

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Дипольно-волновая теория дифракции электромагнитного излучения

В.Г. Низьев

*Предлагаемая теория сохраняет последовательно волновой подход, используемый в методе Кирхгофа, и не имеет жестких ограничений применимости, свойственных интегралу Кирхгофа. Решение задачи дифракции осуществляется путем использования вектора Герца вместо вектора поля в интеграле Кирхгофа. Получены аналитические решения базовых задач дифракции линейно поляризованного излучения, а также излучения с азимутальным и радиальным направлением поляризации. Качественной особенностью полученных решений является наличие "полюсов" — точек нулевого поля на дифракционной картине, накладывающихся на систему светлых и темных полос. Полюсы располагаются вдоль направления вектора поля. Полученные решения удовлетворяют уравнениям Максвелла и принципу взаимности.*

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Fx

### Содержание

1. Введение (601).
2. Общий подход (602).
3. Дифракция излучения на бесконечной щели (603).
4. Дифракция линейно поляризованного излучения на прямоугольном и круглом отверстиях (604).
5. Дифракция излучения с азимутальным направлением поляризации на кольцевой щели (606).
6. Дифракция излучения с радиальным направлением поляризации на кольцевой щели (606).
7. Заключение (607).

Список литературы (607).

### 1. Введение

Наиболее общим и строгим подходом к решению задач дифракции является решение векторных уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями. Такой подход рассматривается во многих книгах и монографиях, например в [1–5]. Однако большие математические трудности на этом пути серьезно ограничивают практическое использование таких решений. Так, даже формально строгое решение для дифракции на круглом отверстии [6, 7] практически невозможно использовать из-за плохой сходимости рядов, в виде которых оно выражается [1, 3, 8]. При решении конкрет-

ных задач обычно применяют физические упрощения и приближенные вычисления.

Известно множество методов приближенных решений задач дифракции на основе принципа Гюйгенса. Они, как правило, являются комбинированными и используют как представления геометрической оптики, так и волновой подход. Классическим примером такого рода является метод зон Френеля. Аналогичный подход реализуется в методе Дебая для описания поля при острой фокусировке и в ряде других [4]. Полуэмпирические подходы, реализуемые в этих методах, определяют и жесткие рамки их применимости.

Метод Кирхгофа для описания электромагнитного поля использует чисто волновой подход к решению задачи дифракции. Вывод скалярного интеграла Кирхгофа основан на волновом уравнении и строгой математической логике [4, 9–11]. Однако, как хорошо известно, область применимости скалярного интеграла Кирхгофа также весьма узка. Причины таких ограничений чисто физические и заложены в самой постановке задачи.

Скалярное волновое уравнение для поля в свободном пространстве, используемое при выводе интеграла Кирхгофа, заведомо не содержит информацию об изменении направления поля. А скалярное уравнение для функции Грина дает решение в виде простейшей сферической волны от точечного источника с однородным направлением поля. Однако в силу поперечного характера электромагнитного поля существование такой волны невозможно. С формальной точки зрения решение волнового уравнения для поля не эквивалентно решению уравнений Максвелла, а "независимое" скалярное по-компонентное рассмотрение векторной задачи необоснованно. Поэтому решения на основе скалярного интеграла Кирхгофа не удовлетворяют уравнению Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , а приближенное описание дифракционной картины таким методом корректно только в небольшом

**В.Г. Низьев.** Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН,  
140700 Шатура, Московская обл., ул. Святоозерская 1,  
Российская Федерация  
Тел. (09645) 259-95. Факс (09645) 225-32  
E-mail: niziev@laser.nictl.msk.su

Статья поступила 24 октября 2001 г.

телесном угле. Есть только один, весьма частный случай, когда скалярный интеграл Кирхгофа может быть применен без указанных ограничений, о нем будет упомянуто в разделе 3.

Известно обобщение метода Кирхгофа на случай векторных полей — интеграл Кирхгофа — Коттлера [4, 9, 11, 12]. Общая идея состоит в применении скалярного интеграла Кирхгофа в отношении компонент разложения поля с последующим векторным сложением полученных решений. Характеризуя эмпирический характер такого подхода, авторы классической монографии [9] указывают на то, что он не имеет физической интерпретации, а решения, полученные на его основе, не соответствуют уравнению Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Все недостатки скалярного подхода, о которых говорилось выше, автоматически переносятся и на интеграл Кирхгофа — Коттлера, поэтому решения на его основе дают приближенные решения в ограниченной области параметров задачи и в узкой зоне рассмотрения дифракционной картины. Формальные аспекты корректных методов "скаляризации" векторных электродинамических уравнений рассматриваются, в частности, в книге [13].

Коттлер предложил (см. [14–16]) ввести в решение дополнительный контурный (вдоль края отверстия) интеграл. Необходимость такого введения Коттлер объяснял наличием распределенных вдоль контура отверстия электрических и магнитных зарядов. Логичное объяснение введения контурного интеграла дано в [4]. Часто при решении задач дифракции в качестве заданного поля на апертуре берут невозмущенное поле падающей волны. Это определяет границы применимости метода:  $kr \gg 1$ ,  $ka \gg 1$ , где  $k$  — волновой вектор,  $a$  — характерный размер апертуры,  $r$  — расстояние от края апертуры до точки наблюдения. Введение контурного интеграла позволяет рассчитывать поле дифракции и на малых расстояниях от края диафрагмы, где нельзя пренебречь искажениями поля. Однако введение этого интеграла не может "скомпенсировать" недостатки, заложенные в самом методе Кирхгофа: скалярный интеграл и векторное обобщение.

Целью настоящей работы является создание физически обоснованной и математически корректной векторной теории дифракции, использующей логику метода Кирхгофа и не имеющей жестких ограничений применимости, свойственных интегралу Кирхгофа, и получение на ее основе аналитических решений нескольких базовых задач дифракции.

## 2. Общий подход

Принципиальных физических ограничений, свойственных методу Кирхгофа, можно избежать, если использовать в методе Кирхгофа не поля, а поляризационный потенциал или вектор Герца  $\mathbf{Z}$  [11], как это, например, делается в теории антенн.

Известно, что  $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$  так же, как электрическое и магнитное поле, удовлетворяет волновому уравнению  $\square \mathbf{Z} = 0$  и связан с полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  следующими соотношениями:

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь надо отметить одну важную особенность решения волнового уравнения через вектор Герца. Найденные

по формулам (1) поля автоматически удовлетворяют уравнению Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  [5]. Внутреннее противоречие, свойственное обычному методу Кирхгофа, при данном подходе отсутствует.

Выражение для электромагнитного поля излучающего диполя  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \exp(-i\omega t)$  получается из решения волнового уравнения с источником в виде диполя [11]

$$\mathbf{Z} = \mathbf{p}_0 \frac{\exp(-i\omega t + ikr)}{r}. \quad (2)$$

Поляризационный потенциал дипольной волны параллелен  $\mathbf{p}_0$  и переносится сферической волной (рис. 1). Одно из двух скалярных волновых уравнений, используемых в методе Кирхгофа, — неоднородное уравнение для функции Грина, — будучи записано для  $Z$ , приобретает вполне точную физическую интерпретацию. Оно описывает поле излучения реального точечного источника электромагнитного излучения. Известные выражения для электрического и магнитного полей излучающего диполя получаются подстановкой (2) в (1); дипольная волна показана на рис. 1.

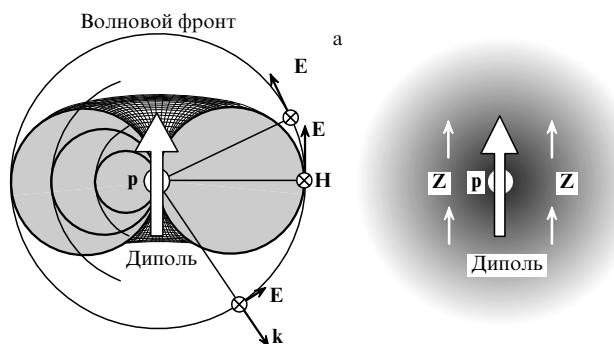


Рис. 1. Распределение электрического и магнитного полей (а) и вектора Герца (б) излучающего диполя.

Учитывая, что поляризационный потенциал дипольной волны сохраняет свое направление в различных точках пространства, при падении на апертуру линейно поляризованного излучения можно воспользоваться скалярными уравнениями, примененными к  $Z$ . При этом скалярный интеграл Кирхгофа, записанный для  $Z$ , содержит векторную информацию о поле дифракционной картины.

Это дает возможность без каких-либо приближений, связанных с неоднородностью векторной функции, выписать интеграл для  $Z$ , а выражения для векторных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получить простым дифференцированием. Этот подход естественным образом обобщается и на общий случай с произвольным распределением направления поля на апертуре.

Таким образом, основой для решения векторной задачи дифракции при линейной поляризации падающего излучения является скалярный интеграл Кирхгофа [11], записанный для вектора Герца:

$$Z(\mathbf{r}) = \int_{S'} [G(\mathbf{n} \nabla) Z_0 - Z_0(\mathbf{n} \nabla G)] dS'. \quad (3)$$

Здесь  $Z_0(\mathbf{r}')$  — распределение вектора Герца на заданной поверхности  $S'$ ;  $Z(\mathbf{r})$  — вектор Герца в точке наблюдения;  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к поверхности заданного

поля на апертуре;  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{r}')]/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  — функция Грина скалярного волнового уравнения.

Рассмотрим очень важный и широко распространенный случай — дифракцию плоской, линейно поляризованной волны на апертуре. В этом случае  $\mathbf{Z}_0(\mathbf{r}')$  и  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}')$  на поверхности  $S'$  связаны простым соотношением  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') = -k^2 \mathbf{Z}_0(\mathbf{r}')$ . Учитывая это, (3) может быть представлено в виде

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_0 \frac{1}{k^2} \int_{S'} \left[ G \frac{d}{dn} E_0 - E_0 \frac{d}{dn} G \right] dS', \quad (4)$$

где  $\mathbf{e}_0$  — единичный вектор в направлении поля, а  $d/dn$  — производная по направлению  $\mathbf{n}$ ,  $d/dn = \mathbf{n} \nabla$ .

Технология вычисления поля дифракции теперь сводится к вычислению интеграла в выражении (4), записи  $\mathbf{Z}$  в векторном виде с тем же единичным вектором, что и поле  $\mathbf{E}_0$ , и, наконец, вычислению самого поля по формулам (1). Полученное решение для плоской падающей волны (4) позволяет решить задачу и в общем случае.

Возвращаясь к вопросу о скаляризации векторных электродинамических уравнений [13], можно заключить, что рассмотренная методика решения задачи дифракции является еще одним "физическим" методом скаляризации. В общем случае трехмерного векторного поля необходимо решать векторную задачу дифракции для линейно поляризованного излучения по каждой из компонент. Как было показано выше, эта задача сводится к скалярному интегралу при применении вектора Герца. Эти решения справедливы во всем пространстве и удовлетворяют уравнениям Максвелла, поэтому поля дифракции от каждой из компонент можно векторно сложить.

Обсудим ограничения применимости данного метода. Поскольку в качестве заданного поля на апертуре используется поле, невозмущенное краями, это приводит к типичному для таких случаев ограничению на характерный размер отверстия  $ka \gg 1$ . Обычно хорошее согласие таких расчетов с точными вычислениями наблюдается при  $ka \geq 5$  [10]. Что касается расстояний до точки наблюдения  $r$ , то обычным приближением является волновая зона  $kr \gg 1$ . При меньших расстояниях от края отверстия нельзя пренебрегать искажениями поля на краях диафрагмы при любых размерах отверстия. Во всех приведенных ниже задачах принято более жесткое приближение  $r \gg a$ , позволяющее получить аналитические зависимости.

Далее рассмотрены несколько примеров дифракции света на отверстиях различных форм в непрозрачном экране, иллюстрирующих применение предложенного метода. Во всех случаях поверхность  $S'$ , покрывающая апертуру, на которой поле предполагается заданным, принята плоской, вектор  $\mathbf{n}$  в формулах (3) и (4) направлен вдоль оси  $z$ . Во всех случаях плоскость  $xz$  является плоскостью падения излучения. При дифракции на щели, прямоугольном и круглом отверстиях рассмотрены два возможных направления поля: в плоскости падения излучения и перпендикулярно ей. На их основе может быть построено решение для любого направления поля.

### 3. Диракция излучения на бесконечной щели

Рассмотрим идеально проводящий экран в плоскости  $xy$ , бесконечную щель в нем шириной  $2\Delta x$ , параллельную

оси  $y$ . На щель падает плоская линейно поляризованная волна в плоскости  $xz$  под углом  $\theta_0$  к оси  $z$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}_0 E_0 \exp[i(k_x x' + k_z z')] = \\ &= \mathbf{e}_0 E_0 \exp(ikx' \sin \theta_0) \exp(ikz' \cos \theta_0). \end{aligned}$$

Временной сомножитель  $\exp(-i\omega t)$  для краткости опускаем,  $\mathbf{e}_0$  — единичный вектор в направлении поля.

Вектор  $\mathbf{Z}$  (4) имеет одинаковое направление во всех точках, совпадающее с направлением  $\mathbf{E}_0$ . Взятие скалярного интеграла (4) является стандартной процедурой. В волновой зоне  $k\rho \gg 1$  интеграл для вектора Герца имеет вид

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{i}{k} E_0 \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \exp(ikx' \sin \theta_0) \frac{\exp(ik(\rho - \rho'))}{\rho - \rho'} \times \\ &\quad \times \left( \cos \theta_0 + \frac{z}{\rho - \rho'} \right) dx'. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\rho - \rho' = \sqrt{(x - x')^2 + z^2}$ ,  $\rho$  — радиус-вектор в точку рассмотрения,  $\Delta x$  — полуширина щели. В приближении  $\Delta x \ll \rho$  может быть получено аналитическое решение

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= -i\bar{S} \frac{\exp(i\bar{\rho})}{\bar{\rho}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{\sin \chi}{\chi}; \\ \chi &= \overline{\Delta x} (\sin \theta - \sin \theta_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы перешли в координаты  $\rho$  и  $\theta$  (угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $z$ ) и ввели безразмерные параметры

$$\bar{Z} = Z \frac{k^2}{E_0}, \quad \bar{S} = 2k \Delta x, \quad \overline{\Delta x} = k \Delta x, \quad \bar{\rho} = k \rho.$$

Это приближение существенно отличается от приближения Кирхгофа, поскольку не накладывает ограничения применимости по углу и потенциально содержит информацию о направлении поля дифракции в различных точках в зависимости от направления начального поля.

Если поле  $\mathbf{E}_0$  направлено перпендикулярно плоскости падения ( $\mathbf{E}_0 \parallel y$ ), в векторном виде имеем  $\mathbf{Z} = Z(x, z)\mathbf{e}_y$ . Вычисление поля по формуле (1) производилось в декартовой системе координат. Процедура взятия ротора существенно упрощается, если учсть порядок малости производных, взятых от сомножителей в формуле (6). Максимальной по порядку величины является производная по координате от экспоненты из-за сомножителя  $k = 2\pi/\lambda$ . Такой же сомножитель появляется и в производной от  $\chi$ , но здесь есть еще и коэффициент типа  $\Delta x/\rho$ , малый в силу принятых приближений. В данном случае выражение для  $\mathbf{E}$  получается простым:

$$\mathbf{E} = E_0 \bar{Z} \mathbf{e}_y, \quad (7)$$

где  $\bar{Z}$  определяется формулой (6). Выражение (7) совпадает с формулой, получаемой из обычного скалярного интеграла Кирхгофа, и это вполне объяснимо. Только в этом единственном и исключительном случае решение по обычной методике удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ .

Соответственно для поля  $\mathbf{E}_0$ , лежащего в плоскости падения ( $\mathbf{E}_0 \perp y$ ), поляризационный потенциал имеет вид  $\mathbf{Z} = Z(x, z)(\mathbf{e}_x \cos \theta_0 - \mathbf{e}_z \sin \theta_0)$ , а вычисления по формуле (1) дают следующее выражение для электрического поля:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\theta - \theta_0) \bar{Z} \mathbf{e}_\theta. \quad (8)$$

Направление дифрагированного поля, определяемое формулами (7) и (8), проиллюстрировано на рис. 2, а распределения амплитуды поля, рассчитанные по формулам (7) и (8) при нулевом угле падения, представлены на рис. 3. Хорошо видна качественная особенность полученных результатов. В случае, когда  $E_0 \perp y$ , поле дифракции при  $\theta = \pi/2$ , т.е. вдоль экрана, равно нулю при любой ширине щели. Излучение в направлении начального поля отсутствует. Если же  $E_0 \parallel y$ , ситуация иная. Амплитуда поля дифракции при  $\theta = \pi/2$  зависит от ширины щели. При ширине, кратной длине волны, поле равно нулю; при ширине, равной нечетному числу полуволн, поле вдоль экрана отлично от нуля.

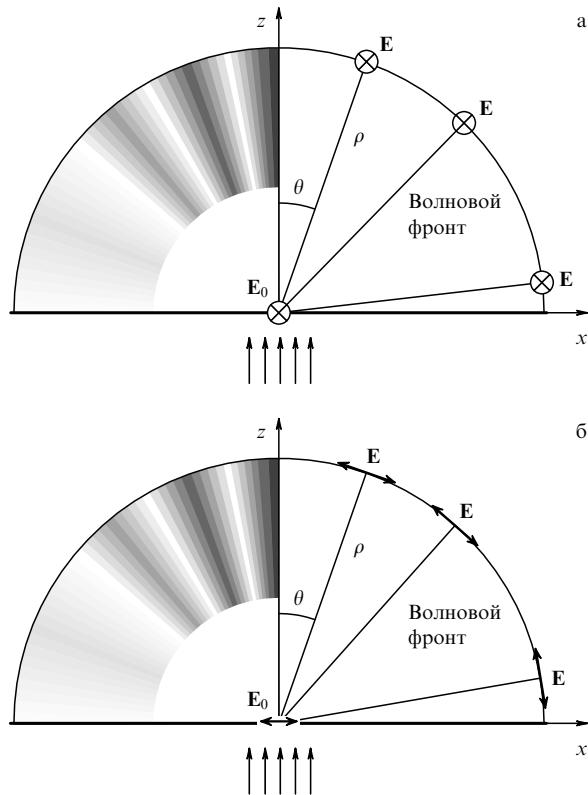


Рис. 2. Дифракция линейно поляризованного света на бесконечной щели. Схема, условные обозначения и синтезированная на основе расчетов картина дифракции. Показано направление поля дифракции при разных направлениях поля на щели. Угол падения равен нулю.

На рисунке 4 приведены результаты расчетов для угла падения  $72^\circ$ . Характерной особенностью случая  $E_0 \perp y$  является наличие дополнительной точки нулевого поля при  $\theta = \theta_0 - \pi/2$  (формула (8)). "Полюс" находится вдоль направления поля.

При  $\theta_0 = 0$  и  $\theta \rightarrow 0$  формулы (7) и (8) переходят в классические.

На основе полученных выражений (7) и (8) может быть записана уточненная формула для простейшей дифракционной решетки, образованной параллельными щелями, прорезанными в непрозрачном экране. Известно, что формула для прошедшего через такую решетку поля содержит два сомножителя: член, описывающий дифракцию на одной щели, и выражение, связанное с коллективным эффектом дифракции на многих щелях. Теперь

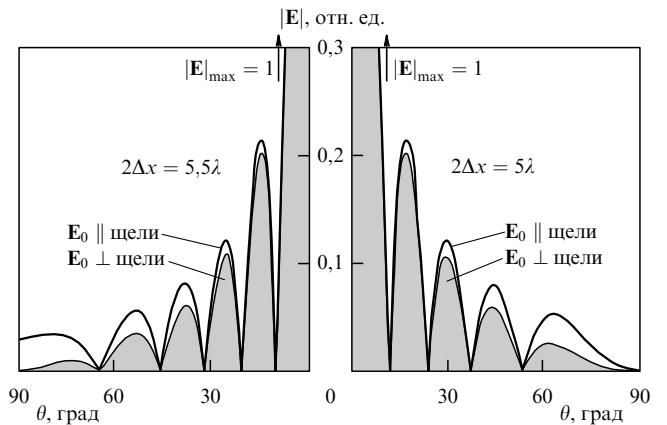


Рис. 3. Дифракция линейно поляризованного поля на бесконечной щели при двух направлениях поляризации относительно щели и разных ширинах щели. Угол падения равен нулю.

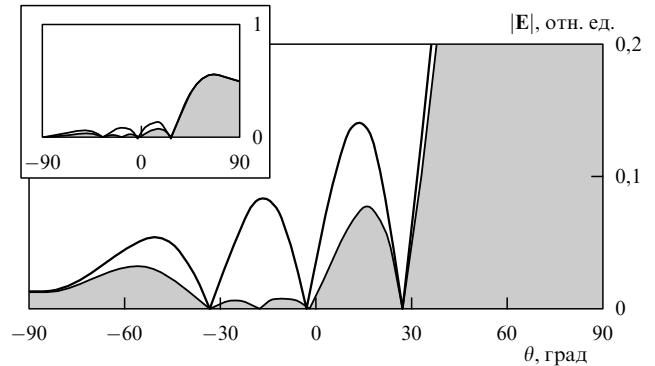


Рис. 4. Дифракция линейно поляризованного поля на бесконечной щели при двух направлениях поляризации относительно щели и ширине щели  $2\Delta x = 2\lambda$ . Угол падения  $72^\circ$ .

формулы для такой решетки учитывают поляризацию излучения.

#### 4. Дифракция линейно поляризованного излучения на прямоугольном и круглом отверстиях

Условия расположения экрана те же, что и для щели. Центры отверстий помещены в начало координат. Размеры прямоугольного отверстия —  $2a$  и  $2b$  соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ , радиус круглого отверстия —  $r_0$ . Вывод формул и для  $Z$ , и для  $E$  при дифракции на прямоугольном отверстии аналогичен вышеприведенному, а сами формулы имеют вид

$$E = E_0 \bar{Z}(r, \varphi, \theta) \mathbf{q}(\varphi, \theta),$$

$$\bar{Z}(r, \varphi, \theta) = -i \bar{S} \frac{\exp(i\bar{r})}{\bar{r}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{\sin \chi_a}{\chi_a} \frac{\sin \chi_b}{\chi_b}, \quad (9a)$$

$$\chi_a = \bar{a}(\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0), \quad \chi_b = \bar{b} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\bar{S} = 4\bar{a}\bar{b}, \quad \bar{a} = ka, \quad \bar{b} = kb, \quad \bar{r} = kr.$$

Вид векторной функции  $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$  зависит от направления поля на отверстии и приведен в таблице.

Таблица

| Поле $\mathbf{E}_0$        | Вектор $\mathbf{Z}$   | Вектор $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$   |
|----------------------------|---|--|
| $\mathbf{E}_0 \parallel y$ | $Z \cdot \mathbf{e}_y$  | $\mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi$   |
| $\mathbf{E}_0 \perp y$     | $Z \cdot (\mathbf{e}_x \cos \theta_0 - \mathbf{e}_z \sin \theta_0)$ | $\mathbf{e}_\theta (\sin \theta \sin \theta_0 + \cos \theta \cos \varphi \cos \theta_0) - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi \cos \theta_0$ |

Что касается интеграла типа (5) для круглого отверстия, то он приводится к виду

$$Z = -\frac{i}{k} E_0 (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{r} \times \\ \times \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \exp \{ikr' (\sin \theta_0 \cos \varphi' - \sin \theta \cos(\varphi - \varphi'))\} \times \\ \times r' d\varphi' dr'.$$

Выражение в круглых скобках в подынтегральном выражении представим в виде  $M \cos(\varphi + \varphi')$ , где

$$M = \sqrt{(\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2}, \\ \cos \varphi = \frac{\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi}{M}, \quad \sin \varphi = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{M}.$$

Далее процедура вычислений аналогична вышеприведенной. Получаем следующие выражения для вектора Герца  $\mathbf{Z}$  и электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = E_0 \bar{Z}(r, \varphi, \theta) \mathbf{q}(\varphi, \theta), \\ \bar{Z}(r, \varphi, \theta) = -2i \bar{S} \frac{\exp(i\bar{r})}{\bar{r}} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{J_1(\bar{r}_0 M)}{\bar{r}_0 M}, \quad (96)$$

$$M = \sqrt{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi + \sin^2 \theta_0}, \\ \bar{Z} = Z \frac{k^2}{E_0}, \quad \bar{S}_0 = \pi \bar{r}_0^2, \quad \bar{r} = kr, \quad \bar{r}_0 = kr_0.$$

Вид векторной функции  $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$  тот же, что и для прямоугольного отверстия, и определяется формулами, приведенными в таблице.

Особенностью полученных результатов является наличие на дифракционной картине "полюсов" — точек с нулевым полем, расположенных вдоль направления  $\mathbf{E}_0$ . Для  $\mathbf{E}_0 \parallel y$  таких точек две, их координаты  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $\theta = \pi/2$ . При  $\mathbf{E}_0 \perp y$  на полусфере наблюдения такая точка одна:  $\varphi = \pi$ ,  $\theta = \pi/2 - \theta_0$ .

Проиллюстрируем результаты, определяемые формулами (9а) и (9б). За образование "полюсов" отвечает выражение  $\mathbf{q}(\theta, \varphi)$ , и его вид не зависит от формы отверстия. На рисунке 5а приведено распределение амплитуды поля на полусфере  $\theta, \varphi$  при дифракции на круглом отверстии (формула (9б)), угол падения  $57^\circ$  и  $\mathbf{E}_0 \perp y$ . На рисунке 5б показаны полосы и точки нулевого поля. Для сравнения на рис. 6 показаны результаты аналогичных расчетов для  $\mathbf{E}_0 \parallel y$  при тех же прочих условиях. С точки зрения "полюсов" картина дифракции на прямоугольном отверстии (формула (9а)) аналогична, но топология темных и светлых полос, естественно, сильно отличается от круглого отверстия (рис. 7).

Формулы для дифракции света на прямоугольном и круглом отверстиях, приведенные в [10] и выведенные из

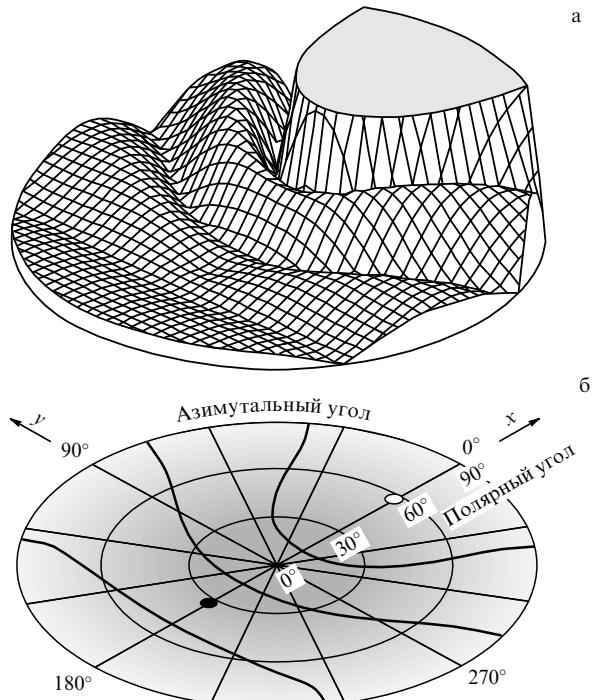


Рис. 5. Дифракция линейно поляризованного поля на круглом отверстии при радиусе отверстия  $r_0 = \lambda$  и  $\mathbf{E}_0 \perp y$ . Распределение амплитуды поля (а), топология полос нулевого поля и полюса — черная точка (б). Светлый кружок — положение максимума поля.

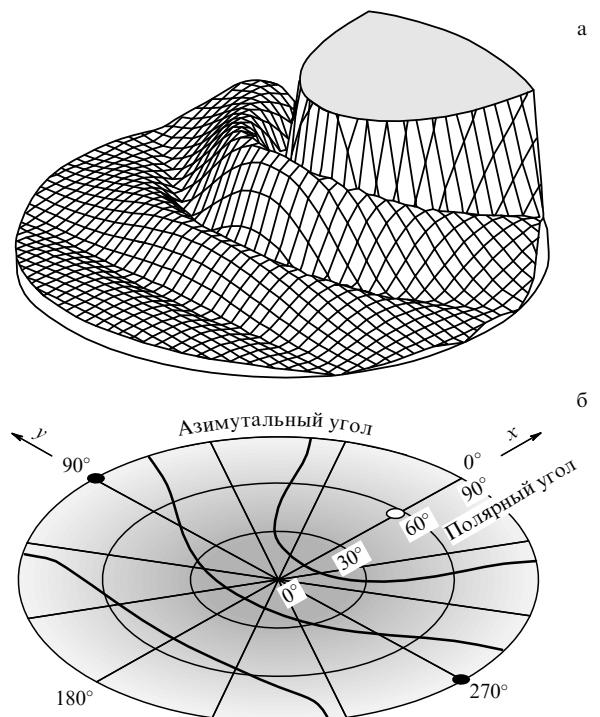
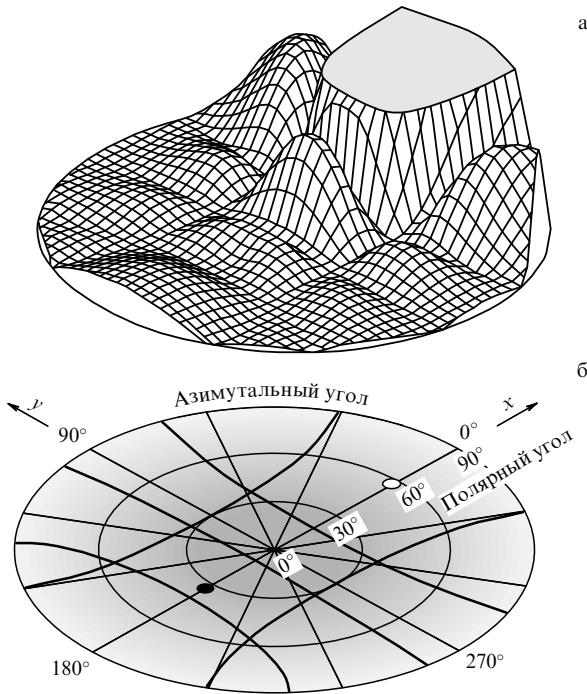


Рис. 6. Дифракция линейно поляризованного поля на круглом отверстии при радиусе отверстия  $r_0 = \lambda$  и  $\mathbf{E}_0 \parallel y$ . Распределение амплитуды поля (а), топология полос нулевого поля и полюсов (б). Светлый кружок — положение максимума поля.

электродинамической формулировки принципа Гюйгенса (ЭД-теории), не описывают "полюсы", связанные с направлением вектора поля  $\mathbf{E}_0$ . Решения некоторых



**Рис. 7.** Дифракция линейно поляризованного поля на прямоугольном отверстии при размерах отверстия  $a = b = \lambda$  и  $\mathbf{E}_0 \perp y$ . Распределение амплитуды поля (а), топология полос нулевого поля и полюса — черная точка (б). Светлый кружок — положение максимума поля.

дифракционных задач, полученные методом ЭД-теории, не соответствуют принципу взаимности. В [10] этот факт прокомментирован следующим образом: "Это несогласование характерно для ряда задач, в которых поверхностные токи задаются по формуле:  $\mathbf{j} = c/(2\pi) \cdot [\mathbf{n}\mathbf{H}_0]$ ". Что касается представленного метода, то все приведенные выше решения принципу взаимности соответствуют. При  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  углы  $\theta$  и  $\theta_0$  взаимозаменяемы.

В этом разделе мы подробно рассмотрели физические аспекты возникновения на дифракционной картине точек нулевого поля, обусловленных направлением поля на апертуре. Однако полученные формулы, правильно описывая это явление, содержат и другую полезную информацию. Полученные формулы существенно отличаются от известных, поэтому дают не только качественные особенности дифракционной картины (точки нулевого поля), но и существенные количественные уточнения распределения амплитуды поля на дифракционной картине. Точная количественная информация здесь очень важна, поскольку, например, направление максимума поля дифракции  $\theta_{\max}$ , вообще говоря, не совпадает с  $\theta_0$ , разница  $\theta_0 - \theta_{\max}$  зависит от угла падения и может достигать  $10^\circ$ .

## 5. Дифракция излучения с азимутальным направлением поляризации на кольцевой щели

Учитывая, что моды с азимутальным и радиальным направлениями поляризации хорошо известны в теории волноводов и открытых резонаторов, решим также задачу дифракции света с такой поляризацией на кольцевой щели радиуса  $r_0$  и шириной кольца  $\Delta r$ . Рассмотрим случай нулевого угла падения:  $\theta_0 = 0$ .

Сделав предположение, что  $\mathbf{Z}_0 = Z_0 \exp(ikz) \mathbf{e}_\varphi$ , непосредственной подстановкой  $\mathbf{Z}_0$  в (1) нетрудно убедиться, что здесь также имеет место соотношение  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') = k^2 \mathbf{Z}_0(\mathbf{r}')$ . При взятии ротора в цилиндрических координатах нужно учесть, что имеется только одна ненулевая компонента вектора,  $\varphi$ -компоненты, зависящая через экспоненту только от координаты  $z$ . Следуя уже хорошо известному методу, в приближениях  $\Delta r_0 \ll r_0 \ll r$  получаем

$$\mathbf{Z} = \frac{E_0}{k^2} (k^2 2\pi r_0 \Delta r) (1 + \cos \theta) \frac{\exp(ikr)}{kr} J_1(kr_0 \sin \theta) \mathbf{e}_\varphi .$$

При выводе использовались известные преобразования [17]

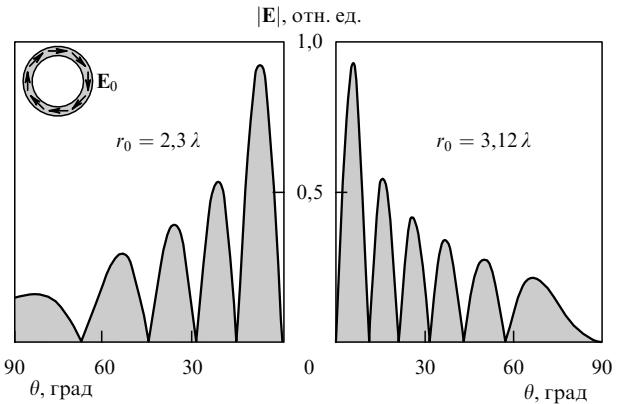
$$\int_0^{2\pi} \sin(n\beta) \exp(it \cos(\beta - \gamma)) d\beta = 2\pi i^n J_n(t) \sin(n\gamma) ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\beta) \exp(it \cos(\beta - \gamma)) d\beta = 2\pi i^n J_n(t) \cos(n\gamma) .$$

В этом случае вычислять поле по формуле (1) удобно в сферических координатах. Оно принимает вид

$$\mathbf{E} = E_0 \bar{S}_0 \frac{\exp(i\bar{r})}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) J_1(\bar{r}_0 \sin \theta) \mathbf{e}_\varphi , \quad (10)$$

где  $\bar{S}_0 = 2\pi k^2 r_0 \Delta r$ ,  $\bar{r} = kr$ ,  $\bar{r}_0 = kr_0$ . Вдоль полярной оси, при  $\theta = 0$ , поле равно нулю. Величина поля вдоль экрана, при  $\theta = \pi/2$ , зависит от радиуса щели и может быть как равной нулю, так и отличной от нуля (рис. 8).



**Рис. 8.** Дифракция азимутально поляризованного поля на кольцевой щели при двух радиусах щели.

## 6. Дифракция излучения с радиальным направлением поляризации на кольцевой щели

Положим, что в пределах кольцевой щели  $\mathbf{Z}_0 = Z_0 \exp(ikz) \mathbf{e}_\rho$ ; подстановка в (1) опять приводит к соотношению  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') = k^2 \mathbf{Z}_0(\mathbf{r}')$ . Ротор удобно брать в цилиндрических координатах, поскольку имеем только одну ненулевую  $\rho$ -компоненту вектора, зависящую через экспоненту только от координаты  $z$ . В этом случае решение для вектора Герца имеет аналогичный вид:

$$\mathbf{Z} = \frac{E_0}{k^2} (k^2 2\pi r_0 \Delta r) \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \times \\ \times \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2 + z^2})}{k\sqrt{\rho^2 + z^2}} J_1 \left( kr_0 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \mathbf{e}_\rho .$$

Форма записи адаптирована к вычислениям электрического поля (1) в цилиндрической системе координат. Результаты вычислений дают следующую формулу:

$$\mathbf{E} = E_0 \bar{S}_0 \frac{\exp(i\bar{r})}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta J_1(\bar{r}_0 \sin \theta) \times \\ \times \left\{ \cos \theta \mathbf{e}_\rho + \left[ \frac{i}{\bar{r} \sin \theta} - \sin \theta \right] \mathbf{e}_z \right\}.$$

Здесь для удобства записи введены естественные обозначения через  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  и полярный угол  $\theta$ , отсчитываемый от вертикальной оси. Удобно разложить полученное выражение на два: поле с меридиональным направлением и поле, направленное по оси  $z$ . Последнее сдвинуто по фазе на  $\pi/2$ :

$$\mathbf{E}_\theta = E_0 \bar{S}_0 \frac{\exp(i\bar{r})}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta J_1(\vartheta) \mathbf{e}_\theta, \quad (11)$$

$$\mathbf{E}_z = i \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}} E_0 \bar{S}_0 \frac{\exp(i\bar{r})}{\bar{r}} (1 + \cos \theta) \cos \theta \frac{J_1(\vartheta)}{\vartheta} \mathbf{e}_z. \quad (12)$$

Здесь использованы безразмерные параметры  $\vartheta = \bar{r}_0 \sin \theta$ , а  $\bar{r} = kr$ ,  $\bar{r}_0 = kr_0$ . Распределение поля по формулам (11), (12) приведено на рис. 9. Чисто продольная составляющая поля (12) имеет малую величину (омножитель  $r_0/r$ ), но максимум этого поля находится на оси, где меридиональная составляющая поля (11) равна нулю.

## 7. Заключение

Рассмотрен метод решения дифракционных задач, основанный на применении вектора Герца в интеграле Кирхгофа. При таком подходе отсутствуют жесткие ограничения по применимости, свойственные интегралу Кирхгофа. При падении плоской волны на апертуру задача поиска решения существенно упрощается. Во всем диапазоне полярного угла от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  на большом расстоянии от апертуры получены аналитические выражения для базовых задач дифракции. Это — дифракция линейно поляризованного излучения на бесконечной щели, на прямоугольном и круглом отверстиях, при любом угле падения и любом направлении поляризации. Решены также задачи дифракции излучения с азимутальным и радиальным направлениями поляризации на кольцевой щели. Показано, что качественной особенностью дифракционной картины при векторном подходе является наличие "полюсов" — точек нулевого поля, накладывающихся на обычную дифракционную картину, состоящую из светлых и темных полос. Полученные решения удовлетворяют уравнениям Максвелла и принципу взаимности.

### Dipole-wave theory of electromagnetic diffraction

V.G. Niz'ev

Institute on Laser and Information Technologies, Russian Academy of Sciences,  
IPLIT, ul. Svyatoozerskaya 1, Shatura 140700, Moscow Region, Russian Federation  
Tel. (7-09645) 259 95. Fax (7-09645) 225 32. E-mail: niziev@laser.nictl.msk.su

A theory of diffraction is presented which systematically employs the wave approach used in the Kirchhoff method and, unlike the Kirchhoff integral, does not have severe applicability limitations. The diffraction problem is solved by using the Hertz vector instead of the field vector used in the Kirchhoff integral. The basic diffraction problems for linearly, radially, and azimuthally polarized radiation are solved analytically. The key qualitative feature of the solutions is the presence of 'poles', zero field points within the diffraction pattern of light and dark fringes. The poles lie along the direction of the electric field vector. The solutions obtained satisfy the Maxwell equations and the reciprocity principle.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Fx

Bibliography — 17 references

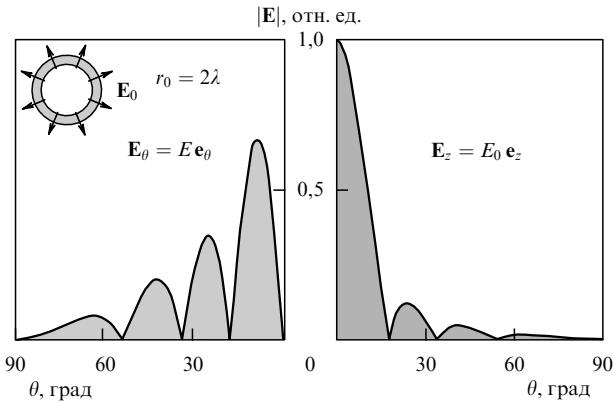


Рис. 9. Дифракция радиально поляризованного поля на кольцевой щели. Слева — компонента поля  $\mathbf{E}_\theta$ , направленная по меридиану, справа — продольная компонента поля  $\mathbf{E}_z$ , направленная вдоль оси  $z$ . Меридиональная и продольная компоненты поля сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Относительный масштаб двух кривых не согласован.

Автор выражает глубокую благодарность А.В. Нестерову за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

### Список литературы

1. Уфимцев П Я *Метод краевых волн в физической теории дифракции* (М.: Сов. радио, 1962)
2. Фок В А *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн* (М.: Сов. радио, 1970)
3. Хёлл X, Маэ А, Вестпфаль К *Теория дифракции* (М.: Мир, 1964)
4. Солимено С, Крозиньяни Б, Ди Порто П *Дифракция и волновое распространение оптического излучения* (М.: Мир, 1989)
5. Ваганов Р Б, Каценеленбаум Б З *Основы теории дифракции* (М.: Наука, 1982)
6. Белкина М Г, в сб. *Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения* (М.: Сов. радио, 1957) с. 64
7. Andrejewski W Z. *Angew. Phys.* **5** 178 (1953)
8. Нотт Ю Ф *ТИИЭР* **73** (2) 90 (1985)
9. Baker B В, Copson E T *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* 2nd ed. (Oxford: Clarendon Press, 1950)
10. Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* 2-е изд. (М.: Радио и связь, 1988)
11. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1973)
12. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* (М.: Наука, 1979)
13. Светов Б С, Губатенко В П *Аналитические решения электродинамических задач* (М.: Наука, 1988)
14. Kottler F *Ann. Phys. (Leipzig)* **71** 457 (1923)
15. Stratton J A, Chu L J *Phys. Rev.* **56** 99 (1939)
16. Стрэттон Дж А *Теория электромагнетизма* (М.-Л.: Гостехиздат, 1948)
17. Stammes J J *Waves in Focal Regions* (Bristol: A. Hilger, 1986)

Received 24 October 2001