c_p \rho_0 \kappa k (1 + N_s^2/\tau N_T^2)} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(\frac{N_s^2}{N_T^2} - P \right) \exp(kz) + \right. \\ \left. + \frac{(1 + P/\tau)}{2 S^{1/6}} \left[\exp(S^{1/6} kz) + 2 \exp\left(\frac{1}{2} S^{1/6} kz\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} S^{1/6} kz\right) \right] \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \quad (39)$$

$$s \approx \frac{\alpha Q_T}{\beta c_p \rho_0 \chi k (1 + N_s^2/\tau N_T^2)} \left\{ \left(\frac{N_s^2}{N_T^2} - P \right) \exp(kz) - \right. \\ \left. - \frac{N_s^2}{N_T^2} \frac{(1 + P/\tau)}{2 S^{1/6}} \left[\exp(S^{1/6} kz) + 2 \exp\left(\frac{1}{2} S^{1/6} kz\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} S^{1/6} kz\right) \right] \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \quad (40)$$

где

$$P = -\frac{\beta Q_s}{\alpha Q_T / c_p} = -\chi \beta \frac{\partial s}{\partial z} \left(\kappa \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right)^{-1}$$

— безразмерное отношение возмущений "соленостного" и "термического" потоков плавучести на поверхности.

Решение зависит от ряда безразмерных параметров, в частности S , $N_s^2/N_T^2 = R_s/R_T$, P , τ (без учета эффектов двухкомпонентности среды из этих параметров остается лишь аналог числа Рэлея). Нетрудно видеть, что с упомянутыми эффектами примеси (стратификации солености) связан ряд качественно новых и весьма нетривиальных свойств решения по сравнению с однокомпонентной гидродинамической системой.

Если коэффициенты обмена для тепла и соли существенно различны (при молекулярном обмене, как известно [5], $\tau \sim 10^{-2}$), то прежде всего обращает на себя внимание разный "вес" температурного и соленостного вкладов в эффекты плавучести. Хотя суммарная плотностная стратификация пропорциональна $N_T^2 + N_s^2$, но в полученные решения, как правило, входит не эта сумма, а величина $N_T^2 + N_s^2/\tau$ (ей пропорционально, в частности, обобщенное число Рэлея S). Иными словами, влияние соленостного вклада в фоновую плотностную стратификацию (при указанном порядке величины τ) на два порядка больше, чем термического. Дестабилизирующая роль эффектов "дифференциальной диффузии" хорошо известна [5]. Из полученного решения видно, что в зависимости от знака γ_s соленостная стратификация может быть и стабилизирующим фактором, причем гораздо более сильным, чем температурная. Далее, если сравнивать влияние на решение "соленостных" и "термических" возмущений на границе (параметров Q_s и Q_T), то также обнаруживается "приоритет" первых: решение в ряде случаев содержит комбинацию $1 + P/\tau$. Это означает, что в решении относительный вес возмущений

плаваемости солёностного происхождения составляет τ^{-1} , т.е. они гораздо сильнее возмущают систему, чем такие же потоки плаваемости, но термического происхождения.

Как явствует из (38), вертикальные движения (а также возмущения горизонтальной скорости, плотности и давления) проникают в воду до глубины H_s порядка $k^{-1}S^{-1/6} \ll k^{-1}$. Это понятное и ожидаемое обобщение аналогичного результата для однокомпонентной среды, стратифицированной только по температуре [23]. В такой среде линейные возмущения всех величин проникают на глубину порядка

$$H_T = \left(\frac{\nu \kappa}{k^2 N_T^2} \right)^{1/6} = k^{-1} R_T^{-1/6}. \quad (41)$$

Но при $\tau \ll 1$ число S гораздо сильнее зависит от $\beta \gamma_s$, чем от $\alpha \gamma_T$, т.е. устойчивая солёностная стратификация гораздо сильнее препятствует проникновению стационарных возмущений в среду, чем термическая (при равных вертикальных градиентах плотности).

Эти результаты нетрудно понять из следующих физических соображений. При $\tau \ll 1$ солёностные возмущения релаксируют гораздо медленнее термических. Поэтому эффекты плаваемости и стратификации солёностного происхождения могут быть выражены значительно сильнее, чем аналогичные "термические".

Но и при отсутствии эффектов "дифференциальной диффузии" (при $\tau = 1$) можно указать еще по меньшей мере два нетривиальных свойства решения.

В выражения (39), (40) входит экспонента с показателем kz . Она не имеет аналогов в случае однокомпонентной среды [23]. Появление такого слагаемого означает, что в возмущениях температуры и солёности добавились составляющие, проникающие на глубину порядка горизонтальных масштабов возмущения $L = k^{-1}$. Для сравнения отметим, что при больших значениях чисел Рэлея глубина проникновения возмущений в однокомпонентную среду, согласно (41), много меньше L . На первый взгляд, добавление к устойчивой температурной стратификации еще и устойчивой солёностной стратификации может лишь дополнительно стабилизировать систему и уменьшить глубину проникновения всех возмущений и их амплитуду. Но, как явствует из решения, последнее утверждение в какой-то мере справедливо только для возмущений скорости, давления и плотности. Глубина же проникновения стационарных термических возмущений, наоборот, резко возрастает (за исключением случаев некоторых специальных краевых условий). Более того, амплитуда этой "дополнительной" медленно затухающей экспоненты может быть существенно больше других членов в выражении (39) (поскольку последние содержат в знаменателе большую величину $2S^{1/6}$), т.е. речь идет также и о резком возрастании амплитуды термических возмущений. Однако амплитуды возмущений температуры и солёности в (39), (40) соотносятся таким образом, что возмущения плотности практически существуют только в относительно тонком слое толщиной порядка $LS^{-1/6}$, где возмущения плотности, как правило, являются малой разностью термической и солёностной составляющих.

Весьма неожиданными представляются свойства решения, относящиеся к возможным знакам возмущений температуры. На первый взгляд, кажется очевидным, что этот знак должен совпадать со знаком Q_T (по

крайней мере при $Q_s = 0$): дополнительный поток тепла, поступающего в среду (такое возмущение потока мы называем положительным, $Q_T > 0$), должен приводить к повышению температуры соответствующей области среды. Но, как видно из решения (39), температурный отклик приповерхностного слоя в зависимости от значений параметров может иметь и противоположный знак! Действительно, из (39) следует

$$T|_{z=0} \approx \frac{Q_T}{c_p \rho_0 \kappa k (1 + N_s^2 / \tau N_T^2)} \times \left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{N_s^2}{N_T^2} - P \right) + \frac{3(1 + P/\tau)}{(2S^{1/6})} \right] \cos k_x x \cos k_y y. \quad (42)$$

Пусть, например, для простоты, возмущение потока солёности на границе отсутствует ($Q_s = 0$, $P = 0$); температурная стратификация устойчива, а солёностная неустойчива ($N_T^2 > 0$, $N_s^2 < 0$), причем отрицательное число $N_s^2 / \tau N_T^2$ по абсолютной величине меньше, но порядка единицы. При достаточно больших значениях S основным в квадратных скобках в (42) является первое слагаемое, поскольку знаменатель второго $\sim 2S^{1/6}$. Первое слагаемое, как уже упоминалось, отрицательно, т.е. температурный отклик имеет знак, противоположный знаку возмущения притока тепла! Речь идет о ситуациях, когда коэффициент при первой экспоненте в (39) отрицателен и преобладает по абсолютной величине над коэффициентами при остальных экспонентах.

На рисунке 3 приведены примеры профилей возмущений температуры, плотности и вертикальной скорости при положительном отклонении потока тепла на поверхности ($Q_T > 0$, $Q_s = 0$, $x = y = 0$). Приняты следующие значения параметров, соответствующие турбулизированному приповерхностному слою морской воды [21]: $\tau = 1$, $\kappa = \nu = 2 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $k = 0,47 \text{ м}^{-1}$ ($L \equiv 2\pi/k \approx 13 \text{ м}$). Видно, что возмущения скорости и плотности при $S \gg 1$ проникают в воду на глубину, существенно меньшую характерных горизонтальных масштабов возмущения L . Структура течений аналогична структуре в соответствующей задаче для однокомпонентной среды [23] — последовательность простых циркуляционных ячеек, быстро затухающих с глубиной, так что на рис. 3 заметно выражены лишь одна-две верхние ячейки. Амплитуда и глубина проникновения динамических возмущений будут еще существенно меньше при наличии эффектов "дифференциальной диффузии" ($\tau \ll 1$) и устойчивой солёностной стратификации (это видно из (38), поскольку с уменьшением τ возрастают абсолютные значения безразмерных чисел $N_s^2 / \tau N_T^2$ и S). Эффекты двухкомпонентности среды не приводят к качественным изменениям профилей возмущений скорости и плотности (отсутствию этих эффектов на рис. 3 соответствуют кривые с индексом "2").

Такие свойства динамических возмущений можно было ожидать заранее. Совершенно иначе обстоит дело с температурными возмущениями. Видно, что подробно исследованный ранее случай однокомпонентной среды (кривая T_2) весьма специфичен, и учет стратификации примеси (соли) качественно меняет картину: с ее учетом глубина проникновения и амплитуда возмущений при $S \gg 1$ резко возрастают. Пусть, например, к фоновой устойчивой термической стратификации дополнительно

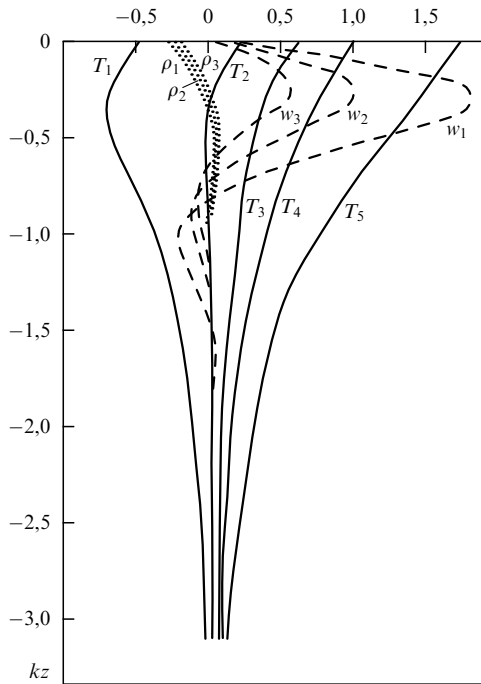


Рис. 3. Примеры безразмерных вертикальных профилей под источником тепла на поверхности среды ($Q_T > 0$, $x = y = 0$) при $Q_s = 0$, $\tau = 1$. Возмущения температуры нормированы на $Q_T/c_p\rho_0\gamma_T k$ и обозначены сплошными линиями, возмущения плотности нормированы на $\alpha Q_T/c_p\gamma_T k$ (пунктирные линии), профили вертикальной скорости нормированы на $2,5kQ_T/c_p\rho_0\gamma_T$ (штриховые линии). Индексы соответствуют следующим фоновым состояниям: "1" — $N_T^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$, $N_s^2 = -0,5 \times 10^{-4} \text{ с}^{-2}$, $S \approx 0,25 \times 10^5$; "2" — $N_T^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$, $N_s^2 = 0$, $S \approx 0,5 \times 10^5$; "3" — $N_T^2 = N_s^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$, $S \approx 10^5$. Температурные профили с индексами "4" и "5" соответствуют "2" и "1", но фоновые температурная и соленостная стратификация "поменялись местами": "4" — $N_T^2 = 0$, $N_s^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$, $S \approx 0,5 \times 10^5$, "5" — $N_s^2 = -2N_T^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$, $S \approx 0,25 \times 10^5$.

добавляется и устойчивая соленостная. Интуитивно кажется очевидным, что амплитуда и глубина проникновения возмущений в этом случае при прочих равных условиях должны уменьшиться. Но сравнение кривых T_2 и T_3 на рис. 3 свидетельствует об обратном — существенном усилении и углублении возмущений! Еще раз подчеркнем, что связанное с эффектами двухкомпонентности среды усиление возмущений происходит даже и при удалении от области неустойчивости.

Но самый неожиданный результат — знак температурных возмущений в той области параметров, где устойчивая температурная стратификация частично компенсируется неустойчивой стратификацией примеси. В ответ на дополнительный приток тепла верхний слой воды оказывается более холодным (кривая T_1 на рис. 3).

Последний результат можно интерпретировать следующим образом. Без учета стратификации солености приток тепла к некоторому участку поверхности приводит к повышению температуры приповерхностной области и восходящим движениям в этой области. Восходящие движения приносят снизу более холодную воду. Этот перенос (слагаемое $\gamma_T w$ в уравнении переноса тепла) частично компенсирует приток тепла сверху. Поэтому положительное отклонение температуры при отсутствии эффектов стратификации примеси невелико и имеет место в относительно тонком слое толщиной

$\Delta z \sim H = L/R_T^{1/6}$. Наличие неустойчивого градиента солености способствует усилению упомянутого подъема холодной воды из глубины к поверхности. В результате вода в поверхностном слое оказывается даже холоднее фона. Но несмотря на это, возмущение плотности отрицательно, поскольку снизу поступает менее соленая вода, так что восходящие движения поддерживаются и в этом случае.

Интересно отметить, что профили возмущений плотности ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 (см. рис. 3) для трех различных фоновых состояний весьма близки. Различие соответствующих профилей скорости при этом существенное, но носит лишь количественный характер. А возмущения в поле температуры T_1 , T_2 , T_3 при этом различаются даже качественно (могут иметь разные знаки).

Отметим также, что одни и те же потоки тепла на поверхности могут приводить к существенно разным возмущениям сред с одинаковыми плотностными, но разными соленостными и термическими стратификациями. Это видно, например, из сравнения профилей T_4 и T_2 или T_5 и T_1 .

Таким образом, в устойчиво стратифицированной двухкомпонентной среде, неоднородно нагреваемой сверху (или охлаждаемой снизу), возникают течения, которые даже в линейном приближении могут приводить к температурным откликам неожиданного, на первый взгляд, знака. В ответ на дополнительный приток тепла температура может понижаться, и наоборот. Имеется и ряд других нетривиальных эффектов, связанных с двухкомпонентным характером среды. В частности, добавление устойчивой стратификации примеси к устойчивой температурной может (вопреки интуитивным представлениям) приводить к существенному возрастанию амплитуды и глубины проникновения в среду термических возмущений, связанных с горизонтальными неоднородностями потоков тепла на поверхности. С учетом существенного различия коэффициентов переноса тепла и соли соленостная стратификация может гораздо сильнее стабилизировать слой воды, чем такая же устойчивая плотностная стратификация, но термического происхождения.

5. Заключение

Итак, в стратифицированных двухкомпонентных жидких средах в поле силы тяжести возможны нетривиальные эффекты, примеры которых можно было бы продолжить. В частности, как уже упоминалось, в [11] найдено решение задачи о конвективной струе, возникающей при нагреве среды помещенной в нее вертикальной пластиной. И в этом случае направленный в жидкость поток тепла может приводить не к повышению, а к понижению ее температуры. Кроме того, при переходе от одно- к двухкомпонентной устойчиво стратифицированной среде возможно резкое возрастание амплитуды и глубины проникновения возмущений в среду. Эффекты, о которых идет речь, наиболее ярко проявляются в ситуациях, когда температура и концентрация примеси вносят вклады противоположного знака в плотностную стратификацию среды.

Один из результатов заключается в том, что в двухкомпонентной среде термический отклик на относительно слабое тепловыделение может быть достаточно сильным (и усиливаться со временем). Это связано с тем,

что в двухкомпонентной среде может отсутствовать отрицательная обратная связь, которая обязательно существует в среде, стратифицированной (устойчиво) только по температуре. В последней вертикальным движениям препятствует устойчивая стратификация плотности, так что перенос тепла возникающими при тепловыделении вертикальными движениями ограничен. Иными словами, в выражении для конвективного потока тепла $-\gamma_T w$ в однокомпонентной среде оба сомножителя обычно не могут быть большими одновременно: если велик $\gamma_T > 0$, то мала w (достаточно устойчивая стратификация подавляет вертикальные движения). В двухкомпонентной же среде устойчивая стратификация температуры может быть скомпенсирована (полностью или частично) неустойчивой стратификацией примеси. Поэтому условия для возникновения вертикальных движений могут быть гораздо более благоприятными; большие абсолютные значения γ_T и w не исключают друг друга и могут иметь место одновременно. Это означает благоприятные условия для развития интенсивных вертикальных конвективных потоков тепла и, следовательно, для возникновения температурных возмущений большой амплитуды.

Знак этих потоков и термических возмущений определяется знаком фонового вертикального градиента температуры; следовательно, в двухкомпонентной среде он может быть любым (в однокомпонентной среде, стратифицированной только по температуре, можно говорить только об одном знаке γ_T , поскольку не имеет смысла рассматривать фоновые состояния с неустойчивыми градиентами плотности). Таким образом, в двухкомпонентной среде возможны ситуации, когда знак температурного отклика противоположен знаку источника тепла — тепловыделение приводит к появлению отрицательных температурных возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 98-05-64527 и 02-05-64203) и МНТЦ (проект G-553).

Список литературы

1. Nicholls K W *Nature* **388** 460 (1997)
2. Силкин Б И *Метеорология и гидрология* (4) 127 (1998)
3. Вульфсон Н И *ДАН СССР* **151** 1089 (1963)
4. Гершуни Г З, Жуховицкий Е М *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости* (М.: Наука, 1972)
5. Тернер Дж *Эффекты плавучести в жидкостях* (М.: Мир, 1977)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
7. Ингель Л Х *Письма в ЖЭТФ* **72** 753 (2000)
8. Гебхарт Б и др. *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен* Кн. 1 (М.: Мир, 1991) § 7.2, с. 435
9. Ингель Л Х *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **26** 794 (1990)
10. Ингель Л Х *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **37** 639 (2001)
11. Ингель Л Х *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (3) 92 (2002)
12. Вульфсон А Н, Ингель Л Х *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **18** 233 (1982)
13. Баренблатт Г И, Бенилов А Ю *Океанология* **23** 743 (1983)
14. Бенилов А Ю, Розовский М Х *Океанология* **23** 944 (1983)
15. Дикарев С И, Зацепин А Г *Океанология* **23** 950 (1983)
16. Вульфсон А Н *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (3) 90 (2001)
17. Ингель Л Х *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **38** (2002) (в печати)
18. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика: Теория турбулентности* Т. 1 (СПб.: Гидрометеиздат, 1992)
19. Баренблатт Г И *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (Л.: Гидрометеиздат, 1982)
20. Ингель Л Х *Метеорология и гидрология* (12) 47 (2000)
21. Ингель Л Х *Океанология* **41** 502 (2001)
22. Ингель Л Х *Доклады РАН* **379** 381 (2001)
23. Линейкин П С, Мадерич В С *Теория океанического термоклина* (Л.: Гидрометеиздат, 1982)

"Negative heat capacity" in stratified fluids

L.Kh. Ingel

*Institute of Experimental Meteorology SPA "Typhoon",
prosp. Lenina 82, 249038 Obninsk, Kaluga Region, Russian Federation
Tel./Fax: (7-08439) 667 35
E-mail: lingel@obninsk.com*

In "doubly nonequilibrium" fluids (e.g., in temperature- and admixture-concentration-stratified solutions in the gravity field) situations may occur in which adding (extracting) heat can lower (rise) the temperature of the medium. Several simple examples of this phenomenon are considered.

PACS numbers: **44.35. + c**, 47.27.Fe, 92.60.Ek

Bibliography — 23 references

Received 21 January 2002, revised 13 March 2002