

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

К вопросу о форме материальных уравнений в электродинамике

А.П. Виноградов

Проведен сравнительный анализ форм записи уравнений Максвелла для конденсированных сред. Показано, что так называемая форма Казимира включает достаточно информации, чтобы решить любую электромагнитную задачу. Форма записи, предложенная Ландау и Лифшицем для описания сред с пространственной дисперсией, требует дополнительное материальное уравнение для поверхностного тока, причем это уравнение не является дополнительным граничным условием, а выступает в качестве замены обычных максвелловских условий непрерывности тангенциальных составляющих полей.

PACS numbers: 42.25Bs, 42.25Gy, 78.20. – e

Содержание

1. Введение (363).
 2. Различные формы записи уравнений Максвелла в материальных средах (363).
 3. Слабая пространственная дисперсия (367).
 4. Киральные (оптически активные) среды (368).
 5. Заключение (369).
- Список литературы (370).

1. Введение

Создание новых искусственных материалов (киральных, перколяционных и т.д.) потребовало разработки адекватного описания явлений, наблюдаемых в этих материалах. Новая теория должна принимать во внимание взаимодействие мультиполей и эффекты запаздывания на масштабе неоднородности. Ранее теории этого сорта были разработаны для описания явлений в кристаллических или разбавленных системах [1–4]. К сожалению, эти теории рассматривают лишь слабые эффекты в терминах теории возмущения. В рамках такого подхода нет причин беспокоиться о строгих определениях используемых величин и понятий. Сегодня мы уже не можем позволить себе этого. Прежде всего это касается описания киральных сред. Существуют две школы, использующие различные формы записи уравнений Максвелла. Это форма, предложенная Ландау и Лифшицем, и форма, предложенная в работах Борна и Федорова. Последнюю при обсуждении общих аспектов проблемы пространственной дисперсии часто называют формой Казимира. Ниже мы покажем, что хотя форма Казимира требует больших усилий при ее обосновании,

она дает более простое и последовательное описание многих явлений.

2. Различные формы записи уравнений Максвелла в материальных средах

На высоких частотах возмущение электромагнитных полей, связанное с микронеоднородностью среды¹, может иметь соленоидальный характер [5]. Как следствие, индуцированные токи, будь то токи смещения [6] или токи проводимости [7, 8], вызывают искусственную намагниченность гетерогенной среды, даже если все ее ингредиенты — немагнитные материалы. С другой стороны, внешнее поле плоской волны само имеет соленоидальный характер. При переходе к макроскопическому описанию электромагнитных явлений в микронеоднородных средах мы должны отличать соленоидальность внешнего поля от соленоидальности, связанной с неоднородностью среды [5]. Кроме того, последовательное введение диэлектрической и магнитной проницаемостей подразумевает декомпозицию индуцированного тока на части, каждая из которых ответственна либо только за намагничивание, либо только за электрическую поляризацию. Сложности, возникающие при осуществлении такой декомпозиции, заключаются в том, что, как правило, в среде присутствуют флуктуации материальных свойств различных масштабов. Ток в данной точке может одновременно давать вклад в электрическую поляризацию на одном масштабе усреднения и в намагничивание на другом масштабе [9]. До недавнего времени обе эти процедуры казались не только громоздкими, но и неоднозначными [5, 10]. Во избежание всех этих проблем Ландау и Лифшиц [5, 10, 11] предложили включать все индуцированные токи в обобщенную поляризацию:

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}^{LL}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (\mathbf{D}^{LL} - \mathbf{E})}{\partial t}, \quad (1)$$

А.П. Виноградов. Институт теоретической и прикладной электродинамики Объединенного института высоких температур РАН 127412 Москва, ул. Ижорская 13/19, Российская Федерация
Тел. (095) 485-83-55. Факс (095) 484-26-33
E-mail: vinogr@vinogr.msk.ru

Статья поступила 25 июля 2001 г.,
после доработки 17 октября 2001 г.

¹ Под микронеоднородностью мы понимаем такие изменения материальных параметров, пространственный масштаб которых мал по сравнению с длиной волны в вакууме, но достаточно велик, чтобы можно было использовать обычные материальные уравнения Максвелла.

где $\mathbf{D}^{\text{LL}} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}^{\text{LL}}$, \mathbf{P}^{LL} , \mathbf{E} — макроскопические значения обобщенной индукции, обобщенной поляризации и электрического поля. Для замыкания уравнений Максвелла необходимо ввести материальное уравнение, связывающее \mathbf{P}^{LL} или \mathbf{D}^{LL} с \mathbf{E} . В общем случае эти связи будут носить нелокальный характер [5, 11]. Для гармонических во времени полей² наиболее общая форма линейного материального уравнения имеет вид

$$D_i^{\text{LL}}(\omega, \mathbf{r}) = \int \varepsilon_{ij}^{\text{LL}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) E_j(\mathbf{r}', \omega) dV'. \quad (2)$$

Вообще говоря (см., например, [39]), \mathbf{P}^{LL} и \mathbf{D}^{LL} могут зависеть не только от электрического, но и от магнитного поля (рис. 1) и даже от пространственных производных (рис. 2) магнитного поля. Приведение материального уравнения к виду (2) предполагает, что магнитное поле и все его пространственные производные можно выразить через электрическое поле, используя уравнения Максвелла. Последние, как известно, имеют свой масштаб длины — длину волны, которая может появиться в выражении для ядра в (2) как параметр. Поэтому $\varepsilon_{ij}^{\text{LL}}$ в (2) — это довольно сложный оператор, отражающий не только свойство среды, но и свойства уравнений Максвелла.

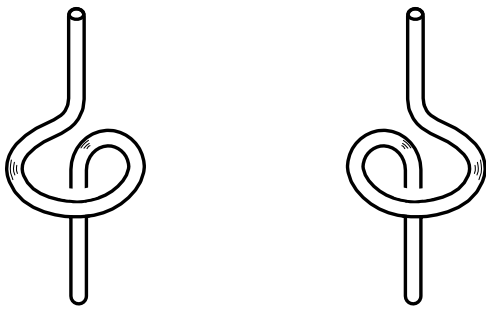


Рис. 1. Пример киральных частиц, при помещении которых в магнитное поле, параллельное их оси, в них наводится электрический дипольный момент.

Для трансляционно-инвариантной (с необходимостью бесконечной) среды можно ввести тензор диэлектрической проницаемости, зависящий от частоты и волнового вектора:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{LL}}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty d\tau \int d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \{ \varepsilon_{ij}^{\text{LL}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \exp[i\omega\tau - i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \}. \quad (3)$$

Последняя зависимость и дала эффектам, связанным с нелокальностью материальных уравнений, имя пространственной дисперсии.

Таким образом, форма записи уравнений Максвелла, предложенная Ландау и Лифшицем (ЛЛ-форма), связывает только три поля: \mathbf{D}^{LL} , \mathbf{E} и \mathbf{B} :

$$e_{ijk} B_j E_l = k_0 B_l, \quad (4)$$

$$e_{ijk} B_j B_l + k_0 D_i^{\text{LL}} = -i \frac{4\pi}{c} (j_{\text{ext}})_i, \quad (5)$$

$$k_i B_i = 0, \quad ik_i D_i^{\text{LL}} = 4\pi \rho_{\text{ext}}, \quad (6)$$

где $k_0 = \omega/c$.

² Предполагается, что поля зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$.

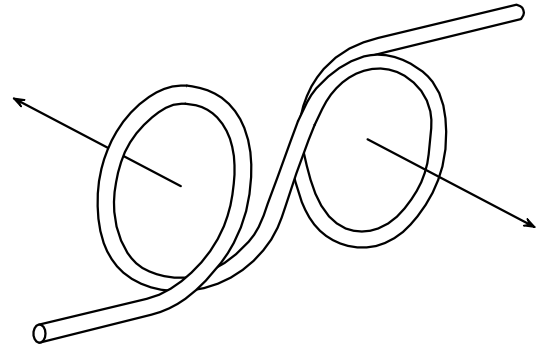


Рис. 2. Включение, дипольный момент которого пропорционален пространственной производной переменного магнитного поля. Стрелками показаны мгновенные значения магнитного поля.

Если в процессе гомогенизации удастся разделить индуцированный ток на средний, вихревой и седловидный (рис. 3), то возможно использование формы Казимира материальных уравнений. Этот подход базируется на следующем представлении макроскопического тока [9, 12]:

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \left[\nabla \cdot \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right] + c[\nabla \times \mathbf{M}], \quad (7)$$

\mathbf{j} , \mathbf{P} , \hat{Q} — макроскопические плотности тока, электрического дипольного и электрического квадрупольного моментов, \mathbf{M} — макроскопическая плотность магнитного дипольного момента. Ток поляризации $\partial \mathbf{P} / \partial t$ равен среднему от индуцированного тока (рис. 3а). Ток намагничивания $c[\nabla \times \mathbf{M}]$ включает в себя все микроскопические токи, замыкающиеся в объеме усреднения (рис. 3б). Квадрупольная часть тока $-\left[\nabla \cdot (\partial \hat{Q} / \partial t) \right]$ включает оставшуюся часть индуцированных токов. А именно, микроскопические токи, которые начинаются и кончаются на стенках объема усреднения (рис. 3в), а также ту часть замкнутых внутри объема токов, чьи магнитные моменты взаимно компенсировались. Данное качественное описание является иллюстрацией строгого математического факта, что любое векторное J_i поле можно представить в виде

$$J_i \equiv ce_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2c} e_{klm} x_l J_m \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} (x_i J_k + x_k J_i) \right) - x_i \frac{\partial}{\partial x_k} J_k.$$

Конечно, распределение тока может также обладать более высокими моментами, но, как показано в [9], если процедура гомогенизации рассматривается как усреднение по физически бесконечно малому объему, то ими можно пренебречь. Отметим, что (7) не является усечением ряда теории возмущений, а представляет строгий результат (см. [9]) однозначного разложения макроскопического тока. При этом на каждом масштабе усреднения (подробнее см. [9]) величины \mathbf{P} , \hat{Q} и \mathbf{M} рассчитываются по стандартным формулам для электрического дипольного, электрического квадрупольного и магнитного дипольного моментов относительно центра объема [12]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} = - \int (\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{J}) d^3x,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{ij} = \frac{1}{2} \int (x_i J_j + x_j J_i) d^3x,$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{x} \times \mathbf{J}] d^3x.$$

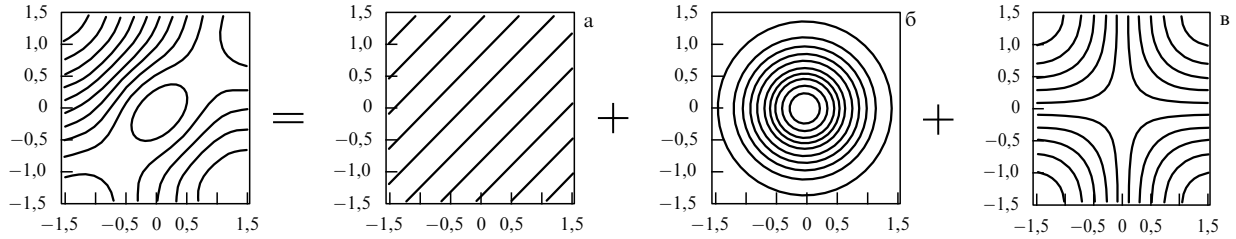


Рис. 3. Схематическое разделение индуцированного тока на средний (а), вихревой (б) и седловидный (в).

Следующий шаг — это, во-первых, введение магнитного поля \mathbf{H} и магнитной проницаемости μ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (8)$$

и, во-вторых, переопределение электрического смещения [9, 12–15]:

$$\mathbf{D}^C = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} - 4\pi[\nabla \cdot \hat{Q}]. \quad (9)$$

В конечном счете, мы приходим к уравнениям Максвелла в форме Казимира (К-форме), традиционно используемой для случаев, когда можно пренебречь эффектами пространственной дисперсии:

$$e_{ijl}k_j H_l + k_0 D_i^C = -i \frac{4\pi}{c} (j_{\text{ext}})_i, \quad e_{ijl}k_j E_l - k_0 B_i = 0, \quad (10)$$

$$k_j B_j = 0, \quad ik_j D_j^C = 4\pi\rho_{\text{ext}}. \quad (11)$$

В рамках К-формы соотношение между макроскопическими плотностями моментов и макроскопическими полями также может быть нелокальным:

$$D_i^C(t, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \int \varepsilon_{ij}^C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) E_j(\mathbf{r}', t - \tau) dV' d\tau, \quad (12)$$

$$B_i(t, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \int \mu_{ij}^C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) H_j(\mathbf{r}', t - \tau) dV' d\tau. \quad (13)$$

До сих пор при выводе ЛЛ- и К-форм мы не сделали никаких упрощающих предположений. Как следствие, эти формы должны давать эквивалентное описание явлений. Другими словами, должно существовать соотношение между тензором в (3) и фурье-образами тензоров в (12) и (13).

Исключая D_i^C , D_i^{LL} и H_i из уравнений Максвелла и предполагая, что поля \mathbf{E} и \mathbf{B} идентичны в обеих формах (последнее предположение не является столь уж очевидным и будет обсуждено ниже), мы получаем следующее соотношение между ЛЛ- и К-формами тензоров (для удобства соотношение записано для фурье-представления переменных, см. [16]):

$$\varepsilon_{ij}^{\text{LL}} = \varepsilon_{ij}^C + k_0^{-2} e_{ilm} e_{jnp} k_l k_n [\delta_{mp} - (\mu_{mp}^C)^{-1}]. \quad (14)$$

Соотношение (14), в зависимости от предпочтения авторов (см. обсуждение в [17]), по-разному трактуется в литературе. Во-первых, это соотношение часто рассматривается как условие эквивалентности двух форм материальных уравнений [5, 10, 11]. При этом предполагается, что в изотропном случае ε_{ij}^C и μ_{ij}^C фактически являются скалярами, а $\varepsilon_{ij}^{\text{LL}}$ считается тензором, структура которого определяется волновым вектором

$$\varepsilon_{ij}^{\text{LL}}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varepsilon^{\text{LL1}}(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (15)$$

где $\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k)$ и $\varepsilon^{\text{LL1}}(\omega, k)$ — скаляры. В этом случае мы имеем два ЛЛ-параметра и два К-параметра и можем установить взаимно однозначное соответствие между этими параметрами [10, 18]:

$$\varepsilon^{\text{LL1}}(\omega, k) = \varepsilon^C(\omega, k), \quad 1 - \frac{1}{\mu^C(\omega, k)} = \frac{k_0^2}{k^2} (\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k) - \varepsilon^{\text{LL1}}(\omega, k)). \quad (16)$$

Несмотря на видимую эквивалентность этих форм, в представлении ЛЛ мы сталкиваемся с некоторыми трудностями. В частности, для решения дисперсионного уравнения в К-форме

$$k^2 = k_0^2 \varepsilon^C(\omega, k) \mu^C(\omega, k)$$

мы должны определить квадратный корень как однозначную регулярную функцию. Для этой цели достаточно сделать разрез по отрицательной действительной оси и вычислять квадратный корень отдельно для диэлектрической и магнитной проницаемостей [19]:

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon^C(\omega, k)} \sqrt{\mu^C(\omega, k)}.$$

Такое определение квадратного корня обеспечивает физически правильное решение как для активных, так и для пассивных сред (в том числе и для сред Веселаго [38] с отрицательными ε' , μ' и k').

Имея дело с дисперсионным уравнением³

$$k^2 = k_0^2 \varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k),$$

полученным в рамках ЛЛ-формы, для нахождения физически правильного решения нужно каждый раз переопределять квадратный корень

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k)}.$$

Для описания активных и пассивных сред с положительной вещественной частью диэлектрической и магнитной проницаемостей нужно делать разрез по отрицательной действительной оси. Для случая отрицательных вещественных частей диэлектрической и магнитной проницаемостей (см. [38]) нужно делать разрез по положительной действительной оси. Это весьма неудобно.

Неприятности нарастают, если, следуя [16, 20], К-диэлектрическую проницаемость также считать тензором:

$$\varepsilon_{ij}^C(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{\text{Ctr}}(\omega, k) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varepsilon^{\text{C1}}(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2},$$

где $\varepsilon^{\text{Ctr}}(\omega, k)$ и $\varepsilon^{\text{C1}}(\omega, k)$ — скаляры, вообще говоря, отличные как от $\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k)$ и $\varepsilon^{\text{LL1}}(\omega, k)$. Существует гипотеза [16] о

³ Для волн в свободном от внешних источников пространстве соотношение (16) принимает простой вид:

$$\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k) = \varepsilon^C(\omega, k) \mu^C(\omega, k).$$

том, что и магнитная проницаемость может быть тензором с аналогичной структурой

$$\mu_{ij}^C(\omega, \mathbf{k}) = \mu^{\text{Ctr}}(\omega, k) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \mu^{\text{C1}}(\omega, k) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (17)$$

Соотношение (14) при предположениях (15)–(17) принимает вид (см. также [37])

$$\varepsilon^{\text{LL1}}(\omega, k) = \varepsilon^{\text{C1}}(\omega, k), \quad (18)$$

$$\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k) = \varepsilon^{\text{Ctr}}(\omega, k) + \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 (1 - \mu^{\text{Ctr}}(\omega, k)^{-1}). \quad (19)$$

Мы видим, что предположение о тензорной структуре К-проницаемостей означает, что соотношение (14) связывает два ЛЛ-параметра и три К-параметра, что делает (14) необратимым. Можно восстановить ЛЛ-проницаемость, зная К-проницаемости, но невозможно решить обратную проблему реконструкции К-проницаемостей по ЛЛ-проницаемости. Исследователи, придерживающиеся этой точки зрения, полагают К- и ЛЛ-формы неэквивалентными. В [16, 20, 37] предпочтение отдается ЛЛ-форме. Эта группа авторов считает необратимость (14) следствием неоднозначности разложения (7). Другими словами, эта группа рассматривает ЛЛ-форму как более общую.

Примечательно, что величина $\mu^{\text{C1}}(\omega, k)$ не вошла в соотношения (18), (19). По всей видимости, это связано со скалярной природой магнитной проницаемости [20, 37]. Действительно, так как

$$\begin{aligned} k_l B_l &= \mu^{\text{Ctr}} \left(k_l \delta_{lm} - k_l \frac{k_l k_m}{k^2} \right) H_m + \mu^{\text{C1}} k_l \frac{k_l k_m}{k^2} H_m = \\ &= \mu^{\text{C1}} k_m H_m = 0, \end{aligned}$$

то либо

$$k_m H_m = 0, \quad (20)$$

либо

$$\mu^{\text{C1}} = 0. \quad (21)$$

Если выполняется равенство (20), то для описания полей требуется только один скаляр μ^{Ctr} , так как

$$B_l = \mu^{\text{Ctr}} \left(\delta_{lm} - \frac{k_l k_m}{k^2} \right) H_m + \mu^{\text{C1}} \frac{k_l k_m}{k^2} H_m = \mu^{\text{Ctr}} H_l.$$

Равенство (21) совпадает с условием возбуждения магнито-статических волн [21]. Известно, что электрическое поле в этих волнах отсутствует и волны описываются редуцированной системой уравнений

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [\nabla \times \mathbf{H}] = 0.$$

Отсутствие электрического поля означает, что $[\nabla \times \mathbf{E}] = 0$, а следовательно, и поперечная составляющая магнитного поля также равна нулю. При $H_{\text{tr}} \neq 0$ это возможно лишь при $\mu^{\text{Ctr}} = 0$. Другими словами, условие возбуждения магнито-статических волн влечет за собой равенство $\mu^{\text{C1}} = \mu^{\text{Ctr}}$. Маловероятно, что эти две величины равны только на фиксированной частоте и являются отличными на других частотах. Равенство же продольной и поперечной магнитных проницаемостей означает, что К-магнитная проницаемость является скаляром.

Последнее замечание не решает проблему, потому что мы все еще имеем два ЛЛ- и три К-параметра.

Заметим, что ссылка на неоднозначность представления (7) [16, 20, 37] неубедительна, так как в работе [9] приведены условия однозначной декомпозиции (7)⁴. При нарушении условий, найденных в [9], поля в однородной системе оказываются неинвариантными относительно процедуры усреднения по объему, а следовательно, применение макроскопических материальных уравнений Максвелла в этих условиях становится проблематичным. Таким образом, при выполнении условий [9] рассуждения [16, 20] не имеют оснований для объяснения необратимости (14). Чтобы выяснить причину необратимости, уместно рассмотреть воззрения третьей группы исследователей.

Эта группа [22–24] рассматривает К-форму как наиболее общую. Они обосновывают это утверждение следующими аргументами. Известно, что К-форма записи уравнений Максвелла инвариантна относительно преобразования Сердюкова–Федорова [20, 22–24], а именно, можно ввести пару полей \mathbf{Q} и \mathbf{F} и переопределить поля, входящие в уравнения Максвелла, так, чтобы новые поля удовлетворяли тем же уравнениям:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \text{rot } \mathbf{Q}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}, \quad (22)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{F}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}. \quad (23)$$

Естественно, новые штрихованные поля связаны новыми материальными уравнениями и удовлетворяют иным граничным условиям на поверхности раздела двух сред [22, 23]. В терминах преобразования Сердюкова–Федорова переход от К- к ЛЛ-форме эквивалентен выбору $\mathbf{Q} = \mathbf{M}$ и $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Вектор \mathbf{Q} специально подбирается так, чтобы $\mathbf{H}' = \mathbf{B}$ (см. [20, 25]). Таким образом, ЛЛ-форма является частным случаем К-формы. Как следствие, только если известны К-граничные условия, можно получить правильные ЛЛ-граничные условия [22, 23]. Предполагается, что К-граничные условия совпадают с обычными максвелловскими граничными условиями (непрерывность тангенциальных составляющих полей \mathbf{E} и \mathbf{H}).

Отметим, что, несмотря на попытки при помощи переобозначений доказать эквивалентность форм [22, 23], предположение [20, 22–24] подразумевает необратимость (14), так как ЛЛ-форма в отличие от К-формы неинвариантна относительно преобразования Сердюкова–Федорова. Действительно, преобразование в этом случае выглядит как

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \text{rot } \mathbf{Q}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}, \quad (24)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{F}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}. \quad (25)$$

Это означает, что необходимо вводить связь между векторами \mathbf{Q} и \mathbf{F}

$$c \text{rot } \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t},$$

и мы изменяем не только \mathbf{D} , но и \mathbf{E} , а как указывалось выше, поле \mathbf{E} в К-форме и в ЛЛ-форме предполагается одним и тем же.

С нашей точки зрения, тот факт, что ЛЛ-граничные условия могут быть получены из К-граничных условий и одновременно из микроскопической теории, ведущей к

⁴ Условия [9] предполагают существование "разделяющего" масштаба l_s такого, что $\xi \ll l_s \ll \lambda$, где ξ — максимальный масштаб неоднородности.

ЛЛ-форме⁵, позволяет получить недостающее соотношение между К- и ЛЛ-параметрами, делающее (14) обратимым.

Чтобы проиллюстрировать данное утверждение, рассмотрим однородный магнитный материал, скажем, феррит. Ниже мы пренебрегаем гиротропией феррита, чтобы сделать рассуждения более наглядными.

Чтобы получить ЛЛ-форму материальных уравнений, нужно включить все токи в ЛЛ-поляризацию

$$\frac{\partial(\mathbf{D}^{\text{LL}} - \mathbf{E})}{\partial t} = 4\pi\mathbf{j} = 4\pi \frac{\partial \mathbf{P}^{\text{C}}}{\partial t} + 4\pi c \text{rot } \mathbf{M}. \quad (26)$$

Или

$$\mathbf{D}^{\text{LL}} = \varepsilon^{\text{C}}(\omega)\mathbf{E} + i \frac{4\pi}{k_0} \text{rot } \mathbf{M} = \quad (27)$$

$$= \varepsilon^{\text{C}}(\omega)\mathbf{E} + i\xi(\omega) \text{rot } \mathbf{B} = \quad (28)$$

$$= \varepsilon^{\text{C}}(\omega)\mathbf{E} + \frac{\xi(\omega)}{k_0} \text{rot rot } \mathbf{E}, \quad (29)$$

где $\xi(\omega) = (1 - \mu^{-1})/k_0$. После выполнения преобразования Фурье (29) мы получаем следующие материальные ЛЛ-параметры:

$$\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k) = \varepsilon^{\text{C}}(\omega) + \frac{k^2}{k_0} \xi(\omega), \quad (30)$$

$$\varepsilon^{\text{LLl}}(\omega, k) = \varepsilon^{\text{C}}(\omega). \quad (31)$$

Формально, используя ЛЛ-форму, мы имеем дело с немагнитным материалом и должны использовать обычное максвелловское граничное условие для немагнитных сред⁶. Покажем это, используя материальное уравнение в виде (28). Перепишем уравнение Ампера – Максвелла в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = -ik_0\mathbf{D}^{\text{LL}} = -ik_0(\varepsilon(\omega)\mathbf{E} + i\xi(\omega) \text{rot } \mathbf{B}). \quad (32)$$

Переносим член $k_0\xi(\omega) \text{rot } \mathbf{B}$ в правую часть, получим

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{ik_0\varepsilon(\omega)}{1 - k_0\xi(\omega)} \mathbf{E}. \quad (33)$$

Заметим, что правая часть уравнения (33) не имеет сингулярностей на поверхности, поэтому после стандартной процедуры мы приходим к следующему граничному условию на поверхности раздела:

$$B_{1t} - B_{2t} = 0. \quad (34)$$

Рассмотрение данной проблемы, проведенное в рамках К-формы, предсказывает другую форму граничных условий на поверхности раздела. Для получения этого условия, следуя стандартной процедуре [5], возьмем поверхностный интеграл от обеих сторон уравнения (5). Поверхность интегрирования ограничена прямоугольным контуром, имеющим длинные стороны с обеих сторон границы. Подразумевается, что стягивающая поверхность перпенди-

⁵ Чтобы получить истинные граничные условия, нужно рассмотреть поведение полей внутри слоя вблизи поверхности раздела. Очевидно, что ядро в (2) зависит не только от разности аргументов, но от каждого из них [11].

⁶ Имея дело с немагнитными средами, нам необходимо только одно поле, чтобы описать магнитную часть электромагнитных полей. К сожалению, это поле, которое имеет физический смысл магнитной индукции, обычно обозначается символом H и называется магнитным полем. Это не вызывает никаких неприятностей, потому что $\mu = 1$ и, следовательно, $B = H$. Однако чтобы подчеркнуть правильный физический смысл, мы, следуя [5], будем называть его магнитной индукцией и обозначать буквой B .

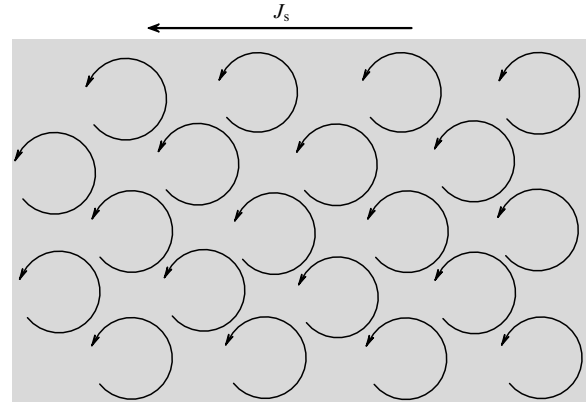


Рис. 4. Намагничивание среды приводит к возникновению поверхностного тока.

кулярна к поверхности раздела. Поверхностный интеграл от ротора любой функции преобразуется в криволинейный интеграл. После сжатия контура по его короткой стороне поверхностный интеграл с электрическим полем исчезает, так как электрическое поле не имеет особенностей на границе. Окончательно мы получаем граничное условие в виде [5, 27]

$$B_{1t} - B_{2t} = -4\pi M_{2t}. \quad (35)$$

Это соотношение совпадает с обычным максвелловским соотношением $H_{1t} - H_{2t} = 0$. Причина расхождения (34) и (35) будет обсуждена ниже.

Граничное условие (35) эквивалентно обычному максвелловскому граничному условию в присутствии поверхностного тока. Это — ожидаемый результат, потому что известно, что даже однородное намагничивание среды приводит к появлению поверхностного тока (см. рис. 4 и [26, 27]).

Для феррита, используя (31), (32) легко получить недостающее условие для обратимости (14):

$$\varepsilon^{\text{LLtr}}(\omega, k) - \varepsilon^{\text{LLl}}(\omega, k) = \frac{k^2}{k_0} \xi(\omega) = \frac{k^2}{k_0^2} [1 - (\mu^{\text{Ctr}})^{-1}]. \quad (36)$$

3. Слабая пространственная дисперсия

В предыдущем разделе эквивалентность ЛЛ- и К-форм была доказана для интегральной формы материальных уравнений. Фактически интегральная форма редко применяется. Предпочтение отдается дифференциальной форме. В последнем случае нужно быть особенно осторожным, чтобы избежать возможных неприятностей.

Существование интеграла в (2) предполагает, что его ядро должно уменьшаться с ростом расстояния $\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Если размер a включения и среднее расстояние d между включениями много меньше длины волны, то радиус ядра тоже мал по сравнению с длиной волны, и поле под интегралом можно разложить в ряд Тейлора. В результате приходим к материальным уравнениям в дифференциальной форме:

$$D_i(\omega, r) = \varepsilon_{ij}^{\text{LL}(0)}(\omega, r)E_j + \varepsilon_{ijl}^{\text{LL}(1)} \frac{\partial E_j}{\partial x_l} + \varepsilon_{ijlm}^{\text{LL}(2)} \frac{\partial^2 E_j}{\partial x_l \partial x_m} + \dots, \quad (37)$$

где $\varepsilon_{ijl_1 \dots l_n}^{\text{LL}(n)}(\omega, r) = \int \varepsilon_{ij}(r, \rho - r) \rho_{l_1} \dots \rho_{l_n} d^3\rho$.

Неправильная интерпретация этого ряда может быть источником многих неприятностей. Имея дело с эффектами пространственной дисперсии, мы должны помнить, что, как было указано выше, в задаче имеются по крайней мере два геометрических масштаба. Первый — это размер включения (радиус ядра) a , и второй масштаб — это длина волны. Например, ядро может иметь вид $\varepsilon_{ij}(r, \rho - r) \sim \exp(-\rho/a)f(\rho/\lambda)$, где функция f разложима в ряд Лорана⁷.

Таким образом, коэффициенты, стоящие в (37) перед производными, зависят от обоих масштабов, но только те из них, которые зависят от a , соответствуют членам теории возмущений по ka . Члены с коэффициентами, зависящими от λ , должны быть преобразованы с использованием уравнения Максвелла. Часто это игнорируется и подразумевается, что все коэффициенты в (37) являются степенями a . Как следствие, фурье-преобразование ряда (37) рассматривается как ряд по степеням ka . В действительности же коэффициент $\varepsilon_{ijl_1 \dots l_n}^{LL(n)}$ является однородным полиномом двух переменных:

$$\sum_{m=0}^{m=n} c_m^n a^{n-m} \lambda^m,$$

где c_m^n — безразмерные коэффициенты. Чтобы получить ряд теории возмущений, члены с $m \neq 0$ должны быть преобразованы, а именно, используя уравнения Максвелла, пространственные производные полей должны быть заменены временными.

В качестве иллюстрации можно вернуться к выводу граничных условий (34). Выражение (29) может быть формально получено из выражения (37). В этом случае (29) примет вид

$$\varepsilon_{ijk}^{LL(1)} = 0, \quad (38)$$

$$\varepsilon_{ijkl}^{LL(2)} = \frac{\xi(\omega)}{k_0} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{mlj} \quad (39)$$

(см., например, [28]).

На первый взгляд отличие (27) от (29) сводится к простому переименованию (38), (39). Однако рассмотрение ограниченной системы показывает, что разница более серьезна. В частности, эта разница приводит к различным граничным условиям. Действительно, используя вместо (27) выражение (28), которое является следствием (29), можно показать, что скачок тангенциальной составляющей магнитной индукции на границе двух сред всегда равен нулю. Причина такой разности заключается в том, что в ЛЛ-форме мы используем часть ряда (37), а в К-форме — точное выражение.

Наиболее ярко эта проблема проявляется при рассмотрении киральных сред.

4. Киральные (оптически активные) среды

Как известно, киральность — эффект первого порядка по ka [29]. Однако ограничившись в ряде (37) и в рядах, полученных из (12) и (13), лишь членами с первыми производными, мы можем прийти к различным следствиям.

Материальные уравнения в ЛЛ-форме имеют вид

$$\mathbf{D}^{LL} = \varepsilon \mathbf{E} + \gamma \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (40)$$

где γ — псевдоскаляр [5]. Данное материальное уравнение предсказывает вращение плоскости поляризации при распространении плоской волны. Будучи применено вместе с максвелловскими граничными условиями, оно предсказывает, что в случае нормального падения плоской линейно поляризованной волны отраженная волна будет эллиптически поляризована. Кроме того, основная ось поляризационного эллипса претерпевает азимутальный поворот относительно первичной поляризации (эффект оптической активности при отражении). Такое поведение свойственно невзаимным средам. Однако киральная система, изготовленная из взаимных элементов, должна быть взаимна. В [30] предполагается, что это поведение связано с существованием переходного слоя около межфазной поверхности.

Действительно, граница нарушает трансляционную инвариантность, и ядро в (2) зависит не только от разности пространственных переменных, но также и от позиции точки наблюдения. Чтобы учесть этот факт, авторы [30] вводят дополнительный член в материальное уравнение:

$$\mathbf{D}^{LL} = \varepsilon \mathbf{E} + \gamma \operatorname{rot} \mathbf{E} + [\operatorname{grad} \gamma \times \mathbf{E}]. \quad (41)$$

К сожалению, математика в [30] недостаточно строга, и эта теория может рассматриваться только как феноменологическая. Учет дополнительного члена приводит к тому, что условия на границе отличаются от максвелловских [30]:

$$B_{1t} - B_{2t} = \frac{\gamma}{c} \frac{\partial E_t}{\partial t}. \quad (42)$$

Такое граничное условие меняет в отраженной волне знак угла поворота оси эллипса поляризации. Хотя это согласуется с экспериментом, представленным в [30]⁸, но ни коим образом не решает вопрос о невзаимности эффекта.

Чтобы спасти теорию, в [11, 32] материальное уравнение (42) было обобщено:

$$\mathbf{D}^{LL} = \varepsilon \mathbf{E} + \gamma_1 \operatorname{rot} \mathbf{E} + [\operatorname{grad} \gamma_2 \times \mathbf{E}], \quad (43)$$

где принимается, что $\gamma_1 = 2\gamma_2$. Это соотношение между γ_1 и γ_2 получено из принципа симметрии коэффициентов ($\int E'_i D''_i dv = \int E''_i D'_i dv$) [33, 34]. Авторы работы [22], рассматривая стандартный вывод уравнения сохранения энергии, пришли к заключению, что данное уравнение принимает вид уравнения непрерывности только если: 1) переопределить выражения для плотности энергии и вектора Пойнтинга; 2) наложить дополнительное условие $\gamma_1 = 2\gamma_2$. Использование как (43), так и К-формы с максвелловскими граничными условиями дает нулевой эффект оптической активности на отражении.

Несмотря на успешное согласование подходов Ландау – Лифшица и Борна – Федорова (Казимира), остается ощущение искусственности построений, приведших к соотношению $\gamma_1 = 2\gamma_2$. Прежде всего это связано с возможностью

⁷ Имея дело с композитными материалами, которые являются гетерогенными веществами, мы сталкиваемся с многомасштабной задачей: существенными являются не только геометрические размеры, но и длины волн в ингредиентах. Дело в том, что отклик композита зависит не только от свойств ингредиентов, из которых он составлен, но и от формы включений. При этом отклик частицы в переменных полях сильно зависит от длины волны падающего излучения. Примером является случай, когда надо учитывать скин-эффект на отдельном включении. Так, магнитная поляризуемость проводящего шарика зависит от отношения радиуса шарика к толщине скин-слоя: $a/\delta \sim a\lambda^{3/2}/\sqrt{\sigma/c}$. Последняя величина суть "длина волны" в проводнике. Так, для малых частот $a' \sim -a^4 \lambda^{-4} (\sigma/\omega)^2 \sim -a^4 \lambda^{-2} (\sigma/c)^2$. В обоих случаях степени при a и λ различны, что и декларировано в работе.

⁸ Отметим, что обсуждаемые эффекты для естественно-активных сред крайне малы. По всей видимости, эксперимент проводится на пределе точности, что не позволяет использовать эксперимент для проверки той или иной гипотезы. Наряду с предсказаниями эффекта оптической активности при отражении [30] существуют работы, указывающие на его отсутствие [31].

распространить данные рассуждения на К-форму, получив "материальные уравнения для неоднородных сред":

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{BF}} &= \varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon \beta) \operatorname{rot} \mathbf{E} + [\operatorname{grad} (0,5\varepsilon\beta) \times \mathbf{E}], \\ \mathbf{B}^{\text{BF}} &= \mu \mathbf{H} + (\mu \beta) \operatorname{rot} \mathbf{H} + [\operatorname{grad} (0,5\mu\beta) \times \mathbf{H}]. \end{aligned}$$

Это дает повод к новым алгебраическим упражнениям, не просяя физику дела. Во-вторых, сомнительность данных рассуждений, по мнению автора, кроется в следующем факте. Известно, что поворот плоскости поляризации при отражении свойствен невязанным средам [21]. Он обусловлен наличием в задаче характерного вектора (вектора намагниченности \mathbf{M} в ферромагнетиках и вектора \mathbf{L} в антиферромагнетиках). Наличие переходного слоя также вводит в задачу дополнительный вектор — градиент материальных параметров. В случае неактивных сред этот градиент является полярным вектором, что в корне отличается ситуацию от магнитоупорядоченных сред, где векторы \mathbf{M} и \mathbf{L} являются аксиальными. Градиент же псевдоскаляра является аксиальным вектором. С одной стороны, наличие переходного слоя могло бы привести к невязанным эффектам, но тогда при применении симметричных рассуждений необходимо для полей с двумя штрихами менять знак этого градиента, т.е. рассматривать совершенно другую систему, следствием чего является малая информативность получающихся соотношений. С другой стороны, очевидно, что композит, изготовленный с применением только взаимных материалов, должен обладать свойством взаимности.

Из сказанного выше следует, что аргументы в пользу введения дополнительного члена $[\operatorname{grad} \gamma_2 \times \mathbf{E}]$ носят скорее оправдательный, нежели доказательный характер. Так как дополнительный член $[\operatorname{grad} \gamma_2 \times \mathbf{E}]$ отличается от нуля только около границы, то его введение эквивалентно введению дополнительного поверхностного тока и изменению граничных условий. Фактически введением невязанного граничного условия (42) компенсируется невязанность материального уравнения (40)⁹.

С точки зрения автора, неприятности, появляющиеся при использовании ЛЛ-формы для описания ограниченных сред, вызваны пропуском части членов первого порядка по ka при написании материальных уравнений. При сравнении (40) с материальными уравнениями Борна–Федорова мы можем видеть, что разложение в ЛЛ-форме должно по крайней мере включать члены с производными до третьего порядка. Член второго порядка дает вклад в магнитную проницаемость: $c_2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \sim c_2 k_0 \operatorname{rot} \mathbf{B} \sim c_2 (1 - 1/\mu) \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Член с производной третьего порядка ответствен за киральность: $c_3 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \sim c_3 k_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}$. Согласно рассуждениям, приведенным в конце второго раздела, коэффициенты перед этими дополнительными членами пропорциональны соответствующим степеням λ .

Использование уравнений Борна–Федорова совместно с максвелловскими граничными условиями не требует

введения существенных изменений в теорию (переопределения вектора Пойнтинга и плотности энергии, изменения вида леммы Лорентца и т.д.) и дает удовлетворительное согласие с экспериментом.

5. Заключение

В заключение рассмотрим физический смысл полей, появляющихся в уравнениях Максвелла. К настоящему времени почти все авторы исходят из постулата Розенфельда. Розенфельд [35] предложил определять поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , не решая уравнений Максвелла, а только рассматривая движение пробной заряженной частицы. Розенфельд предполагал, что эта частица перемещается под действием силы Лоренца $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$, где \mathbf{E} и \mathbf{B} — поля, стоящие в уравнениях Максвелла [10]. Это, безусловно, правильно для движения частицы в вакууме. Таким образом, по крайней мере в вакууме мы имеем независимое определение полей. К сожалению, мы не можем применить это определение в случае конденсированных сред. Действительно, любая заряженная частица, движущаяся через среду, испытывает влияние этой среды. Описание такого влияния не сводится к подстановке в выражение для силы Лоренца макроскопических полей. Частица поляризует окружающую среду и теряет энергию. Это приводит к дополнительной силе. Чтобы использовать постулат Розенфельда, необходимо знать явный вид этой силы. К сожалению, эта сила зависит от вида материальных уравнений. Последние, в силу неоднозначности, вносимой преобразованием Сердюкова–Федорова, зависят от определения полей. Таким образом, мы попадаем в замкнутый круг: определение полей посредством силы Лоренца возможно только после определения полей.

Имеется другой способ определить поля. Этот путь связан с определением граничных условий. Временно забудем, что мы имеем дело с гетерогенными средами, и вспомним, что поле внутри полости равно $\mathbf{E}(\mathbf{H})$, если полость вытянута вдоль силовых линий. Если же полость сплюснута, то поле равно $\mathbf{D}(\mathbf{B})$. Этот факт — следствие максвелловских граничных условий. Таким образом, если мы предполагаем, что максвелловские граничные условия имеют силу, мы имеем метод измерения всех полей. Применение преобразования Сердюкова–Федорова приводит к изменению граничных условий. Как следствие, поля в полости больше не равны полям в среде.

Метод полости для определения макроскопических полей непротиворечив. Действительно, при решении любой электромагнитной проблемы с ограниченными телами нужно шить поля вне и внутри тела. Задание граничных условий является необходимым и достаточным условием решения этой проблемы. Определение полей с использованием полости опирается на те же граничные условия, что делает эти поля измеримыми и придает физический смысл решению поставленной электромагнитной проблеме.

Необходимо отметить, что максвелловские граничные условия не являются следствием интегральной формы уравнений Максвелла. Нет никакого строгого доказательства того, что максвелловские граничные условия априори справедливы для полей в представлении Казимира или Ландау–Лифшица. Законность максвелловских граничных условий может быть доказана только экспериментально или микроскопической теорией, описывающей структуру переходного слоя. Действительно, использование каких-либо граничных условий означает, что мы тем самым определили метод измерения полей внутри среды, определив заодно и физический смысл полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Обратная

⁹ Если записать материальные уравнения в виде $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon \beta_c) \operatorname{rot} \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + (\mu \beta_m) \operatorname{rot} \mathbf{H}$ (данная форма включает в себя как ЛЛ-, так и К-форму), то лемма Лорентца сведется к выражению

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{E}' \mathbf{j}'' - \frac{4\pi}{c} \mathbf{E}'' \mathbf{j}' \right) dv = ik_0 \mu \beta_m \int (\operatorname{div} [\mathbf{H}'' \times \mathbf{H}']) dv + \\ + ik_0 \varepsilon \beta_c \int (\operatorname{div} [\mathbf{E}' \times \mathbf{E}'']) dv. \end{aligned}$$

Правая часть равенства обращается в нуль, только если $\beta_m = \beta_c$. В ЛЛ-форме данное соотношение не выполняется, так как в этой записи $\beta_m = 0$, а $\beta_c = \gamma$. На данный факт внимание автора обратил Б.З. Каценеленбаум (см. также [36]).

процедура (постулирование физического смысла полей, входящих в уравнения, а затем вывод граничных условий) туманна и может провоцировать на необоснованные выводы. Например, отождествление полей \mathbf{E} и \mathbf{V} в К- и ЛЛ-формах представляется неоправданным, пока не доказана эквивалентность соответствующих граничных условий. Выводя граничные условия для К-формы, мы идентифицируем физический смысл \mathbf{H} в вакууме и физический смысл \mathbf{H} в среде, в то время как для ЛЛ-формы мы должны вспомнить, что в вакууме $\mathbf{H} = \mathbf{V}$, и идентифицировать физический смысл \mathbf{H} в вакууме с физическим смыслом $\mathbf{V} = \mathbf{H}' \neq \mathbf{H}$ в среде.

Автор выражает благодарность А.Ф. Константиновой и А.Н. Сердюкову за полезные обсуждения.

Эта работа была частично поддержана РФФИ (проекты 00-15-96570 и 01-02-17962).

Список литературы

- Barron L D *Molecular Light Scattering and Optical Activity* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982)
- Graham E B, Pierrus J, Raab R E J. *Phys. B* **25** 4673 (1992)
- Raab R E, Cloete J H J. *Electromagnet. Waves Appl.* **8** 1073 (1994)
- Graham E B, Raab R E J. *Opt. Soc. Am. A* **13** 1239 (1996)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1992)
- Kukolev I A, Lagarkov A N, Matitsin S M, Rosanov K N, Vinogradov A P, in *Defect Engineering in Semiconductor Growth, Processing and Device Technology: Proc. of MRS Spring Meeting Symp., San Francisco, 1992* (MRS Symp. Proc., Vol. 262, Eds S Ashok et al.) (Pittsburgh, Pa.: Materials Research Soc., 1992) p. L6.14
- Левин Л *Теория волноводов: Методы решения волноводных задач* (М.: Радио и связь, 1981)
- Виноградов А П, Панина Л В, Сарычев А К *ДАН СССР* **234** 530 (1989)
- Vinogradov A P, Aivazyan A V *Phys. Rev. E* **60** 987 (1999)
- Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред* (М.: Госатомиздат, 1961)
- Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* 2-е изд. (М.: Наука, 1979)
- Джексон Дж Д *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)
- Sipe J E, Van Kranendonk J *Phys. Rev. A* **9** 1806 (1974)
- Sipe J E, Van Kranendonk J *Can. J. Phys.* **53** 2095 (1975)
- Russakoff G *Am. J. Phys.* **38** 1188 (1970)
- Туров Е А *Материальные уравнения электродинамики* (М.: Наука, 1983)
- Schlagheck U *Z. Phys.* **258** 223 (1973)
- Lindhard J *Det. Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Dan. Mat. Fys. Medd.* **28** 113 (1954)
- Лагарьков А Н, Кисель В Н *Докл. РАН* **377** 1 (2001)
- Игнатов А М, Рухадзе А А *УФН* **153** 171 (1981)
- Гуревич А Г, Мелков Г А *Магнитные колебания и волны* (М.: Наука, 1994)
- Бокут В В, Сердюков А Н *ЖЭТФ* **61** 1808 (1971)
- Бокут В В, Сердюков А Н, Федоров Ф И *Оптика и спектроск.* **27** 288 (1974)
- Федоров Ф И *Теория гиротропии* (Минск: Наука и техника, 1976)
- Maslovski S Ya, Simovski C R, Tretyakov S A, in *Bianisotropics '98: Proc. of 7th Intern. Conf. on Complex Media, Braunschweig, Germany, 1998* (Eds A F Jacob, J Reinert) (Braunschweig: Technische Universitat Braunschweig, 1998) p. 197
- Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Гостехиздат, 1954)
- Голубков А А, Макаров В А *УФН* **165** 339 (1995)
- Рязанов М И *Электродинамика конденсированного вещества* (М.: Наука, 1984)
- Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* Т. 3 (М.: Мир, 1967) с. 125
- Bungay A R, Svirko Yu P, Zheludev N I *Phys. Rev. B* **47** 11730 (1993)
- Лукьянов А Ю, Новиков М А *Письма в ЖЭТФ* **51** 591 (1990)
- Вальков А Ю, Романов В П, Шалагинов А Н *Оптика и спектроск.* **69** 635 (1990)
- Agranovich V M, Yudson V I *Opt. Commun.* **9** 58 (1973)
- Бокут В В, Сердюков А Н *ЖПС* **20** 677 (1974)
- Rosenfeld L *Theory of Electrons* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1951)
- Kong J A *Proc. IEEE* **60** 1036 (1972)
- Памятных Е А, Туров Е А *Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях* (М.: Наука. Физматлит, 2000)
- Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967)
- Kamenetskii E O *Phys. Rev. E* **54** 4359 (1996)

On the form of constitutive equations in electrodynamics

A.P. Vinogradov

*Institute for Theoretical and Applied Electromagnetism
at the Joint Institute of High Temperatures, Russian Academy of Sciences
ul. Izhorskaya 13/15, 127412 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 484-26 44. Fax (7-095) 484-26 33
E-mail: vinogr@vinogr.msk.ru*

A comparative analysis of various forms of Maxwell equations for condensed matter is presented. It is shown that the so-called Casimir form contains enough information to solve any electromagnetic problem. The Landau – Lifshitz form for media with spatial dispersion requires an additional constitutive equation for the surface current, which is not an additional boundary condition but rather an improved version of usual Maxwell's continuity conditions for tangential field components.

PACS numbers: 42.25Bs, 42.25Gy, **78.20.** –e

Bibliography — 39 references

Received 25 July 2001, revised 17 October 2001