Март 2002 г. *Том 172, № 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Пример, демонстрирующий возможности и особенности вариационного подхода к задачам электростатики

В.П. Казанцев

На примере относительно простой задачи о сопротивлении заземления удалось ясно продемонстрировать преимущества и особенности вариационной схемы решения электростатических задач.

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Cv

Содержание

1. Введение

Если просмотреть руководства по классической электродинамике из обширного библиографического списка, приведенного в известном, можно сказать, энциклопедическом задачнике [1], то нетрудно заметить, что вариационные принципы магнитостатики не обсуждаются ни в одном из них, а вариационные принципы электростатики упоминаются мельком лишь в некоторых. В самом же задачнике [1] не дано ни одного примера использования вариационных принципов электростатики и магнитостатики. Такого упоминания нет и в современных курсах по электричеству и магнетизму [2, 3].

Такая ситуация, сложившаяся в научной и учебной литературе по классической электродинамике, не может не вызывать удивления, поскольку в классическом труде Д.К. Максвелла [4] имеются четкие формулировки вариационных принципов Дирихле и Томсона, позволяющие, в частности, находить оценки сверху и снизу для энергетических параметров, таких как электрическая емкость проводников, межэлектродные сопротивления и т.д. Там же со ссылкой на работы Рэлея, в частности на известную *Теорию звука* [5], указано, что формула расчета сопротивления R прямого провода переменного сечения $S(l)$, изготовленного из однородного материала с удельным сопротивлением ρ,

$$R = \int \frac{\rho\,\mathrm{d}l}{S}\,,$$

где интегрирование проводится по длине провода l, в действительности приводит к заниженным значениям, т.е. на самом деле имеет место неравенство

$$R \geqslant \int \frac{\rho\,\mathrm{d}l}{S}\,. \qquad (1)$$

Интересно, что этот факт не принимают во внимание авторы курсов [2, 3], трактующие формулу (1) как точную. В [3] формула (1) использована для расчета сопротивления однородного усеченного конуса с торцевыми контактами (с. 224).

Причины, по которым вариационные принципы электростатики оказались вне обширной литературы по электродинамике, понять сложно, так как вариационные методы в физике всегда считались весьма эффективными. Возможно, приведенные в трактате Максвелла [4] (п. 306 – 308) найденные Рэлеем вариационные оценки для сопротивления R провода кругового сечения радиусом a, длины L, изготовленного из материала с удельным сопротивлением ρ и находящегося в контакте на одном из торцов с проводящим однородным полупространством, характеризуемым удельным сопротивлением ρ',

$$1 + \frac{\rho'}{\rho}\frac{a}{L}\frac{\pi}{4} < \frac{\pi a^2}{\rho L}\,R < 1 + \frac{\rho'}{\rho}\frac{a}{L}\frac{8}{3\pi} \qquad (2)$$

в большей степени свидетельствовали об искусности Рэлея, чем об универсальности вариационных методов. На наш взгляд, неравенства (2) достойны того, чтобы войти во все руководства по классической электродинамике.

В.П. Казанцев. Красноярский государственный университет, физический факультет,
660041 Красноярск, просп. Свободный 79, Российская Федерация
Тел. (3912) 44-56-03. Факс (3912) 44-87-81
E-mail: zolotov@krasu.ru

Статья поступила 11 мая 2001 г.,
после доработки 11 ноября 2001 г.

Вероятно также, что причиной игнорирования вариационных принципов электростатики в руководствах по электродинамике послужило то обстоятельство, что реализация вариационных принципов при решении конкретных задач требует, как это видно из примеров, данных Рэлеем и приведенных Максвеллом [4], развития соответствующего, зачастую довольно сложного математического аппарата. Некоторые характерные черты такого аппарата можно усмотреть в задачах о емкости куба и конденсатора с круговыми пластинами, исследованных Г. Полиа и Г. Сеге в книге *Изопериметрические неравенства в математической физике* [6]. Однако часть этой книги, посвященная электростатике, за исключением нескольких примеров, не соответствует ее теме, анонсированной в названии, а стремление авторов формулировать электростатические задачи как изопериметрические приводит, по нашему мнению, к искажению физической сути дела. Таким образом, можно предположить, что развивать вариационные методы электростатики физикам мешали математические трудности, а математикам — недостаточно ясное понимание физической стороны проблемы.

В течение двух десятков лет автор пытался построить электростатику на основе вариационных принципов. Поначалу казалось, что для выполнения этой задачи нужно объединить известные методы вариационным подходом и продемонстрировать, что нового может дать этот подход для решения различных классов электростатических задач. Однако постепенно росло понимание того, что для построения аналитической электростатики необходимы органически связанные с ней новые понятия.

Дело в том, что главная проблема реализации вариационных принципов для той или иной задачи — это выбор пробных (аппроксимирующих) полей. При удачном выборе можно надеяться получить точные оценки, подобные оценкам Рэлея (2), для энергетических параметров. Как-то само собой разумеется, что качество выбора пробных полей зависит от искусности исследователя, его физической интуиции. Если согласиться с этим, то вариационные принципы электростатики должны были бы реализоваться во множестве вариационных неравенств, аналогичных неравенствам Рэлея (1) и (2). И такое множество неравенств существует.

Наиболее известное неравенство Пуанкаре–Фабера–Сеге [6] утверждает, что из всех проводящих тел одинакового объема минимальную электрическую емкость имеет шар и является по своей сути изопериметрическим. Другие, на наш взгляд, интересные неравенства [7] показывают, что вошедшие во все учебные курсы [2, 3] и справочники формулы для емкости плоского и цилиндрического конденсаторов

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\,, \qquad C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}\,, \tag{3}$$

в действительности приводят всегда к заниженным значениям по отношению к истинной емкости. Известная же формула для индуктивности однослойного соленоида [2, 3]

$$L = \mu\mu_0\, n^2 S l\,, \tag{4}$$

как показано в работе [8], дает завышенные значения для истинной индуктивности. Неравенство $L < \mu\mu_0\, n^2 S l$ — по-видимому, первое неравенство, найденное с помощью вариационных принципов магнитостатики. Обратим внимание на то, что вариационные неравенства (1), (3) и (4) показывают, что вариационный подход, даже если он не осознается, присутствует в приближенных формулах электростатики и магнитостатики.

Значительно больше возможностей для реализации вариационных принципов открывается, когда выбор пробных полей не зависит от интуиции исследователя, а подчиняется определенным методам. Развитию таких методов сопутствовало введение новых понятий: высшие поляризуемости проводников [9], характеристические мультиполи [10], магнитная квадрупольная поляризуемость [11], а также более общая трактовка известных понятий [12, 13]. С помощью таких новых понятий удалось решить задачу о построении функции Лагранжа проводящего тела в электростатическом поле [10], проблему моментов (обратную задачу) в электростатике [9, 10], исследовать задачу об устойчивости диамагнитной частицы в квадрупольном магнитном поле [11], а также перейти от получения отдельных неравенств, аналогичных неравенствам Рэлея (1) и (2), к исследованию целых классов вариационных неравенств [14].

Теперь, когда в реальности аналитической электростатики нет никаких сомнений, хотелось бы продемонстрировать ее возможности на относительно простом примере, который можно было бы включить в руководства по электродинамике. В качестве такового была выбрана известная задача [2, 3] о сопротивлении заземления, осуществляемого идеально проводящим шаром, помещенным в однородное проводящее полупространство. Выделим основные этапы решения поставленной задачи вариационным методом.

2. Вариационные формулировки задачи

Пусть радиус заземляющего шара равен a, его центр совпадает с началом координат, а поверхности Земли соответствует плоскость $z = h > a$. Удельное сопротивление окружающего шар однородного грунта обозначим ρ.

Для решения задачи о сопротивлении заземления нужно найти в области $V = [z < h; r > a]$ удовлетворяющий в ней уравнению Лапласа электрический потенциал $\varphi_0(\mathbf{r})$, принимающий на поверхности шара $r = a$ постоянное значение U, при этом частная производная от $\varphi_0(\mathbf{r})$ по z должна принимать нулевые значения на поверхности Земли $(z = h)$. Сопротивление заземления может быть определено через функционал мощности выделения тепла $P_V(\varphi_0)$ с помощью соотношений

$$\frac{U^2}{R} = P_V(\varphi_0) = \frac{1}{\rho}\int_V (\nabla\varphi_0)^2\,\mathrm{d}V = -\frac{U}{\rho}\int_{r=a} \partial_r\varphi_0\,\mathrm{d}S = UI\,. \tag{5}$$

Основной вариационный принцип. Сравним с $\varphi_0(\mathbf{r})$ непрерывные кусочно-гладкие в области V потенциалы $\varphi(\mathbf{r})$, имеющие на поверхности шара значение

$$\varphi(\mathbf{r})\Big|_{r=a} = U\,. \tag{6}$$

Рассмотрим непосредственно проверяемое тождество

$$P_V(\varphi) = P_V(\varphi_0) + P_V(\varphi - \varphi_0) + \frac{2}{\rho}\int_V \nabla\varphi_0\nabla(\varphi - \varphi_0)\,\mathrm{d}V\,,$$

в правой части которого интеграл равен нулю из-за того, что значение $\varphi_0(\mathbf{r})$ на шаре совпадает со значением $\varphi(\mathbf{r})$, $\partial_z\varphi_0(\mathbf{r}) = 0$ при $z = h$, а в области V $\Delta\varphi_0 = 0$. Учитывая положительную определенность функционала $P_V(\varphi)$, на основании тождества приходим к неравенству

$$\frac{U^2}{R} = P_V(\varphi_0) \leqslant P_V(\varphi)\,, \tag{7}$$

позволяющему находить оценки снизу для сопротивления заземления R с помощью потенциалов $\varphi(\mathbf{r})$ из указанного выше класса.

Когда $\varphi(\mathbf{r})$ — гармоническая функция, источники которой лежат на поверхности шара $r = a$ и плоскости $z = h$, может оказаться удобным вместо $P_V(\varphi)$ использовать

$$P(\varphi) = \frac{1}{\rho}\int_{R^3 - S_p} (\nabla\varphi)^2\,\mathrm{d}V\,, \tag{8}$$

где S_p — множество точек плоскости $z = h$. Допустимые потенциалы $\varphi(\mathbf{r})$ непрерывны на поверхности шара $r = a$, а их производные по z непрерывны на плоскости $z = h$. Очевидно, что

$$\frac{U^2}{R} = P_V(\varphi_0) \leqslant P_V(\varphi) \leqslant P(\varphi)\,. \tag{9}$$

Дуальный вариационный принцип. Теперь сравним с истинным распределением плотности тока $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = -\rho^{-1}\nabla\varphi_0$ соленоидальные поля $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Заметим, что

$$\rho\int_V \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\right]^2 \mathrm{d}V = P_V(\varphi_0) - Q_V(\mathbf{j}) \geqslant 0\,,$$

$$Q_V(\mathbf{j}) = 2U\int_{r=a} j_r\,\mathrm{d}S - \rho\int_V \mathbf{j}^2\,\mathrm{d}V\,,$$

если

$$j_z\Big|_{z=h} = 0\,. \tag{10}$$

Таким путем приходим к неравенству

$$\frac{U^2}{R} \geqslant Q_V(\mathbf{j})\,, \tag{11}$$

позволяющему находить оценки для сопротивления заземления сверху с помощью соленоидальных полей $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, удовлетворяющих граничному условию (10).

Когда $\mathbf{j} = -\rho^{-1}\nabla\psi$, а источники потенциала ψ лежат на сфере $r = a$ и плоскости $z = h$, оказывается удобным вместо $Q_V(\mathbf{j})$ использовать

$$Q(\mathbf{j}) = 2U\int_{r=a} j_r\,\mathrm{d}S - \rho\int_{R^3 - S_p} \mathbf{j}^2\,\mathrm{d}V\,. \tag{12}$$

При этом $\psi(\mathbf{r})$ продолжаем непрерывно в область шара $r < a$, а в область $z > h$ продолжаем так, чтобы непрерывной была $\partial_z\psi$. Ясно, что $Q_V(\mathbf{j}) \geqslant Q(\mathbf{j})$, поэтому

$$\frac{U^2}{R} \geqslant Q_V(\mathbf{j}) \geqslant Q(\mathbf{j})\,. \tag{13}$$

Оценки погрешностей. Весьма привлекательная особенность вариационного подхода к задачам электростатики состоит в том, что энергетическая величина (в рассматриваемом нами случае — проводимость $Y = R^{-1}$) оценивается с двух сторон, т.е. всегда наряду с приближенным ее значением, за которое естественно принять

$$\tilde{Y}_V = \frac{1}{2U^2}\left[P_V(\varphi) + Q_V(\mathbf{j})\right]\,, \tag{14}$$

можно найти и погрешность этого приближения. Как видно из соотношений

$$\begin{aligned}
|Y - \tilde{Y}_V| &= \frac{1}{2}\left|\frac{P_V(\varphi)}{U^2} - Y + \frac{Q_V(\mathbf{j})}{U^2} - Y\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\frac{P_V(\varphi)}{U^2} - Y\right| + \left|\frac{Q_V(\mathbf{j})}{U^2} - Y\right|\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{P_V(\varphi)}{U^2} - Y + Y - \frac{Q_V(\mathbf{j})}{U^2}\right) = \frac{1}{2U^2}\left[P_V(\varphi) - Q_V(\mathbf{j})\right]\,,
\end{aligned}$$

модуль абсолютной погрешности такого приближения не превосходит $\left[P_V(\varphi) - Q_V(\mathbf{j})\right]/2U^2$. Следовательно, относительная погрешность оценки Y величиной $\tilde{Y}_V$ не будет превосходить

$$\varDelta_V = \frac{P_V(\varphi) - Q_V(\mathbf{j})}{P_V(\varphi) + Q_V(\mathbf{j})}\,. \tag{15}$$

Если оценки проводить с помощью функционалов $P(\varphi)$ и $Q(\mathbf{j})$, то соответствующее приближение для проводимости и погрешность этого приближения следует рассчитывать по формулам (14) и (15), опуская в них индекс V.

Поля $-\nabla\varphi$ и $\rho\mathbf{j}$ можно рассматривать как поля, аппроксимирующие истинное электрическое поле $-\nabla\varphi_0$. Целесообразно принять за такую аппроксимацию поле $(\rho\mathbf{j} - \nabla\varphi)/2$. Стандартное отклонение приближающего поля от истинного

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\rho}\int_V \left[\rho(\mathbf{j} - \mathbf{j}_0) + \nabla(\varphi_0 - \varphi)\right]^2 \mathrm{d}V = \\
&= \frac{1}{4}\left[\int_V \rho(\mathbf{j} - \mathbf{j}_0)^2\,\mathrm{d}V + \frac{1}{\rho}\int_V \left(\nabla(\varphi_0 - \varphi)\right)^2 \mathrm{d}V\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[P_V(\varphi) - P_V(\varphi_0) + Q_V(\mathbf{j}_0) - Q_V(\mathbf{j})\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[P_V(\varphi) - Q_V(\mathbf{j})\right]\,.
\end{aligned}$$

Учитывая это, относительную погрешность аппроксимации можно определить как

$$\delta_V = \sqrt{\frac{1}{2}\,\varDelta_V}\,. \tag{16}$$

Заметим в заключение этого раздела, что все изложенное в нем переносится на задачу о сопротивлении заземления, осуществляемого проводником произвольной формы, путем замены области шара на область проводника без каких-либо изменений в остальном. Таким образом, здесь была дана общая вариационная формулировка задачи о сопротивлении заземления.

Неравенства (9) и (13), а также формулы расчета погрешностей (15) и (16) положим в основу вариационного метода определения сопротивления заземления.

Укажем также, что описанная здесь вариационная схема в общих чертах сохранится и для других классов электростатических задач, например задач расчета емкостных коэффициентов системы проводников.

3. Построение последовательности оценок снизу для сопротивления заземления

Допустимые в функционалах $P_V(\varphi)$ и $P(\varphi)$ потенциалы должны принимать на заземляющем проводнике общее для них всех постоянное значение U. Такому условию будут удовлетворять потенциалы

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = U\Phi_0(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^{N} q_k G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)\,, \tag{17}$$

где q_k — пока неопределенные постоянные; $\Phi_0(\mathbf{r})$ — потенциал зарядов уединенного заземляющего проводника, когда его собственный потенциал равен 1; $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)$ — функция Грина задачи Дирихле для области, внешней к области заземляющего проводника; $\mathbf{r}_k$ — радиусы-векторы точек, расположенных в области $z > h$. В рассматриваемой задаче

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{a}{r}\,;$$
$$G(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} - \frac{a}{\sqrt{r^2R^2 - 2a^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R} + a^4}}\right). \tag{18}$$

Слагаемые в сумме (17) представляют собой потенциалы находящихся в точках $\mathbf{r}_k$ точечных зарядов q_k в присутствии заземленной проводящей сферы $r = a$. Таким образом, истинный потенциал $\varphi_0(\mathbf{r})$ аппроксимируется здесь суммой потенциалов точечных зарядов (17).

Подставив потенциал (17) в функционалы (5) и (8), найдем

$$P_V(\varphi) = \frac{U^2}{R_0}\left(\frac{R_0}{R_0^{(i)}} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}' + \mathbf{q}'\cdot\hat{A}\cdot\mathbf{q}'\right);$$
$$P(\varphi) = \frac{U^2}{R_0}\left(1 + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}' + \mathbf{q}'\cdot\hat{B}\cdot\mathbf{q}'\right). \tag{19}$$

Здесь

$$R_0 = \left(\frac{1}{\rho}\int_{R^3}(\nabla\Phi_0)^2\,\mathrm{d}V\right)^{-1}$$

— сопротивление заземляющего проводника, когда он находится в однородной среде с удельным сопротивлением ρ;

$$\frac{1}{R_0^{(i)}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\rho}\int_{z=h}\Phi_0\,\partial_z\Phi_0\,\mathrm{d}S\,,$$

$$\mathbf{q}' = \frac{R_0}{\varepsilon_0\,\rho\,U}(q_1, q_2, \ldots, q_N)\,; \qquad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)\,;$$

$$a_i = \varepsilon_0\int_{z=h}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)\,\partial_z\Phi_0\,\mathrm{d}S\,;$$

$\hat{A}$ — квадратная матрица с элементами

$$A_{ij} = \frac{\rho}{R_0}\,\varepsilon_0^2\int_{z=h}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)\,\partial_z G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)\,\mathrm{d}S\,,$$

$$b_i = -\Phi_0(\mathbf{r}_i)\,, \qquad B_{ij} = \frac{\rho\varepsilon_0}{R_0}\left[G_n(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)\right],$$

$$G_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}+2\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})-2h\mathbf{k}|}\right), \tag{20}$$

где, в свою очередь, $G_n(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ — функция Грина задачи Неймана для плоскости $z = h$; $\mathbf{k}$ — орт оси z. Отметим, что выбором естественных для данной задачи единиц измерения сопротивления R_0 и заряда $\varepsilon_0\rho U/R_0$ удалось добиться того, что в скобках правых частей формул (19) заключены только безразмерные величины.

В случае, когда заземляющим проводником является шар, а заряды q_i расположены на оси z в точках $z_i > h$,

$$R_0 = \frac{\rho}{4\pi a}\,, \qquad \frac{R_0}{R_0^{(i)}} = 1 - \frac{a}{4h}\,, \qquad a_i = -\frac{a}{2z_i}\left(1 - \frac{az_i}{2hz_i - a^2}\right),$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z_i + z_j - 2h} - \frac{a^3}{2hz_iz_j - a^2(z_i + z_j)}\right),$$

$$b_i = -\frac{a}{z_i}\,, \qquad B_{ij} = \frac{a^2}{z_iz_j - a^2} + \frac{a}{z_i + z_j - 2h}\,.$$

Минимизация правых частей соотношений (19) приводит к следующим оценкам сопротивления заземления:

$$R > R_0\left(\frac{R_0}{R_0^{(i)}} - \mathbf{a}\cdot\hat{A}^{-1}\cdot\mathbf{a}\right)^{-1};$$
$$R > R_0\left(1 - \mathbf{b}\cdot\hat{B}^{-1}\cdot\mathbf{b}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Обозначим эти оценки, отвечающие различным N, как $R_N^{(i)}$ и $\tilde{R}_N^{(i)}$. Они являются функциями z_i, оптимизация по которым могла бы привести к наилучшим при данном N оценкам, однако такая оптимизация требует разработки громоздких вычислительных схем, поэтому возьмем

$$z_1 = 2h\,; \qquad z_{k+1} = 2h - \frac{a^2}{z_k}\,. \tag{22}$$

Такой выбор соответствует методу изображений в электростатике [4], позволяющему согласно современной теории [15] находить особенности электростатического поля, аналитически продолженного внутрь сферы.

В частности, при $h = a$, когда следует ожидать максимальной погрешности вариационных оценок, будем иметь

$$\frac{R_0^{(i)}}{R_0} = \frac{4}{3}\,, \qquad \mathbf{q}' = 0\,,$$
$$\frac{R_1^{(i)}}{R_0} = \frac{36}{25} = 1{,}44\,, \qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{2}{3}\right),$$
$$\frac{R_2^{(i)}}{R_0} = \frac{88}{61} = 1{,}44262295\,, \qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{10}{11}\,, -\frac{5}{22}\right),$$
$$\frac{R_3^{(i)}}{R_0} = \frac{5400}{3743} = 1{,}44269303\,, \qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{44}{45}\,, -\frac{21}{54}\,, \frac{14}{135}\right),$$
$$\frac{\tilde{R}_0^{(i)}}{R_0} = 1\,, \qquad \mathbf{q}' = 0\,,$$
$$\frac{\tilde{R}_1^{(i)}}{R_0} = \frac{10}{7} = 1{,}42857143\,, \qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{3}{5}\right),$$
$$\frac{\tilde{R}_2^{(i)}}{R_0} = \frac{75}{52} = 1{,}44230769\,, \qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{22}{25}\,, -\frac{1}{5}\right),$$
$$\frac{\tilde{R}_3^{(i)}}{R_0} = \frac{1348}{1073} = 1{,}44268406\,, \qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{750}{774}\,, -\frac{285}{774}\,, \frac{70}{774}\right).$$

Если судить по внутренней сходимости оценок снизу, то представляется, что отличие третьей вариационной оценки от точного значения составляет единицы пятого после запятой знака, однако это нельзя утверждать наверняка, не имея оценок сверху.

4. Построение последовательности оценок сверху для сопротивления заземления

При получении оценок сверху для сопротивления заземления в функционалах $Q(\mathbf{j})$ и $Q_V(\mathbf{j})$ следует использовать соленоидальные поля плотности тока $\mathbf{j}$, удовлетворяющие условию непроницаемости для тока поверхности Земли (10). К таким полям плотностей тока относятся

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho}\,\nabla\sum_{k=1}^{N} q_k G_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_k)\,, \tag{23}$$

где $\mathbf{r}_k$ — радиусы-векторы точечных зарядов q_k, расположенных в области заземляющего проводника; $G_n(\mathbf{r},\mathbf{R})$ — определенная формулой (20) функция Грина задачи Неймана для полупространства $z < h$. По неопределенным пока значениям зарядов q_k в дальнейшем будет проведена максимизация функционалов

$$\begin{gathered} Q_V(\mathbf{j}) = \frac{U^2}{R_0}\left(2\mathbf{e}\cdot\mathbf{q}' - \mathbf{q}'\cdot\hat{C}\cdot\mathbf{q}'\right), \\ Q(\mathbf{j}) = \frac{U^2}{R_0}\left(2\mathbf{e}\cdot\mathbf{q}' - \mathbf{q}'\cdot\hat{D}\cdot\mathbf{q}'\right). \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь

$$\mathbf{e} = (1;1;\ldots;1)\,,\qquad \mathbf{q}' = \frac{R_0}{\varepsilon_0\rho U}(q_1;q_2;\ldots;q_N)\,,$$

$$C_{ij} = -\frac{\rho}{R_0}\,\varepsilon_0^2\int_S G_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\mathbf{n}\cdot\nabla G_n(\mathbf{r},\mathbf{r}_j)\,\mathrm{d}S\,,$$

$$D_{ij} = \frac{\rho\varepsilon_0}{R_0}\left[G_n(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j) - G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)\right],$$

S — площадь поверхности проводника, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности проводника в точке $\mathbf{r}$, направленный наружу, $G(\mathbf{r},\mathbf{R})$ — функция Грина задачи Дирихле для области, занимаемой проводником.

Когда заземляющим проводником служит шар, $G(\mathbf{r},\mathbf{R})$ можно найти по формуле (18). Симметрия задачи указывает на то, что заряды q_i следует располагать на оси z; обозначим их координаты z_i $(|z_i| < a)$. Согласно вычислениям

$$C_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\alpha_i\alpha_j} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\beta_i\beta_j} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_i\alpha_j}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_i\alpha_j}}{1-\sqrt{\alpha_i\alpha_j}} + \right.$$
$$+\sqrt{\frac{\beta_i}{\alpha_j}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_j\beta_i}}{1-\sqrt{\alpha_j\beta_i}} + \sqrt{\frac{\beta_j}{\alpha_i}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_i\beta_j}}{1-\sqrt{\alpha_i\beta_j}} +$$
$$\left. + \sqrt{\beta_i\beta_j}\,\ln\frac{1+\sqrt{\beta_i\beta_j}}{1-\sqrt{\beta_i\beta_j}}\right),$$

$$\alpha_i = \frac{z_i}{a}\,,\qquad \beta_i = \frac{a}{2h - z_i}\,,$$

$$D_{ij} = \frac{a^2}{a^2 - z_i z_j} + \frac{a}{2h - z_i - z_j}\,.$$

Максимизация $Q_V(\mathbf{j})$ и $Q(\mathbf{j})$ по $\mathbf{q}'$ приводит к следующим оценкам для сопротивления заземления:

$$R < R_0\left(\mathbf{e}\cdot\hat{C}^{-1}\cdot\mathbf{e}\right)^{-1};\qquad R < R_0\left(\mathbf{e}\cdot\hat{D}^{-1}\cdot\mathbf{e}\right)^{-1}. \tag{25}$$

Обозначим эти упорядоченные по возрастанию N оценки $R_N^{(s)}$ и $\tilde{R}_N^{(s)}$. Они являются функциями z_i, по значениям которых можно было бы проводить оптимизацию, однако из-за громоздкости такого процесса примем

$$z_1 = 0\,,\qquad z_{k+1} = \frac{a^2}{2h - z_k}\,, \tag{26}$$

следуя методу построения изображений в электростатике. В частности, при $h = a$ находим

$$\frac{R_1^{(s)}}{R_0} = \frac{4}{3} + \frac{1}{8}\ln 3 = 1{,}47065987\,,\qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{24}{32 + 3\ln 3}\right),$$

$$\frac{R_2^{(s)}}{R_0} = 1{,}44330464\,,\qquad \mathbf{q}' = (0{,}93768642;\ -0{,}24483200)\,,$$

$$\frac{\tilde{R}_1^{(s)}}{R_0} = 1{,}5\,,\qquad \mathbf{q}' = \left(\frac{2}{3}\right),$$

$$\frac{\tilde{R}_2^{(s)}}{R_0} = \frac{13}{9} = 1{,}4(4)\,,\qquad \mathbf{q}' = \frac{1}{13}(12;\ -3)\,,$$

$$\frac{\tilde{R}_3^{(s)}}{R_0} = \frac{189}{131} = 1{,}442748909\,,\qquad \mathbf{q}' = \frac{1}{189}(186;\ -75;\ 20)\,,$$

$$\frac{\tilde{R}_4^{(s)}}{R_0} = \frac{642}{445} = 1{,}44269629,\quad \mathbf{q}' = \frac{1}{642}(640;\ -300;\ 140;\ -35).$$

5. Сравнение оценок, расчет погрешности, выбор аналитических формул

Перед другими методами электростатики вариационный метод имеет то существенное преимущество, что в его рамках может быть найдена погрешность, неизбежная в любых расчетах. Таким образом, вариационный метод позволяет проводить вычисления с контролируемой погрешностью. Действительно, сравнивая, например, $\tilde{R}_4^{(s)}$ и $R_3^{(i)}$, находим

$$\Delta = 1{,}25\times 10^{-6}\,,\qquad \delta = 7{,}9\times 10^{-4}\,.$$

Отсюда заключаем, что аппроксимация электрического поля комбинацией пробных полей (17) и (23), соответственно при $N = 3$ и $N = 4$, осуществляется со средней квадратичной погрешностью 0,079 %.

С помощью метода вариационных неравенств можно проводить только необходимые для достижения требуемой точности вычисления. Для этого нужно параллельно определять оценки сверху и снизу, сравнивая их. Например, если требуется найти распределение электрического поля вокруг заземляющего проводника при $h = 2a$ со средней квадратичной ошибкой, меньше 1 %, то вычисляя

$$\frac{R_0^{(i)}}{R_0} = \frac{8}{7}\,,\qquad \frac{\tilde{R}_1^{(s)}}{R_0} = \frac{5}{4}\,,\qquad \frac{R_1^{(i)}}{R_0} = 1{,}245940\,,$$

$$\frac{\tilde{R}_2^{(s)}}{R_0} = 1{,}245977\,,$$

видим, что необходимая точность аппроксимации осуществляется полями, соответствующими первой оценке снизу и второй оценке сверху. При этом оценки более высоких порядков оказываются излишними.

Выражения для вариационных оценок представляют собой здесь множество приближенных аналитических формул для сопротивления заземления. Приведем некоторые из них:

$$\frac{\tilde{R}_1^{(s)}}{R_0} = 1 + \frac{1}{2H}\,,$$

$$\frac{R_1^{(s)}}{R_0} = 1 + \frac{1}{2H} - \frac{1}{2(4H^2-1)} + \frac{1}{8H}\ln\frac{2H+1}{2H-1}\,,$$

$$\frac{\tilde{R}_2^{(s)}}{R_0} = \frac{H(16H^4+8H^3-12H^2-2H+3)}{(4H^2-1)(4H^3-2H+1)}\,,$$

$$\frac{R_0^{(i)}}{R_0} = \frac{4H}{4H-1}\,, \qquad \frac{\tilde{R}_1^{(i)}}{R_0} = \frac{2H(4H^2+2H-1)}{8H^3-2H+1}\,,$$

$$\frac{R_1^{(i)}}{R_0} = \frac{4H(4H^2-3)(4H^2-1)^2}{(4H-1)(4H^2-3)(4H^2-1)^2 - 2(2H^2-1)(4H^2-2H-1)^2}\,.$$

Здесь $H = h/a$. Погрешность расчета сопротивления заземления по формуле

$$R = \frac{1}{2}\left(R_1^{(i)} + \tilde{R}_2^{(s)}\right) \tag{27}$$

не будет превышать $\Delta = 0{,}0015$. В действительности погрешность оказывается существенно меньше, как это показывает сравнение правой части (27) с оценками более высоких порядков, и не превосходит 0,033 % во всей области изменения $H \geqslant 1$. Соотношение (27) можно рекомендовать для расчета сопротивления заземления, осуществляемого шаром.

6. Заключение

Рассмотренный пример достаточно ясно демонстрирует возможности вариационного подхода к задачам расчета электростатических полей и их энергетических характеристик.

Особенности вариационного подхода обусловлены тем, что он существенно расширяет круг понятий, используемых в электростатике. Прямой и дуальный вариационные принципы, энергетические функционалы, классы допустимых к сравнению полей, оценки сверху и снизу энергетических параметров — это те новые понятия, которые необходимы для описания вариационного подхода к электростатике.

В отношении известных методов вариационный подход ведет себя двояким образом. С одной стороны, он опирается на известные методы, используя их как вспомогательные. В рассмотренном выше примере таким вспомогательным методом служит метод электрических изображений. С другой стороны, вариационные модификации известных методов могут приобрести новые черты. Так, в задаче о сопротивлении заземления заряды q_i можно было бы располагать в точках, не соответствующих положениям изображений. Такое обобщение метода изображений с точки зрения вариационного подхода следовало бы назвать методом аппроксимации электрического поля полями точечных зарядов.

Думается, что со временем в руководствах по электродинамике появятся разделы, посвященные вариационным методам электростатики и магнитостатики.

Работа выполнена при поддержке Красноярского краевого фонда науки.

Список литературы

1. Батыгин В В, Топтыгин И Н *Сборник задач по электродинамике* (М.: Наука, 1970)
2. Сивухин Д В *Общий курс физики* Т. 3 *Электричество* (М.: Наука, 1977)
3. Матвеев А Н *Электричество и магнетизм* (М.: Высшая школа, 1983)
4. Максвелл Д К *Трактат об электричестве и магнетизме* Т. 1 (М.: Наука, 1989) Гл. 4, 6
5. Рэлей Д В *Теория звука* Т. 2 (М.: ГИТТЛ, 1955)
6. Полиа Г, Сеге Г *Изопериметрические неравенства в математической физике* (М.: Физматгиз, 1962)
7. Казанцев В П *Изв. вузов. Сер. Физ.* (8) 96 (1984)
8. Казанцев В П *Изв. вузов. Сер. Физ.* (7) 70 (1987)
9. Казанцев В П *Докл. РАН* **361** 469 (1998)
10. Казанцев В П *ТМФ* **119** 441 (1999)
11. Казанцев В П *Докл. РАН* **369** 617 (1999)
12. Казанцев В П *Изв. вузов. Сер. Физ.* (10) 66 (1999)
13. Казанцев В П *Изв. вузов. Сер. Физ.* (10) 53 (2000)
14. Казанцев В П *Докл. РАН* **373** 29 (2000)
15. Кюркчан А Г, Стернин Б Ю, Шаталов В Е *УФН* **166** 1285 (1996)

An example illustrating the variational approach to problems in electrostatics

V.P. Kazantsev
Krasnoyarsk State University, Physics Department
Svobodnyĭ prosp. 79, 660041 Krasnoyarsk, Russian Federation
Tel. (7-3912) 44-56 03. Fax (7-3912) 44-87 81
E-mail: zolotov@krasu.ru

The application of the variational method to electrostatic problems is illustrated using the earth resistance as an example.

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Cv

Bibliography — 15 references

Received 11 May 2001, revised 11 November 2001