

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Переходное излучение в случайно-неоднородных средах

К.Ю. Платонов, Г.Д. Флейшман

*В настоящем обзоре анализируется излучение среды со случайными неоднородностями, возмущаемой быстрыми частицами (т.е. поляризационное тормозное излучение, если неоднородностями являются термодинамически равновесные тепловые флуктуации или переходное излучение, если неоднородности среды надтепловые), при учете всех существенных в природных условиях факторов. Последовательно рассматривается влияние магнитного поля (как на движение быстрых частиц, так и на дисперсию фоновой плазмы), роль многократного рассеяния быстрых частиц в среде, различные резонансные эффекты, возникающие, когда наряду с переходным излучением выполнены условия черенковской (или циклотронной) генерации тех или иных собственных мод плазмы. Учитывается наличие ансамбля быстрых частиц (с реалистическим распределением по импульсам и углам) при вычислении как мощности излучения, так и коэффициентов самопоглощения (или усиления) переходного излучения. В качестве иллюстрации возможных приложений теории переходного излучения, изложенной в статье, приведены примеры ее использования в астрофизических условиях. Показано, что переходное излучение играет важную роль в формировании радиоизлучения Солнца, планет (включая Землю), межпланетной и межзвездной среды. Обсуждаются возможные будущие приложения переходного излучения (в том числе, мазерного).*

PACS numbers: 41.60. – m, 52.35.Hr, 95.30.Gv

## Содержание

## 1. Введение (241).

1.1. Классификация механизмов излучения быстрых частиц в среде. 1.2. Эффекты когерентности в электромагнитном излучении быстрых частиц в среде.

## 2. Переходное излучение релятивистских частиц в магнитоактивной плазме со случайными неоднородностями (245).

2.1. Теория переходного излучения, генерируемого частицей, движущейся по кривой. 2.2. Подавление переходного излучения магнитным полем. 2.3. Влияние многократного рассеяния на переходное излучение. 2.4. Переходное излучение в гиротропной плазме.

## 3. Переходное излучение частиц произвольной энергии (261).

3.1. Переходное излучение в изотропной плазме. 3.2. Резонансное переходное излучение. 3.3. Резонансное переходное излучение в магнитном поле. 3.4. Реабсорбция переходного излучения. 3.5. Переходное мазерное излучение.

## 4. Поляризационное тормозное излучение (277).

4.1. Микроскопическая теория поляризационного тормозного излучения быстрых частиц в равновесной плазме. 4.2. Резонансное поляризационное тормозное излучение. 4.3. Поляризационное тормозное излучение заряженных частиц при наличии эффекта Вавилова – Черенкова. 4.4. Поляризация переходного тормозного излучения в слабом магнитном поле. 4.5. Влияние внешнего магнитного поля на спектры поляризационного тормозного излучения. 4.6. Поляризационное тормозное излучение в сильном магнитном поле.

## 5. Астрофизические приложения теории переходного излучения (289).

5.1. Генерация переходного излучения в межзвездной среде. 5.2. Оценка интенсивности переходного излучения в солнечной короне. 5.3. Резонансное переходное излучение в солнечных вспышках. 5.4. Генерация резонансного переходного излучения в ионосфере Земли. 5.5. Будущие приложения теории резонансного переходного излучения к космическим плазмам.

## 6. Заключение (298).

## Список литературы (299).

К.Ю. Платонов. Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 29,  
Российская Федерация  
Тел. (812) 552-65-01

E-mail: platonov@quark.stu.neva.ru

Г.Д. Флейшман. Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН  
194021 Санкт-Петербург, ул. Политехническая 26,  
Российская Федерация  
Тел. (812) 247-93-68. Факс (812) 247-10-17  
E-mail: gregory@sun.ioffe.rssi.ru

Статья поступила 9 февраля 2001 г.,  
после доработки 15 сентября 2001 г.

## 1. Введение

Точно так же, как когда-то казалось само собой разумеющимся, что "равномерно движущаяся частица не излучает", сегодня представляется самоочевидным, что излучает любая движущаяся частица. Дело в том, что частица не излучала бы лишь в случае движения в пустом пространстве без внешних полей. В реальных условиях движение заряженных частиц происходит в среде и при наличии внешних полей. Более того, чаще всего оказываются выполнены условия работы сразу нескольких элементарных механизмов электромагнитного излуче-

ния, что может усложнить не только анализ экспериментальных данных, но и интерпретацию излучений естественного происхождения (например, в астрофизике).

В настоящем обзоре основное внимание уделено генерации переходного излучения быстрыми частицами, движущимися в средах со случайными неоднородностями — ситуация, часто реализующаяся в природных условиях.

Отметим, что разные авторы вкладывают в термин "переходное излучение" не одинаковый смысл. Одни считают переходным лишь излучение, возникающее на резкой границе двух сред (переходное излучение в узком смысле), рассматривая иные родственные типы излучений (например, на системе резких границ или в периодической среде) как самостоятельные механизмы. Другие считают переходным любое излучение частицы, движущейся в среде (или вблизи нее) с постоянной скоростью, за исключением излучения Вавилова – Черенкова (об излучении равномерно движущихся частиц см. статьи [1] и ссылки в них).

В связи с этим содержательной части данной обзорной статьи уместно было бы предпослать формальное определение понятия "переходное излучение". Оказывается, однако, что дать точное (и в то же время краткое) определение тому кругу явлений, который мы называем переходным излучением, довольно сложно. В разделах 1.1 и 1.2 подробно поясняется, какие именно процессы мы относим к переходному излучению. Здесь же дадим следующее определение.

*Переходным излучением при движении источника в среде (вблизи среды) мы называем ту часть излучения, которая не обращается в нуль в пределе равномерного прямолинейного движения источника и, наоборот, обращается в нуль в пределе однородной (на любых пространственных и временных масштабах) среды.*

Такое определение представляется нам наиболее общим, поскольку охватывает как переходное излучение на отдельной границе [2], так и дифракционное [3], резонансное [4], поляризационное [5] и т.п. излучения. В частных случаях наряду с понятием "переходное излучение" мы будем использовать и другие термины (например, поляризационное тормозное излучение), если эти термины являются устоявшимися и общепринятыми для определенного круга явлений.

### 1.1. Классификация механизмов излучения быстрых частиц в среде

Для построения физической классификации механизмов излучения чрезвычайно удобным оказывается понятие об элементарных (микроскопических) механизмах излучения, т.е. о наиболее простых радиационных процессах.

Во избежание недоразумений заметим, что понятие элементарного механизма излучения является физической идеализацией, которая описывает реальные процессы излучения лишь приближенно (хотя иногда и с очень высокой точностью). При движении быстрой частицы в среде излучение формируется в результате взаимодействия обеих компонент динамической системы — частицы и среды. Далеко не всегда общее излучение этой динамической системы можно строго разделить на две составляющие — излучение частицы и излучение среды (по меньшей мере, такое разделение оказывается неоднозначным).

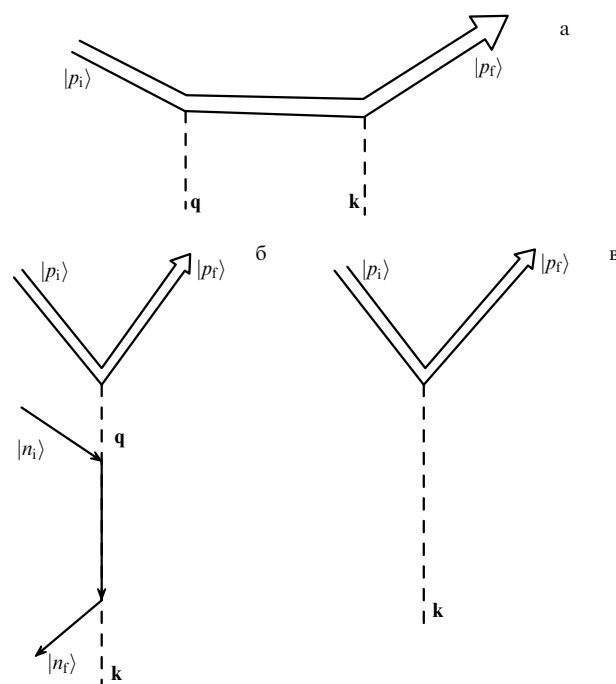


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана, отвечающие различным процессам излучения в среде: (а) тормозное излучение, (б) поляризационное тормозное излучение, (в) излучение Вавилова – Черенкова.

Тем не менее представление о двух каналах излучения указанной системы, т.е. *собственном излучении* быстрой частицы и *излучении среды*, возбуждаемой этой быстрой частицей, является очень плодотворным и имеет широкую область применимости.

Наглядное представление об этих двух каналах можно получить, рассматривая соответствующие диаграммы Фейнмана. При *собственном излучении* (рис. 1а) быстрая частица обменивается со средой (и/или внешним полем) виртуальным фотоном с импульсом  $q$  и испускает квант с импульсом  $k$ . Важно отметить, что под испущенным квантом мы понимаем "одетый" квант с законом дисперсии  $\omega = \omega(k)$ , характерным для данной среды.

В зависимости от природы внешнего поля, воздействующего на частицу, выделяют различные типы *собственного излучения*. Излучение частицы, движущейся по винтовой линии в магнитном поле, называется *магнитотормозным*. Если частица нерелятивистская, то соответствующее излучение называют *циклотронным*, а если ультрарелятивистская — то *синхротронным*. Излучение частиц умеренно релятивистских энергий иногда называют *гиротрихотронным*, особенно в англоязычной литературе.

Излучение частицы, движущейся в кулоновском поле, называется *тормозным*. Тот же термин употребляется и для излучения, возникающего при торможении частицы в среде, т.е. при движении в электрическом поле, создаваемом огромным числом кулоновских центров.

При *излучении среды* (рис. 1б) быстрая частица и среда также обмениваются виртуальным фотоном с импульсом  $q$ , но в данном случае фотоны испускаются электронами среды. Поэтому для вычисления соответствующего излучения учет степеней свободы среды обязателен. Разумеется, излучение среды может возникать и в отсутствие внешних быстрых частиц. В настоящем обзоре рассматриваются только те типы излучения среды,

которые возникают под действием быстрой частицы. Такие типы излучения мы будем называть переходным излучением в широком смысле.

Понимаемое таким образом переходное излучение разделяется в литературе на несколько подклассов. Например, при движении частицы вблизи границы экрана или через отверстие возникает "дифракционное" излучение, при движении в среде с периодически меняющейся диэлектрической проницаемостью — "резонансное" излучение и т.д. Объединяет все эти случаи то, что физической причиной электромагнитного излучения являются неоднородности среды.

Существует еще один тип излучения, излучение Вавилова — Черенкова (ИВЧ), который, казалось бы, не укладывается в приведенную здесь схему разделения излучения на собственное и излучение среды, поскольку отсутствует этап обмена виртуальным фотоном с импульсом  $\mathbf{q}$  между частицей и средой (рис. 1в). Формальная электродинамика позволяет вычислить интенсивность излучения частицы, движущейся прямолинейно и равномерно. Эта интенсивность содержит множитель  $\delta[\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}]$  как в вакууме, так и в среде. Очевидно, что условием отличия от нуля интенсивности излучения является равенство  $\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}$ . Оно может выполняться лишь для частиц, скорость которых превышает фазовую скорость излучаемых волн, т.е. ИВЧ представляет собой пороговый эффект.

Фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме равна скорости света. Поэтому ИВЧ в вакууме возникает лишь для (гипотетических) сверхсветовых частиц. Очевидно, что в таком случае ИВЧ является собственным излучением сверхсветовой частицы (поскольку при отсутствии среды все излучение частицы — собственное). В частности, энергия фотона черпается из энергии быстрой частицы (что справедливо и для частиц бесконечно большой массы, когда соответствующая убыль энергии не сопровождается изменением закона движения быстрой частицы).

Поместим ту же частицу в среду с показателем преломления, большим единицы. Эффект излучения при этом сохранится, но его интенсивность изменится из-за изменения закона дисперсии волн  $\omega(\mathbf{k})$ . Важно, что изменится и порог эффекта, так как фазовая скорость волн в рассматриваемой среде меньше скорости света в вакууме и равенство  $\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}$  может быть теперь выполнено и для обычных (досветовых) частиц.

Такой подход позволяет классифицировать ИВЧ как собственное излучение частицы, а не как излучение среды (что отмечалось еще в книге Франка [6], с. 56; см. также [7, 8]). Среда лишь модифицирует (перенормирует) вакуумное поле частицы таким образом, что для досветовых частиц вместо нулевой интенсивности излучения в вакууме возникает ненулевая интенсивность в среде. Разумеется, сама эта перенормировка вызывается токами поляризации среды, поэтому для досветовых частиц наличие среды существенно для генерации ИВЧ.

Ситуация здесь совершенно аналогична генерации иных типов собственного излучения в среде, например, синхротронного (которое мы относим к собственному излучению частицы как в вакууме, так и в среде). Известно, что синхротронное излучение в среде на низких частотах сильно ослаблено по сравнению с тем же излучением в вакууме. Это отличие полностью определяется отличием закона дисперсии волн в среде

от вакуумного, которое, в свою очередь, обусловлено токами поляризации среды.

Поэтому можно было бы говорить, что синхротронное излучение в среде есть когерентная сумма полей излучения тока частицы и тока поляризации среды. Вычисления, основанные на таком подходе (т.е. подсчет отдельно полей частицы и среды, нахождение их суммы с учетом когерентности и т.д.), значительно более громоздки и менее удобны, чем если с самого начала учесть известный закон дисперсии волн в среде. Поэтому всегда в литературе синхротронное излучение рассматривается как собственное излучение частицы, вращающейся в магнитном поле. При этом важно понимать, что физической причиной модификации этого излучения в среде является поляризация среды.

Точно так же (и в том же смысле) ИВЧ — это собственное излучение быстрой частицы, движущейся равномерно и прямолинейно. Физической причиной изменения интенсивности этого излучения в среде (по сравнению с вакуумом) является поляризация среды. Это изменение носит особенно яркий характер для досветовых частиц, излучение которых в вакууме строго равно нулю, а в среде — отлично от нуля.

Отметим также, что и при синхротронном излучении, и при ИВЧ импульс среде не передается и ее состояние не меняется, и в этом смысле среда играет "пассивную" роль. При переходном же излучении среда получает от быстрой частицы отличный от нуля импульс, в чем и состоит фундаментальное отличие переходного излучения от ИВЧ.

## 1.2. Эффекты когерентности в электромагнитном излучении быстрых частиц в среде

Поскольку эффекты когерентности очень важны при генерации переходного излучения, остановимся подробнее на механизмах когерентного излучения в среде. Вообще говоря, когерентность может возникнуть тогда, когда в излучении принимает участие много частиц.

Известно, что если интенсивность излучения пропорциональна числу частиц, то излучение некогерентно, а если она превышает эту величину, то когерентно. Обратим внимание на то, что при излучении быстрых частиц в среде мы имеем дело с различными группами частиц: быстрые частицы, фоновые частицы, электроны в атоме (или дебаевской сфере), частицы в объеме когерентности и т.д. Поэтому одно и то же излучение может быть когерентным относительно одной группы частиц и некогерентным по отношению к другой группе частиц.

Рассмотрим сначала для простоты идеализированный случай, когда в среде движется одна быстрая частица. В определенных условиях и собственное излучение частицы, и излучение среды может быть когерентным по отношению к частицам среды.

Хорошо известно, что релятивистский электрон, движущийся в монокристалле, генерирует когерентное тормозное излучение (КТИ), причем когерентность связана в данном случае с упорядоченностью расположения атомов [4, 9, 10]. В идеальном бесконечном монокристалле существует так называемый дальний порядок, т.е. положения атомов строго коррелированы на произвольно больших расстояниях.

В плазме и некристаллических конденсированных средах также возможны ситуации, когда имеется упоря-

доченность в положениях частиц на макроскопических расстояниях [11, 12]. Такая упорядоченность может осуществляться, если в среде имеются случайные неоднородности (турбулентность в плазме), распространяются акустические волны или искусственно созданы структуры (стопка пластинок из различных материалов). В этих случаях, однако, корреляция имеет иной, чем в монокристалле, статистический характер, а упорядоченность частиц является локальной (в пределах соответствующей длины корреляции).

Оказывается, что макроскопические неоднородности среды могут существенно повлиять на формирование тормозного излучения релятивистскими частицами и привести к тому, что кроме известного некогерентного излучения Бете–Гайтлера появится добавочное *когерентное тормозное излучение*. Это обстоятельство имеет место несмотря на то что длина излучаемой волны мала по сравнению с масштабами неоднородностей среды и связано с малостью продольного импульса, передаваемого среде излучающей релятивистской частицей. В результате излучение частоты  $\omega$  формируется на длине порядка

$$l_c \approx \frac{2c\gamma^2/\omega}{1 + \omega_p^2\gamma^2/\omega^2} \quad (1)$$

( $\gamma$  — лоренц-фактор частицы,  $\omega_p$  — плазменная частота), которая может достигать макроскопических значений. При наличии в среде неоднородностей плотности такого же или меньшего масштаба, в которых положения электронов и ядер коррелированы, и возникает дополнительный вклад в тормозное излучение релятивистских частиц — КТИ.

Излучение среды также может быть как когерентным, так и некогерентным. Некогерентное излучение возникает тогда, когда все электроны среды излучают независимо друг от друга. В термодинамически равновесной среде это имеет место на достаточно высоких частотах,  $\omega > c/R$  (где  $R$  — радиус атома или дебаевский радиус экранирования), поскольку здесь зона формирования излучения порядка длины волны  $c/\omega$ , а длина корреляции в среде —  $R$ . На меньших частотах,  $\omega < c/R$ , все электроны атома (или дебаевской сферы в плазме) излучают когерентно, соответственно, интенсивность такого излучения пропорциональна квадрату числа электронов в атоме. В частично ионизованной плазме имеется два характерных размера, на которых положения (и движение) электронов коррелированы — радиус атома  $R_a$  и радиус дебаевской сферы  $R_D$ . Соответственно, при  $c/R_D < \omega < c/R_a$  когерентно будут излучать электроны, входящие в состав атома, а при  $\omega < c/R_D$  — электроны дебаевской сферы, которых может быть гораздо больше.

Для излучения термодинамически равновесной среды (либо отдельных атомов) под действием быстрой частицы в литературе применяются различные наименования: динамическое тормозное излучение, переходное тормозное излучение, поляризационное тормозное излучение [5]. Первое из них исторически возникло при рассмотрении атомных сред (или отдельных атомов), второе — при рассмотрении аналогичных процессов в плазме. Третье же — своего рода "объединительный" термин, подчеркивающий принципиально важную роль динамической поляризуемости среды во всех радиационных процессах этого типа.

На наш взгляд, слово "тормозное" в указанных названиях излишне, поскольку наличие или отсутствие торможения быстрой частицы в среде совершенно несущественно для данного механизма излучения. Такое излучение логичнее было бы назвать просто "поляризационным" (или переходным на термодинамически равновесных неоднородностях). Тем не менее в данном обзоре мы будем придерживаться сложившейся терминологии.

Наконец, если в среде имеются макроскопические неоднородности масштаба  $l$  (иначе говоря, если положения частиц среды коррелированы на макроскопических масштабах), то при  $|\mathbf{q} - \mathbf{k}| \sim 2\pi/l^{-1}$  возникает еще один когерентный эффект, когда все электроны среды, находящиеся в объеме когерентности (существенно превышающем объем дебаевской сферы), излучают когерентно. Такой тип излучения мы называем переходным излучением в среде с неоднородностями (или, для краткости, просто переходным излучением).

Продвигаясь далее от модельных представлений об элементарных механизмах излучения к реальным условиям, в которых происходит испускание электромагнитных волн, заметим, что обычно имеется не одна быстрая частица, а их ансамбль. Естественно, что при этом модифицируются (вследствие интегрирования по спектру быстрых частиц) как собственное излучение быстрых частиц, так и излучение среды. Вместе с тем возникают и новые (коллективные) эффекты.

Если частицы сгруппированы в сгустки с масштабом порядка длины излучаемой волны, то результирующее излучение будет пропорционально квадрату (а не первой степени) числа быстрых частиц в сгустке. Особый интерес представляет случай, когда такая группировка возникает под действием самого генерируемого в среде излучения, приводя к усилению излучения (мазерному эффекту). Затравочное излучение при этом может генерироваться различными механизмами, соответственно, различают *циклотронный мазерный, переходный мазерный, плазменный* и т.д. механизмы излучения.

Остановимся кратко на способах теоретического описания переходного излучения. Поскольку переходное излучение есть излучение электронов среды, то его можно вычислить, определив (например, с использованием кинетического уравнения) ток среды, зависящий от поля быстрой частицы и учитывающий реальное пространственное распределение частиц в среде. Иллюстрацией такого подхода служат разделы 2 и 3, где подробно исследуется переходное излучение в средах со случайными нетепловыми неоднородностями.

Тот же самый процесс можно трактовать как рассеяние квазистационарного поля быстрой частицы на неоднородностях среды. При данном подходе прослеживается тесная связь между процессами рассеяния света в среде и переходным излучением. Использование аналогий с рассеянием света и применение соответствующего формализма оказывается особенно удобным при исследовании излучения в термодинамически равновесной среде (поляризационного тормозного излучения, раздел 4).

Наконец, формулы переходного излучения в среде с макроскопическими неоднородностями можно получить из формул поляризационного тормозного излучения, отнесенного к одному атому или иону среды, путем прямого суммирования полей излучения, возведения в

квадрат и последующего усреднения [11]. При таком подходе особенно ярко проявляется когерентный характер переходного излучения, так как основной вклад в его интенсивность дают недиагональные члены возникающей двойной суммы ( $i \neq j$ ) и результат выражается через парный коррелятор положений частиц среды. При отсутствии макроскопических неоднородностей соответствующий вклад обращается в нуль.

В литературе обсуждается еще один (по меньшей мере) способ вычисления переходного излучения — метод реакции среднего поля [13–15], основанный на применении тензора "эффективной" диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной плазмы [16–18]. Этот метод применим лишь к крайне мелкомасштабным неоднородностям среды [19], с масштабом  $l$ , много меньшим зоны формирования излучения  $l_c$  (см. формулу (1)). Мы не будем его использовать в данном обзоре, предполагая наличие в среде протяженного спектра неоднородностей с масштабами  $l$  как меньше и порядка, так и больше  $l_c$ .

В работах [20, 21] с использованием тензора эффективной диэлектрической проницаемости рассмотрено переходное излучение частиц, движущихся в плазме с сильными неоднородностями, которые моделировались параллельными узкими бесконечно длинными цилиндрами ( $a \ll l_c$ , где  $a$  — радиус цилиндра). Другие аспекты переходного излучения в средах со случайными неоднородностями обсуждались в статьях [22–25] (о переходном излучении звуковых волн см., например, [26, 27]) и монографиях [4, 5, 10, 28] (см. также ссылки в них).

Структура настоящего обзора следующая. В разделе 2 рассматривается излучение релятивистских частиц. Соответствующая теория применима к любым средам, поскольку на высоких частотах диэлектрическая проницаемость любой среды описывается плазменной формулой. В разделе 3 исследуется переходное излучение частиц произвольной энергии в плазме, в том числе и вблизи ее собственных частот. Раздел 4 посвящен переходному излучению в термодинамически равновесных средах, а в разделе 5 приведены примеры приложения теории к различным астрофизическим условиям.

## 2. Переходное излучение релятивистских частиц в магнитоактивной плазме со случайными неоднородностями

### 2.1. Теория переходного излучения, генерируемого частицей, движущейся по кривой

Рассмотрим вопрос о генерации переходного излучения частицей, движущейся по криволинейной траектории [19]. Переходное излучение (ПИ) формируется на некоторой конечной длине, называемой длиной когерентности, или зоной формирования излучения, которая в плазме для прямолинейно движущейся частицы описывается формулой (1). Основная доля энергии, излучаемой на частоте  $\omega$ , испускается в узкий конус вдоль скорости частицы с углом раствора

$$\theta_c \approx \left( \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

При наличии в плазме неоднородностей плотности с широким спектром излучения на частоте  $\omega$  возникает

вследствие взаимодействия поля релятивистской частицы с теми гармониками, для которых  $k^{-1} \sim l_c(\omega)$ . Пусть кривизна траектории такова, что направление скорости частицы изменяется на угол  $\theta_c$  на некоторой длине  $l' \ll l_c(\omega)$ . Тогда узкая направленность излучения приведет к тому, что спектр испускаемых переходных квантов будет формироваться на малой длине  $l'$ . Это, в свою очередь, означает, что неоднородности с масштабами  $k^{-1} \sim l_c(\omega) \gg l'$ , с которыми связано ПИ на частоте  $\omega$ , будут менее эффективно взаимодействовать с полем релятивистской частицы и соответствующее излучение окажется ослабленным.

Перейдем к получению общих формул, описывающих переходное излучение релятивистской частицы, движущейся по произвольной траектории. Если известна точная функция Грина, описывающая распространение фотона в данной среде, то энергия излучения, связанного с током внешней релятивистской частицы  $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^Q$  есть [10]

$$\mathcal{E}_{\mathbf{n}, \omega} = (2\pi)^4 \int \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{Q*} \cdot \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} k^2 dk, \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$  — поле тока  $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^Q$  в среде. При этом в выражении (3) содержатся все типы излучения, включая и не связанные с переменной поляризацией среды, а возникающие из-за кривизны траектории частицы. В некоторых случаях, в частности, в периодической среде при рассмотрении резонансного излучения [4], удается приближенно (в приближении геометрической оптики) вычислить функцию Грина неоднородной среды и воспользоваться уравнением (3). Поскольку для сред со случайными неоднородностями плотности точная функция Грина неизвестна, необходимо использовать процедуру приближенного вычисления переходного излучения, основанную, например, на теории возмущений.

Представим электрическое поле в виде ряда по степеням амплитуды неоднородностей плотности плазмы

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} + \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} \dots, \quad (4)$$

которому соответствует разложение тока в среде

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}} = \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} + \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} \dots \quad (5)$$

Тогда выражение для полной излучаемой энергии (3) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{n}, \omega} = (2\pi)^4 \operatorname{Re} \int & (\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{Q*} \cdot \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} + \langle \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{*(1)} \cdot \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} \rangle + \\ & + \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{Q*} \cdot \langle \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} \rangle + \langle \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{*(2)} \cdot \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} \rangle) k^2 dk. \end{aligned} \quad (6)$$

Первое слагаемое в (6) описывает излучение, связанное с кривизной траектории частицы, либо излучение Вавилова–Черенкова, а переходное излучение содержится в квадратичных по амплитуде неоднородностей среды  $\delta N_{\omega, \mathbf{k}}$  членах. Угловыми скобками обозначено усреднение по спектру неоднородностей, при котором линейные по  $\delta N_{\omega, \mathbf{k}}$  члены обращаются в нуль. Поскольку  $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{Q*}$  и  $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)}$  не содержат  $\delta N_{\omega, \mathbf{k}}$ , то в (6) они вынесены из-под знака усреднения.

Перейдем теперь к нахождению полей и токов, входящих в (6). Исключив магнитное поле из двух векторных уравнений Максвелла [28], получим связь

между поперечным электрическим полем и создающим его током:

$$(c^2 k^2 - \omega^2) E_{\omega, \mathbf{k}}^i = 4\pi i \omega \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) j_{\omega, \mathbf{k}}^j. \quad (7)$$

Здесь мы исходим из микроскопических уравнений электромагнитного поля, а ток  $j_{\omega, \mathbf{k}}^j$  включает в себя как ток частицы, так и ток, связанный с движением частиц среды, в частности, обычный ток поляризации, который описывается диэлектрической проницаемостью плазмы. Подставляя (4), (5) в (7), получим следующее уравнение:

$$(c^2 k^2 - \omega^2) (E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(0)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(2)} + \dots) = 4\pi i \omega \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) (j_{\omega, \mathbf{k}}^{j(0)} + j_{\omega, \mathbf{k}}^{j(1)} + j_{\omega, \mathbf{k}}^{j(2)} + \dots), \quad (8)$$

в котором нужно связать между собой поля и токи одного порядка. Здесь  $E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(0)}$  определяется током  $j_{\omega, \mathbf{k}}^{j(0)}$ , поле  $E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(1)}$  — током  $j_{\omega, \mathbf{k}}^{j(1)}$ , который, в свою очередь, выражается из кинетического уравнения через поле  $E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(0)}$ , и т.д. Таким образом, мы имеем замкнутую процедуру, позволяющую отыскать любые поправки к полям и токам.

Важно заметить, что при этом в знаменателе всегда оказывается степень разности  $c^2 k^2 - \omega^2$  или  $c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon$  (при учете тока поляризации невозмущенной плазмы). Для волн, распространяющихся в среде, т.е. обычных поперечных электромагнитных волн, эта разность обращается в нуль, что приводит к расходящимся выражениям для  $E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(1)}$ ,  $E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(2)}$  и т.д. Поэтому, для того чтобы процедура теории возмущений была законной, необходимо применять ее только для квазистационарной (виртуальной) части поля, для которой  $c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon$  не обращается в нуль. При исследовании переходного излучения прямолинейно движущейся релятивистской частицы подобной трудности не возникало [28], поскольку все поле такой частицы квазистационарное (за исключением тех случаев, когда выполнено условие излучения Вавилова — Черенкова, см. раздел 4.3). Если же частица движется с ускорением, то сделанное замечание оказывается существенным, поскольку теперь поле частицы состоит из двух частей — поля излучения и собственного виртуального поля, к которому и применима теория возмущений.

Для того чтобы найти токи, возникающие в плазме со случайными неоднородностями при движении в ней релятивистской частицы, воспользуемся кинетическим уравнением [28]:

$$f_{\omega, \mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \frac{e}{i\omega} \int \mathbf{E}_{\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_{\omega', \mathbf{k}'}(\mathbf{p}) d\omega' d\mathbf{k}', \quad (9)$$

где  $e$  — заряд электрона. Решая это уравнение по теории возмущений и учитывая разложение электрического поля (4), найдем поправки к невозмущенной функции распределения:

$$f_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) \delta(\omega) \delta(\mathbf{k}), \quad (10)$$

$$f_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{e \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)}}{i\omega} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} + \delta f_{\omega, \mathbf{k}}(\mathbf{p}) \text{ и т.д.}, \quad (11)$$

где  $f(\mathbf{p})$  нормирована на концентрацию частиц  $N$ , а добавка  $\delta f_{\omega, \mathbf{k}}$  описывает неоднородности электронной

плотности плазмы:

$$\int f(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = N_0, \quad \int \delta f_{\omega, \mathbf{k}}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \delta N_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (12)$$

Выражения для  $f_{\omega, \mathbf{k}}^{(i)}$  позволяют вычислить интересующие нас токи плазмы согласно формуле

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}} = e \int \mathbf{v} f_{\omega, \mathbf{k}}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (13)$$

Вычисляя соответствующие интегралы, найдем следующие выражения для токов в плазме:

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} = \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^0 + \frac{ie^2 N}{m\omega} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} [\Theta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \Theta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} = & \frac{ie^2 N}{m\omega} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} + \frac{ie^2}{m\omega} \int \mathbf{E}_{\omega-\omega_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{(0)} \delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \times \\ & \times \Theta[\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}] d\omega_1 d\mathbf{k}_1 + \\ & + \frac{ie^2}{m\omega} \int \mathbf{E}_{\omega-\omega_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{(0)} \delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \Theta[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v} - (\omega - \omega_1)] d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} = \frac{ie^2 N}{m\omega} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} + \frac{ie^2}{m\omega} \int \mathbf{E}_{\omega-\omega_2, \mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{(1)} \delta N_{\omega_2, \mathbf{k}_2} d\omega_2 d\mathbf{k}_2. \quad (16)$$

В выражении (14) электрическое поле разделено на две части:  $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} \Theta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$  и  $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} \Theta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)$ , где  $\Theta(x)$  — тета-функция Хевисайда,  $m$  — масса электрона. В силу того, что  $\Theta(x) + \Theta(-x) \equiv 1$ , это разделение не нарушает справедливости (14) и в то же время позволяет по отдельности учитывать в (8) поле излучения  $\Theta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$  и квазистационарное поле  $\Theta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)$  частицы.

В статье [19] подробно проанализированы все четыре слагаемых в (6). Показано, что два последних слагаемых в случайно-неоднородной среде обращаются в нуль, а первое представляет собой слегка модифицированное наличием неоднородностей плазмы собственное излучение релятивистской частицы. Интересующее же нас переходное излучение содержится во втором слагаемом (таким образом, в рамках теории возмущений собственное и переходное излучения разделяются). Это значит, что мы можем ограничиться отысканием первых поправок к полю и току в среде. Оставляя только указанные члены, перепишем (8) в виде

$$\begin{aligned} (c^2 k^2 - \omega^2) (E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(0)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{i(1)}) = & 4\pi i \omega \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \times \\ & \times \left\{ j_{\omega, \mathbf{k}}^j + \frac{ie^2 N}{m\omega} (E_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)j} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)j}) + \right. \\ & + \frac{ie^2}{m\omega} \int E_{\omega-\omega_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{(0)j} \delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \times \\ & \times \Theta[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v} - (\omega - \omega_1)] d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь члены  $(ie^2 N/m\omega) E_{\omega, \mathbf{k}}^j$ , линейные по электрическому полю, описывают поляризацию невозмущенной плазмы и приводят к изменению закона дисперсии волн в среде. Действительно, если перенести указанные слагаемые в левую часть (17), то вместо  $(c^2 k^2 - \omega^2)$  получим  $(c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon)$ , где

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (18)$$

В магнитоактивной плазме это выражение справедливо при условии

$$\frac{\omega}{\omega_{Be}} \gg 1, \quad (19)$$

которое при рассмотрении роли кривизны траектории частицы будем считать выполненным ( $\omega_{Be}$  — электронная гиромагнитная частота); эффекты, связанные с изменением законов дисперсии собственных мод в гиротропной плазме, будут рассмотрены отдельно.

Теперь связь между полями и токами соответствующих порядков можно представить следующим образом:

$$E_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)i} = G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k}) j_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)j}, \quad (20)$$

$$E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)i} = G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k}) j_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)j}, \quad (21)$$

$$j_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)j} = \frac{ie^2}{m\omega} \int E_{\omega-\omega_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{(0)j} \delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \times \\ \times \Theta[(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v} - (\omega-\omega_1)] d\omega_1 d\mathbf{k}_1, \quad (22)$$

где

$$G_{ij}^t(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad (23)$$

— поперечная функция Грина в среде.

Проинтегрировав в (6) второй член по  $d\mathbf{k}$ , представим энергию переходного излучения в виде

$$\mathcal{E}_{\mathbf{n}, \omega}^{\text{tr}} = (2\pi)^6 \frac{\omega^2}{c^3} \langle |\mathbf{n} \times \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}|^2 \rangle, \quad (24)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении излучения, а ток  $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}$  определяется формулой (22). Электрическое поле  $E_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)i}$  связано посредством (20) с током релятивистской частицы  $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)}$ , который выражается через ее скорость  $\mathbf{v}(t)$  и траекторию  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} = Q \int \mathbf{v}(t) \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t) + i\omega t] \frac{dt}{(2\pi)^4}, \quad (25)$$

где  $Q$  — заряд релятивистской частицы.

Подставляя (25) и (23) в (20), затем (20) в (22), (22) в (24) и усредняя полученное выражение по случайным фазам неоднородностей

$$\langle \delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1} \delta N_{\omega_2, \mathbf{k}_2}^* \rangle = |\delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1}|^2 \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (26)$$

где  $|\delta N_{\omega_1, \mathbf{k}_1}|^2$  — спектр неоднородностей, найдем:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{n}, \omega}^{\text{tr}} = \frac{4Q^2 e^4}{m^2 c^3 \omega^2} \int_V d\mathbf{k}_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \times \\ \times [\mathbf{n} \times \mathbf{v}(t)] [\mathbf{n} \times \mathbf{v}(t+\tau)] \times \\ \times \frac{|\delta N_{\mathbf{k}_1}|^2 \exp\{i\omega\tau - i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)[\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)]\}}{[1 - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2 c^2 / \omega^2 \varepsilon(\omega)]^2}. \quad (27)$$

Здесь использовано предположение о том, что неоднородности являются квазистатическими,  $|\delta N_{\omega, \mathbf{k}}|^2 = |\delta N_{\mathbf{k}}|^2 \delta(\omega)$ , а знак  $V$  означает, что интегрирование по  $d\mathbf{k}_1$  должно проводиться по области параметров  $\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v} \leq 0$ , соответствующей квазистационарному полю частицы.

## 2.2. Подавление переходного излучения магнитным полем

Пусть кривизна траектории частицы вызвана внешним однородным магнитным полем  $\mathbf{B}$  [19, 29]. В этом случае  $l' = l_s = Mc^2/QB_{\perp} = c/\omega_{B_{\perp}}$ , где  $\omega_{B_{\perp}} = QB_{\perp}/Mc$  — гиро-частота частицы, а максимальное значение  $l_c(\omega)$  (1) достигается при  $\omega = \omega_p$ :  $l_c^{\text{макс}} = c\gamma/\omega_p$ . Поэтому условие  $l' \ll l_c$  в данном случае имеет вид

$$\gamma \gg \gamma^* = \frac{\omega_p}{\omega_{B_{\perp}}}. \quad (28)$$

Таким образом, кривизна траектории частицы в магнитном поле существенна при выполнении (28) и приводит в этой области параметров к подавлению ПИ.

Перейдем теперь к вычислению переходного излучения релятивистской частицы, движущейся по винтовой линии в плазме со случайными неоднородностями электронной концентрации. Для этого необходимо подставить в (27) известные выражения траектории  $\mathbf{r}(t)$  и скорости частицы  $\mathbf{v}(t)$  в магнитном поле [30]. Поскольку для ультрарелятивистской частицы зона формирования излучения значительно меньше ларморовского радиуса, аргументы тригонометрических функций в  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  оказываются малыми,  $\omega_{B_{\perp}} \tau / \gamma \ll 1$ . Это позволяет разложить синусы и косинусы в ряд по степеням малой величины  $\omega_{B_{\perp}} \tau / \gamma$ . Однако чтобы корректно учесть отличие траектории частицы от прямолинейной, нужно удержать следующие после линейных члены разложения, как это обычно делается при исследовании синхротронного излучения [31]:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{n}v \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + \boldsymbol{\theta}v, \quad \mathbf{v}(t+\tau) = \mathbf{v}(t) + v[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}] \tau, \quad (29)$$

$$\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)\tau - v[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}] \frac{\tau^2}{2} + v[\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\theta}] \frac{\tau^2}{2} - \\ - v[\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}]] \frac{\tau^3}{6}, \quad (30)$$

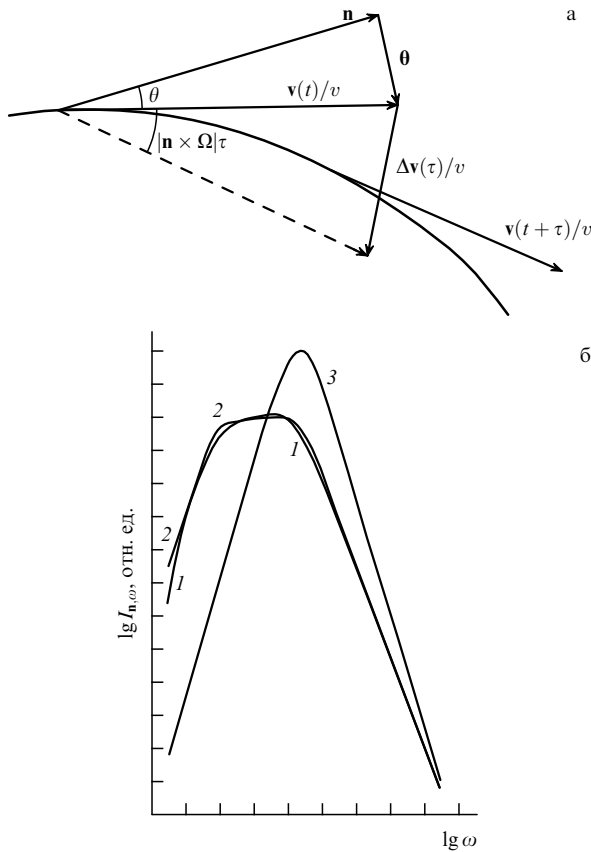
где  $\boldsymbol{\Omega} = Q\mathbf{B}/Mc\gamma$ , а двумерный вектор  $\boldsymbol{\theta}$  по величине равен углу между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}(t)$  (рис. 2а).

Подставив (29), (30) в (27), перейдем от полной излучаемой энергии к энергии излучения в единицу времени (интенсивности излучения), сняв внешний интеграл по  $dt$ :

$$I_{\omega}^{\text{tr}} = \frac{2\pi Q^2 e^4}{m^2 c^3} \int d\boldsymbol{\theta}' \int \frac{d\mu dk_1}{\mu^2} |\delta N_{\mathbf{k}_1}|^2 \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \times \\ \times ([\mathbf{n} \times \boldsymbol{\theta}']^2 + \boldsymbol{\theta}'[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}]\tau) \exp\left\{ i[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{v}]\tau - \right. \\ \left. - i\omega \boldsymbol{\theta}'[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}] \frac{\tau^2}{2} + i\omega[\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}]^2 \frac{\tau^3}{6} \right\}, \quad (31)$$

где  $\mu = \cos \vartheta = \mathbf{k}\mathbf{k}_1/kk_1$ .

Мы перешли в (31) к излучению в полный телесный угол  $I_{\omega}^{\text{tr}}$ , так как именно эта величина не зависит от времени. При рассмотрении излучения в фиксированном направлении мы имели бы дело с повторяющимися короткими импульсами излучения, как и в случае синхротронного излучения [31]. Чтобы проинтегрировать (31) по времени  $\tau$ , удобно произвести замену угловой переменной  $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta} + [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}]\tau$ . Поскольку интегрирование по углам может производиться в бесконечных пределах из-за быстрой сходимости подынтегральных выражений,



**Рис. 2.** (а) К определению векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{v}/v$ ,  $\Delta\mathbf{v}/v$  и углов  $\theta$  и  $|\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}|\tau$ . (б) Спектральное распределение переходного излучения в фиксированном направлении ( $\theta \sim \gamma^{-1}$ ) при наличии магнитного поля: 1 — результат численного расчета по формуле (36), 2 — асимптотические зависимости (43), (45), 3 — зависимость в отсутствие магнитного поля.

указанная замена не приведет к изменению пределов интегрирования по  $d\theta$ :

$$I_{\omega}^{\text{tr}} = \frac{2\pi Q^2 e^4}{m^2 c^3} \int d\theta \int \frac{d\mu dk_1}{\mu^2} |\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \times \\ \times \left( \theta^2 + 2\theta |\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}| \tau + \frac{3}{4} |\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}|^2 \tau^2 \right) \times \\ \times \exp \left[ \frac{i\omega\tau}{2} \left( \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \theta^2 + \frac{2\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega} \right) + i\omega \frac{\omega_p^2 \tau^3}{24\gamma^2} \right]. \quad (32)$$

Внутренний интеграл может быть выражен через функцию Эйри  $\operatorname{Ai}(\xi)$ . Выполнив замену переменной  $x = (\omega\omega_p^2/\gamma^2)^{1/3} \tau/2$  и учитывая, что  $\operatorname{Ai}''(\xi) = \xi \operatorname{Ai}(\xi)$ , а член с  $\operatorname{Ai}'(\xi)$  не дает вещественного вклада, находим (функция  $\operatorname{Ai}(\xi)$  нормирована на единицу):

$$I_{\omega}^{\text{tr}} = \frac{8\pi^2 Q^2 e^4}{\omega m^2 c^3} \left( \frac{\omega\gamma}{\omega_{B\perp}} \right)^{2/3} \int d\theta \int \frac{d\mu dk_1}{\mu^2} |\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2 \times \\ \times \left[ \theta^2 - 3 \left( \frac{\omega_{B\perp}}{\omega\gamma} \right)^{2/3} \xi \right] \operatorname{Ai}(\xi), \quad (33)$$

где

$$\xi = \left( \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \theta^2 + \frac{2\mathbf{k}_1 \mathbf{n} c}{\omega} \right) \left( \frac{\omega\gamma}{\omega_{B\perp}} \right)^{2/3}, \quad (34)$$

а интегрирование в (33) должно производиться по области параметров  $\xi \leq 0$ , что соответствует рассеянию квазистационарного поля частицы.

Для того чтобы продвинуться дальше в вычислении интенсивности переходного излучения, необходимо конкретизировать вид спектра неоднородностей  $|\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2$ . Будем считать, что этот спектр описывается степенной зависимостью

$$|\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2 = \frac{v-1}{4\pi} \frac{k_0^{v-1} \langle \Delta N^2 \rangle}{k_1^{v+2}}, \quad (35)$$

где  $L_0 = 2\pi/k_0$  — основной масштаб, а  $\langle \Delta N^2 \rangle$  — средний квадрат неоднородностей. Подставляя (35) в (33) и выписывая в явном виде пределы интегрирования с учетом  $\xi \leq 0$ , получим

$$I_{\omega}^{\text{tr}} = \frac{2\pi(v-1)Q^2 e^4 k_0^{v-1} \langle \Delta N^2 \rangle}{\omega m^2 c^3} \left( \frac{\omega\gamma}{\omega_{B\perp}} \right)^{2/3} \int d\theta \int_{k_{\min}}^{\infty} \frac{dk_1}{k_1^{v+2}} \times \\ \times \int_{-1}^{-k_{\min}/k_1} \frac{d\mu}{\mu^2} \left[ \theta^2 - 3 \left( \frac{\omega_{B\perp}}{\omega\gamma} \right)^{2/3} \xi \right] \operatorname{Ai}(\xi), \quad (36)$$

где

$$k_{\min}(\theta) = \frac{\omega}{2c} \left( \gamma^{-2} + \theta^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (37)$$

Прежде всего отметим, что выражение (36) допускает предельный переход к случаю равного нулю магнитного поля. Действительно, при  $\omega_{B\perp} \rightarrow 0$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ai}(a/b)}{b} = \delta(a) = \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}], \quad (38)$$

и интегралы в (36) по  $d\mu$  и  $dk_1$  легко вычисляются. Тогда, сняв внешний интеграл по  $d\theta$ , в согласии с [28] получим спектрально-угловую интенсивность переходного излучения прямолинейно движущейся частицы:

$$I_{\mathbf{n},\omega}^1 = \frac{8\pi(v-1)Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{v c m^2 \omega^3} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \times \\ \times \frac{\theta^2}{(\gamma^{-2} + \theta^2 + \omega_p^2/\omega^2)^{v+2}}. \quad (39)$$

Вернемся к анализу выражения (36). В случае криволинейного движения частицы снятие внешнего интеграла по  $d\theta$  не дает, строго говоря, интенсивности излучения в данном направлении  $\mathbf{n}$ . Это связано с тем, что теперь угол  $\theta$  отсчитывается от некоторого мгновенного значения скорости, тогда как излучение собирается с конечного (хотя и малого) участка траектории частицы, на котором направление ее скорости меняется. Такое существенное отличие связано с изменением свойств симметрии рассматриваемой системы: при движении частицы по винтовой линии задача перестает быть аксиально-симметричной относительно направления ее скорости. Тем не менее нам будет удобно опустить в (36) интеграл по  $d\theta$ , чтобы иметь возможность сравнивать получающиеся выражения с (39).

**Спектрально-угловое распределение ПИ.** Анализ выражения (36) в общем виде затруднителен, так как связан с необходимостью вычисления интегралов от комбинаций функции Эйри со степенными функциями в



конечных пределах. Тем не менее удается найти асимптотические зависимости, хорошо описывающие спектр излучения в отдельных интервалах частот.

Рассмотрим частоты, на которых

$$\gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \gg \left( \frac{\omega_{B\perp}}{\omega\gamma} \right)^{2/3}, \quad (40)$$

чему соответствуют интервалы

$$\omega \ll \omega_* = \omega_p \left( \frac{\omega_p \gamma}{\omega_{B\perp}} \right)^{1/2}, \quad (41)$$

$$\omega \gg \omega_{B\perp} \gamma^2. \quad (42)$$

В этом случае роль кривизны траектории частицы мала, и функция Эйри может быть заменена на  $\delta$ -функцию (38). Однако во втором члене в скобках (36) нужно учесть конечную ширину указанной функции, поскольку при  $\theta \rightarrow 0$  его вклад оказывается главным. Конечность ширины функции  $(\omega\gamma/\omega_{B\perp})^{2/3} \text{Ai}(\xi)$  приводит к тому, что  $\xi$  эффективно меняется в пределах  $-1 < \xi \leq 0$ . Поэтому для грубой оценки можно положить, например,  $\xi = -1/3$ , после чего находим

$$I_{n,\omega}^2 = \frac{8\pi(v-1)Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{v c m^2 \omega^3} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \times \frac{\theta^2 + (\omega_{B\perp}/\omega\gamma)^{2/3}}{(\gamma^{-2} + \theta^2 + \omega_p^2/\omega^2)^{v+2}}. \quad (43)$$

Это выражение отличается от (39) только дополнительным слагаемым  $(\omega_{B\perp}/\omega\gamma)^{2/3}$  в числителе, которое, как будет видно ниже, слабо изменяет интенсивность излучения в полный телесный угол при условии (41), (42).

В другом случае, когда  $\gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2 \ll (\omega_{B\perp}/\omega\gamma)^{2/3}$ , или

$$\omega_* \ll \omega \ll \omega_{B\perp} \gamma^2, \quad (44)$$

кривизна траектории существенна, аргумент функции Эйри эффективно оказывается малым:  $|\xi| \ll 1$  (это связано с быстрой сходимостью интеграла по  $dk_1$ ), что позволяет разложить  $\text{Ai}(\xi)$  в ряд и ограничиться первым членом разложения  $\text{Ai}(\xi) \approx \text{Ai}(0) = 1/[3^{2/3} \Gamma(2/3)]$ . Тогда интегрирование по  $d\mu$  и  $dk_1$  проводится без затруднений и дает

$$I_{n,\omega}^3 = \frac{24\pi(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle \text{Ai}(0)}{c m^2 \omega^3} \times \frac{(2k_0 c/\omega)^{v-1} (\omega\gamma/\omega_{B\perp})^{2/3}}{(\gamma^{-2} + \theta^2 + \omega_p^2/\omega^2)^{v+2}} \times \left[ 1 + \frac{v\theta^2}{3(\gamma^{-2} + \theta^2 + \omega_p^2/\omega^2)^{v+2}} \right]. \quad (45)$$

Важно заметить, что возможность замены функции Эйри  $\text{Ai}(\xi)$  на  $\text{Ai}(0)$  означает существенное изменение характера переходного излучения и, в частности, отсутствие резонансности при взаимодействии с неоднородностями, которая для прямолинейно движущейся частицы обеспечивалась  $\delta$ -функцией  $\delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v}]$ .

Из (45) видно, что интенсивность переходного излучения уменьшается при увеличении магнитного поля:

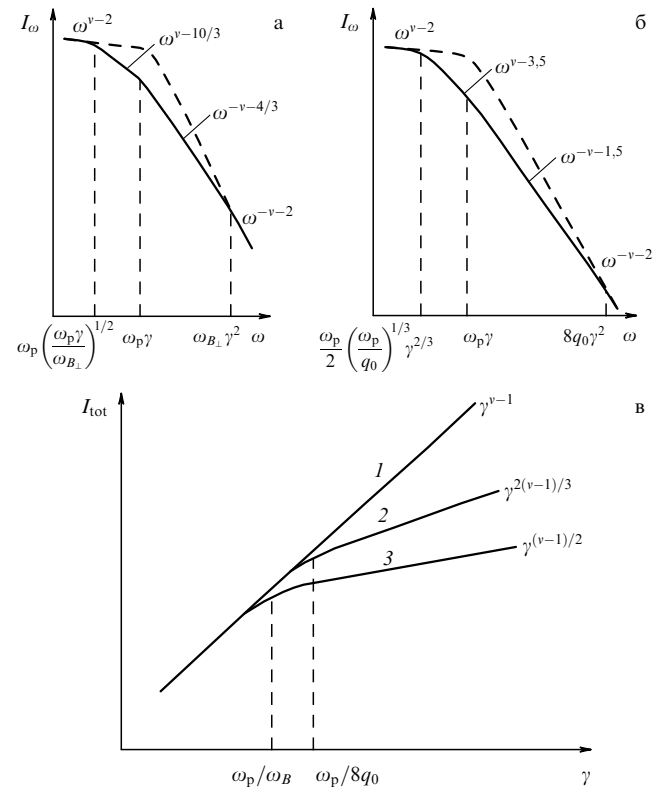
$I_{n,\omega}^3 \propto \omega_{B\perp}^{-2/3}$  в отличие от того, что имеет место для синхротронного излучения, т.е. происходит подавление переходного излучения магнитным полем. На рисунке 2б для сравнения приведены асимптотические зависимости (43), (45) и соответствующая кривая, полученная численным интегрированием точного выражения (36). На том же рисунке нанесена зависимость (39) для случая равного нуля магнитного поля.

**Спектральное распределение ПИ.** Интегрируя (43), (45) по углам, найдем спектральные распределения переходного излучения в соответствующих интервалах:

$$I_\omega^2 = \frac{8\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{c m^2 \omega^3} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \left( \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-v} \times \left[ 1 + \frac{v(\omega_{B\perp}/\omega\gamma)^{2/3}}{\gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2} \right], \quad (46)$$

$$I_\omega^3 = \frac{16\pi^2(2v+1) \text{Ai}(0)}{v^2(v+1)^2} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{c m^2 \omega^3} \left( \frac{\omega\gamma}{\omega_{B\perp}} \right)^{2/3} \times \left[ \frac{\omega}{2k_0 c} \left( \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right]^{1-v}. \quad (47)$$

Как видно из (46), (47), полный спектр излучения разбивается на четыре степенные участка:  $I_\omega^{\text{tr}} \propto \omega^{v-2}$  при  $\omega \ll \omega_*$ ,  $I_\omega^{\text{tr}} \propto \omega^{v-(10/3)}$  при  $\omega_* \ll \omega \ll \omega_p \gamma$ ,  $I_\omega^{\text{tr}} \propto \omega^{-v-(4/3)}$  при  $\omega_p \gamma \ll \omega \ll \omega_{B\perp} \gamma^2$ ,  $I_\omega^{\text{tr}} \propto \omega^{-v-2}$  при  $\omega \gg \omega_{B\perp} \gamma^2$  (рис. 3а). Таким образом, при  $\omega > \omega_*$  интенсивность переходного излучения быстро уменьшается, а основ-



**Рис. 3.** (а) Спектр переходного излучения в присутствии магнитного поля; (б) спектр переходного излучения при наличии многократного рассеяния; (в) зависимость полной энергии, излучаемой за счет переходного механизма, от энергии релятивистской частицы при различных типах движения: прямолинейная траектория (1), многократное рассеяние (случайные блуждания) (2), винтовая линия (3).

ная доля излучения сосредоточена в области частот  $\omega \leq \omega_*$  (41). Этот эффект наблюдается, если  $\omega_* < \omega_p \gamma$ , что совпадает с условием (28), полученным из качественных соображений. В результате кривизна траектории частиц с достаточно высокой энергией (28) полностью меняет характер их переходного излучения, подавляя излучение на частотах  $\omega \leq \omega_p \gamma$ , где прямолинейно движущаяся частица излучала бы основную долю энергии. Вместе с тем, увеличивается, оставаясь малым по сравнению с единицей, характерный угол, в который испускается переходное излучение. Подставляя  $\omega_*$  в (2), находим

$$\theta_c \approx \left( \frac{\omega_{B\perp}}{\omega_p \gamma} \right)^{1/2} > \gamma^{-1}. \quad (48)$$

Поскольку частица, движущаяся по винтовой линии в плазме со случайными неоднородностями, генерирует наряду с переходным и синхротронное излучение, заметим, что на частотах  $\omega < \omega_p \gamma$  последнее экспоненциально малó вследствие эффекта плотности, тогда как переходное излучение сосредоточено как раз в этой области частот. Эффект подавления ПИ магнитным полем имеет место на частотах  $\omega_* < \omega < \omega_p \gamma$ . Синхротронное излучение протонов и других ядер очень мало из-за их большой массы, так что для них ПИ может доминировать над синхротронным излучением и при  $\omega > \omega_p \gamma$ . Таким образом, эффект подавления ПИ магнитным полем происходит на тех частотах, на которых оно оказывается основным механизмом излучения как для электронов, так и для тяжелых частиц.

**Полная энергия ПИ.** Рассмотрим теперь интегральную по всем частотам интенсивность переходного излучения:

$$I_{\text{tot}}^{\text{tr}} = \int_{\omega_p}^{\infty} I_{\omega}^{\text{tr}} d\omega. \quad (49)$$

При отсутствии магнитного поля (или при условии, обратном (28)) основной вклад в интеграл (49) вносит область частот  $\omega < \omega_p \gamma$ , так как при  $\omega > \omega_p \gamma$  интенсивность  $I_{\omega}^{\text{tr}}$  быстро уменьшается:

$$I_{\text{tot}}^{\text{tr}} \approx \int_{\omega_p}^{\omega_p \gamma} I_{\omega}^2 d\omega = \frac{8\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega_p^2} \times \\ \times \left( \frac{2k_0 c}{\omega_p} \gamma \right)^{v-1} \propto \gamma^{v-1}. \quad (50)$$

Если же магнитное поле отлично от нуля и условие (28) выполнено, то переходное излучение начинает резко уменьшаться уже на частотах  $\omega \sim \omega_* < \omega_p \gamma$ , поэтому теперь

$$I_{\text{tot}}^{\text{tr}} \approx \int_{\omega_p}^{\omega_*} I_{\omega}^2 d\omega = \frac{8\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega_p^2} \left( \frac{2k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \times \\ \times \left( \frac{\omega_p \gamma}{\omega_{B\perp}} \right)^{(v-1)/2} \propto \gamma^{(v-1)/2}. \quad (51)$$

В частном случае системы резких границ  $v = 2$  (стопка пластинок, ансамбль ударных волн и т.п.) вместо линейной зависимости  $I_{\text{tot}}^{\text{tr}} \propto \gamma$  получается корневая зависимость  $I_{\text{tot}}^{\text{tr}} \propto \gamma^{1/2}$ . Это существенное изменение связано с

тем, что в магнитном поле при условии (28) подавляется переходное излучение тех частот, на которых при  $B = 0$  излучалась бы основная доля энергии.

**Астрофизические оценки.** В типичных астрофизических радиоисточниках излучение генерируется электронами со степенным распределением по энергиям. В таком случае синхротронное излучение оказывается сильно подавленным на частотах  $\omega < \omega_p^2/\omega_B$ . Эффект подавления ПИ проявляется на частотах  $\omega > \omega_p^2/\omega_B$ , а на более низких частотах возможна эффективная генерация ПИ. Этот факт позволяет применять обычные формулы ПИ прямолинейно движущихся частиц для интерпретации низкочастотной части наблюдаемых радиоспектров в области  $\omega < \omega_p^2/\omega_B$ .

Приведем для ориентировки некоторые иллюстративные оценки величины  $\gamma_{e,p}^*$  (для электронов и протонов) (28) в различных физических ситуациях. В лабораторной плазме при  $n_e \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$  ( $\omega_p \sim 5 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ) и  $B \sim 10^4 \text{ Гс}$  ( $\omega_{Be} \sim 2 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_{Bp} \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$ ) имеем  $\gamma_e^* \sim 2.5$ ,  $\gamma_p^* \sim 5 \times 10^3$ . В активных областях на Солнце (арках) при  $n_e \sim 2.5 \times 10^9 \text{ см}^{-3}$  ( $\omega_p \sim 2.5 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$ ) и  $B \sim 10^2 \text{ Гс}$  ( $\omega_{Be} \sim 2 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_{Bp} \sim 10^6 \text{ с}^{-1}$ ) находим  $\gamma_e^* \sim 1$ ,  $\gamma_p^* \sim 2 \times 10^3$ . В межпланетном пространстве ( $n_e \sim 4 \text{ см}^{-3}$ ,  $B \sim 5 \times 10^{-5} \text{ Гс}$ ) соответственно  $\gamma_e^* \sim 10^2$ ,  $\gamma_p^* \sim 2 \times 10^5$ , а в радиогалактиках ( $n_e \sim 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ ,  $B \sim 10^{-5} \text{ Гс}$ )  $\gamma_e^* \sim 30$ ,  $\gamma_p^* \sim 5 \times 10^4$ . Таким образом, типичной оказывается ситуация, когда переходное излучение значительной части электронов сильно подавлено, тогда как для тяжелых частиц влияние магнитного поля несущественно вплоть до достаточно высоких энергий. Этот факт делает актуальным исследование переходного излучения слабо- и нерелятивистских частиц на не слишком высоких частотах (вблизи плазменной частоты), чему посвящен следующий раздел.

**Эффект подавления ПИ в сильном магнитном поле.** Характер эффекта подавления переходного излучения несколько модифицируется, если кривизна траектории частицы вызвана ее движением вдоль искривленной силовой линии очень сильного магнитного поля  $B \sim 10^{12} \text{ Гс}$  (например, в магнитосфере нейтронной звезды). Теперь роль ларморовского радиуса играет радиус кривизны силовой линии  $R_L \rightarrow R_{\text{cur}}$ . Поэтому, подставив в (28) вместо гирочастоты  $\omega_{B\perp}$  частоту  $\omega_{\text{cur}} = c\gamma/R_{\text{cur}}$ , получим

$$\gamma^* = \left( \frac{\omega_p R_{\text{cur}}}{c} \right)^{1/2}. \quad (52)$$

В частности, при  $\omega_p \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $R_{\text{cur}} \sim 10^7 \text{ см}$  находим  $\gamma^* \sim 10^4$ .

### 2.3. Влияние многократного рассеяния на переходное излучение

Результаты предыдущего раздела решают задачу о переходном излучении релятивистской частицы, движущейся по любой регулярной траектории, поскольку она может быть аппроксимирована окружностью в пределах длины формирования излучения практически всегда. Однако наряду с воздействием регулярного внешнего поля кривизна траектории частицы может быть вызвана ее рассеянием в среде либо на кулоновских центрах, либо случайными электромагнитными полями [32]. При этом сама траектория частицы оказывается случайной величиной, и нахождение спектра ПИ требует усреднения (27) по

соответствующему ансамблю реализаций [19]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{n},\omega}^{\text{tr}} = & \frac{8Q^2 e^4}{m^2 c^3 \omega^2} \int \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2 d\mathbf{k}_1}{[1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 c^2 / \omega^2 \varepsilon(\omega)]^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp(i\omega\tau) \times \\ & \times \langle [\mathbf{n} \times \mathbf{v}(t)] [\mathbf{n} \times \mathbf{v}(t + \tau)] \exp\{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)[\mathbf{r}(t + \tau) - \mathbf{r}(t)]\} \rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

**Усреднение по случайной траектории частицы.** Усреднение, обозначенное в (53) угловыми скобками, может быть выполнено с помощью функций распределения (здесь предполагается, что усреднение по спектру неоднородностей плотности и по траекториям может проводиться независимо):

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle = & \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{v} d\mathbf{v}' [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] [\mathbf{n} \times \mathbf{v}'] \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] \times \\ & \times F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) W(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', \tau) = \\ = & \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}' [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] [\mathbf{n} \times \mathbf{v}'] W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \tau), \end{aligned} \quad (54)$$

где  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — функция распределения частицы в момент времени  $t$ , которая в силу нормировки на единицу при интегрировании по  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  дает единичный множитель,  $W(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}', \mathbf{v}', \tau)$  — условная вероятность того, что частица за время  $\tau$  перейдет из точки фазового пространства  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  в точку  $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ , а  $W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}$  — ее пространственный фурье-образ.

Функция  $W$  (удовлетворяющая кинетическому уравнению) вычислялась применительно к задачам излучения как для кулоновских столкновений [33], так и для рассеяния в случайных полях [32] и может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, \tau) = & v^{-2} \delta(v - v_0) \times \\ & \times \exp\left\{-i\left[\frac{\omega v}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) + \mathbf{k}_1 \mathbf{n} v\right] \tau\right\} u(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}, \tau), \end{aligned} \quad (55)$$

где векторы  $\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}$  определяются аналогично (29), (30):

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{n}v \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right) + \boldsymbol{\theta}_0 v, \quad \mathbf{v} = \mathbf{n}v \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \boldsymbol{\theta} v, \quad (56)$$

а функция  $u(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}, \tau)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{i\omega}{2} \theta^2 u = q \Delta_{\boldsymbol{\theta}} u. \quad (57)$$

Здесь  $q = q_0 \gamma^{-2}$  — частота столкновений релятивистской частицы с кулоновскими центрами или с мелкомасштабными полями. В первом случае [33]

$$q_0 = 2\pi N v \left(\frac{Ze^2}{Mc^2}\right)^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}}, \quad (58)$$

где  $N$  и  $Ze$  — концентрация и заряд ядер в среде, а во втором [34]

$$q_0 = \frac{L_0}{3c} \frac{Q^2 \langle B_{\text{st}}^2 \rangle}{M^2 c^2} = \frac{\omega_{\text{st}}^2}{3\omega_0}, \quad \omega_{\text{st}} < \omega_0, \quad (59)$$

где  $L_0$  и  $\langle B_{\text{st}}^2 \rangle$  — корреляционная длина и величина магнитных неоднородностей,  $\omega_{\text{st}} = Q \langle B_{\text{st}}^2 \rangle^{1/2} / Mc$ ,  $\omega_0 = c/L$ , а поле считается мелкомасштабным, если  $\omega_{\text{st}} < \omega_0$ . В случае электрических неоднородностей уравнение (57) остается прежним, а в определении  $q_0$  нужно сделать замену  $\langle B_{\text{st}}^2 \rangle \rightarrow \langle E_{\text{st}}^2 \rangle$ .

Решение (57) с учетом очевидного начального условия  $u(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}, 0) = \delta(\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta})$  есть

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}, \tau) = & \frac{x}{\pi \sinh z\tau} \exp[-x(\theta^2 + \theta_0^2) \coth(z\tau) + \\ & + 2x(\boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}) \sinh^{-1}(z\tau)], \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$x = (1 - i) \left(\frac{\omega}{16q}\right)^{1/2}, \quad z = (1 - i)(\omega q)^{1/2}. \quad (61)$$

**Спектрально-угловое распределение ПИ.** Подставляя (55), (60) в (54), (53) и переходя, как и в предыдущем разделе, к интенсивности излучения, находим

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{n},\omega}^{\text{tr}} = & \frac{8Q^2 e^4}{m^2 c \omega^2} \int \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2 d\mathbf{k}_1}{[1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 c^2 / \omega^2 \varepsilon(\omega)]^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} d\tau \times \\ & \times \int d\boldsymbol{\theta} (\boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}) \frac{x}{\pi \sinh z\tau} \exp\left[\frac{i\omega\tau}{2} \left(\gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{2\mathbf{k}_1 \mathbf{n} c}{\omega}\right) - \right. \\ & \left. - x(\theta^2 + \theta_0^2) \coth(z\tau) + 2x(\boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}) \sinh^{-1}(z\tau)\right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Важно, что при наличии многократного рассеяния рассмотрение интенсивности излучения в данный телесный угол (62) вполне корректно. Это связано с тем, что теперь задача аксиально-симметрична (в среднем) относительно начальной скорости частицы, поскольку все направления изменения ее скорости равновероятны, а угол  $\theta_0$  отсчитывается от начальной скорости  $\mathbf{v}_0$ . Указанная симметрия, разумеется, имеет место для ансамбля (пучка) частиц, тогда как все отдельные частицы движутся по своим индивидуальным случайным траекториям, не обладающим аксиальной симметрией.

Так как подынтегральное выражение (62) является гауссовой функцией угла, то интегрирование по  $d\boldsymbol{\theta}_x$  и  $d\boldsymbol{\theta}_y$  удается выполнить по области  $[-\infty, +\infty]$ . Возможность такого выбора пределов интегрирования обеспечивается быстрой сходимостью интегралов по  $d\boldsymbol{\theta}$ , связанной с острой направленностью излучения вдоль скорости частицы:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{n},\omega}^{\text{tr}} = & \frac{8Q^2 e^4}{m^2 c \omega^2} \theta_0^2 \int \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2 d\mathbf{k}_1}{[1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 c^2 / \omega^2 \varepsilon(\omega)]^2} \times \\ & \times \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\pi \cosh^2 z\tau} \times \\ & \times \exp\left[\frac{i\omega\tau}{2} \left(\gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{2\mathbf{k}_1 \mathbf{n} c}{\omega}\right) - x\theta_0^2 \tanh z\tau\right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Как и в предыдущем разделе, для дальнейшего интегрирования рассмотрим различные предельные случаи (63). Если

$$|z| \ll \frac{\omega}{2} \left(\gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad (64)$$

то аргументы гиперболических функций малы:  $|z\tau| \ll 1$ ,  $\tanh z\tau \approx z\tau$ ,  $\cosh z\tau \approx 1$ , и (63) сводится к известному выражению (39) для прямолинейно движущейся частицы. Неравенство (64) выполняется в низко- и высокочастотных областях:

$$\omega \ll \omega_{**} = \frac{\omega_p}{2} \left( \frac{\omega_p}{q_0} \right)^{1/3} \gamma^{2/3}, \quad (65)$$

$$\omega \gg 8q_0\gamma^2. \quad (66)$$

В промежуточной области частот, когда

$$|z| \gg \frac{\omega}{2} \left( \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (67)$$

или, что то же самое,

$$\omega_{**} \ll \omega \ll 8q_0\gamma^2, \quad (68)$$

многократное рассеяние играет существенную роль. При этом гиперболические функции также упрощаются:  $\tanh z\tau \approx 1$ ,  $\cosh^2 z\tau \approx \exp(2z\tau)/4$ , после чего интегрирование по времени приводит к выражению,

$$I_{n,\omega}^{\text{tr}} = \frac{8Q^2 e^4}{m^2 c \omega (\omega q)^{1/2}} \theta_0^2 \int \frac{|\delta N|_{\mathbf{k}_1}^2 d\mathbf{k}_1}{[1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 c^2 / \omega^2 \epsilon(\omega)]^2}. \quad (69)$$

Интегрирование (69) по  $d\mathbf{k}_1$  с учетом спектра неоднородностей (35) дает

$$I_{n,\omega}^{\text{tr}} = \frac{4(v-1)}{v(v+1)} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^2 (\omega q)^{1/2}} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \times \frac{\theta_0^2}{[\theta_0^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2 / \omega^2]^{v+1}}. \quad (70)$$

Заметим, что здесь, в отличие от случая движения частицы в регулярном магнитном поле, сохраняется равенство нулю излучения в направлении начальной скорости частицы  $\theta_0^2 = 0$ . Это связано с различными симметричными свойствами в той и другой задаче.

**Спектральное распределение ПИ.** Проинтегрировав (70) по углам, найдем спектр переходного излучения на частотах (68):

$$I_{\omega}^{\text{tr}} = \frac{2}{v^2(v+1)} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^2 (\omega q)^{1/2}} \left\{ \left( \frac{\omega}{2k_0 c} \right) \left[ \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] \right\}^{1-v}. \quad (71)$$

Таким образом, в области (68) спектр излучения состоит из двух степенных участков  $I_{\omega}^{\text{tr}} \propto \omega^{-3,5}$  при  $\omega_{**} \ll \omega \ll \omega_p \gamma$  и  $I_{\omega}^{\text{tr}} \propto \omega^{-v-1,5}$  при  $\omega_p \gamma \ll \omega \ll 8q_0\gamma^2$ , следовательно, при  $\omega \geq \omega_{**}$  переходное излучение значительно ослаблено (рис. 3б) и уменьшается по мере увеличения частоты столкновений  $I_{\omega}^{\text{tr}} \propto q^{-1/2}$ .

Эффект подавления переходного излучения многократным рассеянием (71) происходит, если существует область частот (68), т.е.  $\omega_{**} \ll 8q_0\gamma^2$ , что с учетом (65) справедливо для частиц с достаточно высокой энергией:

$$\gamma \gg \gamma^{**} = \frac{\omega_p}{8q_0}. \quad (72)$$

Это неравенство является аналогом условия подавления переходного излучения магнитным полем (28).

**Полная энергия ПИ.** Рассмотрим зависимость полной энергии, излучаемой переходным механизмом, от энергии частицы при условии (72). Интегрируя (46) по частотам до значения  $\omega_{**}$ , аналогично (51), найдем

$$I_{\text{tot}}^{\text{tr}} \approx \int_{\omega_p}^{\omega_{**}} I_{\omega}^{\text{tr}} d\omega = \frac{16\pi^2}{2^v v^2 (v+1)} \frac{Q^2 e^4 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega_p^2} \times \left( \frac{2k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \left( \frac{\omega_p \gamma^2}{q_0} \right)^{(v-1)/3} \propto \gamma^{2(v-1)/3}. \quad (73)$$

Видно, что этот случай в определенном смысле промежуточный между прямолинейным движением частицы (50) и ее вращением в магнитном поле (51). Зависимость полной энергии ПИ от энергии частицы приведена на рис. 3в.

**Оценка эффекта подавления ПИ многократным рассеянием.** В конденсированных средах при нормальных условиях эффект подавления переходного излучения многократным рассеянием на кулоновских центрах имеет место в углероде при  $\gamma_e > 10^4$ , в железе при  $\gamma_e > 800$  и т.п., что совпадает с результатами для излучения на отдельной границе [35]. В межпланетной плазме [36] при  $\langle B_{\text{st}}^2 \rangle \approx 3,6 \times 10^{-10} \text{ Гс}^2$ ,  $L_0 \sim 3 \times 10^{11} \text{ см}$ , или  $\omega_{\text{st}} = 0,25 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$  имеем

$$\gamma_e^{**} \approx \frac{\omega_p \omega_0}{2\omega_{\text{st}}^2} \sim 10^5. \quad (74)$$

Пусть в магнитосфере нейтронной звезды имеются слабые неоднородности магнитного поля (например, альфвеновские волны) напряженностью  $B_{\text{st}} = \langle B_{\text{st}}^2 \rangle^{1/2} \approx 5 \text{ Гс}$  ( $\sim 10^{-11} B_0$ ) и  $L_0 \sim 100 \text{ см}$ , тогда  $\omega_{\text{st}} = 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ , и с помощью (74) находим

$$\gamma_e^{**} \sim 10^2. \quad (75)$$

Поскольку в окрестности нейтронной звезды плазма релятивистская и практически для всех частиц  $\gamma \geq 10^2$ , то в данном случае эффект подавления переходного излучения важен для большинства имеющих электронов и позитронов. Это означает, что применение теории переходного излучения к реальным объектам с сильным магнитным полем требует большой осторожности и, в частности, скрупулезного учета всех факторов, приводящих к искривлению траекторий излучающих частиц.

## 2.4. Переходное излучение в гиротропной плазме

Метод рассмотрения излучения частиц в анизотропных средах был предложен Гинзбургом в 1940 г. [37] и применен для анализа излучения Вавилова – Черенкова [38]. Обобщение этого метода на случай гиротропных сред проведено Коломенским [39]. Им же исследовано формирование черенковского излучения частицы, движущейся в магнитоактивной плазме вдоль магнитного поля [40]. Барсуков [41] рассмотрел излучение осцилляторов, движущихся вдоль оси симметрии гиротропного кристалла. Результаты этих первых работ, а также методика вычисления излучения в анизотропных средах описаны в [42]. Здесь мы упоминаем лишь работы, в которых рассматривается роль оптической анизотропии в процессе излучения в средах. Возможное наличие кристаллической структуры, т.е. упорядоченности расположения частиц среды, приводит к целому комплексу интересных явлений [9, 43–45].

Вопросы, касающиеся переходного излучения в анизотропных средах, также рассматривались ранее. Так, в [46] исследовалось переходное излучение на границе обычной и оптически активной изотропных сред. Излучение частиц при пролете через ферродиеlectricкую и кристаллическую пластинки рассмотрено в [47].

**Общее рассмотрение.** Рассмотрим переходное излучение, генерируемое одной релятивистской частицей, движущейся в магнитоактивной плазме под произвольным углом  $\theta$  к магнитному полю [48], при наличии случайных неоднородностей концентрации тепловых электронов, описываемых степенным спектром (35).

Как было показано выше [28, 19], для вычисления переходного излучения в плазме со слабыми неоднородностями

$$\frac{\Delta N}{N} \ll 1 \quad (76)$$

нужно найти ток среды  $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}$ , билинейный по полю релятивистской частицы  $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^Q$  и амплитуде неоднородностей  $\delta N_{\mathbf{k}}$ . Выражение для  $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}$  получается в результате решения кинетического уравнения по теории возмущений (см. раздел 2.1) с учетом гиротропии среды, аналогично выводу тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы [49]:

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^{(1), \alpha} = \frac{ie^2}{m\omega} \chi_{\alpha\beta} \int d\mathbf{k}' E_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^Q \delta N_{\mathbf{k}'}, \quad (77)$$

где неоднородности предполагаются квазистатическими, а тензор  $\chi_{\alpha\beta}$  в приближении холодной плазмы имеет вид

$$\chi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-u} & \frac{-i\sqrt{u}}{1-u} & 0 \\ \frac{i\sqrt{u}}{1-u} & \frac{1}{1-u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Диагональные компоненты тензора  $\chi_{\alpha\beta}$  описывают поперечные и продольные по отношению к направлению магнитного поля токи ( $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ), а недиагональные — холловский ток электронов плазмы. Безразмерная величина  $u$  определяется отношением электронной гирочастоты к частоте:

$$u = \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2}. \quad (79)$$

Электрическое поле релятивистской частицы, входящее в (77), выражается через ток частицы с помощью функции Грина  $G_{\beta\sigma}(\omega, \mathbf{k})$  аналогично (20). Однако функция Грина в гиротропной плазме иная, чем в изотропной среде. Она может быть найдена с помощью разложения поля в анизотропной среде на нормальные моды (гамильтоновский метод [37, 39, 50]). В частности, в холодной магнитоактивной плазме функция Грина представляется в виде (ср. с (23) в изотропной плазме):

$$G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi i\omega \left( \frac{a_{\alpha\mathbf{k}}^{\alpha} a_{\alpha\mathbf{k}}^{*\beta}}{\omega_{\alpha\mathbf{k}}^2 - \omega^2} + \frac{a_{\alpha\mathbf{k}}^{\alpha} a_{\alpha\mathbf{k}}^{*\beta}}{\omega_{\alpha\mathbf{k}}^2 - \omega^2} \right), \quad (80)$$

где  $\mathbf{a}_{\alpha, \mathbf{k}}$  — векторы поляризации обыкновенной и не-обыкновенной волн, а  $\omega_{\alpha, \mathbf{k}}$  — соответствующие собствен-

ные частоты. Эти величины были получены Эйджманом [51] при исследовании магнитотормозного излучения в гиротропной плазме и приведены в ряде монографий (см., например, [52]). Выпишем соответствующие выражения для удобства дальнейшего изложения:

$$\omega_{j, \mathbf{k}}^2 = \frac{k^2 c^2}{n_j^2}, \quad j = o, e, \quad (81)$$

$$n_{o, e}^2 = 1 - \frac{2v(1-v)}{2(1-v) - u \sin^2 \theta \pm [u^2 \sin^4 \theta + 4u(1-v)^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}, \quad (82)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}$  и

$$v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (83)$$

$$\mathbf{a}_{j, \mathbf{k}} = \frac{n_{j, \mathbf{k}}}{(1 + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{1/2}} (1, i\alpha_j, i\beta_j), \quad j = o, e. \quad (84)$$

Здесь в скобках указаны  $(x, y, z)$  компоненты вектора поляризации. Система координат выбрана таким образом, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  направлено по оси  $z$ , а вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $(y, z)$ :

$$\alpha_j = K_j \cos \theta - \gamma_j \sin \theta, \quad \beta_j = K_j \sin \theta + \gamma_j \cos \theta, \quad (85)$$

$$K_{o, e} = \frac{2\sqrt{u}(1-v) \cos \theta}{u \sin^2 \theta \mp (u^2 \sin^4 \theta + 4u(1-v)^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}, \quad (86)$$

$$K_o K_e \equiv -1,$$

$$\gamma_{o, e} = -\frac{v\sqrt{u} \sin \theta + uv K_{o, e} \cos \theta \sin \theta}{1 - u - v(1 - u \cos^2 \theta)}. \quad (87)$$

Приведенные выражения адекватно описывают электрические поля в плазме, за исключением окрестности основного ( $u = 1$ ) и, возможно, кратных циклотронных резонансов, где необходим учет теплового движения частиц плазмы (пространственной дисперсии).

Энергия, излучаемая частицей в одну из нормальных мод за все время движения частицы в плазме, может быть представлена, аналогично (24), в виде [10]:

$$\mathcal{E}_{j, \mathbf{n}, \omega} = (2\pi)^6 \frac{\omega^2}{c^3} \langle |\mathbf{a}_{j, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{j}_{j, \omega, \mathbf{k}}^{(1)}|^2 \rangle. \quad (88)$$

Рассмотрим для определенности энергию, излучаемую в обыкновенную волну; окончательные выражения будут справедливы и для необыкновенной волны после замены индексов  $o \leftrightarrow e$ . При проведении вычислений мы будем использовать приближение прямолинейного движения релятивистских частиц. В реальных условиях это приближение может оказаться некорректным. Так, при условии  $\omega_{Be}/\omega_p > 1$  кривизна траектории будет сильно влиять на переходное излучение релятивистских электронов любых энергий. Тем не менее рассмотрение прямолинейного движения частиц в данном случае оправдано, поскольку мы хотим выявить влияние гиротропии плазмы на излучение в чистом виде, и, кроме того, для протонов и более тяжелых ядер это приближение может быть вполне корректным и в довольно сильных магнитных полях. Здесь мы ограничимся этими общими замечаниями о роли кривизны траектории релятивистских

частиц, а конкретные оценки и критерии применимости приведем ниже.

Фурье-компонента тока прямолинейно движущейся частицы имеет вид

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^Q = \frac{Q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}], \quad (89)$$

где  $Q$  — заряд релятивистской частицы. Подставив все необходимые выражения в (88), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{o, n, \omega} = & \frac{8\pi e^4 Q^2 \omega^2}{c^3} T \left\{ |a_{o, \mathbf{k}}^{*\alpha} \chi_{\alpha\beta} a_{o, \mathbf{k}}^\beta|^2 |\mathbf{a}_{o, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{v}|^2 \times \right. \\ & \times \int d\mathbf{k}' |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \frac{\delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}]}{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 c^2 / n_o^2 - \omega^2]^2} + \\ & + |a_{o, \mathbf{k}}^{*\alpha} \chi_{\alpha\beta} a_{e, \mathbf{k}}^\beta|^2 |\mathbf{a}_{e, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{v}|^2 \int d\mathbf{k}' |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \frac{\delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}]}{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 c^2 / n_e^2 - \omega^2]^2} + \\ & + 2 \operatorname{Re} (a_{o, \mathbf{k}}^{*\alpha} \chi_{\alpha\beta} a_{o, \mathbf{k}}^\beta) (a_{o, \mathbf{k}}^{*\gamma} \chi_{\gamma\delta}^* a_{e, \mathbf{k}}^{\delta}) |(\mathbf{a}_{o, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{v})(\mathbf{a}_{e, \mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})| \times \\ & \times \int d\mathbf{k}' |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \frac{\delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}]}{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 c^2 / n_o^2 - \omega^2][(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 c^2 / n_e^2 - \omega^2]} \Big\}, \quad (90) \end{aligned}$$

где  $T$  — полное время излучения, на которое следует поделить (90) при переходе к интенсивности излучения (энергии, излучаемой в единицу времени). Заметим, что в общем случае интенсивность излучения обыкновенной волны определяется показателями преломления обеих нормальных мод, что формально связано с отличием тензора  $\chi_{\alpha\beta}$  (78) от  $\delta_{\alpha\beta}$ . Функция Грина (80) представляет квазистационарное электрическое поле частицы в виде суммы виртуальных обыкновенной и необыкновенной волн. Рассеяние виртуальной обыкновенной (и необыкновенной) волны на неоднородностях среды приводит к испусканию как обыкновенных, так и необыкновенных волн. Соответственно, два вклада в излучение каждой из нормальных мод мы будем называть излучением через виртуальную обыкновенную (необыкновенную) волну.

Поскольку излучение релятивистских частиц обладает высокой направленностью, то, как и раньше, будем делать вычисления с учетом малости угла  $\vartheta$  между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}$  (56), тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_{o, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{v}|^2 & \approx c^2 \frac{K_o^2 \vartheta^2 \sin^2 \phi + \vartheta^2 \cos^2 \phi}{1 + K_o^2} = \\ & = c^2 \vartheta^2 \frac{\sin^2 \phi + K_e^2 \cos^2 \phi}{1 + K_e^2}, \\ |\mathbf{a}_{e, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{v}|^2 & \approx c^2 \vartheta^2 \frac{\cos^2 \phi + K_e^2 \sin^2 \phi}{1 + K_e^2}, \quad (91) \\ 2(\mathbf{a}_{o, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{v})(\mathbf{a}_{e, \mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}) & \approx -2K_e c^2 \vartheta^2 \frac{\cos 2\phi}{1 + K_e^2}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $K_o K_e \equiv -1$ , а также отброшены слагаемые, содержащие  $\gamma_j$ , описывающие продольную компоненту электрического поля, поскольку в интересующих нас условиях  $|\gamma_j| \ll 1, |K_j|$ ;  $\phi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{\vartheta}$ , причем  $\cos \phi = 0$ , когда  $\mathbf{\vartheta}$  лежит в плоскости  $(\mathbf{B}, \mathbf{v})$ , а  $\sin \phi = 0$ , когда  $\mathbf{\vartheta}$  ей перпендикулярен.

Подставив (91) в (90) и принимая во внимание, что  $\mathbf{k}\mathbf{k}'/kk' \approx \mathbf{v}\mathbf{k}'/vk'$ , проинтегрируем (90) по углам вектора  $\mathbf{k}'$  с учетом  $\delta$ -функции и перейдем к интенсивности излучения, поделив (90) на  $T$ :

$$\begin{aligned} I_{o, n, \omega} = & \frac{16\pi^2 e^4 Q^2}{m^2 \omega^2 c^2} \int_{k'_{\min}}^{\infty} k' dk' |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \frac{\vartheta^2}{(1 + K_e^2)^3} \times \\ & \times \left( \frac{[(\cos^2 \theta - 2K_e \sqrt{u} \cos \theta + K_e^2)/(1 - u) + \sin^2 \theta]^2}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_o)} \times \right. \\ & \times \frac{\sin^2 \phi + K_e^2 \cos^2 \phi}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_o)} + \\ & + \frac{\{[(1 - K_e^2)\sqrt{u} \cos \theta - uK_e \sin^2 \theta]/(1 - u)\}^2}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_e)} \times \\ & \times \frac{\cos^2 \phi + K_e^2 \sin^2 \phi}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_e)} - \\ & - 2K_e \frac{[(1 - K_e^2)\sqrt{u} \cos \theta - uK_e \sin^2 \theta]/(1 - u)}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_e)} \times \\ & \times \left. \frac{(1 - 2K_e \sqrt{u} \cos \theta + K_e^2 - u \sin^2 \theta)/(1 - u)}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_o)} \cos 2\phi \right). \quad (92) \end{aligned}$$

где

$$k'_{\min} = \frac{\omega}{2c} [\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_j)]. \quad (93)$$

При получении (92) отличием направлений  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}$  пренебрегалось всюду кроме выражений типа  $|\mathbf{a}_{j, \mathbf{k}}^* \cdot \mathbf{v}|^2 \sim \sim [\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2$ . В частности, угол  $\theta$ , входящий в (92), считается равным углу между скоростью частицы и направлением внешнего магнитного поля. Интегрируя (92) по спектру неоднородностей (35), находим

$$\begin{aligned} I_{o, n, \omega} = & \frac{8\pi(v-1)}{v} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \times \\ & \times \frac{(2k_0 c / \omega)^{v-1}}{[\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_o)]^v} \frac{\vartheta^2}{(1 + K_e^2)^3} \times \\ & \times \left( \frac{[(\cos^2 \theta - 2K_e \sqrt{u} \cos \theta + K_e^2)/(1 - u) + \sin^2 \theta]^2}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_o)} \times \right. \\ & \times \frac{\sin^2 \phi + K_e^2 \cos^2 \phi}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_o)} + \\ & + \frac{\{[(1 - K_e^2)\sqrt{u} \cos \theta - uK_e \sin^2 \theta]/(1 - u)\}^2}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_e)} \times \\ & \times \frac{\cos^2 \phi + K_e^2 \sin^2 \phi}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_e)} - 2K_e \cos 2\phi \times \\ & \times \frac{[(1 - K_e^2)\sqrt{u} \cos \theta - uK_e \sin^2 \theta]/(1 - u)}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_e)} \times \\ & \times \left. \frac{(\cos^2 \theta - 2K_e \sqrt{u} \cos \theta + K_e^2)/(1 - u) + \sin^2 \theta}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1 - n_o)} \right). \quad (94) \end{aligned}$$

Выражение для спектрально-углового распределения излучения необыкновенной волны вычисляется анало-

гичным образом и имеет вид

$$I_{e,n,\omega} = \frac{8\pi(v-1)}{v} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \times \\ \times \frac{(2k_0 c/\omega)^{v-1}}{[\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1-n_e)]^v} \frac{\vartheta^2}{(1+K_e^2)^3} \times \\ \times \left( \frac{[(1+2K_e\sqrt{u}\cos\theta + K_e^2\cos^2\theta)/(1-u) + K_e^2\sin^2\theta]^2}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1-n_e)} \times \right. \\ \times \frac{\cos^2\phi + K_e^2\sin^2\phi}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1-n_e)} + \\ + \frac{\{[(1-K_e^2)\sqrt{u}\cos\theta - uK_e\sin^2\theta]/(1-u)\}^2}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1-n_o)} \times \\ \times \frac{\sin^2\phi + K_e^2\cos^2\phi}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1-n_o)} - 2K_e\cos 2\phi \times \\ \times \frac{[(1-K_e^2)\sqrt{u}\cos\theta - uK_e\sin^2\theta]/(1-u)}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1-n_e)} \times \\ \times \left. \frac{(1+2K_e\sqrt{u}\cos\theta + K_e^2\cos^2\theta)/(1-u) + K_e^2\sin^2\theta}{\vartheta^2 + \gamma^{-2} + 2(1-n_o)} \right). \quad (95)$$

Выражения (94) и (95) решают задачу о переходном излучении релятивистской частицы, движущейся в магнитоактивной плазме со случайными неоднородностями плотности в общем виде. Теперь проанализируем их в различных предельных случаях.

**Предел слабой гиротропии.** Рассмотрим достаточно высокие частоты (19), при которых гиротропия плазмы слабо влияет на интенсивность переходного излучения. Однако при изотропном спектре неоднородностей среды наличие слабого магнитного поля является основным источником поляризации излучения. Исследование поляризации излучения представляется актуальным в связи с возможными приложениями переходного механизма излучения к астрофизическим условиям. Наблюдение и анализ поляризационных характеристик излучения часто оказываются решающим фактором при идентификации механизмов космического электромагнитного излучения [53].

Для нахождения степени поляризации переходного излучения при условии (19) поступим следующим образом. Вычислим интенсивности излучения нормальных мод (94), (95), раскладывая их в ряд по степеням величины  $u$ . Поскольку в выражения для показателей преломления (82) и векторов поляризации (86) величина  $u$  входит в комбинациях с  $\sin\theta$  и  $\cos\theta$ , то соответствующие разложения оказываются различными в зависимости от соотношения  $\cos^2\theta$  и  $u$ .

**Квазипродольное движение.** Если

$$\cos^2\theta \gg u, \quad (96)$$

то поляризация нормальных мод в плазме почти круговая [53], а интенсивности обыкновенных и необыкновенных волн равны:

$$I_{o,\omega} = \frac{I_{\omega}^{\text{tr}}}{2} \left\{ 1 - 2\sqrt{u}\cos\theta \left[ 1 - \frac{v}{2(1+\omega^2/\omega_p^2\gamma^2)} \right] \right\}, \quad (97)$$

$$I_{e,\omega} = \frac{I_{\omega}^{\text{tr}}}{2} \left\{ 1 + 2\sqrt{u}\cos\theta \left[ 1 - \frac{v}{2(1+\omega^2/\omega_p^2\gamma^2)} \right] \right\}, \quad (98)$$

где  $I_{\omega}^{\text{tr}}$  — интенсивность переходного излучения в изотропной плазме (46). Легко видеть, что необыкновенная волна испускается немного эффективнее, чем обыкновенная. Отличие интенсивностей излучения (97), (98) от случая изотропной плазмы связано главным образом с наличием холловского тока электронов среды (члены  $\pm 2\sqrt{u}\cos\theta$ ). Поскольку направление вращения электронов совпадает с направлением вращения электрического поля в необыкновенной волне, то соответствующий холловский ток увеличивает излучение этих волн и уменьшает излучение обыкновенных волн. Остальные члены связаны с небольшим различием показателей преломления нормальных мод и при  $v < 2$  они меньше холловских вкладов. Степень поляризации суммарного излучения равна:

$$P = \frac{I_{o,\omega} - I_{e,\omega}}{I_{o,\omega} + I_{e,\omega}} = -2 \frac{\omega_{Be}}{\omega} \cos\theta \left[ 1 - \frac{v}{2(1+\omega^2/\omega_p^2\gamma^2)} \right]. \quad (99)$$

Обратим внимание на то, что согласно определению степени поляризации (99), положительная (отрицательная) величина  $P$  соответствует преимущественному излучению обыкновенных (необыкновенных) волн.

Для астрофизических приложений важно, что степень поляризации (99) на данной частоте определяется практически только величиной магнитного поля (точнее, его продольной компонентой), что в принципе дает дополнительный способ определения магнитного поля в источниках излучения, например, в солнечных вспышках.

Рассмотрим теперь **квазипоперечное движение** частицы по отношению к магнитному полю:

$$\cos^2\theta \ll u. \quad (100)$$

Произведя разложения, аналогично предыдущему случаю, получим:

$$I_{o,\omega} = \frac{I_{\omega}^{\text{tr}}}{2} \left( 1 + 4\cot^2\theta + \frac{v\cos^2\theta}{1+\omega^2/\omega_p^2\gamma^2} \right), \quad (101)$$

$$I_{e,\omega} = \frac{I_{\omega}^{\text{tr}}}{2} \left( 1 + 2u - 4\cot^2\theta - \frac{vu\sin^2\theta}{1+\omega^2/\omega_p^2\gamma^2} \right). \quad (102)$$

В данном случае поляризация обыкновенной волны почти линейная вдоль магнитного поля, а необыкновенная волна эллиптически поляризована в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Заметим, что при  $\theta = \pi/2$  величина  $I_{o,\omega}$  в точности равна половине интенсивности излучения в изотропной плазме, поскольку электрическое поле обыкновенной волны направлено строго вдоль внешнего магнитного поля, и последнее не оказывает влияния на процессы излучения и распространения обыкновенных волн. Величина степени поляризации равна:

$$P = -u + 4\cot^2\theta + \frac{v(\cos^2\theta + u\sin^2\theta)}{2(1+\omega^2/\omega_p^2\gamma^2)}. \quad (103)$$

При строго поперечном движении ( $\cos\theta = 0$ ) это выражение приобретает вид

$$P = -\left( \frac{\omega_{Be}}{\omega} \right)^2 \left[ 1 - \frac{v}{2(1+\omega^2/\omega_p^2\gamma^2)} \right]. \quad (104)$$

В отличие от случая (96), теперь величина поляризации квадратична по магнитному полю и при типичных значениях  $1 < \nu < 2$ ,  $P < 0$ , т.е. по-прежнему более интенсивно излучаются необыкновенные волны. Квадратичная зависимость степени поляризации от магнитного поля связана с тем, что теперь основной вклад в поляризацию дает не холловский ток электронов плазмы, а соответствующий поперечный ток.

**Сильная гиротропия, продольное распространение.** Рассмотрим теперь случай, обратный (19), соответствующий сильной гиротропии. Пусть  $\sin \theta = 0$ , тогда:

$$n_{o,e}^2 = 1 \mp \frac{v}{\sqrt{u} \pm 1}, \quad K_{o,e} = \mp 1, \quad \gamma_{o,e} = 0, \quad (105)$$

т.е. нормальные моды циркулярно поляризованы, и при условии  $\sqrt{u} \gg 1$  показатели преломления имеют вид

$$n_{o,e}^2 = 1 \mp \frac{\omega_p^2}{\omega_{Be}\omega}. \quad (106)$$

Заметим, что при подстановке (105), (106) в (94), (95) вклады, связанные с испусканием обыкновенной волны через виртуальную необыкновенную волну и наоборот, в точности обращаются в нуль. Спектрально-угловое распределение излучения нормальных мод имеет вид

$$I_{n,\omega}^{(o,e)} = \frac{4\pi(\nu-1)}{v} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \left( \frac{\omega}{\omega_{Be}} \right)^2 \times \frac{\vartheta^2 (2k_0 c / \omega)^{\nu-1} \Theta(\vartheta^2 + \gamma^{-2} \pm \omega_p^2 / \omega_{Be}\omega)}{(\vartheta^2 + \gamma^{-2} \pm \omega_p^2 / \omega_{Be}\omega)^{\nu+2}}. \quad (107)$$

$\Theta$ -функция Хевисайда, введенная в числитель, связана с тем, что при

$$\gamma^{-2} - \frac{\omega_p^2}{\omega_{Be}\omega} < 0 \quad (108)$$

оказывается выполненным условие Вавилова–Черенкова для излучения (медленных) необыкновенных волн. При

$$\vartheta^2 + \gamma^{-2} - \frac{\omega_p^2}{\omega_{Be}\omega} = 0 \quad (109)$$

выражение (107) для необыкновенной волны расходится. Эта расходимость имеет простое физическое объяснение. Дело в том, что при условии (108) электрическое поле частицы, движущейся в гиротропной среде, состоит из двух частей: квазистационарного собственного поля и поля излучения — излучения Вавилова–Черенкова. Рассеяние квазистационарного поля (или, иначе, рассеяние виртуальных фотонов, испускаемых частицей) происходит на конечной длине, равной зоне формирования переходного излучения [19]. Рассеяние реальных черенковских фотонов на неоднородностях среды также происходит. Однако в бесконечной непоглощающей среде длина, на которой фотоны взаимодействуют с неоднородностями, бесконечна. В этом и состоит причина указанных расходимостей. В реальных условиях интенсивность рассеянного черенковского излучения будет определяться геометрическими размерами системы и длиной поглощения квантов. В конкретных задачах соответствующий вклад в полную интенсивность излу-

чения несложно учесть (см. раздел 4.3). Здесь мы этого делать не будем, ограничиваясь рассмотрением лишь собственно переходного излучения, понимаемого, как результат конверсии квазистационарного (виртуального) поля частицы на неоднородностях среды в электромагнитное излучение [19]. Заметим, что при рассмотрении переходного излучения на пластинке при выполненном в ней условии Вавилова–Черенкова [28] соответствующий вклад представляет собой просто результат преломлений и отражений черенковского излучения на границах.

Важной особенностью выражения (107) является наличие малого множителя  $(\omega/\omega_{Be})^2$  в интенсивности излучения по сравнению со случаем изотропной среды. Его появление обусловлено тем, что в данном случае основной вклад в излучение дает холловская компонента тока плазмы, описываемая недиагональными членами тензора  $\chi_{\alpha\beta}$  (78), поскольку поперечное поле релятивистской частицы в данной геометрии не содержит составляющей вдоль магнитного поля. Поэтому в достаточно сильных полях, когда  $(\omega/\omega_{Be})^2 \rightarrow 0$ , существенным может стать переходное излучение, связанное с рассеянием на неоднородностях продольного электрического поля релятивистской частицы (излучение через виртуальную продольную волну), которое имеет вид

$$\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}}^{Q,l} = - \frac{4\pi i Q c \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{(2\pi)^3 \omega \varepsilon_l(\omega)} \frac{\mathbf{B}}{B}. \quad (110)$$

Вычислив ток плазмы, возбуждаемый полем (110) вдоль магнитного поля, найдем интенсивность излучения аналогично тому, как это делалось при получении (94), (95):

$$I_{n,\omega,l}^{(o,e)} = \frac{4\pi(\nu-1)}{v} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3 \varepsilon_l^2} \frac{\vartheta^2 (2k_0 c / \omega)^{\nu-1}}{(\vartheta^2 + \gamma^{-2} \pm \omega_p^2 / \omega_{Be}\omega)^\nu}. \quad (111)$$

Сравнение между собой выражений (107) и (111) показывает, что при

$$\gamma < \left( \frac{\omega_{Be}}{\omega_p} \right)^{1/2} \quad (112)$$

вклад от излучения через продольное поле (111) доминирует на частотах

$$\omega_p < \omega < \omega_{Be} \gamma^{-2}, \quad (113)$$

а на больших частотах превалирует излучение через поперечное поле (107). Заметим, что при условии (112) излучение Вавилова–Черенкова не возникает ни на каких частотах. Однако при  $\omega \rightarrow \omega_p$  интенсивность (111) расходится, поскольку теперь начинает выполняться условие черенковского испускания продольных (ленгмюровских) волн (устранение этой расходимости подробно обсуждается в следующем разделе).

Интегрируя (107), (111) по углам, можно найти соответствующие спектры излучения. При этом оказывается, что в (111) интегрирование по  $d\vartheta^2$  нельзя проводить в бесконечных пределах, поскольку это дает бесконечный результат. Это значит, что излучение через виртуальную продольную волну не обладает острой направленностью вдоль скорости частицы. С другой стороны, выражение (111) применимо лишь в малой области углов относительно магнитного поля, так как



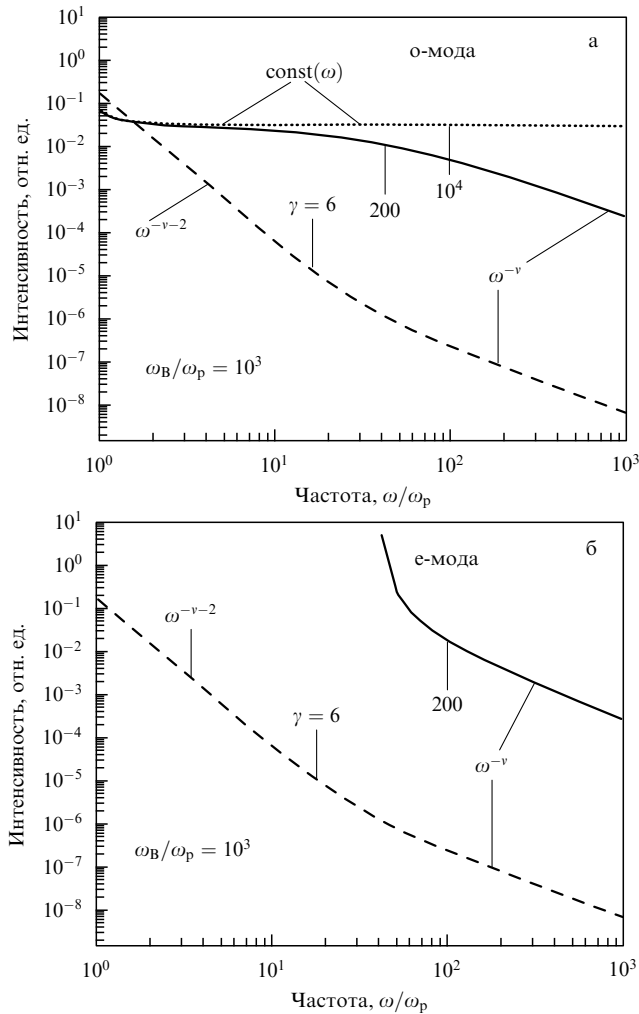
при его получении использовались конкретные выражения (105), (106) для показателей преломления и векторов поляризации нормальных мод. Поэтому мы приведем для ориентировки оценку интенсивности излучения (111) в пределах угла  $\vartheta_* = \gamma^{-1}$  при условии (112):

$$I_{\omega, l}^{(o, e)} \sim \frac{4\pi^2(v-1)}{v} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \frac{(2k_0 c / \omega)^{v-1}}{(\gamma^{-2} \pm \omega_p^2 / \omega_{Be} \omega)^{v-2}}. \quad (114)$$

Интегрирование (107) ввиду быстрой сходимости можно проводить в бесконечных пределах:

$$I_{\omega}^{(o, e)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \left( \frac{\omega}{\omega_{Be}} \right)^2 \frac{(2k_0 c / \omega)^{v-1}}{(\gamma^{-2} \pm \omega_p^2 / \omega_{Be} \omega)^v}. \quad (115)$$

Таким образом, при условии (112)  $I_{\omega}^{(o, e)} \sim \omega^{-v-2}$  на частотах  $\omega_p \ll \omega \ll \omega_{Be} \gamma^{-2}$  и  $I_{\omega}^{(o, e)} \sim \omega^{-v}$  на частотах  $\omega_{Be} \gamma^{-2} \ll \omega \ll \omega_{Be}$  (штриховые кривые на рис. 4, в данном случае  $\omega_{Be} / \omega_p \gamma^2 \approx 28$ ).



**Рис. 4.** Спектры переходного излучения обычных (а) и необыкновенных (б) волн при движении релятивистской частицы вдоль магнитного поля в сильно гиротропной плазме. Выбранные значения лоренц-фактора частицы (6, 200,  $10^4$ ) попадают соответственно в области  $\gamma < (\omega_{Be} / \omega_p)^{1/2} = 31,6$ ,  $(\omega_{Be} / \omega_p)^{1/2} < \gamma < \omega_{Be} / \omega_p = 10^3$ ,  $\gamma > \omega_{Be} / \omega_p$ . Спектры необыкновенных волн построены только для тех частот и энергий, когда условие Вавилова – Черенкова не выполнено.

Для частиц с более высокой энергией

$$\left( \frac{\omega_{Be}}{\omega_p} \right)^{1/2} < \gamma < \frac{\omega_{Be}}{\omega_p} \quad (116)$$

излучение через продольную волну несущественно. Здесь появляется область частот, в которой выполнено условие излучения Вавилова – Черенкова. Мы будем рассматривать только ту область параметров, где это условие не выполнено. Для обыкновенной волны это справедливо всегда, а для необыкновенной — на частотах

$$\omega > \frac{\omega_p^2}{\omega_{Be}} \gamma^2. \quad (117)$$

В этом случае остается справедливым выражение (115) (сплошная кривая на рис. 4б; для параметров, использованных при построении графика, безразмерная граничная частота  $(\omega_p / \omega_{Be}) \gamma^2 = 40$ ). Для обыкновенной волны спектр излучения разбивается на два степенных участка:  $I_{\omega}^{(o)} \sim \omega^{-v}$  при условии (117) и  $I_{\omega}^{(o)} \sim \text{const}(\omega)$  в противоположном случае (сплошная кривая на рис. 4а).

Если  $\gamma > \omega_{Be} / \omega_p$ , то интенсивность излучения обыкновенной волны постоянна во всем интервале частот  $\omega_p \ll \omega \ll \omega_{Be}$  (пунктирная кривая на рис. 4а), а необыкновенные волны в этом интервале генерируются черенковским механизмом. При условии (76) интенсивность излучения Вавилова – Черенкова (необыкновенных волн) значительно превосходит интенсивность переходного излучения обыкновенных волн на тех же частотах, так как

$$\frac{I_{\omega}^{tr(o)}}{I_{\omega}^{VCh(e)}} \sim \left( \frac{\omega_{Be}}{\omega_p} \right)^{v-1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2}. \quad (118)$$

О переходном излучении необыкновенных волн имеет смысл говорить лишь вне черенковского угла, т.е. при  $\vartheta > \vartheta_* = \omega_p^2 / \omega_{Be} \omega$ . При приближении  $\vartheta$  к  $\vartheta_*$  интенсивность переходного излучения расходится. Подобная расходимость при приближении соответствующих параметров системы к черенковскому порогу отмечалась Капицей [54] еще в 1960 г. Дело в том, что при приближении к черенковскому порогу виртуальный фотон становится все более похож на реальный и в пределе длина его пробега в непоглощающей среде обращается в бесконечность, а сам он превращается в реальный черенковский квант. Эта расходимость в реальных условиях может быть ограничена при учете следующих факторов: конечности основного масштаба неоднородностей  $L_0$ , кривизны траектории частицы, конечности размеров среды и поглощения волн в ней. Пример подобного вычисления, которое можно легко обобщить на данный случай, приведен в разделе 4.3.

**Сильная гиротропия, поперечное движение.** Пусть теперь частица движется поперек магнитного поля,  $\cos \theta = 0$ . Вообще говоря, в этом случае существенное влияние на спектр переходного излучения может оказать кривизна траектории релятивистской частицы [19, 29], однако для протонов и более тяжелых ядер существует область применимости приближения прямолинейного движения, которая будет определена ниже.

Показатели преломления нормальных мод при  $\cos \theta = 0$  равны:

$$n_o^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad n_e^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{Be}^2}. \quad (119)$$

Спектрально-угловое распределение обыкновенных волн имеет вид

$$I_{n,\omega}^{(o)} = \frac{8\pi(v-1)}{v} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \frac{(2k_0 c/\omega)^{v-1} \vartheta^2 \sin^2 \phi}{(\vartheta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2)^{v+2}}. \quad (120)$$

Наличие множителя  $\sin^2 \phi$  показывает, что диаграмма направленности обыкновенной волны вытянута вдоль направления магнитного поля. Частотный спектр излучения в данном случае равен

$$I_{\omega}^{(o)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \frac{(2k_0 c/\omega)^{v-1}}{(\gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2)^v}, \quad (121)$$

что в два раза меньше полной интенсивности переходного излучения в изотропной среде. Магнитное поле не входит в явном виде в выражения (120), (121), поскольку в данном случае направление электрического поля в волне совпадает с направлением внешнего магнитного поля.

Угловое распределение излучения необыкновенной волны, полученное из (95), имеет вид

$$I_{n,\omega}^{(e)} = \frac{8\pi(v-1)}{v} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \left( \frac{\omega}{\omega_{Be}} \right)^4 \times \\ \times \frac{(2k_0 c/\omega)^{v-1} \vartheta^2 \cos^2 \phi}{(\vartheta^2 + \gamma^{-2} - \omega_p^2/\omega_{Be}^2)^{v+2}}. \quad (122)$$

В данном случае диаграмма направленности излучения вытянута в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Из проведенного выше обсуждения ясно, что здесь имеет смысл рассматривать излучение частиц с не слишком высокой энергией:

$$\gamma < \frac{\omega_{Be}}{\omega_p}, \quad (123)$$

для которых не выполнено условие излучения Вавилова – Черенкова. При условии (123) в знаменателе (122) можно пренебречь членом  $(\omega_p/\omega_{Be})^2$  по сравнению с  $\gamma^{-2}$ . Тогда для спектра излучения получим

$$I_{\omega}^{(e)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega_{Be}^4} \omega \gamma^{2v} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1}. \quad (124)$$

Это выражение показывает, что излучение частиц любых энергий, удовлетворяющих (123), в интервале частот  $\omega_p \ll \omega \ll \omega_{Be}$  растет по закону

$$I_{\omega}^{(e)} \sim \omega^{2-v} \quad (125)$$

при  $v < 2$ . Излучение обыкновенных волн имеет иной характер: спектр (121) медленно спадает  $I_{\omega}^{(o)} \sim \omega^{v-2}$  на частотах  $\omega_p \ll \omega \ll \omega_p \gamma$  и затем резко падает  $I_{\omega}^{(o)} \sim \omega^{-v-2}$  на более высоких частотах. Сравнивая (121) и (124), легко найти, что излучение обыкновенной волны превалирует, за исключением небольшой области частот, близких к  $\omega_{Be}$ .

**Движение под произвольным углом.** Перейдем теперь к анализу свойств переходного излучения нормальных мод при движении частицы под произвольным углом к магнитному полю. Прежде всего рассмотрим свойства углового распределения переходного излучения на основе общих формул (94), (95).

На рисунке 5а показана типичная диаграмма направленности о-волны при движении релятивистской части-

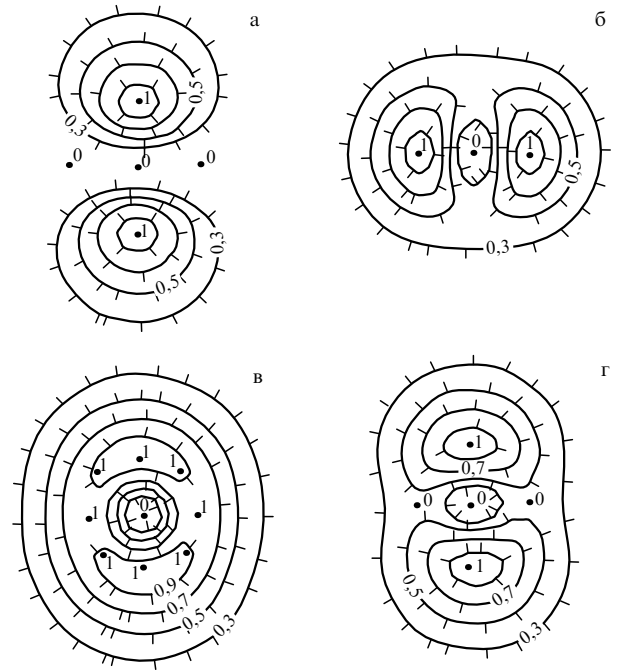


Рис. 5. Диаграммы направленности переходного излучения нормальных мод при  $\gamma = 5$ ,  $\omega/\omega_p = 5$ ,  $\theta = \pi/4$ ; (а) о-волна, (б) е-волна,  $\omega_{Be}/\omega_p = 300$ , (в) е-волна,  $\omega_{Be}/\omega_p = 500$ , (г) е-волна,  $\omega_{Be}/\omega_p = 700$ .

цы под не слишком малыми углами по отношению к внешнему магнитному полю. Видно, что распределение вытянуто вдоль проекции магнитного поля на картинную плоскость. Такой простой вид диаграммы направленности связан с тем, что вклад в излучение обыкновенной волны, связанный с рассеянием виртуальной необыкновенной волны, всегда мал по сравнению с основным вкладом от рассеяния виртуальной обыкновенной волны.

Однако для необыкновенных волн излучение через виртуальную обыкновенную волну может быть большим. Так, на рис. 5б–г представлены распределения интенсивности излучения необыкновенных волн частицей с  $\gamma = 5$  на частоте  $\omega = 5\omega_p$  при различных значениях магнитного поля  $\omega_{Be}/\omega_p = 300, 500, 700$ . В первом случае излучение связано в основном с рассеянием виртуальной необыкновенной волны (диаграмма вытянута в поперечном по отношению к магнитному полю направлении), во втором оба вклада сравнимы, а в третьем вклад от виртуальной обыкновенной волны превалирует. Это означает, что проинтегрированное по углам излучение обыкновенной волны будет определяться только ее собственным показателем преломления, а интенсивность необыкновенных волн в общем случае зависит от показателей преломления обеих нормальных мод. В этом смысле переходное излучение существенно отличается от других типов излучения (например, черенковского [38, 40] и магнитотормозного [51]), для которых интенсивность излучения каждой из нормальных мод определяется только ее собственным показателем преломления. Указанное свойство переходного излучения имеет то же физическое происхождение, что и явление взаимной трансформации нормальных мод в гиротропной плазме [52].

Рассмотрим теперь спектральные зависимости излучения. При интегрировании (94), (95) по углам члены,

содержащие  $\cos 2\phi$ , обращаются в нуль (они описывают интерференцию между двумя вкладами в излучение). Отбросим малый вклад в интенсивность излучения обыкновенных волн, связанных с  $n_e$  и получим:

$$I_{\omega}^{(o)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \times \\ \times \frac{[(\cos^2 \theta - 2K_e \sqrt{u} \cos \theta + K_e^2)/(1-u) + \sin^2 \theta]^2}{[\gamma^{-2} + 2(1-n_o)]^v (1+K_e^2)^2} \quad (126)$$

для обыкновенной волны и

$$I_{\omega}^{(e)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \frac{(2k_0 c/\omega)^{v-1}}{[\gamma^{-2} + 2(1-n_e)]^v (1+K_e^2)^2} \times \\ \times \left\{ \left( \frac{1 + 2K_e \sqrt{u} \cos \theta + K_e^2 \cos^2 \theta}{1-u} + K_e^2 \sin^2 \theta \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{(1-K_e^2)\sqrt{u} \cos \theta - u K_e \sin^2 \theta}{1-u} \right]^2 \right\} \times \\ \times F\left[2, v, v+2; 1 - \frac{\gamma^{-2} + 2(1-n_o)}{\gamma^{-2} + 2(1-n_e)}\right] \quad (127)$$

для необыкновенной волны, где  $F(2, v, v+2; 1-z)$  — гипергеометрическая функция.

Прежде всего получим асимптотические представления (126), (127) при  $u \gg 1$ . Точнее, будем считать, что

$$\frac{4 \cos^2 \theta}{u \sin^4 \theta} \ll 1. \quad (128)$$

Тогда для коэффициентов преломления и векторов поляризации находим:

$$2(1-n_o) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sin^2 \theta, \quad 2(1-n_e) = -\frac{\omega_p^2}{\omega_{Be}^2 \sin^2 \theta}, \quad (129) \\ K_o \approx -\sqrt{u} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}, \quad K_e \approx \frac{\cos \theta}{\sqrt{u} \sin^2 \theta}.$$

Поскольку для частиц с  $\gamma > \omega_{Be} \sin \theta / \omega_p$  выполнено условие Вавилова – Черенкова для необыкновенных волн, мы будем рассматривать лишь частицы с меньшими энергиями. В таком случае аргументы  $z$  гипергеометрической функции в (127) ограничены значениями  $|z| \geq 1$ . Это позволяет аппроксимировать функцию  $F$  аналитическим выражением [55]:

$$F(2, v, v+2; 1-z) \approx \left[ 1 + \frac{z^v - 1}{\Gamma(2+v)\Gamma(2-v)} \right]^{-1}. \quad (130)$$

Подставляя (129) в (126) и удерживая только наибольшие члены при условии (128), получим:

$$I_{\omega}^{(o)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \frac{(2k_0 c/\omega)^{v-1} \sin^4 \theta}{(\gamma^{-2} + \omega_p^2 \sin^2 \theta / \omega^2)^v}. \quad (131)$$

Это выражение отличается от случая изотропной плазмы (или строго поперечного движения частицы) наличием множителей  $\sin^2 \theta$  в законе дисперсии обыкновенных волн и  $\sin^4 \theta$  в числителе (131), который описывает проекцию электрического поля обыкновенной волны на направление внешнего магнитного поля.

Семейство спектров излучения обыкновенных волн, построенное по формуле (126) для различных углов  $\theta$ , представлено на рис. 6а. Видно, что наличие магнитного поля не вносит качественных изменений в излучение обыкновенных волн.

Аналогично, переходное излучение необыкновенных волн равно:

$$I_{\omega}^{(e)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \gamma^{2v} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \times \\ \times \left[ \frac{1}{u^2 \sin^4 \theta} + \frac{v^2 \cos^2 \theta}{u} F\left(2, v, v+2; -\frac{\omega_p^2 \gamma^2 \sin^2 \theta}{\omega^2}\right) \right]. \quad (132)$$

Это выражение с учетом (130) удобно анализировать в различных частотных областях. Так, при  $\omega \ll \omega_p \gamma \sin \theta$

$$I_{\omega}^{(e)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \times \\ \times \left[ \frac{\omega^4 \gamma^{2v}}{\omega_{Be}^4 \sin^4 \theta} + \frac{\Gamma(2+v)\Gamma(2-v)\omega_p^{4-2v}\omega^{2(v-1)} \cos^2 \theta}{\omega_{Be}^2 \sin^{2v} \theta} \right]. \quad (133)$$

Второй член, связанный с излучением через виртуальную обыкновенную волну, может доминировать на низких частотах, близких к  $\omega_p$  (именно на этих частотах имеет место эффект взаимной трансформации собственных мод в плазме). В другом предельном случае

$$\omega_p \gamma \sin \theta \ll \omega \ll \omega_{Be} \quad (134)$$

спектр имеет вид

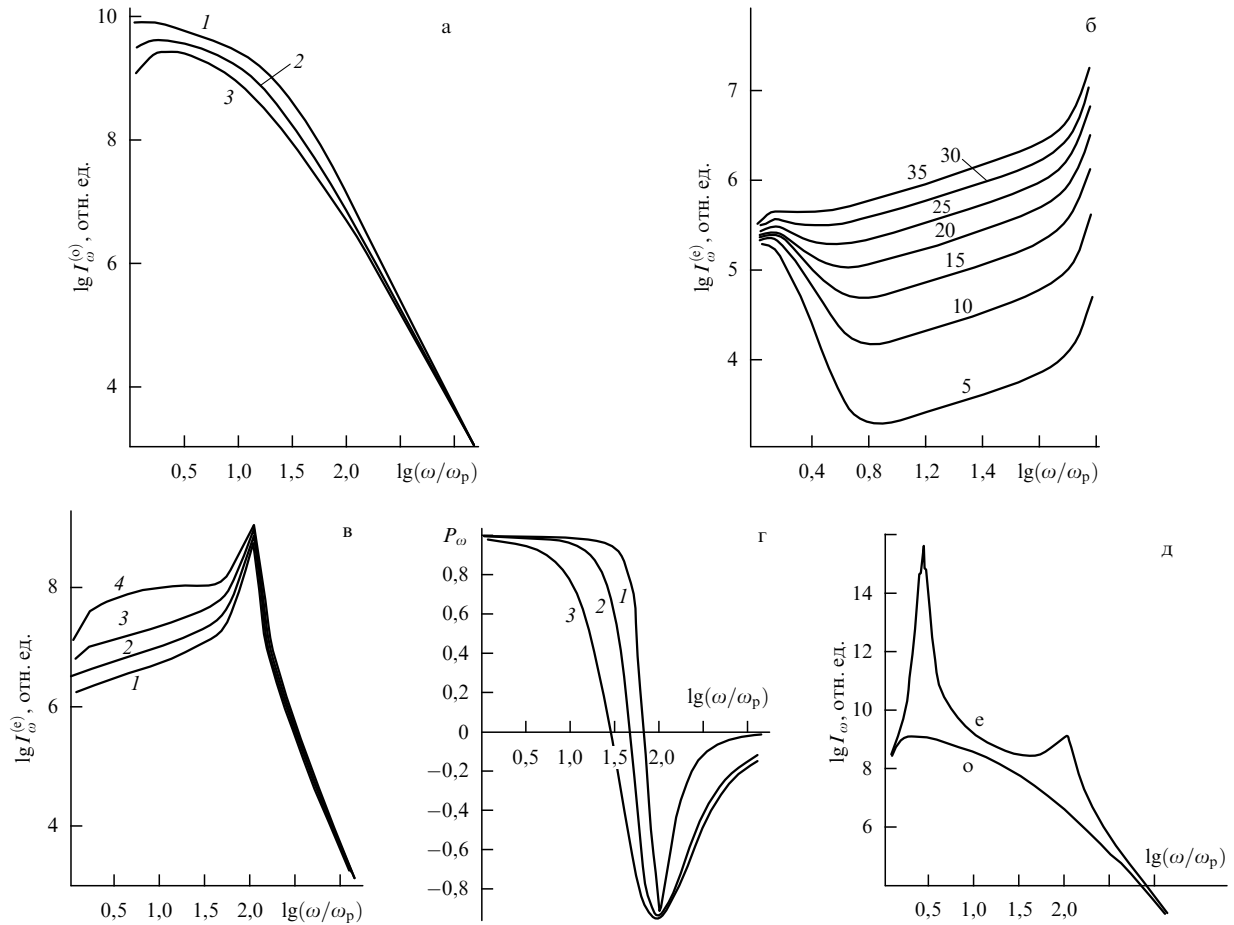
$$I_{\omega}^{(e)} = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega^3} \gamma^{2v} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \frac{\omega^4}{\omega_{Be}^4 \sin^4 \theta} \times \\ \times \left( 1 + \frac{\omega_p^4 \omega_{Be}^2}{\omega^6} \cos^2 \theta \sin^4 \theta \right). \quad (135)$$

Второй член может проявляться для частиц с не слишком высокой энергией на низких (но удовлетворяющих (134)) частотах. Семейство спектров необыкновенных волн при  $\omega_{Be}/\omega_p = 300$ ,  $\theta = \pi/4$  и различных  $\gamma$  приведено на рис. 6б. По мере увеличения частоты излучения и (или) энергии частицы вклад излучения через виртуальную обыкновенную волну уменьшается. Это согласуется с тем, что взаимная трансформация нормальных мод в гиротропной среде наиболее эффективно происходит в области параметров, где  $\omega_p/\omega \approx 1$ .

На рисунке 6в показано семейство спектров излучения необыкновенных волн при тех же параметрах, что и на рис. 6а. При  $\omega < \omega_{Be}$  характер переходного излучения резко отличается от случая изотропной плазмы тем, что при уменьшении частоты интенсивность излучения уменьшается,  $I_{\omega}^{(e)} \sim \omega^{2-v}$ , а не растет, как для обыкновенной волны,  $I_{\omega}^{(o)} \sim \omega^{v-2}$ .

Поляризация излучения при тех же параметрах представлена на рис. 6г. В области частот  $\omega_p < \omega < \omega_{Be}$  в основном излучаются обыкновенные волны, а при  $\omega > \omega_{Be}$  — необыкновенные; при  $\theta = \pi/2$  зависимость поляризации от отношения гирочастоты к частоте квадратичная, а при других углах — линейная.

Несмотря на то, что, как правило, при  $\omega < \omega_{Be}$  излучение обыкновенных волн более эффективно, это имеет место не всегда. Так, на рис. 6д нанесены спектры



**Рис. 6.** (а) Семейство спектров переходного излучения обыкновенных волн при различных питч-углах релятивистской частицы для параметров:  $\gamma = 25$ ,  $\omega_{Be}/\omega_p = 100$ , (1)  $\theta = \pi/2$ , (2)  $\theta = \pi/4$ , (3)  $\theta = \pi/6$ . (б) Семейство спектров переходного излучения необыкновенных волн при различных значениях энергии релятивистской частицы (цифры у кривых) и параметрах  $\omega_{Be}/\omega_p = 300$ ,  $\theta = \pi/4$ . Интенсивность излучения увеличивается с увеличением лоренц-фактора (цифры у кривых). (в) Семейство спектров переходного излучения необыкновенных волн при различных питч-углах релятивистской частицы для параметров:  $\gamma = 25$ ,  $\omega_{Be}/\omega_p = 100$ , (1)  $\theta = \pi/2$ , (2)  $\theta = \pi/3$ , (3)  $\theta = \pi/4$ , (4)  $\theta = \pi/6$ . (г) Зависимость поляризации переходного излучения от частоты при различных питч-углах релятивистской частицы для параметров:  $\gamma = 25$ ,  $\omega_{Be}/\omega_p = 100$ , (1)  $\theta = \pi/2$ , (2)  $\theta = \pi/4$ , (3)  $\theta = \pi/6$ ;  $P > 0$  соответствует обыкновенным волнам,  $P < 0$  — необыкновенным. (д) Спектры переходного излучения обыкновенных и необыкновенных волн при приближении к черенковской генерации необыкновенных волн. Параметры:  $\gamma = 25$ ,  $\omega_{Be}/\omega_p = 100$ ,  $\theta = \pi/15$ .

излучения обыкновенных и необыкновенных волн при приближении параметров к черенковскому порогу. В данном случае на некоторых частотах излучение необыкновенных волн может превосходить излучение обыкновенных волн на несколько порядков. Заметим, что графики построены по формулам (126), (127), которые не учитывают никаких факторов, ограничивающих рост излучения.

**Обсуждение роли гиротропии.** Переходное излучение в магнитоактивной плазме приобретает ряд новых свойств. В частности, при определенных условиях появляются расходящиеся выражения, например, если выполнено условие излучения Вавилова – Черенкова для необыкновенной волны, поскольку вероятность рассеяния черенковского кванта на бесконечной длине (в неограниченной непоглощающей среде) равна единице. При рассмотрении конкретных ограниченных сред эта расходимость может быть устранена.

При приближении к черенковскому порогу (но когда условие Вавилова – Черенкова еще не выполнено) может иметь место аномальное увеличение интенсивности излучения (необыкновенных волн). Подобное возраста-

ние излучения было известно давно [54], оно связано с увеличением длины когерентности при приближении к черенковскому порогу (виртуальные фотоны становятся почти реальными). Тем не менее в реальных условиях рост излучения может ограничиваться вследствие многих факторов: конечности основного масштаба неоднородностей плотности плазмы, кривизны траектории или торможения частицы в плазме и т.п.

Кроме того, наши выражения для е-волн расходятся при  $\omega_{Be}/\omega \rightarrow 1$ , т.е. в области циклотронного резонанса. Хорошо известно [49], что приближение холодной плазмы, которым мы пользовались, неприменимо в этой области, и для корректного описания нужно учитывать тепловое движение частиц плазмы (пространственную дисперсию). Мы этого не делали потому, что корректность приведенного описания нарушается раньше, чем эффекты пространственной дисперсии становятся существенными. Дело в том, что по мере приближения к циклотронному резонансу при некоторой частоте нарушается условие

$$|1 - n_e^2| \ll 1. \quad (136)$$

Это значит, что фазовая скорость нормальной моды начинает сильно отличаться от скорости света в вакууме  $c$ . Следовательно, пропадают специфические особенности, характерные для излучения релятивистских частиц, и, в частности, отсутствует острая направленность излучения вдоль скорости частицы. По этой причине особенности в области  $\omega \approx \omega_{Be}$  на рис. 6в, д не описывают количественно излучение на этих частотах, и все рассмотрение переходного излучения в этой области должно проводиться по-другому (заметим, что в узкой области частот

$$\omega_{Be} \left( 1 + \frac{\omega_p^2 \sin^2 \theta}{2\omega_{Be}^2} \right) < \omega < \omega_{Be} \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{Be}^2} \right)$$

необыкновенные волны вообще не могут распространяться в магнитоактивной плазме). Однако с практической точки зрения такое рассмотрение, по-видимому, не очень интересно, поскольку при  $\omega \approx \omega_{Be}$  генерируется более интенсивное циклотронное излучение.

**Область применимости результатов.** Рассмотрим вопрос об области применимости приближения прямолинейного движения релятивистской частицы. Как показано в разделе 2.2, переходное излучение электронов, движущихся по винтовой линии, сильно подавляется при

$$\gamma > \frac{\omega_p}{\omega_{Be} \sin \theta}. \quad (137)$$

Поэтому переходное излучение электронов описывается полученными здесь формулами в слабогиротропной плазме и при квазипродольном движении. Для излучения протонов и более тяжелых частиц ситуация более благоприятная. В соответствии с результатами предыдущих разделов кривизна траектории частицы сильно влияет на переходное излучение (а именно, подавляет его) при условии, что частица поворачивается на угол, превышающий характерный угол испускания излучения, на длине, равной длине когерентности излучения. Таким образом, условие применимости приближения прямолинейного движения тяжелых частиц можно записать в виде

$$\frac{2c}{\omega} [\gamma^{-2} + 2(1 - n_j)]^{-1} < 2c \left( \frac{\gamma^2}{\omega \omega_{Bp}^2 \sin \theta} \right)^{1/3}, \quad (138)$$

или, более компактно,

$$\left( \frac{\omega_{Bp} \sin \theta}{\omega \gamma} \right)^{2/3} < \gamma^{-2} + 2(1 - n_j). \quad (139)$$

Рассмотрим для оценок наиболее неблагоприятный случай, когда частица движется строго поперек магнитного поля. Тогда для обыкновенных волн получается прежнее условие применимости:

$$\gamma < \frac{\omega_p}{\omega_{Bp}}, \quad (140)$$

а для необыкновенных волн (принимая во внимание (123)), находим:

$$\omega > \omega_* = \omega_{Bp} \gamma^2. \quad (141)$$

Следовательно, кривизна траектории не влияет на излучение е-волн на всех частотах, если

$$\gamma < \left( \frac{\omega_p}{\omega_{Bp}} \right)^{1/2}. \quad (142)$$

А при

$$\gamma < \left( \frac{\omega_{Be}}{\omega_{Bp}} \right)^{1/2} = \left( \frac{m_p}{m_e} \right)^{1/2} \approx 43 \quad (143)$$

в области  $\omega_* < \omega < \omega_{Be}$  кривизна траектории несущественна, но проявляется на более низких частотах. Однако подавление излучения необыкновенных волн при  $\omega < \omega_*$  слабо сказывается на общей энергетике переходного излучения в магнитоактивной плазме. Если иметь в виду типичные для солнечных вспышек значения параметров, то условия (140)–(143) обычно выполняются, поскольку энергии протонов, появляющихся даже в наиболее мощных вспышках, редко превосходят 20 ГэВ [56] ( $\gamma \sim 20$ ). В лабораторных же условиях, по-видимому, можно осуществить различные режимы переходного излучения и, в частности, такие, когда кривизна траектории тяжелых частиц играет важную роль.

Таким образом, в магнитоактивной плазме обыкновенные и необыкновенные волны генерируются существенно по-разному, что приводит к сильной поляризации испускаемого излучения. При движении частицы вдоль магнитного поля переходное излучение заметно ослабляется на частотах  $\omega/\omega_{Be} < 1$  из-за подавления поперечного движения электронов плазмы магнитным полем. При поперечном движении релятивистской частицы (протона) обыкновенные волны испускаются значительно эффективнее, чем необыкновенные (при  $\omega_{Be}/\omega_p \gg 1$ ). Переходное излучение электронов в этих условиях сильно подавлено вследствие искривления их траекторий магнитным полем. На частотах  $\omega/\omega_{Be} > 1$  поляризация излучения также может быть весьма высокой. Степень поляризации в этом случае зависит фактически только от величины магнитного поля, что может стать основой метода независимой оценки величины поля, например, из наблюдения радиоизлучения солнечных вспышек.

### 3. Переходное излучение частиц произвольной энергии

В разделе 2 подробно исследовано переходное излучение ультрарелятивистских частиц в различных условиях. В частности оказывается, что ПИ эффективно генерируется лишь частицами с достаточно низкой энергией, для которых

$$\gamma < \frac{\omega_p}{\omega_B}, \quad (144)$$

где  $\gamma = E/Mc^2$  — лоренц-фактор частицы,  $\omega_p$  — плазменная частота, а  $\omega_B = QB/Mc$  — гирочастота частицы. В природных условиях обычно имеется протяженный, падающий с энергией спектр заряженных частиц, например,  $dN_e \propto N_e E^{-\xi} dE$ . В таком случае существенным может оказаться излучение умеренно релятивистских и нерелятивистских зарядов. Этот раздел посвящен вычислению ПИ заряженных электронов (и ионов) произвольной (т.е. не обязательно релятивистской) энергии в

плазме, содержащей протяженный спектр случайных неоднородностей плотности (35). Наряду со спектрально-угловым и спектральным распределениями интенсивности излучения заряда произвольной энергии вычисляется также важная для приложений излучательная способность ансамбля частиц со степенным спектром и коэффициенты переходного самопоглощения (или усиления).

### 3.1. Переходное излучение в изотропной плазме

Как уже обсуждалось [28, 19], источником ПИ является ток электронов плазмы, возбуждаемый квазистационарным полем быстрой заряженной частицы:

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^m = \frac{ie^2}{m\omega} \int d\mathbf{k}' \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^Q \delta N_{\mathbf{k}'}, \quad (145)$$

где  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $\delta N_{\mathbf{k}'}$  — вариация концентрации электронов среды,  $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^Q$  — квазистационарное электрическое поле излучающей частицы. Поле частицы связано с ее током

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^Q = \frac{Q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}] \quad (146)$$

( $Q$  — заряд частицы, а  $v$  — ее скорость) посредством функции Грина. В данном случае [57, 58], в отличие от ультрарелятивистского предела (раздел 2), нужно учитывать не только поперечную, но и продольную функцию Грина. В результате квазистационарное поле  $\mathbf{E}^Q$  примет вид

$$E_{\omega, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{Q,i} = \frac{4\pi i q \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}]}{(2\pi)^3} \frac{\omega [v_i - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_i \omega/k^2]}{c^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 - k^2]}. \quad (147)$$

Энергия, излучаемая током (145) на частоте  $\omega$  в направлении  $\mathbf{n}$ , описывается выражением, аналогичным (24):

$$\mathcal{E}_{\mathbf{n}, \omega} = (2\pi)^6 \frac{\omega^2}{c^3} \varepsilon^{1/2} \langle |\mathbf{n} \times \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^m|^2 \rangle, \quad (148)$$

где  $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  — диэлектрическая проницаемость плазмы. Учет величины  $\varepsilon^{1/2}$  в (148) необходим, поскольку мы хотим корректно описать ПИ на всех частотах  $\omega \geq \omega_p$ , в том числе и при  $\omega \approx \omega_p$ , где отличие  $\varepsilon$  от единицы существенно. Ультрарелятивистское описание справедливо для релятивистских частиц  $\gamma \gg 1$  на высоких частотах  $\omega \gg \omega_p$ , где  $\varepsilon \approx 1$ .

**Спектрально-угловое распределение ПИ.** Использование приведенных выражений (145)–(148) позволяет получить спектрально-угловое распределение интенсивности излучения:

$$I_{\mathbf{n}, \omega} = \frac{8\pi e^4 q^2}{m^2 c^3 \omega^2 \varepsilon^{3/2}} \int d\mathbf{k}' |\delta N_{\mathbf{k}'}|^2 \frac{([\mathbf{n} \times \mathbf{v}] + [\mathbf{n} \times \mathbf{k}']\omega/k^2)^2}{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2/k^2 - 1]^2} \times \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}]. \quad (149)$$

Подынтегральное выражение в (149) зависит от всех трех переменных (включая азимутальный угол  $\varphi'$  вектора  $\mathbf{k}'$ ). При выполнении интегрирования в (149) удобно считать, что частица движется вдоль оси  $z$ , а вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $(x, z)$ . Тогда азимутальный

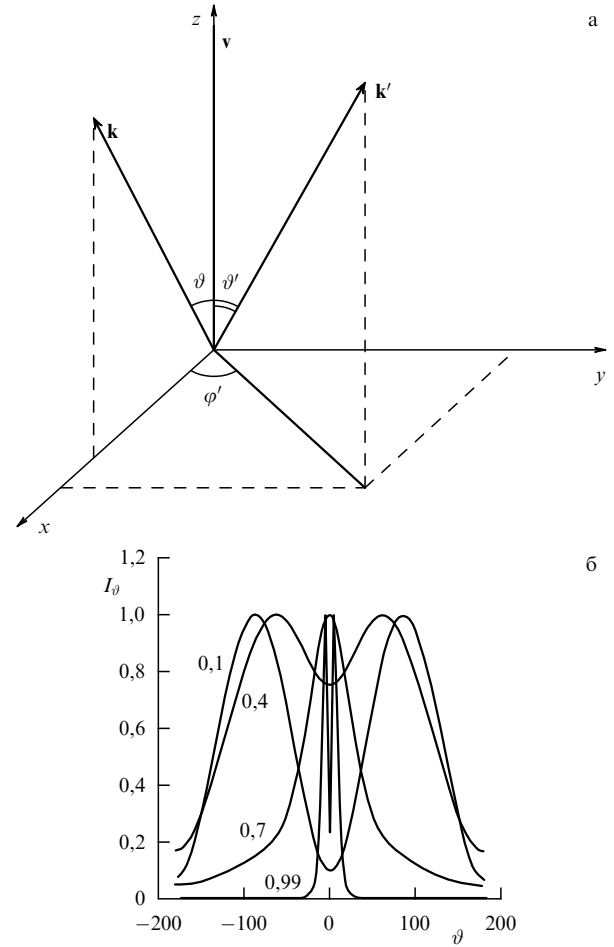


Рис. 7. (а) Система координат. (б) Нормированное угловое распределение переходного излучения для различных значений параметра  $v/v_{ph}$  (цифры у кривых).

угол  $\varphi'$  равен углу между проекцией вектора  $\mathbf{k}'$  на плоскость  $(x, y)$  и осью  $x$  (проекцией вектора  $\mathbf{n}$  на эту же плоскость) (рис. 7а). Интенсивность излучения (149) представляется в виде:

$$I_{\mathbf{n}, \omega} = \frac{8\pi e^4 Q^2}{vm^2 c^3 \omega^2 \varepsilon^{3/2}} \int_0^\infty k' dk' |\delta N_{\mathbf{k}'}|^2 \Phi, \quad (150)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi = & \int_{-1}^1 d \cos \vartheta' \delta(\cos \vartheta' - \cos \vartheta_r) \int_0^{2\pi} \frac{k^4 d\varphi'}{(a + b \cos \varphi')^2} \times \\ & \times \left[ [\mathbf{n} \times \mathbf{v}]^2 + \frac{\omega^2 k'^2}{k^4} (1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta' - \right. \\ & - 2 \cos \vartheta \cos \vartheta' \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi' - \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta' \cos^2 \varphi') + \\ & \left. + \frac{2v\omega k'}{k^2} (\cos \vartheta' \sin^2 \vartheta - \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi') \right], \quad (151) \end{aligned}$$

$\cos \vartheta_r = -(\omega - kv \cos \vartheta)/k'v$ ,  $a = k'^2 - 2kk' \cos \vartheta \cos \vartheta'$ ,  $b = -2kk' \sin \vartheta \sin \vartheta'$ . Интегрирование по  $d \cos \vartheta'$  с использованием  $\delta$ -функции проводится тривиально и приводит к появлению  $\Theta$ -функции  $\Theta(1 - \cos^2 \vartheta_r)$ , связанной с очевидным требованием  $\cos^2 \vartheta_r \leq 1$ . Заменив в (151)  $\cos \vartheta'$  на  $\cos \vartheta_r$  и разложив полученное выражение на

простейшие дроби, найдем:

$$\begin{aligned} \Phi = & \Theta(1 - \cos^2 \vartheta_r) \int_0^{2\pi} k^4 d\varphi' \times \\ & \times \left\{ -\frac{\omega^2}{4k^6} + \left( \frac{\omega^2 k'^2}{2k^6} + \frac{\omega v}{k^3} \cos \vartheta \right) (a + b \cos \varphi')^{-1} + \right. \\ & + \left[ v^2 \sin^2 \vartheta + \frac{\omega v}{k} \left( 2 - \frac{k'^2}{k^2} \right) \cos \vartheta - \frac{\omega^2 k'^4}{4k^6} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega^2 k'^2}{k^4} - \frac{2\omega^2}{k^2} \right] (a + b \cos \varphi')^{-2} \right\}. \end{aligned} \quad (152)$$

Вычисление интегралов по  $d\varphi'$  в (152) (являющихся табличными), понижение степени  $\cos \vartheta$  в последнем слагаемом и приведение подобных членов позволяет получить:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\pi\omega^2}{2k^2} \Theta(1 - \cos^2 \vartheta_r) \left\{ -1 + \right. \\ & + \frac{\beta^{-2} \cos^2 \vartheta + \beta^{-1} \cos \vartheta + (1 - \beta^{-2})(1 - y^2/2 + y^4/4) + y^2/2}{[\cos^2 \vartheta + \beta(y^2 - 2) \cos \vartheta + \beta^2 - y^2 + y^4/4]^{1/2}} + \\ & + (1 - \beta^{-2}) \left( 1 - \frac{y^2}{2} \right)^2 \times \\ & \times \frac{\beta(1 - y^2) \cos \vartheta - \beta^2 + y^2/2 - y^4/4}{[\cos^2 \vartheta + \beta(y^2 - 2) \cos \vartheta + \beta^2 - y^2 + y^4/4]^{3/2}} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (153)$$

где  $\beta = \omega/kv$ ,  $y = k'/k$ . Таким образом, спектрально-угловое распределение интенсивности ПИ сводится к однократному интегрированию по спектру неоднородностей плотности плазмы:

$$I_{n,\omega} = \frac{4\pi e^4 Q^2}{vm^2 c^3 \varepsilon^{3/2}} \int_{\beta - \cos \vartheta}^{\infty} y dy |\delta N|_{\mathbf{k}}^2 F(y, \beta, \cos \vartheta), \quad (154)$$

где  $F(y, \beta, \cos \vartheta) = 2k^2 \Phi / \pi \omega^2 \Theta(1 - \cos^2 \vartheta_r)$ . Однако аналитически проинтегрировать (154) со степенным спектром (35) не удастся. На рисунке 76 представлены нормированные угловые распределения интенсивности ПИ при различных значениях параметра  $kv/\omega$ , полученные численным интегрированием (154). В нерелятивистской области излучение носит дипольный характер и его максимум приходится на углы порядка  $90^\circ$  по отношению к скорости частицы. При увеличении  $kv/\omega$ , максимум излучения приближается к направлению скорости частицы, и в ультрарелятивистском случае наблюдается острая направленность излучения вдоль вектора скорости. Заметим, что при вычислении ПИ в ультрарелятивистском пределе (39), интенсивность излучения вперед ( $\vartheta = 0$ ) обращается в нуль. На рисунке 76  $I(\vartheta = 0) > 0$ , что связано с учетом продольного собственного поля релятивистской частицы.

Перейдем теперь к вычислению **интенсивности ПИ в полный телесный угол**:

$$I_\omega = 2\pi \int_{-1}^1 I_{n,\omega} d \cos \vartheta. \quad (155)$$

Изменив порядок интегрирования по  $dy$  и  $d \cos \vartheta$ , получим

$$\begin{aligned} I_\omega = & \frac{8\pi^3 e^4 Q^2}{vm^2 c^3 \varepsilon^{3/2}} \left( \int_{\beta-1}^{\beta+1} y dy \int_{\beta-y}^1 d \cos \vartheta + \right. \\ & \left. + \int_{\beta+1}^{\infty} y dy \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \right) |\delta N|_{\mathbf{k}}^2 F(y, \beta, \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (156)$$

Поскольку при изотропно распределенных неоднородностях величина  $|\delta N|_{\mathbf{k}}^2$  не зависит от угла  $\vartheta$ , то в (156) интегрировать по углам следует только функцию  $F$ . Введем две новые функции  $F_1$  и  $F_2$ :

$$F_1 = \int_{\beta-y}^1 F d \cos \vartheta, \quad F_2 = \int_{-1}^1 F d \cos \vartheta. \quad (157)$$

Вычисление (157) с учетом области изменения переменной  $y$  в каждом из интервалов дает

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{(y+1-\beta)(y^2-2)^2[1+\beta(y+1)]}{2\beta^2 y(y+2)} + (y+1-\beta) \times \\ & \times \left( -\frac{3}{4\beta} y^3 + \frac{3\beta-1}{4\beta^2} y^2 + \frac{6\beta+1}{2\beta^2} y - \frac{1}{2\beta^2} - \frac{5}{2\beta} - 1 \right) + \\ & + \left( \frac{5\beta^2-3}{8\beta^2} y^4 - \frac{2\beta^2-1}{\beta^2} y^2 + \frac{3\beta^2-1}{\beta^2} \right) \ln \frac{y(\beta+1)}{(y+2)(\beta-1)}, \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \frac{3-5\beta^2}{2\beta^2} y^2 + \frac{3\beta^2-1}{\beta^2} + \frac{\beta^2-1}{\beta^2(y^2-4)} - \\ & - \left( \frac{5\beta^2-3}{8\beta^2} y^4 - \frac{2\beta^2-1}{\beta^2} y^2 + \frac{3\beta^2-1}{\beta^2} \right) \ln \left( 1 - \frac{4}{y^2} \right). \end{aligned} \quad (159)$$

Если подставить в (156) спектр равновесных тепловых флуктуаций  $|\delta N|_{\mathbf{k}}^2$ , при учете (158), (159), то в результате получится интенсивность поляризационного тормозного излучения. Анализ этой проблемы посвящена работа [59], см. также раздел 4. К сожалению, указанное интегрирование не удается до конца провести в элементарных функциях.

Рассмотрим излучение, возникающее при наличии надтепловых флуктуаций плазмы. Выразив спектр неоднородностей (35) через безразмерную переменную  $y$

$$|\delta N|_{\mathbf{k}}^2 = \frac{v-1}{4\pi} \frac{k_0^{v-1} \langle \Delta N^2 \rangle}{k^{v+2}} y^{-v-2}, \quad (160)$$

представим интенсивность излучения в виде

$$\begin{aligned} I_\omega = & \frac{2\pi^2(v-1)e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{vm^2 c^3 \varepsilon^{3/2} k^{v+2}} \times \\ & \times \left\{ \int_{\beta-1}^{\beta+1} F_1 y^{-v-1} dy + \int_{\beta+1}^{\infty} F_2 y^{-v-1} dy \right\}. \end{aligned} \quad (161)$$

Вычисление (161) проводится посредством разложения функций  $F_1$  и  $F_2$  на простейшие дроби и интегрирования по частям слагаемых, содержащих логарифмы. После приведения подобных членов и проведения некоторых тождественных преобразований, находим

$$\begin{aligned} I_\omega = & \frac{8\pi^2(v-1)}{(4-v)(2-v)} \frac{ve^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{\omega^2 m^2 c^3 \varepsilon^{3/2} k^v} \times \\ & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ (\beta+\sigma)^{-v} \left[ \frac{2(\beta\sigma)^3}{v(v-1)} + \frac{2(\beta\sigma)^2}{v-1} + \right. \right. \\ & + \frac{v^2+2v+16}{4(v+1)} \left( \frac{v+2}{v} \beta\sigma + 1 \right) \left. \right] + \\ & + (v^2-2v+8) \frac{(v+6)\beta^2 - (v+2)}{4v} \sigma \int_{\beta-\sigma}^{\infty} \frac{y^{-v-1} dy}{y+2\sigma} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (162)$$

Суммирование по  $\sigma = \pm 1$  введено в (162) для большей компактности, а оставшийся в (162) интеграл может быть

выражен через гипергеометрическую функцию [60]. Полученная формула (162) справедлива для ПИ прямолинейно движущейся заряженной частицы любой энергии на частотах  $\omega > \omega_p$  за исключением небольшой области, примыкающей к  $\omega_p$  —  $\omega \lesssim \omega_p(1 + v_T^2/v^2)$ , где  $v_T$  — тепловая скорость электронов плазмы. В этой области для корректного описания интенсивности  $I_\omega$  необходимо учитывать пространственную дисперсию плазмы. Эта задача подробно обсуждается в следующих разделах этой главы. Пока же укажем, что в изотропной плазме роль пространственной дисперсии сводится к замене

$$\varepsilon^{-3/2} \rightarrow F(\alpha), \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{3} \left( \frac{v}{v_T} \right)^2, \quad (163)$$

где функция  $F(\alpha)$  описывает большой узкий пик в спектре вблизи частоты  $\omega_p$ . Эту часть излучения мы будем называть резонансным ПИ. При условии  $(\omega - \omega_p)/\omega_p \gg (v_T/v)^2$  имеем  $F(\alpha) \approx \varepsilon^{-3/2}$ , и справедливо выражение (162). В противоположном случае,  $\omega \rightarrow \omega_p$ ,  $\alpha \ll 1$ , имеем  $F(\alpha) \approx (1/18)\varepsilon^{1/2}(v/v_T)^4$ . Учитывая, что здесь  $\beta \gg 1$ , получим

$$I_\omega(\omega \rightarrow \omega_p) = \frac{16\pi^2(v-1)}{27(v+2)} \varepsilon^{1/2} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \left( \frac{v}{v_T} \right)^4 \frac{v^{v+1}}{\omega_p^{v+2}}. \quad (164)$$

Перейдем к нахождению асимптотических представлений выражения  $S = \sum_{\sigma=\pm 1} \dots$ , зависящего от  $\beta$ , при малых и больших значениях  $(\beta - 1)$ .

**Ультрарелятивистский предел.** При  $(\beta - 1) \ll 1$  следует принять  $\beta = 1$  везде, кроме членов вида  $(\beta - 1)$ , а в знаменателе под интегралом пренебречь  $u$  по сравнению с 2. Тогда

$$S = \frac{(4-v)(2-v)}{2v^2(v+1)} (\beta - 1)^{-v}. \quad (165)$$

Подставляя (165) в (162) и полагая в коэффициенте  $v = c$ ,  $\varepsilon = 1$ , получим ультрарелятивистский предел ПИ (46), справедливый при  $\gamma \gg 1$ ,  $\omega \gg \omega_p$ .

**Нерелятивистский предел.** В противоположном предельном случае,  $(\beta - 1) \gg 1$ , величины  $(\beta \pm 1)^{-v}$  нужно разложить в ряд по степеням  $1/\beta$ , причем первые не исчезающие члены такого разложения возникают лишь в четвертом порядке. Вычислив интегралы с той же степенью точности по  $1/\beta$ , найдем

$$S = \frac{4(4-v)(2-v)}{3(v+2)} \beta^{-v}. \quad (166)$$

В результате при  $(\beta - 1) \gg 1$  имеем

$$I_\omega^{\text{NR}} = \frac{32\pi^2(v-1)}{3(v+2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2 \omega^{v+2}} F(\alpha) v^{v+1}. \quad (167)$$

Заметим, что выражение (167) справедливо и для ПИ релятивистских частиц при  $\omega \rightarrow \omega_p$ , так как в этом случае  $(\beta - 1) \gg 1$ .

Использование асимптотик (165), (166) и применение стандартной процедуры аппроксимации результатов численного расчета функции  $S$  аналитической формулой приводит к результату

$$S = \frac{(4-v)(2-v)}{2v^2(v+1)} (A_1 + A_2), \quad (168)$$

где

$$A_1 = (\beta - 1)^{-v} + \frac{8v^3 + 8v^2 - 3v - 6}{3(v+2)} \beta^{-v}, \quad (169)$$

$$A_2 = -\frac{400(1,18v - 2,17v + 1,18)}{3(v+2)} \beta^{-3,03v-1,14}. \quad (170)$$

Учет только величины  $A_1$  (составленной из асимптотик (165), (166)) в (168) дает правильный порядок величины (ошибка не превосходит 100 %), а поправка  $A_2$  обеспечивает среднюю точность  $\sim 10\%$  и наибольшую ошибку  $\sim 20\%$ . Таким образом, интенсивность переходного излучения заряженной частицы произвольной энергии на всех частотах  $\omega \geq \omega_p$  описывается выражением

$$I_\omega = \frac{4\pi^2(v-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{m^2 c^3} \frac{v}{k^v \omega^2} F(\alpha) \times \\ \times \left[ \left( \frac{\omega}{kv} - 1 \right)^{-v} + \frac{8v^3 + 8v^2 - 3v - 6}{3(v+2)} \left( \frac{kv}{\omega} \right)^v - \right. \\ \left. - \frac{400(1,18v^2 - 2,17v + 1,18)}{3(v+2)} \left( \frac{kv}{\omega} \right)^{3,03v+1,14} \right]. \quad (171)$$

Спектры ПИ, вычисленные по формуле (171) и релятивистским асимптотикам для различных значений импульса частицы, приведены на рис. 8а. Видно, что на высоких частотах релятивистские выражения хорошо описывают излучение высокоэнергетических частиц, тогда как вблизи плазменной частоты появляется сильный узкий пик, превышающий уровень подложки на несколько порядков величины.

Эти результаты можно использовать в лабораторных условиях для анализа экспериментов с моноэнергетическими пучками частиц. Для астрофизических приложений часто требуется провести также усреднение по энергетическому распределению излучающих частиц.

**ПИ ансамбля быстрых частиц.** Обычно спектр излучающих частиц в астрофизических условиях может быть представлен в виде

$$dN_e = (\xi - 1) N_e(x > x_0) \frac{x_0^{\xi-1} dx}{x^\xi}, \quad x_0 < x < x_1, \quad (172)$$

где  $x = p/mc$  — безразмерный импульс частицы. Тогда излучение ансамбля частиц со спектром (172) записывается следующим образом:

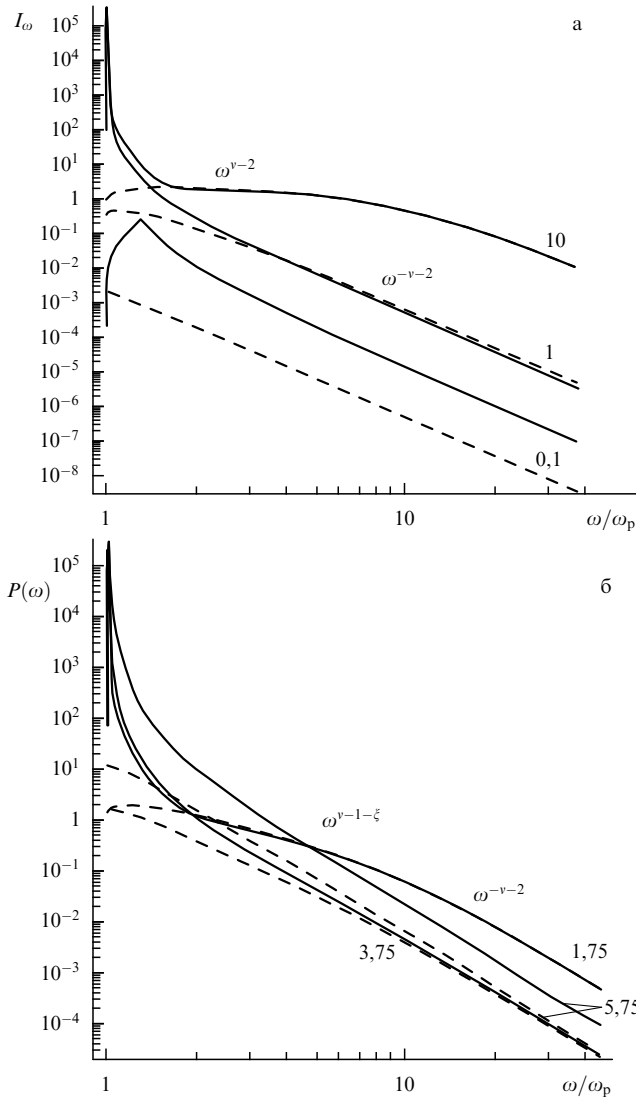
$$P_\omega = \frac{4\pi^2(v-1)(\xi-1)}{v^2(v+1)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{m^2 c^2} N_e(x > x_0) \frac{G(\omega)}{k^v \omega^2}, \quad (173)$$

где

$$G(\omega) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{F(\alpha) x_0^{\xi-1} dx}{(1+x^2)^{0,5} x^{\xi-1}} \times \\ \times \left[ (\beta - 1)^{-v} + \frac{8v^3 + 8v^2 - 3v - 6}{3(v+2)} \beta^{-v} - \right. \\ \left. - \frac{400(1,18v - 2,17v + 1,18)}{3(v+2)} \beta^{-3,03v-1,14} \right], \quad (174)$$

а величина скорости  $v$ , входящая в определение  $\alpha$  (см. (163)), должна быть выражена через безразмерный





**Рис. 8.** (а) Семейство спектров переходного излучения для различных значений безразмерного импульса заряженной частицы  $x = p/mc$  (цифры у кривых). (б) Излучение ансамбля заряженных частиц со степенным распределением по импульсам для различных показателей спектра (цифры у кривых). Штриховыми линиями показаны спектры, вычисленные по релятивистским асимптотикам.

импульс:

$$\frac{v}{c} = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}. \quad (175)$$

Рассмотрим прежде всего асимптотическое поведение спектра излучения в области  $\omega \gg \omega_p$ , когда наличие пика при  $\omega \rightarrow \omega_p$  несущественно. Как будет видно, форма соответствующих асимптотик оказывается различной в трех возможных случаях: 1)  $\xi > 2v + 1$ ; 2)  $v + 2 < \xi < 2v + 1$ ; 3)  $\xi < v + 2$ . Если число частиц при увеличении  $x$  падает достаточно быстро ( $\xi > 2v + 1$ ), то основной вклад в излучение дают нерелятивистские частицы. Тогда можно положить  $x = v/c$  и интегрировать (174) по  $dv$  от  $v_0$  до  $\infty$ . Поскольку здесь нужно вычислять интеграл  $\int_{v_0}^{\infty} x^{v+1-\xi} dx$ , см. асимптотику (165), то ясно, что он будет сходиться при

$$\xi > v + 2, \quad (176)$$

что всегда выполняется в данной области, так как  $v + 2 < 2v + 1$  при  $v > 1$ , а спектр излучения запишется в виде

$$P_{\omega} = \frac{32\pi^2(v-1)}{3(v+2)(\xi-v-2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{m^2 c^3} N_e(v > v_0) \frac{v_0^{v+1}}{\omega^{v+2}}. \quad (177)$$

В другом предельном случае,  $\xi < v + 2$ , основной вклад в излучение на рассматриваемых частотах связан с ультра-релятивистскими частицами. Интегрирование (174) при  $\omega < \min\{\omega_p^2/\omega_{Be}, \omega_p \gamma_1\}$ , где  $\gamma_1 = (1+x^2)^{1/2}$  — наибольший лоренц-фактор в спектре (172), дает

$$P_{\omega} = \frac{8\pi^2(v-1)\Gamma[(\xi+1)/2]\Gamma[(2v-\xi+1)/2]}{v^2(v+1)\Gamma(v)} \times \\ \times x_0^{\xi-1} N_e \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle}{cm^2 \omega_p^3} \left(\frac{2k_0 c}{\omega_p}\right)^{v-1} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^{\xi+1-v}. \quad (178)$$

Наконец, при

$$v + 2 < \xi < 2v + 1 \quad (179)$$

справедливы оба выражения (177), (178), а полный спектр дается их суммой. Так как спектр излучения в релятивистском случае  $\omega^{v-1-\xi}$  более пологий, чем в нерелятивистском  $\omega^{-v-2}$ , то на более низких частотах наблюдается излучение нерелятивистских, а на высоких — релятивистских частиц, а вклад частиц с  $E_{kin} \sim mc^2$  несуществен.

На рисунке 8б представлены зависимости спектральной мощности излучения ансамблем частиц  $P(\omega)$  от частоты для трех различных значений  $\xi$ , попадающих в три рассмотренных интервала (при построении графиков было принято  $v = 1,5$ ). Сплошными линиями показаны результаты вычислений по точной формуле (174), а пунктиром — соответствующие релятивистские асимптотики. Из рисунка видно хорошее соответствие приведенных выше оценок и асимптотик результатам точных вычислений. Значение интенсивности ПИ в пике, остающемся после интегрирования по спектру частиц, может на несколько порядков превосходить излучение подложки.

### 3.2. Резонансное переходное излучение

**Общие замечания.** С резонансными эффектами в переходном излучении мы уже сталкивались при рассмотрении ПИ ультрарелятивистских частиц в разделе 2. Сюда относится резкое возрастание интенсивности ПИ вблизи порога черенковской генерации необыкновенных волн или вблизи циклотронной частоты при  $\omega_{Be} > \omega_p$ . Аналогичное явление происходит и при приближении к другой собственной частоте плазмы — ленгмюровской частоте  $\omega_p$  [57]. Этот эффект является более универсальным, поскольку возникает всегда, независимо от соотношения циклотронной и плазменной частот. Переходное излучение, генерируемое вблизи плазменной частоты, мы будем называть *резонансным переходным излучением* (РПИ).

**Вычисление РПИ.** Поскольку фазовая скорость поперечных волн вблизи  $\omega_p$  значительно больше скорости света и  $v/v_{ph} \ll 1$  для любых  $v < c$ , то при вычислении резонансного переходного излучения с точностью до  $(v/v_{ph})^2$  достаточно ограничиться вкладом продольного поля быстрой частицы (нерелятивистское при-

ближение). Однако диэлектрическая проницаемость, входящая в выражение для этого поля, должна быть записана с учетом пространственной дисперсии  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) - 3k^2 d^2 + i\varepsilon''$ . Тогда интенсивность резонансного переходного излучения представится в виде

$$I_{\mathbf{n}, \omega}^R = \frac{8\pi e^4 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{m^2 c^3} \int k'^2 dk' \times \\ \times \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{k}']^2 \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}] |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 d\varphi d\cos\vartheta}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^4 \{[\varepsilon(\omega) - 3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2]^2 + \varepsilon''^2\}}, \quad (180)$$

где  $d = v_T/\omega_p$  — дебаевский радиус, а мнимая часть диэлектрической проницаемости  $\varepsilon''$  выписана для устранения расходимости при интегрировании (180). Заметим, что на рассматриваемых частотах  $\varepsilon(\omega) \ll 1$  и  $k \ll k'$ . Это позволяет пренебречь  $\mathbf{k}$  по сравнению с  $\mathbf{k}'$  везде, кроме резонансного знаменателя. После этого удобно проинтегрировать (180) по углам вектора  $\mathbf{n}$ , т.е. найти энергию, излучаемую в полный телесный угол (диаграмма направленности в данном случае соответствует диполлю):

$$I_{\omega}^R = \frac{32\pi^3 e^4 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{vm^2 c^3} \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'} |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{\sin^2 \vartheta d\cos\vartheta}{[\varepsilon(\omega) + 6kk'd^2 \cos\vartheta - 3k'^2 d^2]^2 + \varepsilon''^2}. \quad (181)$$

В выражении (181) также проведено тривиальное интегрирование по азимутальному углу:  $\int d\varphi \dots = 2\pi$ ,  $\vartheta$  — угол между вектором  $\mathbf{k}'$  и скоростью частицы  $\mathbf{v}$ . Разбиение на простейшие дроби и интегрирование по углу  $\vartheta$  приводит к результату

$$I_{\omega}^R = \frac{32\pi^3 e^4 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{vm^2 c^3} \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'} |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \frac{J_{\vartheta}}{36k^2 k'^2 d^4}, \quad (182)$$

где

$$J_{\vartheta} = a \ln \frac{(a+1)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} - 2 + \frac{1+b^2-a^2}{b} \times \\ \times \left[ \pi \Theta(1-a^2-b^2) + \arctan \frac{2b}{a^2+b^2-1} \right], \quad (183)$$

$a = [3k'^2 d^2 - \varepsilon(\omega)]/(6kk'd^2)$ ,  $b = \varepsilon''/(6kk'd^2)$ . Остановимся подробнее на анализе выражения  $J_{\vartheta}$  (183). Случай непоглощающей среды соответствует пределу  $b \rightarrow 0$ . Тогда при  $a^2 \leq 1$  величина  $J_{\vartheta} \rightarrow \infty$  как  $\pi/b$ . Эта расходимость имеет простое физическое происхождение. Дело в том, что при  $a^2 \leq 1$  оказывается выполненным условие излучения Вавилова – Черенкова для продольных (плазменных) волн. Поэтому поле частицы для соответствующих значений  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  является не квазистационарным, а распространяющимся, и его взаимодействие с неоднородностями плазмы соответствует рассеянию уже излученных квантов, а не генерации новых квантов. Длина пробега черенковских плазмонов в бесконечной непоглощающей среде равна бесконечности, что и является причиной указанной расходимости. Чтобы вычислить интенсивность переходного излучения, понимаемого как результат конверсии квазистационарного поля частицы в распространяющиеся волны [19], следует исключить значения  $a^2 \leq 1$  из области интегрирования по  $dk'$ .

В этом случае функция  $J_{\vartheta}$  может быть упрощена. Отбрасывая член  $\pi \Theta(1-a^2-b^2)$  и раскладывая  $\arctan x$

в ряд в силу малости его аргумента при  $a^2 > 1$ , получим

$$J_{\vartheta} = \left[ a \ln \frac{(a+1)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} - 4 \right] \Theta(a^2 - 1). \quad (184)$$

Величина  $J_{\vartheta}$  имеет особенность при  $b \rightarrow 0$ ,  $a^2 \rightarrow 1$ , однако эта особенность интегрируемая. В этом легко убедиться, разложив  $J_{\vartheta}$  в ряд по степеням  $1/a$ , который сходится в круге  $1/|a| < 1$ . Учет первого не исчезающего члена такого разложения

$$J_{\vartheta} \simeq \frac{4}{3a^2} \Theta(a^2 - 1) \quad (185)$$

обеспечивает точность не менее 30 %. После подстановки (185) в (182) и перехода к безразмерной переменной  $\mu = k'v/\omega$ , спектр резонансного переходного излучения представится в виде

$$I_{\omega}^R = \frac{32\pi^2 (v-1)}{27} \frac{e^4 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{vm^2 c^3} k_0^{v-1} \langle \Delta N^2 \rangle \left( \frac{v}{\omega} \right)^{v+2} \left( \frac{v}{\omega d} \right)^4 \times \\ \times \int_1^{\infty} \frac{d\mu \Theta(a^2 - 1)}{\mu^{v+3} (\mu^2 - \alpha)^2}, \quad (186)$$

где  $\alpha = \varepsilon/3(v/\omega d)^2 \approx \varepsilon/3(v/v_T)^2$ . При произвольных значениях показателя спектра  $v$  интеграл в (186) выражается через гипергеометрическую функцию. На самом деле зависимость формы пика от показателя спектра слабая, поэтому удобно пользоваться результатом интегрирования (186) при  $v = 2$ , который выражается через элементарные функции:

$$\Phi(\alpha) \equiv \int_1^{\infty} \frac{d\mu \Theta(a^2 - 1)}{\mu^5 (\mu^2 - \alpha)^2} = \\ = \frac{1}{\alpha^3} \left[ \frac{1}{1-\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{\alpha} \ln(1-\alpha) \right] \Theta(\omega_1 - \omega) + \\ + \frac{1}{\alpha^4} \frac{c}{2 \times 3^{0.5} v_T} \left( 1 - \frac{6 \times 3^{0.5} v_T}{c} \ln \frac{c}{2 \times 3^{0.5} v_T} \right) \times \\ \times \Theta(\omega - \omega_1) \Theta(\omega_2 - \omega) + \left\{ \frac{1}{\alpha^4} \frac{c}{3^{0.5} v_T} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha^3} \left[ \frac{1}{1-\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{\alpha} \ln(\alpha-1) \right] \right\} \Theta(\omega - \omega_2), \quad (187)$$

где

$$\omega_{1,2} = \omega_p \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{v_T}{v} \right)^2 \left( 1 \mp \frac{2 \times 3^{0.5} v_T}{c} \right) \right]. \quad (188)$$

Далее удобно перейти от функции  $\Phi(\alpha)$  к другой функции:

$$F(\alpha) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{9} \left( \frac{v}{v_T} \right)^4 \Phi(\alpha) = \\ = 2\varepsilon^{-3/2} \left( \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{1-\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{\alpha} \ln(1-\alpha) \right] \Theta(\omega_1 - \omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha^2} \frac{c}{2 \times 3^{0.5} v_T} \left( 1 - \frac{6 \times 3^{0.5} v_T}{c} \ln \frac{c}{2 \times 3^{0.5} v_T} \right) \times \right. \\ \left. \times \Theta(\omega - \omega_1) \Theta(\omega_2 - \omega) + \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \frac{c}{3^{0.5} v_T} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{1-\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{\alpha} \ln(\alpha-1) \right] \right\} \Theta(\omega - \omega_2) \right), \quad (189)$$

поскольку при больших частотах  $\omega \gg \omega_p$ ,  $\alpha \gg 1$  имеем  $F(\alpha) \approx \varepsilon^{-3/2}(\omega)$  и соответствующее выражение спивается с общим спектром переходного излучения (162). Таким образом, спектр ПИ, справедливый на всех частотах  $\omega \geq \omega_p$  получается, если в формуле (162) произвести замену  $\varepsilon^{-3/2} \rightarrow F(\alpha)$  (см. формулу (171)). Легко видеть, что на больших частотах  $\omega \gg \omega_p$  роль пространственной дисперсии мала,  $F(\alpha) \approx \varepsilon^{-3/2} \approx 1$ , на низких частотах  $\alpha \ll 1$ ,  $F(\alpha) \approx \varepsilon^{1/2}/18(v/v_T)^4 \propto (\omega - \omega_p)^{1/2}$ , а в области максимума спектра  $\alpha \approx 1$ ,  $F(\alpha) \sim v^3 c/v_T^4$ .

**Полная энергия РПИ.** Найдем теперь полную энергию, излучаемую за счет резонансного переходного механизма. Проинтегрировав по частотам спектр (167), справедливый вблизи  $\omega_p$  для частиц любых энергий, получим

$$I_{\text{tot}}^R = \frac{64\pi^2(v-1)}{45(v+2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{v+1} \frac{vc}{v_T^2}. \quad (190)$$

Сравнение (190) с энергией, излучаемой в ультрарелятивистской области (50), показывает, что для частиц с  $\gamma < c^2/v_T^2$  резонансное ПИ более существенно, чем обычное ПИ. При  $\gamma > c^2/v_T^2$  основная энергия испускается на частотах  $\omega_m \sim \omega_p \gamma > \omega_p c^2/v_T^2$ .

Если заряженная частица движется в плавно неоднородной плазме (с некоторым распределением по плазменным частотам  $F(\omega_p)$ ), то в наблюдаемое излучение на частоте  $\omega$  основной вклад будут вносить области плазмы с  $\omega_p \approx \omega$ . Для оценки ПИ из таких (крупномасштабно) неоднородных источников удобно пользоваться аппроксимацией

$$I_{\omega}^R = \frac{64\pi^2(v-1)}{45(v+2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{v+1} \frac{vc}{v_T^2} \delta(\omega - \omega_p), \quad (191)$$

которую следует проинтегрировать с функцией  $\Phi(\omega_p)$ .

**РПИ ансамбля частиц.** Для анализа ПИ, генерируемого ансамблем частиц с протяженным спектром, следует проинтегрировать выражение (191) со спектром (172):

$$P_{\omega}^R = \frac{2(v-1)}{45(v+2)} \frac{(\xi-1)\Gamma[(\xi-1)/2]\Gamma[(v-\xi+3)/2]}{\Gamma[(v+2)/2]} \times \\ \times \frac{e^2}{c} x_0^{\xi-1} N_e \omega_p^2 \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \frac{c^2}{v_T^2} \delta(\omega - \omega_p). \quad (192)$$

В это выражение основной вклад дают частицы умеренно релятивистских энергий с  $E_{\text{kin}} \sim mc^2$ .

**Оценим вклад рассеяния черенковских плазмонов** (т.е. отброшенного в (183) полюсного вклада) в полный спектр излучения, генерируемого в случайно-неоднородной плазме. Полная энергия черенковской генерации плазмонов в единицу времени определяется известным выражением [61]:

$$I_{\text{tot}}^P = \frac{e^2 \omega_p^2}{v} \ln \frac{v}{v_T}, \quad (193)$$

а доля плазмонов, рассеянных в единицу времени в поперечные волны, не превосходит отношения вероятности рассеяния плазмона в поперечную волну к вероятности рассеяния плазмона в плазмон,  $w_{ll}/w_{ll} \approx v_T^3/c^3$  [62].

Таким образом, интенсивность излучения, связанного с вкладом полюса (т.е. с рассеянием черенковских плазмонов в поперечные волны), оказывается малой по сравнению с РПИ.

### 3.3. Резонансное переходное излучение в магнитном поле

Из раздела 3.2 видно, что полная энергия, испускаемая РПИ, достаточно велика, чтобы оно проявлялось в природных условиях. Однако в тех объектах, где существуют условия для испускания РПИ, имеются магнитные поля, оказывающие существенное влияние на движение частиц, дисперсию среды, излучение электромагнитных волн.

Влияние кривизны траектории быстрой частицы на ПИ рассматривалось в разделе 2, где было показано, что при

$$\frac{\omega_p}{\omega_B} \gg 1, \quad (194)$$

где  $\omega_B = eB/mc$  — гирочастота электрона, эту траекторию можно считать прямолинейной на частотах  $\omega < \omega_p(\omega_p \gamma / \omega_B)^{1/2}$ , где  $\gamma$  — лоренц-фактор частицы, и в частности, вблизи плазменной частоты. Мы ограничимся случаем относительно слабых полей (194) и не будем учитывать кривизну траектории частицы, но рассмотрим влияние магнитного поля на дисперсию плазмы [63].

**Метод вычисления РПИ в магнитном поле.** На частотах  $\omega \sim \omega_p$  фазовые скорости электромагнитных волн много больше скорости света (и, соответственно, скорости быстрой частицы). Поэтому, как и в разделе 3.2, мы будем использовать нерелятивистское приближение для частиц произвольной энергии. Общая формула для интенсивности РПИ в магнитном поле должна учитывать наличие обыкновенной ( $\sigma = o$ ) и необыкновенной ( $\sigma = x$ ) волн в магнитоактивной плазме с различными показателями преломления  $n_{\sigma}$  и влияние магнитного поля на вид продольной диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k} - \mathbf{k}') = \varepsilon(\omega) - 3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{\omega^4} \sin^2 \theta + i\varepsilon'', \quad (195)$$

где  $\theta$  — угол между направлением магнитного поля  $\mathbf{B}$  и вектором  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ . Таким образом, интенсивность РПИ в одну из нормальных мод запишется в виде

$$I_{\mathbf{n}, \omega}^{R, \sigma} = \frac{4\pi e^4 Q^2 n_{\sigma}}{m^2 c^3} \int d^3 k' \times \\ \times \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{k}']^2 \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}] |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^4 \{[\varepsilon(\omega) - 3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2 - (\omega_p^2 \omega_B^2 / \omega^4) \sin^2 \theta]^2 + \varepsilon''^2\}}, \quad (196)$$

где  $Q, \mathbf{v}$  — заряд и скорость излучающей частицы,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении излучения волны,  $m, e$  — масса и заряд электрона,  $|\delta N|_{\mathbf{k}'}^2$  — спектр неоднородностей плотности плазмы,  $\varepsilon''$  — мнимая часть диэлектрической проницаемости. При произвольной взаимной ориентации векторов  $\mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$  подынтегральное выражение в (196) зависит от азимутального угла  $\varphi_{\mathbf{k}'}$ . К сожалению, наличие данной зависимости не позволяет произвести интегрирование до конца в явном виде.

Поэтому мы вычислим РПИ ансамбля частиц с анизотропной функцией распределения вида

$$f(\mathbf{p}) = f(p, \theta_v), \quad (197)$$

зависящей от полярного угла  $\theta_v$  между направлениями магнитного поля  $\mathbf{B}$  и скорости  $\mathbf{v}$ , но не зависящей от азимутального угла  $\varphi_v$ . Рассмотрение анизотропии такого типа достаточно для абсолютного большинства астрофизических приложений. Интенсивность РПИ ансамбля частиц запишется в виде

$$P_{\mathbf{n}, \omega}^{\mathbf{R}, \sigma} = \frac{4\pi e^4 Q^2 n_\sigma}{m^2 c^3} \int d^3 p f(p, \theta_v) \int d^3 k' \times \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{k}']^2 \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{v}] |\delta N_{\mathbf{k}}|^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^4 \{[\varepsilon(\omega) - 3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2 - (\omega_p^2 \omega_B^2 / \omega^4) \sin^2 \theta]^2 + \varepsilon''^2\}}. \quad (198)$$

Представим теперь функцию распределения частиц в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$f(p, \theta_v) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} F_l(p) P_l(\cos \theta_v). \quad (199)$$

Прежде всего вычислим интеграл по углам вектора скорости (импульса). Для этого выберем направление вектора  $\mathbf{k}'$  в качестве оси  $z$  и выразим  $P_l(\cos \theta_v)$  через углы  $\theta$  и  $\theta_{\mathbf{k}'\mathbf{v}}$  (угол между скоростью  $\mathbf{v}$  и вектором  $\mathbf{k}'$ ) согласно известной формуле сложения [30, с. 132]:

$$P_l(\cos \theta_v) = \sum_{m=-l}^l P_l^{(m)}(\cos \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{v}}) P_l^{(m)}(\cos \theta) \exp(im\varphi_v). \quad (200)$$

Интегралы по азимутальному углу  $\varphi_v$  отличны от нуля только для членов с  $m = 0$ , а интегрирование по  $d \cos \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{v}}$  проводится тривиально с использованием  $\delta$ -функции. В результате имеем

$$P_{\mathbf{n}, \omega}^{\mathbf{R}, \sigma} = \frac{2\pi e^4 Q^2 n_\sigma}{m^2 c^3} \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{p^2 F_l(p) dp}{v} \times \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'^3} |\delta N_{\mathbf{k}}|^2 P_l\left(\frac{\omega}{k'v}\right) \int d\varphi_{k'} d \cos \theta \times \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{k}']^2 P_l(\cos \theta)}{[\varepsilon(\omega) - 3k'^2 d^2 - \omega_p^2 \omega_B^2 / \omega^4 + (\omega_p^2 \omega_B^2 / \omega^4) \cos^2 \theta]^2 + \varepsilon''^2}. \quad (201)$$

Обратим внимание на то, что ненулевой вклад в интенсивность излучения дают только члены ряда с четными  $l$ . Интегрируя по  $d\varphi_{k'}$  и вводя обозначение  $x = \cos \theta$ , получим

$$P_{\mathbf{n}, \omega}^{\mathbf{R}, \sigma} = \frac{2\pi^2 e^4 Q^2 n_\sigma}{m^2 c^3} \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{p^2 F_{2l}(p) dp}{v} \times \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'^3} |\delta N_{\mathbf{k}}|^2 P_{2l}\left(\frac{\omega}{k'v}\right) \frac{\omega^8}{\omega_p^4 \omega_B^4} \times \int_{-1}^1 \frac{[1 + \cos^2 \theta_n + (1 - 3 \cos^2 \theta_n) x^2] P_{2l}(x) dx}{(x^2 - a)^2 + b^2}, \quad (202)$$

где

$$a = -\frac{\varepsilon(\omega) \omega^4}{\omega_p^2 \omega_B^2} + \frac{3k'^2 d^2 \omega^4}{\omega_p^2 \omega_B^2} + 1, \quad b = \frac{\varepsilon'' \omega^4}{\omega_p^2 \omega_B^2}.$$

Случаю непоглощающей среды соответствует предел  $b \rightarrow 0$ . Если при этом  $0 < a < 1$ , то интегралы по  $dx$  в (202) расходятся. Физическая причина этой расходимости и способ ее устранения подробно обсуждались в разделе 3.2: область значений  $0 < a < 1$  должна быть исключена при интегрировании (202). Это достигается, если подынтегральное выражение умножить на  $\Theta[3k'^2 d^2 - \varepsilon(\omega) - 6kk'd^2]$  при  $a > 1$  и на  $\Theta[\varepsilon(\omega) - 3k'^2 d^2 - \omega_p^2 \omega_B^2 / \omega^4 - 6kk'd^2]$  при  $a < 0$ :

$$P_{\mathbf{n}, \omega}^{\mathbf{R}, \sigma} = \frac{4\pi^2 e^4 Q^2 n_\sigma}{m^2 c^3} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{p_0}^{\infty} \frac{p^2 F_{2l}(p) dp}{v} \times \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'^3} |\delta N_{\mathbf{k}}|^2 P_{2l}\left(\frac{\omega}{k'v}\right) \frac{\omega^8}{\omega_p^4 \omega_B^4} J_{2l}(a), \quad (203)$$

где

$$J_{2l}(a) = \int_0^1 \frac{[1 + \cos^2 \theta_n + (1 - 3 \cos^2 \theta_n) x^2] P_{2l}(x) dx}{(x^2 - a)^2} \times \times \Theta[3k'^2 d^2 - \varepsilon(\omega) - 6kk'd^2] + + \int_0^1 \frac{[1 + \cos^2 \theta_n + (1 - 3 \cos^2 \theta_n) x^2] P_{2l}(x) dx}{(x^2 - a)^2} \times \times \Theta\left[\varepsilon(\omega) - 3k'^2 d^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{\omega^4} - 6kk'd^2\right]. \quad (204)$$

Таким образом, выражение (204) сводится к вычислению интегралов вида

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{(x^2 \pm x_0^2)^2} \quad (205)$$

для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , выражающихся через элементарные функции, т.е. РПИ ансамбля быстрых частиц вычисляется до конца при известной анизотропии.

Остановимся более подробно на случае **моноэнергетического изотропного распределения быстрых частиц** (нормированного на одну частицу):

$$F_0 = \frac{1}{p_0^2} \delta(p - p_0), \quad F_l = 0 \quad \text{при } l \neq 0. \quad (206)$$

Обозначая РПИ такого распределения частиц через  $I_{\mathbf{n}, \omega}^{\mathbf{R}, \sigma}$  и вычислив интегралы (205) при  $n = 1, 2$ , получим

$$I_{\mathbf{n}, \omega}^{\mathbf{R}, \sigma} = \frac{2\pi^2 e^4 Q^2 n_\sigma}{vm^2 c^3} \frac{\omega^8}{\omega_p^4 \omega_B^4} \times \times \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'^3} |\delta N_{\mathbf{k}}|^2 \left( \Theta[3k'^2 d^2 - \varepsilon(\omega) - 6kk'd^2] \times \times \left\{ (1 + \cos^2 \theta_n) \left[ \frac{1}{a(a-1)} + \frac{1}{2a^{3/2}} \ln \frac{a^{1/2} + 1}{a^{1/2} - 1} \right] + + (1 - 3 \cos^2 \theta_n) \left( \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2a^{1/2}} \ln \frac{a^{1/2} - 1}{a^{1/2} + 1} \right) \right\} + + \Theta\left[\varepsilon(\omega) - 3k'^2 d^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{\omega^4} - 6kk'd^2\right] \times \times \left\{ (1 + \cos^2 \theta_n) \left[ \frac{1}{|a|(|a|+1)} + \frac{1}{|a|^{3/2}} \arctan(|a|^{-1/2}) \right] + + (1 - 3 \cos^2 \theta_n) \left[ \frac{\arctan(|a|^{-1/2})}{|a|^{1/2}} - \frac{1}{|a|+1} \right] \right\} \right). \quad (207)$$

При произвольном значении показателя  $\nu$  спектра неоднородностей (35) интегралы, входящие в (207), выражаются через специальные функции. РПИ генерируется в небольшой области частот  $\omega \sim \omega_p$ , в которой зависимость результатов от наклона спектра неоднородностей слабая. Поэтому проведем вычисления для частного случая  $\nu = 2$ , когда спектр излучения можно выразить через элементарные функции. Будем считать  $\omega \sim \omega_p$  везде, кроме  $\varepsilon(\omega)$ , а при интегрировании членов, содержащих логарифмы или арктангенсы, разложим эти функции в ряды, ограничившись первыми членами разложения, что обеспечивает точность порядка 20 %.

Интенсивность РПИ принимает вид:

$$I_{n,\omega}^{R,\sigma} = \frac{\pi e^4 Q^2 n_\sigma}{3 \nu m^2 c^3} \langle \Delta N^2 \rangle k_0 \left( \frac{v}{\omega} \right)^4 \Phi, \quad (208)$$

где функция  $\Phi$  задается выражением

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{3}{4} \left( \frac{\omega}{v} \right)^4 \frac{\omega_p^4}{\omega_B^4} \int_{(\omega/v)^2}^{\infty} \frac{dx}{x^3} \left( \Theta[3xd^2 - \varepsilon(\omega) - 6kx^{1/2}d^2] \times \right. \\ & \times \left[ 2 \sin^2 \theta_n \left( \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{4(3 \cos^2 \theta_n - 1)}{3a^2} \right] + \\ & + \Theta \left[ \varepsilon(\omega) - 3xd^2 - \frac{\omega_B^2}{\omega_p^2} - 6kx^{1/2}d^2 \right] \times \\ & \times \left\{ \Theta(1 - |a|) \frac{\pi(1 + \cos^2 \theta_n)}{2|a|^{3/2}} + \right. \\ & + \Theta(|a| - 1) \left[ 2 \sin^2 \theta_n \left( \frac{1}{|a|} - \frac{1}{|a|+1} + \frac{1}{a^2} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{4(3 \cos^2 \theta_n - 1)}{3a^2} \right] \right\} \Bigg). \end{aligned} \quad (209)$$

Наличие  $\Theta$ -функций в подынтегральном выражении (209) накладывает определенные ограничения на область изменения переменной  $x$  в зависимости от частоты. Интегрирование (209) с учетом этого обстоятельства приводит к результату

$$\Phi \equiv \Phi(\alpha, \beta) = \frac{3}{4} \frac{\omega_p^4}{\omega_B^4} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4), \quad (210)$$

где (индекс  $n$  угла излучения  $\theta_n$  далее для краткости опускаем)

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \Theta(\omega_1 - \omega) \left\{ 2\beta \sin^2 \theta \left[ \frac{\beta}{2\alpha(\alpha - \beta)} + \frac{(2\alpha - \beta)\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)} + \right. \right. \\ & + \frac{\ln(1 - \alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^3} - \frac{\ln(1 - \alpha)}{\alpha^3} \Bigg] + \\ & + \frac{2(3 \cos^2 \theta + 1)}{3} \beta^2 \left[ \frac{1}{(\alpha - \beta)^3(1 - \alpha + \beta)} + \frac{2}{(\alpha - \beta)^3} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2(\alpha - \beta)^2} + \frac{3 \ln(1 - \alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (211)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \Theta(\omega - \omega_1) \left\{ 2\beta \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{\alpha^3} \left( \ln \frac{c}{2 \times 3^{1/2} v_T/c} - \frac{3}{2} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{(\alpha - \beta)^3} \ln \frac{1 + 2 \times 3^{1/2} v_T/c}{\beta/\alpha + 2 \times 3^{1/2} v_T/c} + \frac{3\alpha - \beta}{2\alpha^2(\alpha - \beta)^2} \Bigg] + \\ & \left. + \frac{2(3 \cos^2 \theta + 1)}{3} \beta^2 \left[ \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)^3(\beta/\alpha + 2 \times 3^{1/2} v_T/c)} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2}{\alpha(\alpha - \beta)^3} + \frac{1}{2\alpha^2(\alpha - \beta)^2} + \\ & \left. + \frac{3}{(\alpha - \beta)^4} \ln \frac{\beta/\alpha + 2 \times 3^{1/2} v_T/c}{1 + 2 \times 3^{1/2} v_T/c} \right] \Bigg\}, \end{aligned} \quad (212)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \Theta(\omega - \omega_2) \Theta(\omega_3 - \omega) \frac{\pi(1 + \cos^2 \theta)}{2} \beta^{3/2} \times \\ & \times \left( \frac{2}{(\alpha - \beta)^3} \left\{ \frac{c}{2 \times 3^{1/2} v_T [\alpha(\alpha - \beta)]^{1/2}} \right\}^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2(\alpha - \beta)} + \frac{5}{4(\alpha - \beta)^2} - \frac{15}{4(\alpha - \beta)^3} \right] \frac{1}{(\alpha - \beta - 1)^{1/2}} \right), \end{aligned} \quad (213)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = & \Theta(\omega - \omega_3) \left[ \frac{\pi(1 + \cos^2 \theta)}{2} \beta^{3/2} \times \right. \\ & \times \left( \frac{2}{(\alpha - \beta)^3} \left\{ \frac{c}{2 \times 3^{1/2} v_T [\alpha(\alpha - \beta)]^{1/2}} \right\}^{1/2} - \right. \\ & - \frac{8\alpha^2 - 41\alpha\beta + 48\beta^2}{4(\alpha - \beta)^3(\alpha - 2\beta)^2} \times \\ & \times \frac{1}{\{\beta + 2 \times 3^{1/2}(v_T/c)[\alpha(\alpha - 2\beta)]^{1/2}\}^{1/2}} \Bigg) + \\ & + 2\beta \sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{(\alpha - \beta)^3} \ln \frac{(\alpha - \beta - 1)(\alpha - 2\beta)}{\beta + 2 \times 3^{1/2}(v_T/c)[\alpha(\alpha - 2\beta)]^{1/2}} - \right. \\ & - \frac{1}{\alpha^3} \ln \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2\beta)}{2\beta + 2 \times 3^{1/2}(v_T/c)[\alpha(\alpha - 2\beta)]^{1/2}} + \\ & + \frac{(2\alpha - \beta)\beta(\alpha - 2\beta - 1)}{\alpha^2(\alpha - \beta)^2(\alpha - 2\beta)} + \frac{\beta(\alpha - 2\beta - 1)(\alpha - 2\beta + 1)}{2\alpha(\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta)^2} \Bigg\} + \\ & + \frac{2(3 \cos^2 \theta + 1)}{3} \beta^2 \times \\ & \times \left( \frac{1}{(\alpha - \beta)^3 \{\beta + 2 \times 3^{1/2}(v_T/c)[\alpha(\alpha - 2\beta)]^{1/2}\}^{1/2}} + \right. \\ & + \frac{3}{(\alpha - \beta)^4} \ln \frac{(\alpha - \beta - 1)(\alpha - 2\beta)}{\beta + 2 \times 3^{1/2}(v_T/c)[\alpha(\alpha - 2\beta)]^{1/2}} - \\ & - \frac{1}{(\alpha - \beta)^3(\alpha - \beta - 1)} + \frac{2(\alpha - 2\beta - 1)}{(\alpha - \beta)^3(\alpha - 2\beta)} + \\ & \left. \left. + \frac{(\alpha - 2\beta - 1)(\alpha - 2\beta + 1)}{2(\alpha - \beta)^2(\alpha - 2\beta)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (214)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{3} \left( \frac{v}{v_T} \right)^2, \quad \beta = \frac{\omega_B^2}{3\omega_p^2} \left( \frac{v}{v_T} \right)^2, \quad (215)$$

$$\omega_1 = \omega_p \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{v_T}{v} \right)^2 \left( 1 - \frac{2 \times 3^{0.5} v_T}{c} \right) \right], \quad (216)$$

$$\omega_2 = \omega_p \left\{ 1 + \frac{\omega_B^2}{2\omega_p^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{v_T}{v} \right)^2 \left[ 1 + \frac{2 \times 3^{0.5} v_T}{c} (1 + \beta)^{1/2} \right] \right\}, \quad (217)$$

$$\omega_3 = \omega_p \left\{ 1 + \frac{\omega_B^2}{\omega_p^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{v_T}{v} \right)^2 \left[ 1 + \frac{2 \times 3^{0.5} v_T}{c} (1 + 2\beta)^{1/2} \right] \right\}. \quad (218)$$

Предельное значение функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  на больших частотах ( $\omega \gg \omega_p$ ) есть

$$\Phi(\alpha, \beta) \approx \varepsilon^{-2}(\omega), \quad (219)$$

что позволяет "сшить" данное выражение со спектром переходного излучения на больших частотах (где пространственная дисперсия незначительна) для произвольных значений показателя спектра  $\nu$  (162):

$$I_{n,\omega}^\sigma = \frac{\pi(\nu-1)}{2\nu^2(\nu+1)} \frac{e^4 Q^2 n_\sigma}{m^2 c^3} \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1} \frac{\nu}{k^\nu \omega^2} \Phi(\alpha, \beta) \times \\ \times \left[ \left( \frac{\omega}{kv} - 1 \right)^{-\nu} + \frac{8\nu^3 + 8\nu^2 - 3\nu - 6}{3(\nu+2)} \left( \frac{kv}{\omega} \right)^\nu - \right. \\ \left. - \frac{400(1,18\nu^2 - 2,17\nu + 1,18)}{3(\nu+2)} \left( \frac{kv}{\omega} \right)^{3,03\nu+1,14} \right]. \quad (220)$$

Выражение для спектра (220) справедливо на частотах  $\omega_p \leq \omega \ll \omega_p(\omega_p \gamma / \omega_B)^{1/2}$ , а на еще более высоких частотах (где  $\Phi(\alpha, \beta) \approx \varepsilon^{-2} \approx 1$ ) на спектр ПИ начинает влиять кривизна траектории быстрой частицы в магнитном поле (47).

**Предельные случаи.** Вблизи плазменной частоты интенсивность (220) упрощается:

$$I_{n,\omega}^{R,\sigma} = \frac{4\pi(\nu-1)}{3(\nu+2)} \frac{e^4 Q^2 n_\sigma}{\nu m^2 c^3} \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1} \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^{\nu+2} \Phi(\alpha, \beta). \quad (221)$$

Остановимся подробнее на анализе свойств функции  $\Phi(\alpha, \beta)$ , описывающей РПИ. При равном нулю магнитном поле имеем

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} n_\sigma \Phi(\alpha, \beta) = F(\alpha), \quad (222)$$

где функция  $F(\alpha)$  определяется формулой (189). Из выражений (211)–(218) видно, что магнитное поле начинает влиять на форму функции  $\Phi(\alpha, \beta)$ , если  $\beta > 2 \times 3^{1/2} v_T / c$ , или

$$\frac{\omega_B^2}{\omega^2} > \frac{6 \times 3^{1/2} v_T^3}{v^2 c}, \quad (223)$$

причем это влияние становится особенно сильным при  $\beta \gg 1$ . Физической причиной этого влияния является изменение дисперсии плазмы во внешнем магнитном поле, удовлетворяющем условию (223).

Рассмотрим поведение функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  при  $\omega \rightarrow \omega_p$ . Раскладывая в ряд функцию  $\Phi_1$  (211) при малых  $\alpha$ , находим

$$\Phi_1 = \beta \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{\ln(1+\beta)}{\beta^3} \right] + \\ + \frac{2(3 \cos^2 \theta + 1)}{3} \beta^2 \left[ \frac{1}{2\beta^2} + \frac{3 \ln(1+\beta)}{\beta^4} - \frac{1}{\beta^3(1+\beta)} - \frac{2}{\beta^3} \right]. \quad (224)$$

Тогда при  $\beta \ll 1$  имеем

$$\Phi(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{1}{18} \frac{v^4}{v_T^4}. \quad (225)$$

При  $\beta \gg 1$  соответствующее выражение зависит от угла. Если  $\sin^2 \theta$  не слишком близок к нулю, то

$$\Phi(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{1}{18\beta} \frac{v^4}{v_T^4} \sin^2 \theta \quad (226)$$

в  $\beta$  раз меньше, чем (225), а при  $\sin^2 \theta \approx 0$

$$\Phi(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{1}{9\beta^2} \frac{v^4}{v_T^4} \quad (227)$$

в  $\beta^2$  раз меньше, чем (225).

При отсутствии магнитного поля значение РПИ в максимуме спектра равно (ср. раздел 3.2)

$$(n_\sigma \Phi)_{\max} \sim \frac{v^3 c}{v_T^4}. \quad (228)$$

В присутствии магнитного поля излучение обыкновенных и необыкновенных волн происходит по-разному из-за различия их показателей преломления, которые при  $\omega_B / \omega_p \ll 1$  равны:

$$n_\sigma^2 = 1 - \frac{\omega_{c\sigma}^2}{\omega^2}, \quad \omega > \omega_{c\sigma}, \quad \omega_{c\sigma} = \omega_p, \quad (229)$$

$$\omega_{cx} = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{\omega_B^2}{4}} + \frac{\omega_B}{2}.$$

Соответственно, если частота "отсечки" необыкновенных волн  $\omega_{cx}$  превосходит частоту  $\omega_z$ , на которой  $\Phi$  достигает максимума, то резонансное переходное излучение необыкновенных волн сильно подавлено по сравнению с излучением обыкновенных волн.

Для обыкновенных волн при условии  $2\sqrt{3} v_T / c < \beta \ll 1$  имеем

$$(n_o \Phi)_{\max} \sim \frac{v^2}{v_T^2} \frac{\omega_p}{\omega_B} \left( \frac{c}{v_T} \right)^{1/2}, \quad (230)$$

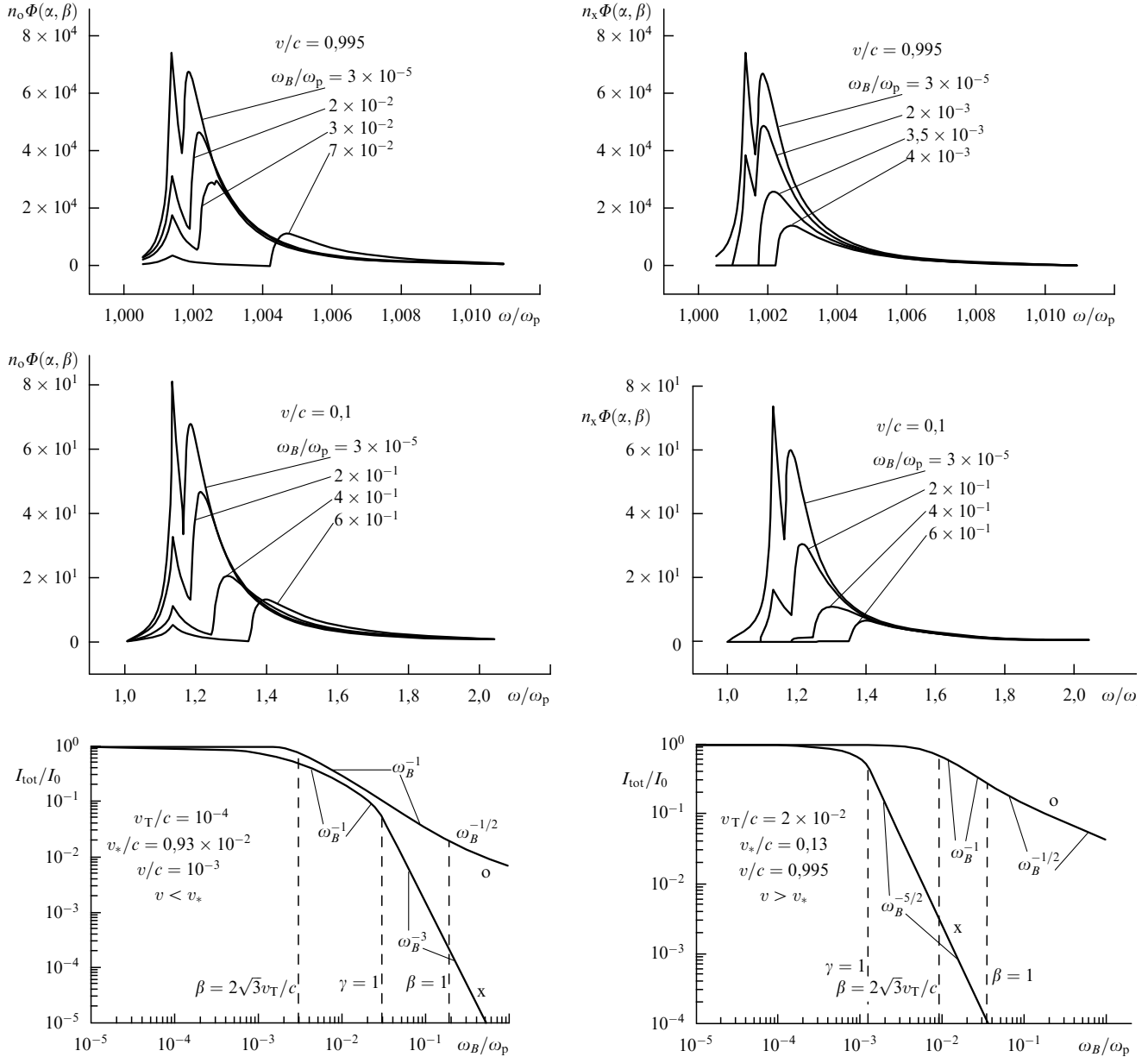
а при  $\beta \gg 1$  —

$$(n_o \Phi)_{\max} \sim \left( \frac{v}{v_T} \right)^{5/2} \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{1/2} \left( \frac{c}{v_T} \right)^{1/2}. \quad (231)$$

Таким образом, включение магнитного поля приводит к уменьшению интенсивности РПИ, причем сначала  $I^R$  падает обратно пропорционально величине магнитного поля  $I_{\max}^R \propto B^{-1}$  (при  $\beta \ll 1$ ), а затем при  $\beta \gg 1$  (заметьте, что в этих условиях излучаются почти исключительно обыкновенные волны) медленнее:  $I_{\max}^R \propto B^{-1/2}$ . Это замедление обусловлено тем, что при  $\beta \gg 1$  максимум в спектре РПИ сдвигается вправо, где достигаются большие значения показателя преломления  $n_o$ . Графики функций  $n_\sigma \Phi(\alpha, \beta)$  построены на рис. 9 для  $\sigma = o, x$  и различных значений скорости частицы и магнитного поля.

**Полная энергия РПИ.** Рассмотрим теперь вопрос о полной (проинтегрированной по частотам) энергии, излучаемой благодаря резонансному переходному механизму. Когда магнитное поле незначительно (т.е. для обыкновенных волн выполнено условие  $\beta \ll 2 \times 3^{1/2} v_T / c$ , а для необыкновенных требуется также  $\omega_B / \omega_p \ll \ll 3(v_T / v)^2$ ), то

$$I_n^\sigma = \frac{8\pi(\nu-1)}{45(\nu+2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{c^3 m^2} \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{\nu+1} \frac{v c}{v_T^2} \quad (232)$$



**Рис. 9.** Спектры резонансного переходного излучения обыкновенных и необыкновенных волн в плазме с  $v_T/c = 0,0315$ . Для быстрых частиц (верхняя панель) увеличение магнитного поля сначала приводит к подавлению РПИ необыкновенных волн, и лишь затем к уменьшению (и сдвигу) пика в спектре обыкновенных волн. Для медленных частиц (средняя панель) пики исходно более широкие, различия в спектрах собственных волн менее значительные, чем в предыдущем случае, хотя по-прежнему эффект подавления сильнее для необыкновенных волн. На нижней панели приведены зависимости полной (проинтегрированной по частотам) интенсивности РПИ от величины магнитного поля для "медленной" (слева) и "быстрой" (справа) частиц.  $I_0$  — полная интенсивность при отсутствии магнитного поля. При  $\gamma < 1$  кривые для о- и х-волн меняются почти синхронно (степень поляризации не превосходит 50 %), а при  $\gamma > 1$  интенсивность необыкновенных волн быстро уменьшается, и излучение становится полностью (100 %) поляризованным.

для каждой нормальной моды ( $\sigma = o, x$ ), что равно половине интенсивности (190), деленной на  $4\pi$  (отличие в  $4\pi$  раз связано с тем, что (190) нормировано на полный, а (232) — на единичный телесный угол). Естественно, в данном случае величина  $I_n^\sigma$  не зависит от направления излучения.

Если же  $\beta \gg 2 \times 3^{1/2} v_T/c$ , то основной вклад в полную интенсивность РПИ обыкновенных волн дает интегрирование членов в  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$ , содержащих множитель  $(c/v_T)^{1/2}$ :

$$I_n^o = I_{B, \text{tot}} J_o(\beta), \quad (233)$$

где

$$I_{B, \text{tot}} = \frac{\pi^2(v-1)}{(v+2)} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2^{3/2} \times 3^{1/4}} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \times \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{v+1} \left( \frac{c}{v_T} \right)^{1/2} \frac{\omega_p}{\omega_B}, \quad (234)$$

$$J_o(\beta) = \frac{4}{\beta^2} \left[ \frac{(1+\beta)^{9/4}}{9} - \frac{(1+\beta)^{5/4}}{5} + \frac{4}{45} \right]. \quad (235)$$

Влияние магнитного поля на РПИ необыкновенных волн не ограничивается изменением формы функции  $\Phi$ ,

но затрагивает также их показатель преломления (229). Функция  $\Phi$  модифицируется полем при  $\beta \gg 2 \times 3^{1/2} v_T/c$ , а роль магнитного поля в показателе преломления существенна при  $\gamma > 1$ , где

$$\gamma = \frac{\omega_B}{3\omega_p} \left( \frac{v}{v_T} \right)^2. \quad (236)$$

Для низкоэнергетических частиц

$$v < v_* = \left( \frac{\sqrt{3}c}{2v_T} \right)^{1/2} v_T, \quad (237)$$

при увеличении поля сначала начинает модифицироваться функция  $\Phi$ , а затем (при еще больших полях) достигает единицы величина  $\gamma$ . В этом случае

$$I_n^x = I_{B,\text{tot}} J_{x1}(\gamma), \quad (238)$$

где

$$J_{x1}(\gamma) = \frac{2}{\gamma^2} \begin{cases} \frac{(1-\gamma)^{5/2}}{5} - \frac{(1-\gamma)^{3/2}}{3} + \frac{2}{15}, & \gamma < 1, \\ \frac{2}{15}, & \gamma > 1. \end{cases} \quad (239)$$

При условии  $v > v_*$ , обратном (237), влиянием магнитного поля на  $\Phi$  можно полностью пренебречь (соответствующее выражение приведено в предыдущем разделе), но следует учесть отличие показателя преломления  $n_x$  (229) от случая изотропной плазмы. В результате находим:

$$I_n^x = \frac{4\pi(v-1)}{9(v+2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{v+1} \frac{vc}{v_T^2} J_{x2}(\gamma), \quad (240)$$

где

$$J_{x2}(\gamma) = \frac{1}{3} \begin{cases} \frac{3\pi}{16\gamma^{5/2}} - \frac{3}{8\gamma^{5/2}} \arctan \sqrt{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \frac{3\sqrt{1-\gamma}}{8\gamma^2} - \\ - \frac{\sqrt{1-\gamma}}{4\gamma} + \sqrt{1-\gamma}, & \gamma < 1, \\ \frac{3\pi}{16\gamma^{5/2}}, & \gamma > 1. \end{cases} \quad (241)$$

Функции  $J_{o,x}$  упрощаются в предельных случаях. В частности, при малых полях имеем:

$$J_o(\beta) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\beta}{6} \right), \quad \beta \ll 1, \quad (242)$$

$$J_{x1}(\gamma) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{3} \right), \quad \gamma \ll 1 \quad (243)$$

(подчеркнем, что обе эти асимптотики работают при  $\beta \gg 2 \times 3^{1/2} v_T/c$ ) и

$$J_{x2}(\gamma) = \frac{2}{5} \left( 1 - \frac{5\gamma}{14} \right), \quad \gamma \ll 1. \quad (244)$$

Несложно видеть, что степень поляризации РПИ, которая вычисляется по формуле

$$P = \frac{I_n^o - I_n^x}{I_n^o + I_n^x}, \quad (245)$$

в данном случае мала (она определяется большей из величин  $\beta$  и  $\gamma$ ) и соответствует преимущественному излучению обыкновенных волн.

В случае более сильных полей получаем:

$$J_o(\beta) = \frac{4\beta^{1/4}}{9}, \quad \beta \gg 1, \quad (246)$$

$$J_{x1}(\gamma) = \frac{4}{15\gamma^2}, \quad \gamma > 1, \quad v < v_*, \quad (247)$$

$$J_{x2}(\gamma) = \frac{\pi}{16\gamma^{5/2}}, \quad \gamma > 1, \quad v > v_*. \quad (248)$$

Соответственно при  $\gamma > 1$  (и любых  $\beta$ ) РПИ оказывается сильно поляризованным с преимущественным излучением обыкновенных волн.

Таким образом, полная энергия РПИ обыкновенных волн равна  $I_n^o = I_{B,\text{tot}}/2$  при  $2\sqrt{3} v_T/c < \beta < 1$  и

$$I_n^o = \frac{2^{1/2} \pi^2 (v-1)}{(v+2)} \frac{1 + \cos^2 \theta}{9 \times 3^{1/2}} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \times \\ \times \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{v+1} \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{1/2} \left( \frac{cv}{v_T^2} \right)^{1/2} \quad (249)$$

при  $\beta > 1$  ( $\omega_B/\omega_p > \sqrt{3} v_T/v$ ), а необыкновенных —  $I_n^x = I_{B,\text{tot}}/2$  при  $\beta > 2\sqrt{3} v_T/c$  и  $\gamma < 1$  и

$$I_n^x = \frac{6\pi^2(v-1)}{5(v+2)} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2^{1/2} \times 3^{1/4}} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \times \\ \times \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{v+1} \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^3 \frac{c^{1/2} v_T^{3/5}}{v^4}, \quad v < v_*, \quad (250)$$

$$I_n^x = \frac{\sqrt{3} \pi^2 (v-1)}{4(v+2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{v-1}}{c^3 m^2} \times \\ \times \left( \frac{v}{\omega_p} \right)^{v+1} \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{5/2} \frac{cv_T^3}{v^4}, \quad v > v_* \quad (251)$$

при  $\gamma > 1$  ( $\omega_B/\omega_p > 3v_T^2/v^2$ ). Полная энергия излучения (в обе моды) равна сумме соответствующих выражений для обыкновенной и необыкновенной волн. В слабых полях — это удвоенное выражение (232), в промежуточных — выражение (234), а в сильных — вклад необыкновенных волн мал (и убывает при увеличении скорости, если  $v < 3$ ) и излучение сильно поляризовано обыкновенным образом.

Зависимость полной энергии РПИ от величины магнитного поля (отношения  $\omega_B/\omega_p$ ) для быстрых и медленных частиц представлена на рис. 9.

В природных условиях плазма обычно неоднородна, так что если соответствующая функция распределения по плазменным частотам шире, чем пик в спектре РПИ, то последнее можно приближенно представить как

$$I_{n,\omega}^{R,\sigma} = I_n^\sigma \delta(\omega - \omega_*), \quad (252)$$

где частота  $\omega_*$  соответствует максимуму спектра РПИ и близка к локальной плазменной частоте.

**Роль анизотропии ансамбля быстрых частиц.** Выясним, к каким изменениям в излучении РПИ приводит наличие анизотропии ансамбля излучающих частиц. Будем считать, что эта анизотропия может быть опи-



сана посредством второго полинома Лежандра, так что

$$F(p, \mu) = \frac{1}{p_0^2} \delta(p - p_0) [1 + AP_2(\mu)], \quad (253)$$

где  $\mu = \cos \theta_v$ .

В таком случае все вычисления аналогичны проведенным выше, хотя выражения для спектра РПИ оказываются достаточно громоздкими. По этой причине мы приведем только результаты для проинтегрированного по частотам РПИ.

В слабом магнитном поле имеем

$$I_n^{\sigma, x} = I_n^{\sigma, x(0)} \left(1 - \frac{A}{4}\right), \quad (254)$$

где  $I_n^{\sigma, x(0)}$  — значение полной энергии РПИ для изотропно распределенных частиц. Поскольку из условия положительной определенности функции распределения (253) следует  $-1 < A < 2$ , то

$$\frac{I_n^{\sigma(0)}}{2} \leq I_n^{\sigma} \leq \frac{5I_n^{\sigma(0)}}{4}. \quad (255)$$

Таким образом, для сплюснутых относительно магнитного поля распределений ( $A < 0$ ) интенсивность РПИ возрастает, а для вытянутых ( $A > 0$ ) убывает по сравнению со случаем изотропного распределения.

Этот вывод сохраняется и в сильных полях, хотя конкретные выражения несколько модифицируются. Аналогичные вычисления могут быть проведены до конца и для более сложных функций распределения частиц, содержащих полиномы Лежандра высших порядков.

**РПИ изотропного распределения частиц со степенным спектром.** Рассмотрим теперь РПИ, генерируемое изотропным распределением заряженных частиц со степенной зависимостью от модуля импульса (172). Поскольку параметр  $\beta$  зависит от скорости частицы, а область интегрирования по  $dx$ , дающая основной вклад в интегралы, определяется соотношением спектральных индексов  $\nu$  и  $\xi$ , мы будем иметь довольно много различных асимптотик в зависимости от параметров задачи. Интегрирование выражений (232), (249)–(251) со спектром (172) проводится без затруднений, поэтому приведем результаты вычислений:

$$P_1 = \frac{4\pi(\nu-1)(\xi-1)}{45(\nu+2)} \frac{\Gamma[(\xi-1)/2] \Gamma[(\nu-\xi+3)/2]}{\Gamma[(\nu+2)/2]} \times \\ \times \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} x_0^{\xi-1} N_e \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \frac{c^2}{v_T^2}, \quad (256)$$

$$P_2 = \frac{8\pi(\nu-1)(\xi-1)}{45(\nu+2)(\xi-\nu-3)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} \times \\ \times N_e \left(\frac{v_0}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \frac{c v_0}{v_T^2}, \quad v_0 = x_0 c, \quad (257)$$

$$P_3 = \frac{\pi(\nu-1)(\xi-1)}{3(\nu+2)} \left[ \frac{8}{15(\nu+3-\xi)} + \frac{\pi(1+\cos^2 \theta)}{8(\xi-\nu-2)} \right] \times \\ \times \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} x_0^{\xi-1} \times \\ \times N_e \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \frac{c^2}{v_T^2} \left[ \frac{\omega_p}{\omega_B} \left( \frac{6 \times 3^{1/2} v_T^3}{c^3} \right)^{1/2} \right]^{\nu+3-\xi}, \quad (258)$$

$$P_4 = \frac{\pi^2(\nu-1)(\xi-1) \Gamma[(\xi-1)/2] \Gamma[(\nu-\xi+2)/2]}{8 \times 2^{1/2} 3^{1/4} (\nu+2) \Gamma[(\nu+1)/2]} \times \\ \times (1 + \cos^2 \theta) \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} \times \\ \times x_0^{\xi-1} N_e \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \left(\frac{c}{v_T}\right)^{1/2} \frac{\omega_p}{\omega_B}, \quad (259)$$

$$P_5 = \frac{\pi^2(\nu-1)(\xi-1) \Gamma[(\xi-1)/2] \Gamma[(\nu-\xi+2,5)/2]}{9 \times 6^{1/2} (\nu+2) \Gamma(\nu/2 + 3/4)} \times \\ \times (1 + \cos^2 \theta) \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} \times \\ \times x_0^{\xi-1} N_e \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \left(\frac{\omega_p}{\omega_B}\right)^{1/2} \frac{c}{v_T}, \quad (260)$$

$$P_6 = \frac{\pi(\nu-1)(\xi-1)}{3^{(\xi+1-\nu)/2} (\nu+2)} \left[ \frac{8}{5(\nu+3-\xi)} + \frac{\pi}{4(\xi+2-\nu)} \right] \times \\ \times \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} x_0^{\xi-1} N_e \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \times \\ \times \left(\frac{\omega_p}{\omega_B}\right)^{(\nu+3-\xi)/2} \left(\frac{c}{v_T}\right)^{\xi-\nu-1}, \quad (261)$$

$$P_7 = \frac{\pi^2(\nu-1)(\xi-1) [7(\xi-\nu) + 46] (1 + \cos^2 \theta)}{20 \times 2^{1/2} 3^{1/4} 3^{(\xi-\nu)/2} (\nu+2) [4 - (\xi-\nu)^2]} \times \\ \times \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} x_0^{\xi-1} N_e \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \times \\ \times \left(\frac{\omega_p}{\omega_B}\right)^{(\nu+4-\xi)/2} \left(\frac{v_T}{c}\right)^{\nu-\xi+1,5}, \quad (262)$$

$$P_8 = \frac{\pi^2(\nu-1)(\xi-1)(1 + \cos^2 \theta)}{4 \times 2^{1/2} 3^{1/4} (\nu+2)(\xi-\nu-2)} \frac{e^4 Q^2 \langle \Delta N^2 \rangle k_0^{\nu-1}}{m^2 c^3} \times \\ \times N_e \left(\frac{v_0}{\omega_p}\right)^{\nu+1} \left(\frac{c}{v_T}\right)^{1/2} \frac{\omega_p}{\omega_B}. \quad (263)$$

При различных соотношениях параметров работает та или иная асимптотика, что видно из таблицы. При слабых полях,  $\omega_B/\omega_p < 3v_T^2/c^2$ , влияние магнитного поля незначительно, и следует пользоваться первой строкой таблицы для вычисления излучения каждой из поперечных собственных мод.

Подчеркнем, что сильно поляризованное излучение возникает тогда, когда основной вклад в интегралы по импульсу дают частицы с  $v > (3\omega_p/\omega_B)^{1/2} v_T$  ( $\gamma > 1$ ). Для степенного распределения частиц (с  $v_0 \sim v_T$ ) это случай относительно жестких спектров (небольшие  $\xi$ ). Если же  $v_0 > (3\omega_p/\omega_B)^{1/2} v_T$ , то результирующее излучение сильно поляризовано независимо от жесткости спектра частиц.

Фактор превышения мощности РПИ в магнитном поле над обычным переходным излучением меняется от  $c^2/v_T^2$  в слабом поле до  $(c/v_T)(\omega_p/\omega_B)^{1/2}$  в сильном поле.

**Учет влияния магнитного поля на дисперсию плазмы приводит к радикальному изменению свойств резонансного переходного излучения.** Действительно, наблюдается уменьшение интенсивности РПИ в максимуме, сдвиг

Таблица

Параметры	Тип волны	$\xi < v + 3/2$	$v + 3/2 < \xi < v + 2$	$v + 2 < \xi < v + 5/2$	$v + 5/2 < \xi < v + 3$	$v + 3 < \xi$
$\frac{3v_T^2}{c^2} < \frac{\omega_B}{\omega_p} < \frac{\sqrt{6\sqrt{3}} v_T^{3/2}}{c^{3/2}}$	о	$P_1$	$P_1$	$P_1$	$P_1$	$P_2$
	х	$P_6$	$P_6$	$P_6$	$P_6$	$P_2$
$\frac{\sqrt{6\sqrt{3}} v_T^{3/2}}{c^{3/2}} < \frac{\omega_B}{\omega_p} < \frac{\sqrt{3} v_T}{c}$	о	$P_4$	$P_4$	$P_3$	$P_3$	$P_2$
	х	$P_6$	$P_6$	$P_6$	$P_6$	$P_2$
$\frac{\sqrt{3} v_T}{c} < \frac{\omega_B}{\omega_p} < \left(\frac{6\sqrt{3} v_T}{c}\right)^{1/2}$	о	$P_5$	$P_5$	$P_3 + P_5$	$P_3$	$P_2$
	х	$P_7$	$P_7$	$P_3$	$P_3$	$P_2$
$\left(\frac{6\sqrt{3} v_T}{c}\right)^{1/2} < \frac{\omega_B}{\omega_p} < 1$	о	$P_5$	$P_5$	$P_5 + P_8$	$P_8$	$P_8$
	х	$P_7$	$P_7$	$P_8$	$P_8$	$P_8$

пики и его уширение, а также уменьшение полной интенсивности РПИ. В излучении изотропного ансамбля частиц появляется угловая зависимость и отличная от нуля поляризация с преимущественным испусканием обыкновенных волн. Степень поляризации может достигать практически 100 %.

Полученные в разделах 2, 3 формулы могут быть применены как для лабораторных условий, так и для астрофизических объектов, поскольку учитывают все существенные в данной задаче факторы (усреднение полученных выражений в плавно неоднородной плазме проводится тривиально). Важно отметить, что высокая интенсивность рассмотренного излучения делает его конкурентоспособным по сравнению с другими, ранее известными механизмами нетеплового излучения.

### 3.4. Реабсорбция переходного излучения

Для возможных приложений любого механизма излучения к интерпретации наблюдательных данных наряду с коэффициентами излучения, необходимо знать соответствующие коэффициенты реабсорбции. В монографии [28] проанализированы общие закономерности индуцированного ПИ и сделан ряд важных качественных заключений о свойствах такого излучения. В частности, показано, что индуцированное ПИ не возникает, если неоднородности среды распределены изотропно, а интенсивность ПИ отдельной частицы описывается в ультрарелятивистском пределе. В работе [64] рассмотрено индуцированное ПИ при падении плотного потока частиц на границу раздела двух сред.

Исследование индуцированного излучения представляет наибольший интерес в тех областях частот, где велика интенсивность ПИ отдельной частицы, так как на этих частотах легче обеспечить большую оптическую толщину источника излучения [65].

Получим выражение для инкремента РПИ методом коэффициентов Эйнштейна. Воспользуемся для этого стандартной методикой, изложенной, например, в [28], обобщив ее на случай сильной частотной дисперсии, так как вблизи плазменной частоты дисперсионные эффекты весьма существенны. Пусть  $N_{\mathbf{k},\sigma}$  — концентрация квантов моды  $\sigma$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , а  $w_{\mathbf{p}}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  — вероятность излучения кванта с импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  частицей с импульсом  $\mathbf{p}$  при получении ею от среды импульса  $\hbar\mathbf{k}'$ . Легко понять, что импульс частицы после элементарного акта излучения становится равным  $\mathbf{p} - \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ . Вероятность  $w_{\mathbf{p}}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  связана с интенсивностью спонтанного

излучения из единицы объема очевидным соотношением:

$$I_p^{\sigma} = \int \hbar\omega_{\sigma}(\mathbf{k}) w_{\mathbf{p}}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \int \hbar\omega_{\sigma}(\mathbf{k}) w_{\mathbf{p}}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' \frac{\omega^2 n_{\sigma}^2 d(\omega n_{\sigma})/d\omega}{(2\pi)^3 c^3} d\omega d\Omega_{\mathbf{k}}, \quad (264)$$

где  $n_{\sigma}$  — показатель преломления соответствующей моды.

Вероятности индуцированного излучения и поглощения пропорциональны величине  $N_{\mathbf{k},\sigma} w_{\mathbf{p}}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , однако излучение определяется числом частиц с импульсом  $\mathbf{p}$  (на верхнем уровне), а поглощение — числом частиц с импульсом  $\mathbf{p} - \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  (на нижнем уровне). Поэтому уравнение баланса числа квантов имеет вид

$$\frac{dN_{\mathbf{k},\sigma}}{dt} = 2\gamma_{\mathbf{k},\sigma} N_{\mathbf{k},\sigma} = N_{\mathbf{k},\sigma} \int w_{\mathbf{p}}^{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')(f_{\mathbf{p}} - f_{\mathbf{p}-\hbar(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} ) d\mathbf{k}' d\mathbf{p}, \quad (265)$$

где  $\gamma_{\mathbf{k},\sigma}$  — инкремент амплитуды поля излучения,  $f_{\mathbf{p}}$  — функция распределения быстрых частиц. В результате инкремент РПИ определяется как

$$\gamma_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^3 c^3}{\omega^2 n_{\sigma}^2 d(\omega n_{\sigma})/d\omega} \int \frac{dI_p^{\sigma}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}'} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{df}{d\mathbf{p}} d\mathbf{k}' d\mathbf{p}. \quad (266)$$

Величина  $dI_p^{\sigma}/d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}'$  представляет собой спектрально-угловое распределение интенсивности спонтанного излучения единицы объема плазмы, при котором плазма теряет импульс  $\hbar\mathbf{k}'$ . В нашем случае для вычисления  $df/d\mathbf{p}$  удобно воспользоваться сферической системой координат в импульсном пространстве, направив ось  $z$  вдоль внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Воспользовавшись выражением оператора градиента в сферических координатах и предположив независимость функции распределения от азимутального угла, окончательно получим

$$\gamma_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^3 c^3}{\omega^2 n_{\sigma}^2 d(\omega n_{\sigma})/d\omega} \int \frac{dI_p^{\sigma}}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}'} \frac{1}{pv} \times \left\{ p \frac{\partial f}{\partial p} + \left[ \frac{v(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{B}}{\omega B} - \mu \right] \frac{\partial f}{\partial \mu} \right\} d\mathbf{k}' d\mathbf{p}, \quad (267)$$

где  $\mu = \cos \theta_{\mathbf{vB}}$  — косинус угла между скоростью частицы и направлением внешнего магнитного поля.

Коэффициент реабсорбции ПИ  $\kappa_\omega = \gamma/v_{\text{gr}} \approx \gamma/c$  на высоких частотах (в релятивистском пределе) вычислялся в [66]. С учетом вклада как электронов, так и протонов имеем:

$$\kappa_\omega = \frac{\pi(v-1)(\xi-1)(\xi+2)}{2v^2(v+2)} \left( \frac{N_{\text{cr}}}{M} + \frac{N_e}{m} \right) \times \\ \times \frac{q^2 \omega_p^4}{c \omega^5} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{2k_0 c}{\omega} \right)^{v-1} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2v} F\left(v, \frac{\xi}{2}, \frac{\xi+2}{2}; -\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right), \quad (268)$$

где  $N_{\text{cr}}$ ,  $M$  — концентрация и масса релятивистских ядер, а  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  — гипергеометрическая функция, причем на высоких частотах можно воспользоваться ее разложением при  $x \gg 1$ :

$$F\left(v, \frac{\xi}{2}, \frac{\xi+2}{2}; -\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) = \\ = \frac{\xi}{\xi-2v} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{2v} \left[ 1 + \frac{v(\xi-2v)}{2v-\xi+2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] + \\ + \frac{\Gamma(v-\xi/2)\Gamma(\xi/2+1)}{\Gamma(v)} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^\xi. \quad (269)$$

В соответствии с результатами (268), (269) в оптически толстой области ( $L\kappa_\omega \gg 1$ ) интенсивность излучения равна:

$$J_\omega = \frac{P_\omega}{\kappa_\omega} \propto \omega^3 \quad \text{при } 2v > \xi \quad \text{и} \quad \propto \omega^{2v+3-\xi} \quad \text{при } 2v < \xi. \quad (270)$$

Из формулы (268) видно, что вклад электронной компоненты важен даже тогда, когда ее концентрация меньше концентрации релятивистских ядер. Частотные зависимости (270) в общем случае отличаются от соответствующих зависимостей для синхротронного ( $J_\omega^s \propto \omega^{2.5}$ ) и теплового ( $J_\omega^T \propto \omega^2$ ) излучений. Однако, как показывают оценки, оптическая толщина астрофизических источников по переходному излучению, как правило, значительно меньше единицы.

Вернемся к анализу реабсорбции резонансного переходного излучения. Для РПИ в магнитном поле величина  $dI_p^\sigma/d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}'$  имеет вид

$$\frac{dI_p^\sigma}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}'} = \frac{4\pi e^4 q^2 n_\sigma}{m^2 c^3} \times \\ \times \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{k}']^2 \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{v}] |\delta N|_{\mathbf{k}}^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^4 \{ [\varepsilon(\omega) - 3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2 - (\omega_p^2 \omega_B^2 / \omega^4) \sin^2 \theta] + \varepsilon''^2 \}}, \quad (271)$$

где  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{k}'$  и направлением магнитного поля. Обратим внимание на то, что в данной задаче магнитное поле играет двойную роль: модифицирует спектр спонтанного РПИ через влияние на дисперсию плазмы и обеспечивает выделенное направление при формировании анизотропного распределения быстрых электронов.

**При изотропном распределении быстрых частиц** (заметьте, что данное распределение в отличие от (172) нормировано на  $d^3p$ )

$$f(\mathbf{p}) = \frac{\xi-3}{4\pi p_0^3} N_e \left( \frac{p_0}{p} \right)^\xi \quad (272)$$

член с производной по углу в (267) исчезает, и инкремент РПИ представляется в виде

$$\gamma_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{\xi}{2} \frac{(2\pi)^3 c^3}{\omega^2 n_\sigma^2 d(\omega n_\sigma)/d\omega} \int \frac{4\pi f(\mathbf{p}) p dp}{v} \int I_{\mathbf{n},\omega}^\sigma \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi}, \quad (273)$$

где

$$I_{\mathbf{n},\omega}^\sigma = \int \frac{dI_p^\sigma}{d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}'} d\mathbf{k}'$$

— спектрально-угловое распределение интенсивности РПИ. Последний интеграл в (273) вычислен в предыдущем разделе для степенного распределения случайных неоднородностей (35) и имеет вид (221). Подставляя (221), (272) в (273), получим

$$\gamma_{\mathbf{k},\sigma} = -\frac{\xi(2\pi)^4 (v-1)(\xi-3)}{3(v+2)} \frac{e^6 p_0^{\xi-3} N_e k_0^{v-1} \langle \Delta N^2 \rangle}{m^2 \omega^{v+4} n_\sigma d(\omega n_\sigma)/d\omega} \times \\ \times \int \Phi(\alpha, \beta) \frac{v^v dp}{p^{\xi-1}}. \quad (274)$$

Декремент затухания РПИ выражается, таким образом, через однократный интеграл по импульсу от функции  $\Phi(\alpha, \beta)$ , который не описывается элементарными функциями. Тем не менее легко видеть, что величина интеграла в (274) определяется областью значений переменной  $p \sim mc$ , так как подынтегральное выражение достаточно быстро (по степенным законам) убывает при  $p < mc$  и при  $p > mc$ . С учетом уменьшения функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  при уменьшении  $v$  соответствующий интеграл оценивается как

$$\int \Phi(\alpha, \beta) \frac{v^v dp}{p^{\xi-1}} = \Phi_c(\alpha, \beta) \frac{c^v}{(mc)^{\xi-2}} \times \\ \times \frac{\Gamma[(v-\xi+5)/2] \Gamma[(\xi-2)/2]}{2\Gamma[(v+3)/2]}, \quad (275)$$

где  $\Phi_c(\alpha, \beta)$  определяется функцией  $\Phi(\alpha, \beta)$  при  $v = c$  (индекс "c" у функции  $\Phi_c(\alpha, \beta)$  в дальнейшем опускаем). Подставляя (275) в (274), получим окончательно:

$$\gamma_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{\xi(v-1)(\xi-3)\Gamma[(v-\xi+5)/2]\Gamma[(\xi-2)/2]}{6(v+2)\Gamma[(v+3)/2] n_\sigma d(\omega n_\sigma)/d\omega} \frac{e^2 N_e}{m \omega_p} \times \\ \times \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{v+4} \left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \left( \frac{p_0}{mc} \right)^{\xi-3} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \Phi(\alpha, \beta), \quad (276)$$

где при анализе РПИ можно опустить множитель  $(\omega_p/\omega)^{v+4}$  ввиду близости частоты максимума излучения (и поглощения) к плазменной частоте. Заметим, что декремент РПИ может превосходить величину столкновительного затухания волн. Так, при  $N \sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T \sim 10^6 \text{ К}$  (параметры, характерные для корональных арок на Солнце) декремент столкновительного затухания равен

$$v_{\text{ei}} \approx 60 \frac{N}{T^{3/2}} \approx 600 \text{ с}^{-1}. \quad (277)$$

Декремент РПИ при тех же параметрах фоновой плазмы и

$$\left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \approx 10^{-4}, \quad N_e \left( \frac{p_0}{mc} \right)^{\xi-3} \approx 10^3 \text{ см}^{-3} \quad (278)$$

равен

$$\gamma^\sigma = 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (279)$$

### 3.5. Переходное мазерное излучение

Рассмотрим индуцированное (мазерное) резонансное переходное излучение. В структурированной астрофизической плазме, содержащей, например, магнитные ловушки, часто формируются анизотропные распределения надтепловых частиц. Такие анизотропные распределения быстрых частиц при определенных условиях оказываются неустойчивыми относительно генерации тех или иных мод электромагнитного излучения. Примером таких неустойчивостей является возбуждение ленгмюровских волн пучками надтепловых электронов или циклотронная (мазерная) неустойчивость поперечных волн в магнитоактивной плазме [67]. Мы обсудим условия, при которых возникает неустойчивость в резонансном переходном излучении и получим выражение соответствующего инкремента неустойчивости.

Рассмотрение коэффициента реабсорбции для анизотропного распределения частиц можно провести тем же способом, что и вычисление интенсивности излучения, т.е. разложив зависящую от углов часть функции распределения в ряд по полиномам Лежандра (см. раздел 3.3). Однако, если реальную анизотропию частиц аппроксимировать первыми полиномами Лежандра,

$$f(p, \mu) = f_0(p) [1 + A_1(p)P_1(\mu) + A_2(p)P_2(\mu)], \quad (280)$$

то усиления РПИ не возникает.

Действительно, вклад от потокового члена  $A_1(p)P_1(\mu)$  содержит множитель  $kv/\omega$ , который мал в области пика (при  $\omega \sim \omega_3$ ),

$$\frac{kv}{\omega} \sim \frac{\omega_B}{\omega_p}. \quad (281)$$

Это означает, что при слабой анизотропии потокового типа, описываемой первым полиномом Лежандра ( $-1 \leq A_1 \leq 1$  из условия положительной определенности функции распределения), неустойчивости не возникает. Четная часть анизотропной составляющей функции распределения,  $A_2(p)P_2(\mu)$ , не содержит указанной малости. Тем не менее при  $\zeta > 3$  положительный вклад от производной по углу оказывается (по абсолютной величине) меньше отрицательного вклада от производной по модулю импульса. Это значит, что анизотропия указанного типа недостаточно сильная, чтобы обеспечить неустойчивость РПИ.

Для определения требуемой анизотропии, рассмотрим две модельные зависимости функции распределения электронов от угла. Первая из них

$$f(p, \mu) \propto \exp a\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} = af \quad (282)$$

не является четной и содержит потоковую составляющую. Главный положительный вклад в данном случае обеспечивает член  $(kv \cos \theta)\omega$ , а главный отрицательный — член  $p \partial f / \partial p$ . Таким образом,

$$p \frac{\partial f}{\partial p} + \left[ \frac{v(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{B}}{\omega B} - \mu \right] \frac{\partial f}{\partial \mu} \cong \left( -\zeta + a \frac{v}{c} n_\sigma \cos \theta \right) f(p, \mu). \quad (283)$$

В области пика РПИ  $n_\sigma \approx \omega_B/\omega_p$ , а основной вклад в интеграл по модулю импульса дают значения  $v \sim c$ . Поэтому неустойчивость РПИ возможна, если

$$a > \frac{\zeta}{n_\sigma} \approx \frac{\zeta \omega_p}{\omega_B}. \quad (284)$$

При  $\zeta > 3$ ,  $\omega_p/\omega_B \sim 3$  имеем  $a > 10$ , т.е. основная доля быстрых электронов должна быть сосредоточена в пределах конуса с углом раствора меньше или порядка  $25^\circ$ . Раскладывая функцию распределения (282) в выражении (283) (т.е. после дифференцирования по  $\mu$ ) по полиномам Лежандра, легко убедиться, что с точностью порядка 30 % можно ограничиться первым членом такого разложения при интегрировании по углам. В этом приближении инкремент неустойчивости РПИ будет отличаться от (276) лишь заменой множителя  $-\zeta$  на  $-\zeta + (v/c)an_\sigma \cos \theta$ . Наибольшее усиление в данном случае возникает в направлении вдоль магнитного поля, в поперечном направлении всегда происходит поглощение волн.

Рассмотрим теперь четную по  $\mu$  функцию распределения, для которой вклад члена  $v\mathbf{k}\mathbf{B}/\omega B$  тождественно равен нулю. Можно показать, что независимо от вида четной функции распределения после интегрирования по углам имеем:

$$p \frac{\partial f}{\partial p} - \left( v \frac{\mathbf{k}\mathbf{B}}{\omega B} + \mu \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} \rightarrow (-\zeta + 1)f < 0, \quad (285)$$

если основная доля частиц имеет малые  $\mu \ll 1$ .

Однако, если производная  $\partial f / \partial \mu$  имеет большую величину в области  $\mu \sim 1$ , то неустойчивость РПИ возможна. Пусть функция распределения не зависит от  $\mu$  при  $|\mu| < \mu_1$  и линейно убывает до нуля при увеличении  $|\mu|$  до единицы ( $f(p, \mu) = N_\sigma f(p) f(\mu)$ ):

$$f(\mu) = \frac{1}{1 + \mu_1} \begin{cases} 1, & |\mu| < \mu_1, \\ \frac{1 - \mu}{1 - \mu_1}, & \mu_1 < |\mu| < 1, \end{cases} \quad (286)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \begin{cases} 0, & |\mu| < \mu_1, \\ -\frac{1}{1 - \mu_1^2}, & \mu_1 < |\mu| < 1. \end{cases} \quad (287)$$

В таком случае провести вычисления для всех частот не удастся. Тем не менее в области пика можно воспользоваться тем, что  $k'_{\text{eff}} \gg \omega/v$ , и учесть, что главный вклад в интеграл по углам  $\theta_{\mathbf{k}'\mathbf{B}}$  в (267), (271) от членов, содержащих  $\cos^{2n} \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{B}}$ , мал по сравнению с вкладом членов, не содержащих  $\cos \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{B}}$  в числителе. Поэтому разложение  $\mu$  по углам  $\theta_{\mathbf{k}'\mathbf{B}}$  и  $\theta_{\mathbf{k}'\mathbf{v}}$  упрощается:

$$\begin{aligned} \mu &= \cos \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{B}} \cos \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{v}} + \sin \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{B}} \sin \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{v}} \cos \phi_{\mathbf{Bv}} \approx \\ &\approx \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{k'v} \right)^2 \right]^{1/2} \cos \phi_{\mathbf{Bv}}. \end{aligned} \quad (288)$$

Тогда с учетом (288)

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{p} \delta(\omega + \mathbf{k}'\mathbf{v}) \left[ -\zeta f(p, \mu) - \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] = \\ &= \pi \int \frac{f(p)p^2 dp}{k'v} \left\{ -\zeta + \frac{2[1 - (\omega/k'v)^2 - \mu_1^2]^{1/2}}{\pi(1 - \mu_1^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (289)$$

После чего инкремент неустойчивости РПИ принимает вид:

$$\gamma^\sigma = \frac{(2\pi)^5 e^6 N_e}{4m^2 \omega^2 n_\sigma d(\omega n_\sigma)/d\omega} \int \frac{f(p) p dp}{v^2} \times \\ \times \int dk' dx (1 + \cos^2 \theta_n) |\delta N|_{\mathbf{k}}^2 \times \\ \times \frac{-\zeta + 2[1 - (\omega/k'v)^2 - \mu_1^2]^{1/2} / [\pi(1 - \mu_1^2)]}{\mathbf{k}' \{ [\varepsilon(\omega) - 3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2 - (\omega_p^2 \omega_B^2 / \omega^4)(1 - x^2)]^2 + \varepsilon''^2 \}}. \quad (290)$$

Дальнейшие вычисления полностью аналогичны проведенным в разделе 3.3. Единственное отличие состоит в том, что теперь мы можем удерживать только наибольшие в области пика члены, так как учет следующих членов (не содержащих множителя  $(c/v_T)^{1/2}$ ) привел бы к превышению точности, с которой получено выражение (290). В результате находим

$$\gamma^\sigma = \frac{(v-1)(\zeta-3)(v+3)\pi^5 e^6 N_e N^2}{3^{3/2}(v-\zeta+5)(\zeta-2)m^3 \omega_p^5 n_\sigma d(\omega n_\sigma)/d\omega} \times \\ \times \left(\frac{p_0}{mc}\right)^{\zeta-3} \left(\frac{c}{v_T}\right)^3 \left(\frac{k_0 c}{\omega_p}\right)^{v-1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_B}\right) (1 + \cos^2 \theta_n) \times \\ \times \frac{(c/(2 \times 3^{1/2} v_T))^{1/2}}{(\alpha - \beta)^3 [\alpha(\alpha - \beta)]^{1/4}} \left[ -\zeta + \frac{2(1 - \kappa^2 - \mu_1^2)^{1/2}}{\pi(1 - \mu_1^2)} \right], \quad (291)$$

где  $\kappa = \omega_p v_{Te} / \omega_{BC}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  определяются выражением (215) при  $v = c$ . В данном случае усиление вдоль поля вдвое превышает усиление поперек поля. Рассмотрим зависимость инкремента от параметра  $\mu_1$ . Заметим прежде всего, что если  $\mu_1 \ll 1$ , то выражение в квадратных скобках в (291) стремится к  $-\zeta + 2/\pi < 0$ . Небольшое отличие этой величины от (285) обусловлено тем, что линейное убывание оказывается недостаточно быстрым, чтобы выйти на асимптотику (285), хотя качественно этот результат воспроизводится и в данном случае. Квадратная скобка в (291) достигает своего максимального значения, равного  $-\zeta + 1/\pi\kappa$  при  $\mu_1^2 = 1 - 2\kappa^2$ ; при увеличении или уменьшении  $\mu_1$  инкремент падает. Таким образом, для возникновения неустойчивости в случае четной функции распределения частиц по углам необходимо отсутствие частиц в малом интервале углов вблизи  $|\mu| = 1$ , ширина интервала  $\Delta\theta \cong \kappa$ . В остальном диапазоне углов  $f(\mu)$  может быть любой плавной функцией. Функции распределения такого вида могут встречаться в магнитных ловушках, часто возникающих в магнитосферах планет и звезд.

Проведем численные оценки инкремента (291) и необходимых параметров магнитной ловушки в случае ионосферной плазмы. При  $(k_0 c / \omega_p)^{v-1} \langle \Delta N^2 \rangle / N^2 \cong 10^{-4}$   $(p_0 / mc)^{\zeta-3} N_e \cong 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ ,  $\omega_p / \omega_B \cong 3$ ,  $\mu_1^2 = 1 - 2\kappa^2$ ,  $\omega_p \cong 3 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $v_T / c \cong 10^{-3}$ , инкремент  $\gamma^\sigma \cong 80 \text{ с}^{-1}$ . Величина отношения  $B/B_{\max}$ , необходимая для установления требуемого профиля функции распределения  $f(\mu)$ , составляет  $B/B_{\max} = 2\kappa^2 \cong 2 \times 10^{-5}$ .

Остановимся на наиболее важных результатах рассмотрения **реабсорбции резонансного переходного излучения в магнитном поле**. Оказывается, что коэффициент поглощения РПИ может превышать коэффициент поглощения радиоволн тепловыми электронами в области плазменной частоты.

Для анизотропных функций распределения быстрых электронов возможна реализация неустойчивости РПИ. Соответствующий экспоненциальный рост такого (мазерного) РПИ может приводить к высоким яркостным температурам результирующего радиоизлучения, как и другие когерентные механизмы — плазменный или циклотронный мазерный. Эти механизмы широко применяются для интерпретации различных типов радиоизлучения Солнца, планет и звезд, часто демонстрирующих быструю временную переменность, например, миллисекундные радиоспайки [67].

**Основные свойства мазерного РПИ**, доступные наблюдательной проверке, сводятся к следующему:

- принципиально отсутствует гармоническая структура радиоизлучения, генерируемого мазерным РПИ: существенно усиливается только излучение вблизи локальной плазменной частоты;

- наибольшее усиление происходит в направлении внешнего магнитного поля;

- наличие неустойчивости РПИ нечувствительно к особенностям энергетического спектра электронов в области 1 МэВ, так что мазерное РПИ может как сопровождаться, так и не сопровождаться мягким гамма-излучением, в отличие от циклотронного мазерного излучения.

**Сравнение мазерного РПИ с другими когерентными механизмами.** Благодаря плазменному механизму генерируются волны вблизи  $\omega_p$  и  $2\omega_p$  (реже — на третьей гармонике). Циклотронное мазерное излучение возникает вблизи низших гармоник электронной циклотронной частоты, причем возможны нецелые отношения гармоник [68–71]. Кроме того, циклотронное мазерное излучение, генерируемое в условиях солнечных вспышек, не должно, как показано в [67], сопровождаться мягким гамма-излучением, тогда как оно обязательно должно сопровождаться жестким рентгеновским излучением (т.е. число быстрых электронов с  $E_{\text{kin}} > (0,5-1) \text{ МэВ}$  должно быть достаточно малым).

В настоящее время надежно установлено, что плазменный и циклотронный мазерный механизмы излучения реализуются в солнечной короне и магнитосферах планет. Возможная роль переходного мазерного излучения пока совершенно не исследована.

#### 4. Поляризационное тормозное излучение

В настоящем разделе мы рассмотрим предельный случай переходного излучения, когда неоднородности плотности связаны с тепловыми флуктуациями среды. Такой механизм излучения называется поляризационным тормозным (в литературе используются также названия "переходное тормозное" и "динамическое тормозное" излучение), поскольку физической причиной испускания электромагнитных волн является динамическая поляризуемость среды. Теоретические работы по данному вопросу (см. статьи [59, 72–76], монографии [28, 5] и ссылки в них) используют два различных подхода к описанию процесса излучения. Первый из них, макроскопический, основывается на методах макроскопической электродинамики: вычислении токов и зарядов, возникающих в среде при движении быстрых частиц и последующем нахождении из уравнений Максвелла полей излучения. Второй способ, микроскопический, основан на описании методами квантовой или классиче-

ской механики движения и излучения отдельного электрона среды, затем получившийся результат суммируется по всем электронам и усредняется по их распределению в веществе. Очевидно, что второй способ имеет более широкую область применимости, так как исходит из рассмотрения элементарного акта взаимодействия частиц, но его практическая реализация требует значительных математических усилий и целесообразна лишь тогда, когда первый способ явно неприменим. По этой причине в [5] микроскопический способ применяется лишь для описания процесса излучения простейших взаимодействующих систем (столкновение частицы с отдельным атомом, атома с атомом и т.д.), в остальных случаях используется классический подход.

В разделе 4.1 микроскопический подход применяется для нахождения спектра поляризационного тормозного излучения в равновесной немагнитоактивной плазме. Получено общее выражение для интенсивности поляризационного тормозного излучения (ПТИ) в плазме, учитывающее взаимодействие между частицами и коллективные возбуждения в плазме. Спектр излучения определяется корреляционной функцией плотности плазмы. Показано, что в области частот  $\omega > c/d$  (где  $d$  — радиус Дебая в плазме) основной вклад в излучение вносят неупругие процессы, связанные с возбуждением отдельных электронов плазмы. На более низких частотах сравнимый вклад в ПТИ вносят три процесса: рассеяние поля быстрой частицы на дебаевских сферах (переходное тормозное излучение), излучение отдельных электронов отдачи и излучение электронов с передачей части импульса плазмону. Последние два процесса являются аналогами ионизационных и поляризационных потерь быстрой частицы в плазме.

В разделе 4.2 исследовано поведение спектра ПТИ вблизи резонансной особенности — при стремлении частоты излучения к плазменной частоте.

В разделе 4.3 рассмотрено ПТИ в среде в области частот  $c/v_0 \sqrt{\varepsilon(\omega)} < 1$ , в которой имеет место эффект Вавилова–Черенкова. Оказывается, что в этом частотном диапазоне интенсивность ПТИ возрастает на 1–2 порядка по сравнению с частотным диапазоном  $c/v_0 \sqrt{\varepsilon(\omega)} > 1$ . Это возрастание может быть интерпретировано как результат рассеяния черенковских квантов электронными оболочками атомов. При этом ПТИ может быть выделено экспериментально на фоне более мощного излучения Вавилова–Черенкова, так как оно распространяется вне пределов черенковского конуса.

Следующие три раздела посвящены исследованию влияния внешнего магнитного поля на свойства ПТИ. В разделе 4.4 рассматривается слабое магнитное поле, когда можно пренебречь влиянием магнитного поля на спектр тепловых флуктуаций плазмы, но следует учесть различия дисперсионных свойств испускаемых нормальных волн, связанные со слабой гиротропией плазмы [82], что приводит к генерации поляризованного излучения, степень поляризации которого определяется величиной магнитного поля.

В разделе 4.5 магнитное поле более сильное [77]:  $\omega_{Be} \gg \omega_{pe}$  (где  $\omega_{pe}$  — электронная плазменная частота, а  $\omega_{Be} = eB/mc$  — гирочастота электрона), так что его влияние на корреляционную функцию флуктуаций плотности плазмы существенно. С другой стороны, поле недостаточно сильное, чтобы полностью подавить поперечное движение частиц плазмы.

Наконец, в разделе 4.6 рассматривается сверхсильное магнитное поле, когда движение всех заряженных частиц в плазме носит одномерный характер.

#### 4.1. Микроскопическая теория поляризационного тормозного излучения быстрых частиц в равновесной плазме

В данном разделе построена теория ПТИ в невырожденной плазме, основанная на тесной аналогии с теорией рассеяния электромагнитных волн в плазме [79]. В полученных общих формулах учитываются взаимодействие частиц плазмы и различные типы возбуждений в ней.

Получим сначала общее выражение для интенсивности ПТИ в плазме. Поле излучения заряженных частиц, движущихся с нерелятивистской скоростью, на расстоянии  $R$ , описывается выражением

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{cR} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]] \Big|_{t'}, \quad (292)$$

$$t' = t - \frac{|\mathbf{R}|}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c}.$$

Для определения ускорения электрона плазмы под действием поля  $\mathbf{E}^Q$  быстрой частицы воспользуемся теорией возмущений, предполагая, что до столкновения электрон двигался по невозмущенной траектории  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = \frac{e}{mc} \mathbf{E}^Q(\mathbf{r}(t); t). \quad (293)$$

Поле излучения всех электронов равно

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{cR} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]] \Big|_{t'}, \quad (294)$$

где  $F_e = \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_a(t)]$  — микроскопическая фазовая плотность, а

$$n_e(\mathbf{r}, t) = \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)] = \int d\mathbf{v} F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (295)$$

— микроскопическое выражение концентрации электронов плазмы. Интенсивность излучения определяется вычислением вектора Пойнтинга поля (294). Для определения спектральной интенсивности излучения разложим поле излучения в интеграл Фурье по времени и определим интенсивность монохроматической компоненты излучения с частотой  $\omega$ :

$$I_{n, \omega} = \frac{cr_0^2 N}{4\pi^2 T} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' d\omega' d\omega'' \times$$

$$\times [\mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'}^Q \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'', \omega''}^Q - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'}^Q)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'', \omega''}^Q)] \times$$

$$\times S(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'', \omega - \omega''), \quad T \rightarrow \infty, \quad (296)$$

где  $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор,  $N$  — средняя концентрация электронов,  $r_0 = e^2/mc^2$ ,  $T$  — время движения быстрой частицы, и

$$S(\mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2) = \left\langle \frac{n_e(\mathbf{k}_1, \omega_1) n_e^*(\mathbf{k}_2, \omega_2)}{N} \right\rangle \quad (297)$$

— корреляционная функция электронной концентрации;  $n_e$  определяется выражением (295), усреднение производится по функции распределения электронов плазмы.

Рассмотрим классическую равновесную плазму, состоящую из электронов с концентрацией  $n_e$  и ионов с концентрацией  $n_i = n_e/Z$ . Представим  $n_e(\mathbf{r}, t)$ , входящую в (295), в виде суммы:

$$n_e = N + n_{1e}, \quad \langle n_{1e} \rangle = 0. \quad (298)$$

Вычисление  $n_{1e}(\mathbf{r}, t)$  неоднократно проводилось в литературе [78, 79], мы используем готовый результат [79]. Вычисляя затем функцию  $S(\mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2)$  согласно (297), получим

$$S(\mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2) = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) S(\mathbf{k}_1, \omega_1), \quad (299)$$

$V$  — объем плазмы. Зависимость от разностей аргументов возникла вследствие предполагаемой статистической однородности и стационарности плазмы. Функция  $S(\mathbf{k}_1, \omega_1)$  определяется выражением [79]:

$$S(\mathbf{k}_1, \omega_1) = \frac{2\pi}{k_1} \left| 1 - \frac{G_e(\mathbf{k}_1, \omega_1)}{\varepsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1)} \right|^2 f_e\left(\frac{\omega_1}{k_1}\right) + \frac{2\pi Z}{k_1} \left| \frac{G_e(\mathbf{k}_1, \omega_1)}{\varepsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1)} \right|^2 f_i\left(\frac{\omega_1}{k_1}\right), \quad (300)$$

$f_{e,i} = (\sqrt{\pi} \langle v_{e,i} \rangle)^{-1} \exp(-v^2 / \langle v_{e,i} \rangle^2)$  — одномерная максвелловская функция распределения,  $\varepsilon = 1 + G_e$  — диэлектрическая проницаемость плазмы. Отметим, что выражение (300), входящее под интеграл в (296), содержит полюсную особенность в точках  $\varepsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rightarrow 0$ . Представим интеграл (296) в виде суммы двух слагаемых, первое из которых содержит интегрирование по всей области изменения переменных  $\mathbf{k}', \omega', \mathbf{k}'', \omega''$ , за исключением полюсной особенности, второе определяется вкладом полюсных точек. Обозначим их  $I^{(1)}$  и  $I^{(2)}$ . В первом слагаемом можно совершить в  $f_{e,i}$  переход к  $\langle v_{e,i} \rangle \rightarrow 0$ , т.е.  $f_{e,i} \approx \delta(v)$  и  $(k_1 \sqrt{\pi} \langle v_e \rangle)^{-1} \exp(-\omega_1^2 / k_1^2 \langle v_e \rangle^2) \approx \delta(\omega_1)$ . Это соответствует пренебрежению доплеровским сдвигом частоты излучения электрона, движущегося со скоростью  $\langle v_e \rangle$ ,  $\langle v_e \rangle / c \ll 1$ . Электрическое поле быстрой частицы, движущейся со скоростью  $v^Q \sim c$ , определяется выражением

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}^Q = \frac{4\pi i Q}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{v}^Q (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^Q) / c^2}{k^2 - (\omega^2 / c^2) (1 - \omega_p^2 / \omega^2)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^Q). \quad (301)$$

Подставив (300), (299) в (296), выполнив переход  $\langle v_{e,i} \rangle \rightarrow 0$ , получим окончательное выражение для интенсивности излучения:

$$I_{\mathbf{n}, \omega}^{(1)} = \frac{4c r_0^2 N Q^2}{v^Q (2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \chi \left[ \chi^2 + \frac{\omega^2}{(v^Q)^2 \gamma^4} - \left( \mathbf{n} \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{n} \mathbf{v}^Q \omega}{c^2} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[ \chi^2 + \frac{\omega^2}{(v^Q)^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right]^{-2} \times \\ \times \left\{ \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^4 d^4}{[1 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2]^2} + \frac{Z}{[1 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2]^2} \right\}, \quad (302)$$

$(\mathbf{k}')_z = \omega / v^Q$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{k} / k$ ,  $\mathbf{k}'_{\perp} = \chi$ ,  $\gamma = [1 - (v^Q)^2 / c^2]^{-1/2}$  — лоренц-фактор быстрой частицы. Рассмотрим теперь вклад полюсного слагаемого в (300). В полюсе  $\text{Re } \varepsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rightarrow 0$ ,  $\text{Re } G_e(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rightarrow -1$ . Воспользуемся

формулой

$$\frac{1}{|\varepsilon|^2} = \pi (\text{Im } \varepsilon)^{-1} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im } \varepsilon}{|\text{Im } \varepsilon|^2 + |\text{Re } \varepsilon|^2} \xrightarrow{\text{Re } \varepsilon \rightarrow 0, \text{Im } \varepsilon \ll 1} \pi (\text{Im } \varepsilon)^{-1} \delta(\text{Re } \varepsilon). \quad (303)$$

Тогда

$$S(\mathbf{k}_1, \omega_1) = \frac{2\pi}{k_1} f_e\left(\frac{\omega_1}{k_1}\right) \frac{\pi \delta[\text{Re } \varepsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1)]}{\text{Im } \varepsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1)}, \quad (304)$$

$$\text{Im } \varepsilon = \sqrt{\pi} \frac{1}{k_1^2 d^2} \frac{\omega_1}{k_1 \langle v_e \rangle} \exp\left(-\frac{\omega_1^2}{k_1^2 \langle v_e \rangle^2}\right), \quad \text{Re } \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

В результате получаем

$$S(\mathbf{k}_1, \omega_1) = \pi k_1^2 d^2 [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)], \quad |\mathbf{k}_1| < \frac{1}{d}. \quad (305)$$

Второе слагаемое в (300) содержит множитель  $f_i(\omega_1 / k_1) / \text{Im } \varepsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1)$  и экспоненциально мало по сравнению с первым, так как  $\langle v_i \rangle \ll \langle v_e \rangle$ . Физически наличие полюса связано с плазмонами. Выражение (296) при подстановке в него (305) описывает интенсивность излучения поперечных квантов электронами среды, при котором возникает (или гибнет) их коллективное возбуждение — плазмон. Условие  $k_1 < 1/d$  связано с тем, что импульс плазмона не может превышать  $\hbar/d$ .

Полную интенсивность излучения можно представить в виде трех слагаемых. Два из них определяются выражением (302) и описывают излучение электронов плазмы, взаимодействующих между собой (первое слагаемое в фигурной скобке (302)) и с ионами плазмы (второе слагаемое в (302)). Третье слагаемое получается подстановкой (305) в (296) и учитывает вклад полюса диэлектрической проницаемости. Разделение интенсивности излучения на три слагаемых связано с тем, что процесс передачи импульса плазме при излучении может осуществляться по нескольким каналам: а) импульс передается отдельным электронам плазмы; б) импульс передается коллективу электронов, окружающих ион (дебаевской шубе); в) импульс передается собственным колебаниям плазмы (плазмону). Другие каналы передачи импульса, например, ионно-звуковым волнам, вносят пренебрежимо малый вклад в общую интенсивность излучения, так как содержат соответствующий малый параметр  $(m_e / m_i)^2$ .

Вычисление интегралов (302) и (296) с использованием формулы (305) возможно в общем виде, однако целесообразно вычислять интегралы в отдельных диапазонах частот, что существенно упрощает интегрирование. Для отдельных вкладов в полное излучение  $I_{\omega} = I_{\omega}^{(1)\text{el}} + I_{\omega}^{(1)\text{ion}} + I_{\omega}^{(2)}$  получим следующие выражения.

а. Электронная компонента:

$$\omega_p < \omega < \frac{c}{d}, \quad I_{\omega}^{(1)\text{el}} = \frac{16}{3} r_0^2 Q^2 N \ln \frac{m c d}{\hbar}, \quad (306)$$

$$\frac{c}{d} < \omega < \frac{m c^2}{\hbar}, \quad I_{\omega}^{(1)\text{el}} = \frac{16}{3} r_0^2 Q^2 N \ln \frac{m c^2}{\hbar \omega \sqrt{1/\gamma^2 + \omega_p^2 / \omega^2}}.$$

Уменьшение интенсивности излучения отдельных электронов на низких частотах связано с эффектом экранировки: за излучение низких частот ответственна область

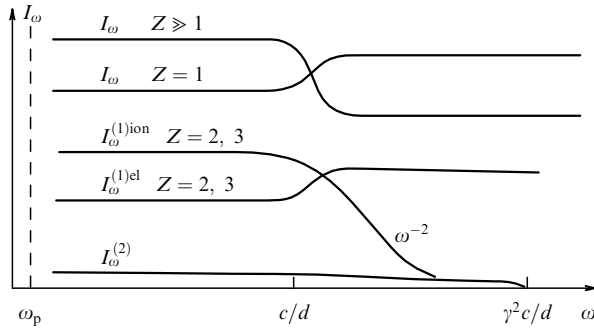


Рис. 10. Спектр поляризационного тормозного излучения  $I_\omega$  и его отдельные составляющие для различных зарядов  $Z$  плазменного иона.

передачи малых импульсов. Однако импульс, меньший, чем  $\hbar/d$ , воспринимается в плазме не отдельным электроном, а коллективом электронов, что приводит к возрастанию эффективной "массы" электрона и падению интенсивности излучения.

б. Электроны, окружающие ион (собственно поляризационное тормозное излучение). Спектр подробно исследован в [28], там же приведены аналитические выражения для различных диапазонов частот. Общий вид спектра приведен на рис. 10, при  $\omega_p < \omega < c/d$  имеем

$$I_\omega^{(1)\text{ion}} = \frac{16}{3[\varepsilon(\omega)]^{3/2}} Z r_0^2 Q^2 N \ln \frac{c}{\omega_p d}. \quad (307)$$

в. Плазменная компонента:

$$\begin{aligned} \omega_p < \omega < \frac{c}{d}, \quad I_\omega^{(2)} &= \frac{8}{3} r_0^2 Q^2 N, \\ \frac{c}{d} < \omega < \frac{c}{d} \gamma^2, \quad I_\omega^{(2)} &= \frac{8}{3} r_0^2 Q^2 N \left( \frac{c}{\omega d} \right)^2, \\ \omega > \frac{c}{d} \gamma^2, \quad I_\omega^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (308)$$

Обращение в нуль интенсивности плазменной компоненты  $I_\omega^{(2)}$  связано с тем, что длина волны плазмона не может быть меньше  $d$ . Схематический вид трех компонент интенсивности излучения приведен на рис. 10.

В области низких частот ( $\omega_p < \omega < c/d$ ) основной вклад в излучение вносит "ионная" компонента ( $Z > 3$ ) или электронная и "ионная" компоненты ( $Z = 1-3$ ). Вклад плазменной компоненты в несколько (8–10) раз меньше. В области высоких частот ( $\omega \gg c/d$ ) интенсивность излучения определяется одноэлектронными возбуждениями, вклады "ионной" и плазменной компоненты здесь исчезающе малы. Полная интенсивность ПТИ для случаев  $Z = 1$  и  $Z \gg 1$  приведена на рис. 10. Интенсивность ПТИ в плазме преобладает над интенсивностью излучения Бете–Гайтлера в области действия эффекта плотности для легких быстрых частиц ( $\omega_p < \omega < \omega_p \gamma$ ) и вплоть до  $\omega \sim mc^2/\hbar$  — для тяжелых быстрых частиц.

#### 4.2. Резонансное поляризационное тормозное излучение

Рассмотрим теперь эффект, аналогичный резонансному переходному излучению, но возникающий в присутствии лишь тепловых флуктуаций фоновой плазмы, т.е. резонансное поляризационное тормозное излучение [80].

Поляризационное тормозное излучение (ПТИ) было исследовано Акопяном и Цытовичем [81] в двух предельных случаях высоких и низких частот. На высоких частотах,  $\omega_p \ll \omega \ll \omega_p v/v_T$  его интенсивность имеет вид:

$$I_\omega^p = \frac{16}{3} I_0 \varepsilon^{-3/2} \left( \ln \frac{v \omega_p}{v_T \omega} - \frac{1}{2} \right), \quad I_0 = \frac{e^2 Q^2 e_i^2 n_i}{v m^2 c^3}, \quad (309)$$

где  $Q$  — заряд быстрой частицы,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $e_i$  и  $n_i$  — заряд и концентрация ионов в плазме. Этот результат получается стандартными методами теории излучения в средах (см., например, [28]) при пренебрежении пространственной дисперсией в фотонных функциях Грина. Легко видеть, что выражение (309) стремится к бесконечности при формальном стремлении частоты к плазменной частоте,  $\omega \rightarrow \omega_p$ . Поэтому в работе [81] область низких частот,  $(\omega - \omega_p)/\omega_p \ll v_T^2/v^2$ , где важно учесть пространственную дисперсию в функциях Грина, но можно принять  $\omega = \omega_p$ , рассмотрена отдельно, и для интенсивности ПТИ получено выражение

$$I_\omega^p = \frac{2}{27} I_0 \varepsilon^{1/2} \left( \frac{v}{v_T} \right)^4. \quad (310)$$

Этот же результат приведен в монографиях [28, 5] с численным коэффициентом 2 вместо 2/27. Однако в более поздней монографии [5, с. 57–60] указано, что формула (309) имеет более широкую область применимости,  $(\omega - \omega_p)/\omega_p \gg v_T^2/v^2$ , а на частотах  $(\omega - \omega_p)/\omega_p \approx v_T^2/v^2$  обе формулы (309), (310) дают одинаковый и правильный по порядку величины результат:

$$I_{\max} \sim I_0 \left( \frac{v}{v_T} \right)^3. \quad (311)$$

Эффект увеличения интенсивности ПТИ вблизи плазменной частоты был назван в [5] резонансным ПТИ (РПТИ). Заметим, что количественная оценка величины эффекта была сделана на основе экстраполяции правильных асимптотик за пределы их области применимости, тогда как корректный совместный учет временной и пространственной дисперсии в фотонных функциях Грина проведен не был.

Вычисление спектров ПТИ, справедливых на любых частотах  $\omega_p \leq \omega \ll \omega_p v/v_T$ , проведенное ниже, показывает, что истинное значение РПТИ в максимуме примерно в  $c/v_T$  раз превосходит оценку (311) [5], а асимптотика (309) справедлива лишь при  $\omega > 2\omega_p$ .

Рассмотрим излучение, возникающее вблизи плазменной частоты, где фазовые скорости поперечных волн  $v_{ph} \gg c$  — скорости света, поэтому для любых частиц  $v/v_{ph} \ll 1$ , и при вычислении РПТИ достаточно ограничиться учетом продольной функции Грина (нерелятивистское приближение). Диэлектрическая проницаемость, входящая в эту функцию Грина, должна быть записана с учетом пространственной дисперсии:  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) - 3k^2 d^2 + i\varepsilon''$ . Тогда интенсивность РПТИ представится в виде, аналогичном (180):

$$\begin{aligned} I_{n,\omega}^p &= \frac{8\pi Z^2 e^4 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{m^2 c^3} \times \\ &\times \int k'^2 dk' \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{k}']^2 \delta[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')v]}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^4 \{[\varepsilon(\omega) - 3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 d^2]^2 + \varepsilon''^2\}} d\varphi d\cos\vartheta, \end{aligned} \quad (312)$$



где

$$|\delta N|_{\mathbf{k}}^2 = \frac{n_i}{(2\pi)^3(1+k^2d^2)^2}. \quad (313)$$

При проведении интегрирования в (312) мы будем использовать аппроксимацию спектра равновесных флуктуаций (313), согласно которой  $|\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 = n_i/(2\pi)^3$  при  $k' < d^{-1}$ , и  $|\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 = 0$  при  $k' > d^{-1}$ , где  $d = v_T/\omega_p$  — дебаевский радиус,  $Z = e_i/e$ , а мнимая часть диэлектрической проницаемости  $\varepsilon''$  учтена для устранения расходимости при интегрировании (312). Заметим, что на рассматриваемых частотах  $\varepsilon(\omega) \ll 1$  и  $k \ll k'_{\min} = \omega_p/v < k'$ . Это позволяет пренебречь  $\mathbf{k}$  по сравнению с  $\mathbf{k}'$  везде, кроме резонансного знаменателя. После этого удобно проинтегрировать (312) по углам вектора  $\mathbf{n}$ , т.е. найти энергию, излучаемую в полный телесный угол:

$$I_{\omega}^p = \frac{32\pi^3 Z^2 e^4 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{vm^2 c^3} \int_{\omega/v}^{1/d} \frac{dk'}{k'} |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{\sin^2 \vartheta d \cos \vartheta}{[\varepsilon(\omega) + 6kk'd^2 \cos \vartheta - 3k'^2 d^2]^2 + \varepsilon''^2}. \quad (314)$$

Здесь было также проведено интегрирование по азимутальному углу:  $\int d\varphi \dots = 2\pi$ , а  $\vartheta$  — угол между вектором  $\mathbf{k}'$  и скоростью частицы  $\mathbf{v}$ . Разбиение на простейшие дроби и интегрирование по углу приводит к результату:

$$I_{\omega}^p = \frac{32\pi^3 Z^2 e^4 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{vm^2 c^3} \int_{\omega/v}^{1/d} \frac{dk'}{k'} |\delta N|_{\mathbf{k}'}^2 \frac{J_{\vartheta}}{36k^2 k'^2 d^4}, \quad (315)$$

где величина  $J_{\vartheta}$  определяется формулой (183), которая, как и в разделе 3.2, сводится к (185). После подстановки (185) в (315) и перехода к безразмерной переменной  $\mu = k'v/\omega$  спектр РПТИ представится в виде

$$I_{\omega}^p = \frac{16}{3} I_0 F(\alpha), \quad F(\alpha) = \frac{\varepsilon^{1/2}}{9} \left( \frac{v}{\omega d} \right)^4 \int_1^{\mu_{\max}} \frac{d\mu}{\mu} \frac{\Theta(\alpha^2 - 1)}{(\mu^2 - \alpha)^2}, \quad (316)$$

где  $\mu_{\max} \approx v\omega_p/v_T\omega$ . Интегрирование (316) проводится в элементарных функциях и дает

$$F(\alpha) = \frac{\varepsilon^{1/2}}{18} \left( \frac{v}{\omega d} \right)^4 \left( \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha^2} \ln(1-\alpha) \right] \Theta(\omega_1 - \omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha^2} \frac{c}{2 \times 3^{0.5} v_T} \left( 1 - \frac{2 \times 3^{0.5} v_T}{c} \ln \frac{c}{2 \times 3^{0.5} v_T} \right) \times \right. \\ \left. \times \Theta(\omega - \omega_1) \Theta(\omega_2 - \omega) + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \frac{c}{3^{0.5} v_T} + \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\mu_{\max}^2 - \alpha} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{(\alpha-1)\mu_{\max}^2}{\mu_{\max}^2 - \alpha} \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times \Theta(\omega - \omega_2) \Theta(\omega_3 - \omega) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{\alpha^2} \frac{c}{2 \times 3^{0.5} v_T} - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha^2} \ln \frac{(\alpha-1)c}{2 \times 3^{0.5} v_T} \right] \times \right. \\ \left. \times \Theta(\omega - \omega_3) \Theta(\omega_4 - \omega) + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha - \mu_{\max}^2} - \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{(\alpha-1)\mu_{\max}^2}{\alpha - \mu_{\max}^2} \right] \right\} \Theta(\omega - \omega_4) \right), \quad (317)$$

где  $\omega_{1,2}$  определяются формулами (188), а

$$\omega_{3,4} = 2\omega_p \left( 1 \mp \frac{3 \times 3^{0.5} v_T}{4c} \right). \quad (318)$$

Отметим, что изломы в спектре на частотах  $\omega_{1,2}$  связаны с физикой рассматриваемого процесса (свойства излучения меняются скачком, когда параметры системы переходят через черенковский порог), тогда как изломы на частотах  $\omega_{3,4}$  отвечают использованному приближению для  $|\delta N|_{\mathbf{k}'}^2$ . Это, однако, несущественно для рассматриваемого здесь эффекта РПТИ.

Остановимся на анализе полученных результатов. Свойства функции (317) около  $\omega_p$  оказываются близкими к (189), что подтверждает сделанное в разделе 3.2 предположение о слабой зависимости результатов от показателя спектра неоднородностей. На высоких частотах  $\omega_p \ll \omega \ll \omega_p v/v_T$  корректно вычисленный спектр РПТИ (316), (317) переходит в асимптотику (309). Однако формула (309) оказывается справедливой лишь при  $\omega > 2\omega_p$ , а не при  $(\omega - \omega_p)/\omega_p > v_T^2/v^2$ , как считалось ранее [5]. Это является следствием формы спектра тепловых флуктуаций в плазме, остающегося постоянным вплоть до малых масштабов порядка  $d$  (поэтому существен вклад верхнего предела в интеграле (316)). На низких частотах,  $\omega \rightarrow \omega_p$ , получаем (310). Однако в максимуме спектра,  $\alpha \approx 1$ , имеем

$$I_{\max}^p \sim I_0 \frac{v^3 c}{v_T^4} \quad (319)$$

в отличие от оценки (311). Форма пика РПТИ, вычисленного по формуле (317), представлена на рис. 11.

Полная энергия РПТИ, испускаемая на всех частотах, есть

$$I_{\text{tot}}^p = \frac{8}{27} I_0 \omega_p \frac{vc}{v_T^2}, \quad (320)$$

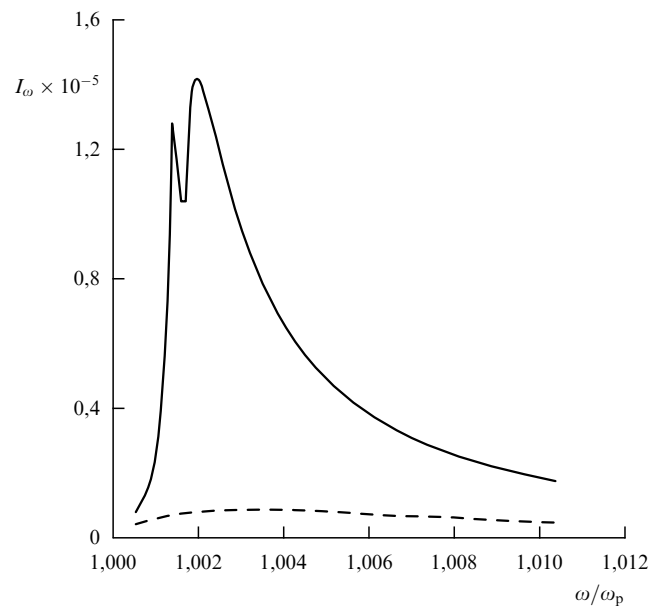


Рис. 11. Спектр резонансного поляризационного тормозного излучения. Штриховая кривая построена по асимптотикам (309), (310) [5, с. 57].

что в  $vc/v_T^2$  раз превышает мощность обычного ПТИ (без учета пика) и в  $c/v_T$  раз превышает оценку эффекта РПТИ в [5].

#### 4.3. Поляризационное тормозное излучение заряженных частиц при наличии эффекта Вавилова – Черенкова

Рассмотрим еще один резонансный эффект, возникающий в той области частот, где выполнено условие излучения Вавилова – Черенкова поперечных волн. Как будет показано в этом разделе, два канала излучения (черенковское и поляризационное тормозное) взаимодействуют друг с другом, что приводит к существенному (на 1–2 порядка) возрастанию интенсивности последнего. Хотя это излучение испускается одновременно с более мощным излучением Вавилова – Черенкова, оно может быть легко отделено на опыте, так как имеет более широкую диаграмму углового распределения. Поскольку в изотропной плазме поперечные волны за счет механизма Вавилова – Черенкова не испускаются, то в этом разделе мы будем рассматривать среду, состоящую из атомов. Полученные результаты можно обобщить на случай эффекта Вавилова – Черенкова в магнитоактивной плазме (см. раздел 2.4), приняв во внимание оптическую анизотропию среды.

Одна из диаграмм Фейнмана, отвечающая процессу поляризационного тормозного излучения, приведена на рис. 1б. Быстрая частица, переходя из состояния  $|p_i\rangle$  в состояние  $|p_f\rangle$ , испускает виртуальный квант с 4-импульсом  $(\mathbf{q}, q_0)$ , который воздействует на атомный электрон, вызывая излучение фотона. Конечное состояние атомного электрона  $|n_f\rangle$  может совпадать с начальным  $|n_i\rangle$  (чисто упругое тормозное излучение) или относиться к возбужденным состояниям атома. Интенсивность упругого тормозного излучения  $I_\omega$ , соответствующая процессу, изображенному на рис. 1б, определяется выражением [5]:

$$I_\omega = \frac{16}{3} n Z^2 r_0^2 Q^2 \left[ \frac{m\omega^2}{e^2} \alpha(\omega) \right]^2 \ln \frac{c\gamma}{\omega R}, \quad \omega \leq \frac{c}{R}, \quad (321)$$

где  $\omega$  — частота излучаемого кванта,  $n$  — концентрация атомов,  $Z$  — заряд ядра,  $R = \hbar/Zme^2$  — радиус атома,  $r_0$  — классический радиус электрона,  $Q, \gamma$  — соответственно заряд и лоренц-фактор быстрой частицы,  $\alpha(\omega)$  — поляризуемость атома (не путать с величиной  $\alpha$ , определенной в (215)). Интенсивность неупругого поляризационного тормозного излучения в  $Z \ln(c\gamma/\omega R)/\ln(mcR/\hbar)$  раз меньше упругого и для атомов с большим  $Z$  может быть опущена.

При выводе формулы (321) рассчитывалось излучение изолированного атома под действием быстрой частицы и результат умножался на число атомов, причем использовалась вакуумная функция Грина фотона. Между тем в среде следует учитывать влияние диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$  как на виртуальный фотон, так и на распространение образовавшегося кванта. Это необходимо делать, если на длине когерентности  $l_c$  (которая определяется как величина, обратная проекции волнового вектора  $\mathbf{q}$  виртуального фотона на направление скорости частицы) размещается большое число атомов, т.е.

$$n^{-1/3} \ll l_c. \quad (322)$$

Отметим, что в [28] учет диэлектрической проницаемости проведен в области высоких частот  $\omega \gg I_a$  ( $I_a$  — потенциал ионизации атомов), где

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m\omega^2}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (323)$$

Это приводит к замене  $\ln(c\gamma/\omega R)$  в выражении (321) на  $\ln(c/\omega_p R)$ . Между тем наиболее интересна область частот  $\omega \leq I_a$ , так как при этих частотах интенсивность излучения возрастает ( $\alpha(\omega)$  велика при приближении  $\omega$  к собственным частотам атома) и  $\varepsilon(\omega)$  в данной области частот также сильно отличается от единицы. Кроме того, при  $\varepsilon(\omega) > 1$  помимо поляризационного излучения в среде будет генерироваться излучение Вавилова – Черенкова.

Запишем выражение для интенсивности излучения  $I_\omega$ , явно содержащее функцию Грина виртуального фотона, с учетом диэлектрической проницаемости [28]:

$$I_\omega = \frac{8Z^2}{3\varepsilon^{3/2}} n r_0^2 Q^2 \left[ \frac{m\omega^2}{e^2} \alpha(\omega) \right]^2 \times \int_0^{1/R^2} \frac{q_\perp^2 dq_\perp^2 \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f - \omega) d\varepsilon_f}{|\mathbf{q}^2 - \varepsilon(\omega)\omega^2/c^2|^2}, \quad (324)$$

где  $q_\perp$  — составляющая вектора  $\mathbf{q}$ , перпендикулярная скорости частицы  $\mathbf{v}_0$ ,  $q_\parallel = \omega/v_0$ ,  $\mathbf{q}^2 = q_\perp^2 + q_\parallel^2$ ,  $\varepsilon(\omega)$  — диэлектрическая проницаемость системы, состоящей из невзаимодействующих атомов, находящихся в основном состоянии,  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_f$  — соответственно начальная и конечная энергии быстрой частицы. В области частот  $(v_0^2/c^2) \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) < 1$  подынтегральное выражение в (324) не имеет особенностей, и интегрирование в этом случае тривиально:

$$I_\omega = \frac{16Z^2}{3\varepsilon^{3/2}} n r_0^2 Q^2 \left[ \frac{m\omega^2}{e^2} \alpha(\omega) \right]^2 \ln \frac{c}{\omega R [1 - \varepsilon(\omega)v_0^2/c^2]^{1/2}}. \quad (325)$$

(Это совпадает с выражением (321) с учетом диэлектрической проницаемости среды.) При  $(v_0^2/c^2) \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) > 1$  в подынтегральном выражении в (324) появляется особенность, и интеграл, который мы обозначим  $I$ , имеет вид

$$I = \int_0^{1/R^2} \frac{q_\perp^2 dq_\perp^2}{|\mathbf{q}_\perp^2 - (\omega^2/v_0^2)[\varepsilon(\omega)v_0^2/c^2 - 1]|^2}, \quad \omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f. \quad (326)$$

Появление особенности объясняется возможностью выхода виртуального фотона на массовую поверхность, в результате чего процесс поляризационного излучения при  $(v_0^2/c^2) \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) > 1$  может быть представлен в виде совокупности двух процессов: генерации черенковского кванта релятивистской частицей и его рассеяния на атомной оболочке (черенковский квант существует при этом на длинах  $\sim q_\parallel^{-1} = v_0/\omega$ ).

В реальной ситуации полюсная особенность в (326) устраняется введением мнимой части энергии виртуального фотона  $\omega$ . Эта мнимая часть обусловлена мнимой частью диэлектрической проницаемости  $\varepsilon''$  ( $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ ) и в силу закона сохранения энергии ( $\delta$ -функция в (324)) мнимыми частями (или, что то же самое, конечностью времени жизни в определенном энергетическом состоя-

нии) энергии релятивистской частицы и атомного электрона в основном состоянии. Время жизни релятивистской частицы  $\tau$  определяется ее столкновениями с атомами среды и излучением черенковских квантов:

$$\tau^{-1} = \sigma v_0 n + \int \frac{Q^2}{\hbar c} \left[ 1 - \frac{c^2}{v_0^2 \varepsilon'(\omega)} \right] d\omega, \quad (327)$$

где  $\sigma$  — сечение столкновения частицы с атомом. Время жизни атомного электрона в основном состоянии можно считать бесконечно большим. Мнимая часть диэлектрической проницаемости равна

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi n e^2}{m_e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{0k}^2 \omega \Gamma_{0k}}{(\omega^2 - \omega_{0k}^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{0k}^2}. \quad (328)$$

где  $f_{0k}$  — сила осциллятора атомного перехода с частотой  $\omega_{0k}$  и шириной  $\Gamma_{0k}$ . Полная энергетическая ширина  $\Gamma$ , входящая в полюсной знаменатель в (326), определяется, таким образом, выражением

$$\Gamma(\omega) = \tau^{-1} + \omega \varepsilon''(\omega). \quad (329)$$

Вычислим интеграл (326), устранив полюсную особенность введением  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/R^2} \frac{q_{\perp}^2 dq_{\perp}^2}{|q_{\perp}^2 - (\omega^2/v_0^2)[\varepsilon(\omega)v_0^2/c^2 - 1] - (i\omega/c^2)\Gamma(\omega)|^2} = \\ &= \pi \Theta \left[ \frac{\varepsilon'(\omega)v_0^2}{c^2} - 1 \right] \left[ \frac{\varepsilon'(\omega)v_0^2}{c^2} - 1 \right] \frac{\omega}{\Gamma} + \\ &+ 2 \ln \left\{ \frac{v_0}{\omega R} \left[ \left( \frac{v_0^2}{c^2} \varepsilon' - 1 \right)^2 + \frac{\Gamma^2 v_0^2}{\omega^2 c^2} \right]^{-1/4} \right\}. \end{aligned} \quad (330)$$

Первое слагаемое в (330) обусловлено полюсной особенностью, второе — остальной областью интегрирования. Очевидно, что первое слагаемое даст в дальнейшем интенсивность поляризационного излучения, связанного с черенковской частью поля быстрой частицы, второе — интенсивность излучения, связанного с квазистационарным электромагнитным полем. В случае  $(v_0^2/c^2)\varepsilon'(\omega) > 1$  и  $\Gamma \ll \omega$  первое слагаемое доминирует (напомним, что при  $(v_0^2/c^2)\varepsilon'(\omega) < 1$  его нет совсем), и интенсивность излучения, соответствующая первому слагаемому, определяется выражением

$$\begin{aligned} I_{\omega}^{(1)} &= \frac{8\pi Z^2}{3} n r_0^2 \left[ \frac{m\omega^2}{e^2} \alpha(\omega) \right]^2 \lambda \hbar \omega \times \\ &\times \frac{(\omega Q^2/\hbar c)(1 - c^2/v_0^2 \varepsilon')}{\Gamma} \frac{v_0^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (331)$$

Второе слагаемое даст результат, близкий к (325):

$$\begin{aligned} I_{\omega}^{(2)} &= \frac{16Z^2}{3\varepsilon'^{3/2}} n r_0^2 Q^2 \left[ \frac{m\omega^2}{e^2} \alpha(\omega) \right]^2 \times \\ &\times \ln \left\{ \frac{v_0}{\omega R} \left[ \left( \frac{v_0^2}{c^2} \varepsilon' - 1 \right)^2 + \frac{\Gamma^2 v_0^2}{\omega^2 c^2} \right]^{-1/4} \right\}. \end{aligned} \quad (332)$$

Формулу (331) можно интерпретировать следующим образом: множитель  $8\pi/3 n r_0^2 \lambda$  — это число атомов в цилиндре с основанием  $\sigma_{Th}$  и высотой  $\lambda = c/\omega \varepsilon'^{1/2}$  ( $\sigma_{Th}$  — томпсоновское сечение рассеяния), множитель  $[m\omega^2 \alpha(\omega)/e^2]^2$  учитывает отличие поляризуемости атом-

ной оболочки от поляризуемости свободных электронов; их произведение дает полное эффективное число электронов, рассеивающих черенковские кванты, с учетом связи электронов в атомах и когерентного характера рассеяния кванта атомной оболочкой в целом. Далее, множитель  $\hbar\omega$  — энергия рассеиваемого (и излучаемого) кванта, а величина  $\omega Q^2(1 - c^2/v_0^2 \varepsilon')/\hbar c \Gamma$  представляет собой отношение вероятности излучения черенковского кванта к полной вероятности распада данного состояния излучающей быстрой частицы. Последний множитель не может, очевидно, превысить единицу.

Сравним два вклада (331) и (332) в поляризационное тормозное излучение:

$$\frac{I_{\omega}^{(1)}}{I_{\omega}^{(2)}} = \frac{\pi \varepsilon' v_0^2 \omega [1 - c^2/v_0^2 \varepsilon'(\omega)]}{2\Gamma c^2 \ln \{ (v_0/\omega R) [(\varepsilon' v_0^2/c^2 - 1)^2 + \Gamma^2 v_0^2/\omega^2 c^2]^{-1/4} \}}. \quad (333)$$

Условием преобладания полюсного вклада  $I_{\omega}^{(1)}$  (который имеется только в области параметров  $(v_0^2/c^2)\varepsilon'(\omega) > 1$ ) является резонансность процесса, а именно:

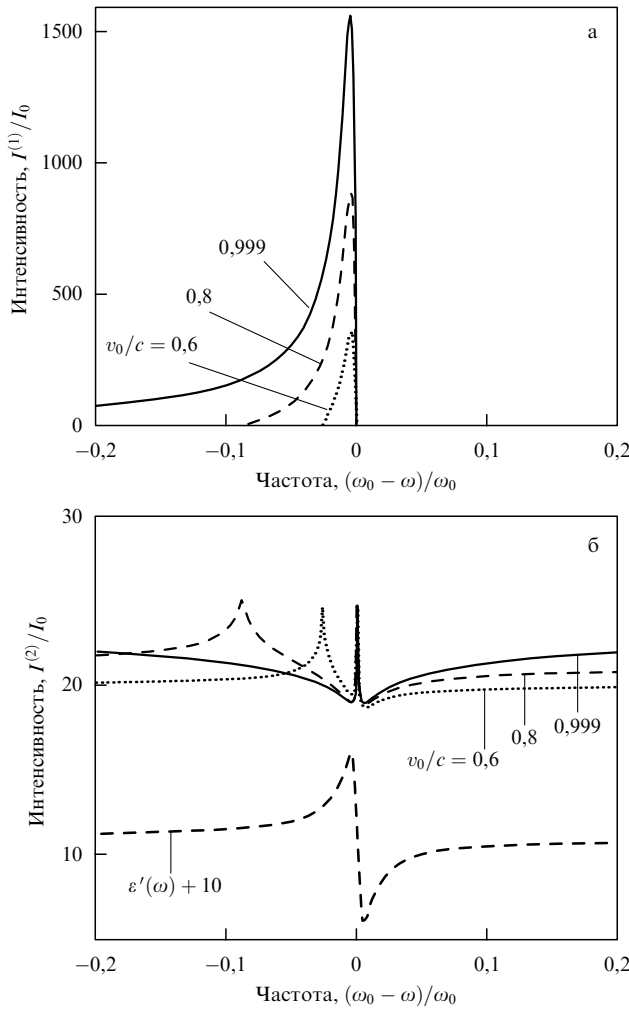
$$\frac{\omega}{\Gamma} > \frac{2c^2 \ln \{ (v_0/\omega R) [(\varepsilon' v_0^2/c^2 - 1)^2 + \Gamma^2 v_0^2/\omega^2 c^2]^{-1/4} \}}{\pi \varepsilon' v_0^2 [1 - c^2/v_0^2 \varepsilon'(\omega)]}. \quad (334)$$

На рисунке 12 приведены зависимости, описывающие два рассматриваемых вклада в поляризационное излучение, если

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{5\Gamma}{\omega - \omega_0 + i\Gamma/2}. \quad (335)$$

Полюсный вклад максимален там, где вещественная часть диэлектрической проницаемости достигает наибольшего значения. Обычное ПТИ достигает максимумов на пороге черенковской генерации волн. В данной модели среды (335) спектральная мощность полюсного вклада доминирует в ограниченной области частот, тогда как полная энергия ПТИ определяется обычным вкладом  $I^{(2)}$ .

Остановимся теперь на сравнении эффекта возрастания обычного ПТИ (вклад  $I^{(2)}$ ) с качественно аналогичным ему эффектом резонансного ПТИ, рассмотренным в предыдущем параграфе. Физической причиной возрастания интенсивности ПТИ в обоих случаях является возможность черенковской генерации собственных мод в среде — плазменных в разделе 4.2 или поперечных в данном разделе. Важно заметить, что величина возрастания интенсивности ПТИ в двух этих случаях существенно различна: на рис. 12 превышение составляет  $\sim 20\%$ , тогда как при РПТИ превышение составляет несколько порядков величины. Формальной причиной такого различия является разная структура зависимости подынтегральных выражений от передаваемого импульса (это является следствием различия законов дисперсии продольных и поперечных собственных мод в плазме). В данном разделе роль пространственной дисперсии незначительна, поэтому достаточно учесть зависимость диэлектрической проницаемости от частоты  $\varepsilon(\omega)$ , что приводит к логарифмической зависимости от частоты в области резонанса. При РПТИ пространственная дисперсия важна, диэлектрическая проницаемость



**Рис. 12.** Полусный (а) и обычный (б) вклады в поляризационное тормозное излучение при различных значениях скорости быстрой частицы ( $v_0/c = 0,6, 0,8, 0,999$ ). Зависимость вещественной части диэлектрической проницаемости (335) при  $\omega_0/\Gamma = 100$  от частоты приведена на рис. б. Чем больше значение  $\varepsilon'(\omega)$ , тем сильнее полусный вклад  $I^{(1)}$  превышает обычный вклад  $I^{(2)}$ . Обычный вклад достигает максимума на пороге черенковской генерации.

зависит от переданного импульса  $\varepsilon(\omega, \mathbf{q})$ , результат интегрирования описывается степенными функциями, так что резонансность процесса проявляется гораздо ярче.

Заметим, что интенсивность излучения (331) совпадает с интенсивностью рассеяния уже сформировавшихся черенковских квантов. Действительно, число черенковских квантов  $N_{\omega}^{\text{БЧ}}$ , образующихся в единицу времени и приходящихся на единичный интервал частот и телесных углов, дается выражением

$$N_{\omega, \theta}^{\text{БЧ}} = \frac{Q^2}{2\pi\hbar c} \left[ 1 - \frac{c^2}{v_0^2 \varepsilon'(\omega)} \right] \delta \left( \cos \theta - \frac{c}{v_0 \varepsilon'^{1/2}} \right), \quad (336)$$

где  $\theta$  — угол вылета черенковского кванта относительно скорости частицы  $v_0$ . За время жизни  $1/\Gamma$  системы в заданном состоянии излучится  $N_{\omega}^{\text{БЧ}}/\Gamma$  фотонов (напомним, что поляризация излучения Вавилова–Черенкова такова, что электрический вектор лежит в плоскости, проходящей через  $v_0$  и направление излучения). Дифференциальное сечение рассеяния кванта атомной оболоч-

кой, зависящее от частоты и направления распространения, равно

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega' d\Omega} = \frac{3}{8\pi} \sigma_{\text{Th}} \left[ \frac{m\omega^2}{e^2} \alpha(\omega) \right]^2 \delta(\omega - \omega') \sin^2 \chi, \quad (337)$$

где  $\chi$  — угол между электрическим вектором падающего кванта и направлением рассеяния:

$$\sin^2 \chi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \vartheta - \cos^2 \theta \sin^2 \vartheta \cos^2(\varphi - \phi) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\vartheta \cos(\varphi - \phi). \quad (338)$$

Здесь  $\vartheta$  — угол вылета рассеянного кванта относительно скорости быстрой частицы,  $\varphi$  и  $\phi$  — азимутальные углы.

Вероятность  $w$  рассеяния черенковских квантов равна

$$\frac{dw}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{\varepsilon'^{1/2}} n \frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega}, \quad (339)$$

число вторичных, рассеянных, квантов  $N_{\omega}$  есть

$$N_{\omega} = \int \frac{dw}{d\omega d\Omega} \frac{N_{\omega', \theta}^{\text{БЧ}}}{\Gamma} d\omega' \sin \vartheta \sin \theta d\theta d\vartheta d\varphi d\phi. \quad (340)$$

Соответствующая (340) интенсивность рассеянного излучения  $I_{\omega} = \hbar\omega N_{\omega}$  совпадает с формулой (331). Заметим, что угловое распределение рассеянных квантов практически изотропно и определяется в основном угловой зависимостью сечения рассеяния. Структура выражения (340) такая же, как и в случае тормозного излучения релятивистской частицы на возбужденном атоме [83]. Это совпадение не случайно: диаграммы Фейнмана тормозного излучения с девозбуждением и поляризационного излучения топологически эквивалентны, в обоих случаях виртуальный фотон может выходить на массовую поверхность. В случае, когда время жизни энергетического состояния быстрой частицы определяется только процессом излучения,

$$\frac{\omega}{\Gamma} = \frac{\omega}{(Q^2/\hbar c) \int (1 - c^2/v_0^2 \varepsilon') d\omega} \approx \frac{\hbar c}{Q^2} \approx 137 \quad (341)$$

и  $I_{\omega}^{(1)}$  на два порядка превышает "обычное" поляризационное излучение.

После получения основных формул вернемся к физической интерпретации обсуждаемого излучения. Оно представляет собой результат влияния эффекта Вавилова–Черенкова на поляризационное тормозное излучение, но не может рассматриваться как линейное наложение этих двух эффектов. Дополнительный вклад  $I_{\omega}^{(1)}$  в поляризационное тормозное излучение вызван рассеянием черенковских квантов атомными оболочками, тогда как эффект, описываемый формулой (332) для  $I_{\omega}^{(2)}$ , обусловлен возбуждением атомных оболочек квазистационарным полем быстрой частицы. Согласно оценке (333), вклад, стимулированный эффектом Вавилова–Черенкова, во многих случаях оказывается главным.

Но для оценки возможности регистрации эффекта следует сравнить  $I_{\omega}^{(1)}$  со спектральной мощностью других механизмов излучения — черенковского и обычного тормозного.

Интенсивность черенковского излучения превышает  $I_{\omega}^{(1)}$ , так как последнее представляет собой эффект более

высокого порядка малости по заряду электрона:

$$\frac{I_{\omega}^{(1)}}{I_{\omega}^{\text{БЧ}}} \approx \frac{\omega}{\Gamma} \sigma_{\text{Тн}} n \lambda \ll 1. \quad (342)$$

Однако черенковские кванты частоты  $\omega$  распространяются только под углом  $\cos \theta = c/v_0 \varepsilon'^{1/2}$  к скорости быстрой частицы, тогда как поляризационное тормозное излучение имеет угловое распределение  $(1 + \cos^2 \vartheta)$ , близкое к изотропному, и, в частности, существует и за пределами черенковского конуса. Это объясняется тем, что оно возникает как результат рассеяния черенковских квантов нерелятивистскими электронами атомных оболочек, а сечение рассеяния в этом случае, как известно, слабо анизотропно.

Отношение полюсного вклада  $I^{(1)}$  к обычному тормозному излучению, описываемому формулой Бете–Гайтлера, равно

$$\frac{I_{\omega}^{(1)}}{I_{\omega}^{\text{БГ}}} = \frac{\pi [(m\omega^2/e^2)\alpha(\omega)]^2 \omega (1 - c^2/v_0^2 \varepsilon')}{2\Gamma \varepsilon' \ln(mv_0^2/\hbar\omega)} \quad (343)$$

и может значительно превышать единицу. Заметим, однако, что если выполнено условие ИВЧ, то обычное тормозное излучение так же, как и ПТИ, содержит полюсный вклад, который еще предстоит вычислить (его можно интерпретировать как обратное комптоновское рассеяние черенковских квантов на быстрой частице).

Таким образом, можно заключить, что за пределами черенковского конуса полюсный вклад в излучение (в рассмотренное выше ПТИ и, возможно, аналогичный вклад в обычное тормозное излучение) в определенных интервалах частот доминирует над всеми остальными каналами излучения и может быть без затруднений измерен в указанной области углов.

Рассмотренный здесь вклад в ПТИ отличен от нуля в точности на тех же частотах, на которых выполнено условие ИВЧ, поскольку он связан с упругим рассеянием черенковских фотонов на атомах среды без изменения частоты. Очевидно, что могут иметь место и неупругие процессы (комбинационное рассеяние), связанные с возбуждением или девозбуждением атома, либо с испусканием или поглощением собственного (коллективного) колебания среды (плазмона, магнона, фонона и т.п.), например, в разделе 4.1 наряду с упругим вкладом  $I_{\omega}^{(1)\text{ion}}$  рассмотрено также излучение при возбуждении (выбивании) отдельного электрона  $I_{\omega}^{(1)\text{el}}$  и излучение при одновременном испускании или поглощении плазмона  $I_{\omega}^{(2)}$ .

Естественно, что когда выполняется условие ИВЧ, модифицируются (наряду с упругим) и неупругие вклады. Важно иметь в виду, что эти вклады могут быть существенны и на тех частотах, на которых условие ИВЧ не выполнено, так как соответствующие элементарные процессы происходят с изменением частоты.

#### 4.4. Поляризация переходного тормозного излучения в слабом магнитном поле

Расчет ПТИ при наличии магнитного поля может быть проведен по той же схеме, что и вычисление переходного излучения в гиротропной плазме (раздел 2.4). Однако следует принять во внимание некоторые существенные особенности ПТИ, отличающие его от переходного излучения. Во-первых, ПТИ не обладает высокой

направленностью вдоль скорости быстрой частицы [5], и малоугловое приближение оказывается некорректным даже для ультрарелятивистских частиц. По этой же причине наряду с поперечным полем быстрой частицы нужно учитывать ее продольное поле. Во-вторых, основная энергия тепловых флуктуаций в плазме приходится на масштабы порядка электронного дебаевского радиуса  $d$ . Поэтому в наиболее интересной области частот

$$\omega_p \ll \omega < \omega \frac{c}{v_T} \quad (344)$$

величина передаваемого импульса  $\tilde{k} \simeq d^{-1}$  (в процессе испускания фотона) оказывается много больше волнового числа испускаемого кванта,  $\tilde{k} \gg k = 2\pi/\lambda$ . В переходном излучении имеет место обратное неравенство.

Энергия, излучаемая частицей в одну из нормальных мод за все время движения частицы в плазме, может быть по-прежнему представлена в виде (88), спектр равновесных тепловых флуктуаций имеет вид (313), а электрическое поле  $\mathbf{E}^Q$  выражается через ток частицы  $\mathbf{j}$  с помощью продольной и поперечной функций Грина:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}^Q = \frac{4\pi i}{\omega} \left[ \sum_{\sigma} \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_{\sigma}^*) \mathbf{a}_{\sigma}}{n^2 - n_{\sigma}^2} - \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{k^i \varepsilon_{ij} k^j} \right], \quad (345)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{Q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}),$$

где  $\mathbf{a}_{\sigma}$  ( $\sigma = \pm 1$ ) — векторы поляризации обыкновенной и необыкновенной волн,  $n_{\sigma}$  — соответствующие показатели преломления,  $n_{\sigma} = kc/\omega_{\sigma}$ .

С учетом этих соотношений выражение для интенсивности ПТИ моды  $j$  принимает вид:

$$I_{j, \mathbf{n}, \omega} = \frac{8\pi e^4 Q^2}{m^2 c^3 \omega^2} \int |\delta N|_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2 |\mathbf{A}_{j, \mathbf{k}'}^* \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{k}'}|^2 \delta(\omega - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{k}', \quad (346)$$

где  $A_{j, \mathbf{k}}^{\alpha} = \chi_{\alpha\beta} a_{j, \mathbf{k}}^{\beta} = (1/v)[(1 - n_j^2) a_{j, \mathbf{k}}^{\alpha} + n_j^2 (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{a}_{j, \mathbf{k}}) \chi^{\alpha}]$ ,  $v = \omega_p^2/\omega^2$ ,  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{k}/k$ ,

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}} = \sum_{\sigma} \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_{\sigma}^*) \mathbf{a}_{\sigma}}{n_{\sigma}^2 - n^2} - \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{k^i \varepsilon_{ij} k^j}. \quad (347)$$

Мы рассматриваем случай слабогиротропной плазмы, в котором все величины, зависящие от магнитного поля, могут быть разложены в ряды. Вид разложения векторов поляризации и показателей преломления нормальных мод зависит от соотношения  $u^{1/2} = \omega_{\text{Be}}/\omega$  и  $\cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между волновым вектором и магнитным полем. Остановимся на случае (96), когда влияние магнитного поля на излучение особенно сильное. При разложении в ряд функций, зависящих от  $\mathbf{k}'$ , также воспользуемся приближением (96), так как области углов  $\cos \alpha \leq u^{1/2}$  при интегрировании вносят малый вклад в поляризацию излучения.

С точностью до членов первого порядка малости по параметру  $u^{1/2}/\cos \alpha$ , выражения для показателей преломления и векторов поляризации нормальных мод имеют вид:

$$n_j^2 = 1 - v(1 - ju^{1/2}|\cos \alpha|), \quad (348)$$

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_{j\perp}^0 - j \frac{u^{1/2} \sin^2 \alpha}{4|\cos \alpha|} \mathbf{a}_{-j\perp}^0 - ivu^{1/2} \boldsymbol{\chi} \sin \alpha, \quad (349)$$

где

$$\mathbf{a}_{j\perp}^0 = 2^{-1/2} [\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}} \operatorname{sgn}(\cos \alpha)], \quad (350)$$

$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$  — орты осей эллипса поляризации:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}}{|\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}|}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{x}}. \quad (351)$$

Подставив (348), (349) в (346), проинтегрируем полученное выражение с учетом (344). В результате получим

$$I_{j,n,\omega} = I_{n,\omega}^{(0)} + \Delta I_{j,n,\omega}, \quad (352)$$

где

$$I_{n,\omega}^{(0)} = J_0 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} (\ln D - 2) \quad (353)$$

— половина интенсивности излучения в изотропной плазме, а добавка  $\Delta I_{j,n,\omega}$  зависит от типа волны:

$$\begin{aligned} \Delta I_{j,n,\omega} = J_0 j u^{1/2} \left\{ (1 + \cos^2 \theta) |\cos \alpha| + \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \alpha}{4v^2 |\cos \alpha|} [(\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v})^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})^2] + \right. \\ \left. + \operatorname{sgn}(\cos \alpha) \frac{2^{1/2} \sin \alpha}{v} (\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v}) \cos \theta \right\} (\ln D - 2) + \\ \left. + \frac{\cos \theta |\cos \alpha|}{1 + \omega^2 / \omega_p^2} \right\}. \quad (354) \end{aligned}$$

В формулах (353), (354) использованы обозначения:

$$J_0 = \frac{zNe^4 Q^2}{2\pi m^2 c^4}, \quad D = \frac{c^2}{d^2 \omega^2 (\omega_p^2 / \omega^2 + \gamma^{-2})}, \quad (355)$$

$\theta$  — угол между волновым вектором и скоростью частицы.

Последнее слагаемое в (354), не содержащее большого множителя  $(\ln D - 2)$ , связано с поправками, возникающими при разложении в ряд поперечной функции Грина. В дальнейшем этим членом будем пренебрегать, что фактически соответствует использованию в (345) функции Грина изотропной плазмы.

В случае конечного источника излучения с характерным размером  $L$ , фазы фурье-компонент флуктуации плотности  $\delta N_{\mathbf{k}_1}$ ,  $\delta N_{\mathbf{k}_2}$  являются статистически независимыми, если  $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \gg L^{-1}$ . При излучении в направлении  $\mathbf{n}$  нормальных волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}_o$ ,  $\mathbf{k}_e$ , в процессе рассеяния принимают участие пространственные гармоники спектра неоднородностей среды, волновые векторы которых  $\tilde{\mathbf{k}}$  удовлетворяют равенствам:

$$\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k}_o \cdot \mathbf{v} - \omega, \quad \tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{v} - \omega. \quad (356)$$

Для направлений излучения, удовлетворяющих условию сильного фарадеевского вращения

$$|\cos \theta| |\mathbf{k}_o - \mathbf{k}_e| \gg L^{-1}, \quad (357)$$

разность фаз между нормальными волнами является случайной величиной, и излучение поляризовано циркулярно (в первом приближении по  $u^{1/2}/|\cos \alpha|$ ), степень

поляризации в данном направлении равна:

$$\begin{aligned} P_{n,\omega} = \frac{I_1 - I_{-1}}{I_1 + I_{-1}} = -u^{1/2} \left( |\cos \alpha| + \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\sin^2 \alpha}{4v^2 |\cos \alpha|} [(\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v})^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{sgn}(\cos \alpha) \frac{2^{1/2} \sin \alpha}{v} (\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v}) \cos \theta \right\} \right). \quad (358) \end{aligned}$$

Заметим, что  $P_{n,\omega}$  не обладает азимутальной симметрией относительно  $\mathbf{B}$ . Этот результат возникает в приближении равномерного прямолинейного движения частицы. Поэтому азимутальная асимметрия поляризации излучения может наблюдаться в эксперименте, если характерный размер плазмы много меньше гирорадиуса частицы.

При выполнении неравенства, обратного к (357), разность фаз между комплексными амплитудами нормальных волн является хорошо определенной величиной:

$$\Delta \phi \approx \operatorname{sgn}(\cos \alpha) (2\psi - \pi), \quad (359)$$

где  $\psi$  — угол между проекциями векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  на картинную плоскость, отсчитываемый от проекции  $\mathbf{B}$  против часовой стрелки. Иначе говоря, излучение почти полностью (с точностью до членов порядка  $u^{1/2}/|\cos \alpha|$ ,  $(\ln D)^{-1}$ ,  $L|\cos \theta||k_1 - k_{-1}|$ ) линейно поляризовано.

Если длина фарадеевского вращения в любом направлении велика по сравнению с размерами источника, то поляризация излучения с точностью до членов порядка  $u^{1/2}/|\cos \alpha|$  линейная, степень поляризации, как и в случае изотропной плазмы, есть

$$P_{n,\omega} = \cos^2 \theta. \quad (360)$$

Интерес может также представлять излучение, генерируемое ансамблем частиц. В качестве примера рассмотрим излучение моноэнергетических электронов с изотропным распределением по скоростям. В этом случае поляризация является круговой для любого квазипродольного ( $|\cos \alpha| \gg u^{1/2}$ ) направления излучения. При усреднении выражения (358) по направлениям скорости вклад знакопеременных членов обращается в нуль, и выражение для поляризации излучения принимает вид

$$P = -2u^{1/2} |\cos \alpha|. \quad (361)$$

Как и в случае переходного излучения, поляризация соответствует преимущественному испусканию необыкновенных волн, однако величина степени поляризации в данном случае более высокая (ср. (99)).

#### 4.5. Влияние внешнего магнитного поля на спектры поляризационного тормозного излучения

Рассмотрим случай, когда скорость быстрой частицы параллельна внешнему постоянному и однородному магнитному полю, так как в такой геометрии влияние поля  $B_0$  на спектр излучения максимально (электроны отдачи двигаются поперек поля). Поле будем предполагать достаточно интенсивным для изменения спектра

флуктуаций плотности плазмы. Вычисление спектра проведем в диапазоне частот  $\omega \gg \omega_B$ , когда влиянием поля на дисперсию поперечных волн можно пренебречь.

Функция  $S(\mathbf{k}_1, \omega_1)$ , рассмотренная в разделе 4.1, в магнитоактивной плазме имеет вид [79]

$$S(\mathbf{k}_1, \omega_1) = 2\sqrt{\pi} \left| 1 - \frac{H_e}{\varepsilon_L} \right|^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-k_{\perp}^2 \rho_e^2) I_l(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \times \\ \times \frac{\exp\{-(\omega - l\omega_B)/k_{1\parallel} \langle v_e \rangle\}^2}{k_{1\parallel} \langle v_e \rangle} + \\ + 2\sqrt{\pi} Z \left| \frac{H_e}{\varepsilon_L} \right|^2 \exp\left(-\frac{\omega_1^2}{k_1^2 \langle v_i \rangle^2}\right), \quad (362)$$

где  $\varepsilon_L = 1 + H_e$  — продольная диэлектрическая проницаемость магнитоактивной плазмы,  $\omega_B$  — циклотронная частота электрона,  $\rho_e = \langle v_e \rangle / \omega_B$ ,  $k_{\perp}$ ,  $k_{1\parallel}$  — составляющие вектора  $\mathbf{k}_1$  поперек и вдоль магнитного поля,  $I_l(x)$  — модифицированная функция Бесселя. Формула (362) выведена в пренебрежении влиянием поля  $B_0$  на движение ионов (случай частично замагниченной плазмы) и поперечными типами колебаний в магнитоактивной плазме. Продольная диэлектрическая восприимчивость  $H_e$  магнитоактивной плазмы имеет следующий вид [79]:

$$H_e(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 d^2} \left\{ 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-k_{\perp}^2 \rho_e^2) I_l(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \times \right. \\ \times \frac{\omega}{\omega - l\omega_B} \left[ 2x_l \exp(-x_l^2) \int_0^{x_l} \exp(p^2) dp + \right. \\ \left. \left. + i\pi^{1/2} x_l \exp(-x_l^2) \right] \right\}, \quad x_l = \frac{\omega - l\omega_B}{k_{1\parallel} \langle v_e \rangle}. \quad (363)$$

Интеграл (296) при подстановке в него выражений (362), (299) не вычисляется в стандартных функциях, однако удается провести оценки интеграла для случая сильного магнитного поля ( $\rho_e \ll d$ ).

При выполнении данного условия облако экранирующего каждый ион пространственного заряда приобретает вытянутую вдоль поля форму с размером  $\sim \rho_e$  в поперечном направлении. Интенсивность "ионного" вклада в спектр уменьшается на низких частотах в  $(\rho_e/d)^4$  раз (что связано с уменьшением в  $(\rho_e/d)^2$  раз поперечной по отношению к магнитному полю поляризуемости плазмы, квадрат которой определяет интенсивность излучения),

$$I_{\omega}^{(1)\text{ion}} \approx \left(\frac{\rho_e}{d}\right)^4 \frac{16}{3} Z r_0^2 Q^2 N \ln \frac{c}{\rho_e \omega_p}, \quad \omega_B \ll \omega < \frac{c}{\rho_e}, \quad (364)$$

а при  $\omega > c/\rho_e$  начинается экспоненциальное падение интенсивности с частотой.

Интенсивность излучения отдельных электронов уменьшается в  $\ln(m c \rho_e / \hbar) / \ln(m c d / \hbar)$  раз (т.е. значительно слабее, чем для "ионного" вклада, так что при  $Z(\rho_e/d)^4 \ll 1$  электронный вклад доминирует на всех частотах  $\omega \gg \omega_B$ ) в диапазоне частот  $\omega_p < \omega < c/\rho_e$ , так как для выбивания электрона нужен импульс больше, чем  $\hbar/\rho_e$ . Область передаваемых импульсов, существенная для излучения отдельных электронов, в этом случае сужается, что и приводит к логарифмическому уменьшению интенсивности; на больших частотах интенсивность

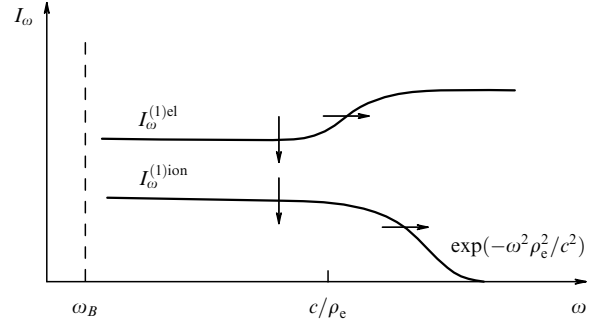


Рис. 13. Влияние увеличения магнитного поля на составляющие поляризационного тормозного излучения.

остается неизменной. Общий вид спектра приведен на рис. 13, стрелками указано направление изменения спектра при увеличении поля  $B_0$ . Вклад в излучение продольных колебаний (плазмонов) составляет несколько процентов. Необходимо отметить, что при  $\rho_e \ll d$  имеем  $\omega_p < \omega_B$ , так что вблизи  $\omega_B$  (и, возможно, вблизи нескольких ее низших гармоник) циклотронное излучение и поглощение может оказаться весьма существенным.

#### 4.6. Поляризационное тормозное излучение в сильном магнитном поле

Поляризационное тормозное излучение, как подчеркивалось в разделе 4.1, возникает в результате рассеяния виртуальных квантов, образующихся при столкновении частиц, в электромагнитные волны. В данном разделе мы рассмотрим этот процесс в сверхсильных магнитных полях  $\omega_B \gg \gamma c/d$ , когда тепловые электроны плазмы и релятивистские электроны ( $\gamma \gg 1$ ) двигаются строго вдоль силовых линий магнитного поля [84]. Процесс излучения, таким образом, носит одномерный характер. Излучение в этом случае сильно подавлено, так как оно вызывается продольным полем ультрарелятивистской частицы, которое в  $\gamma^2$  раз слабее поперечного. Условием применимости такого приближения будет следующее ограничение на частоту излучения:  $\omega \ll \omega_B/\gamma$ . Будем также считать, что  $\omega \gg \omega_p$ .

В этой области частот плазма представляет собой сильно гиротропную среду, ее собственными модами являются обыкновенная волна и медленная необыкновенная волна [62], выражения для показателей преломления и векторов поляризации были приведены в разделе 2.4 при рассмотрении переходного излучения в гиротропной плазме. Для нашего рассмотрения важно, что для направлений распространения волн, не слишком близких к магнитному полю, поляризация обеих собственных мод почти линейная, причем в обыкновенной волне вектор электрического поля лежит в плоскости  $(\mathbf{k}, \mathbf{B})$ , а в медленной необыкновенной перпендикулярен ей. Поскольку электрический ток в данном случае имеет только одну компоненту (направленную вдоль поля  $\mathbf{B}$ ), то обыкновенные волны будут генерироваться значительно эффективнее, чем необыкновенные (что согласуется с результатами раздела 2.4; см. рис. 6). Поэтому в настоящем разделе приводятся формулы только ПТИ обыкновенных волн.

Вычисление спектра излучения выполняется так же, как в разделе 4.1, за исключением того, что ускорение в

(292) и поле релятивистской частицы (301) имеют только одну компоненту, параллельную скорости частицы и магнитному полю. Детали расчета изложены в [84], мы же приведем окончательный результат. На высоких частотах  $\omega > 2\gamma^2 c/d$  имеем

$$I_\omega(\vartheta) = \frac{2r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{\gamma^2} \left(\frac{c}{\omega d}\right)^4 \frac{\sin^2 \vartheta (1 + \gamma^2 \sin^2 \vartheta)}{[1 - (v/c) \cos \vartheta]^2}. \quad (365)$$

Вообще говоря, выражение (365) получено в "квазиперечном" приближении, когда выполнено условие (128), т.е. оно справедливо для углов

$$\theta > \left(\frac{2\omega}{\omega_B}\right)^{1/2}. \quad (366)$$

Однако поскольку излучение (365) не обладает острой направленностью вдоль магнитного поля (рис. 14а), использованное приближение в данном случае адекватно. Проинтегрированная по всем углам интенсивность излучения (365) при больших энергиях  $\gamma \gg 1$  явным образом не зависит от энергии:

$$I_\omega = \frac{8}{3} r_0^2 Q^2 n_i Z^2 \left(\frac{c}{\omega d}\right)^4. \quad (367)$$

Если сравнить формулу (367) с интенсивностью обычного тормозного излучения в сильном магнитном поле

$$I_\omega^{\text{БГ}} = \frac{8r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{3\gamma^2}, \quad \omega > \frac{2\gamma^2 c}{d}, \quad (368)$$

то оказывается, что в области высоких частот  $\omega > 2\gamma^2 c/d$  поляризационным механизмом можно пренебречь по сравнению с обычным тормозным излучением.

На частотах  $c/d \ll \omega \ll 2\gamma^2 c/d$  и  $\omega_p \ll \omega \ll c/d$  имеем соответственно:

$$I_\omega(\vartheta) = \frac{2r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{\gamma^4} \frac{c^2}{\omega^2 d^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{1 - (v/c) \cos \vartheta}, \quad (369)$$

$$I_\omega(\vartheta) = \frac{4r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{\gamma^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{1 + \gamma^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (370)$$

Из выражения (370) следует, что переходное тормозное излучение сравнительно низких частот  $\omega_p \ll \omega \ll c/d$  слабо зависит от угла в области  $\gamma^{-1} < \vartheta < \pi/2$ , а при малых углах стремится к нулю как  $\sin^2 \vartheta$  (рис. 14а).

Проводя интегрирование по всем углам, из (369) и (370) имеем для спектральной интенсивности соответственно

$$I_\omega = \frac{4r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{\gamma^4} \left(\frac{c}{\omega d}\right)^2 (\ln 2\gamma - 1), \quad (371)$$

$$I_\omega = \frac{8r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{\gamma^4}. \quad (372)$$

Интенсивность обычного тормозного излучения в тех же диапазонах частот имеет вид

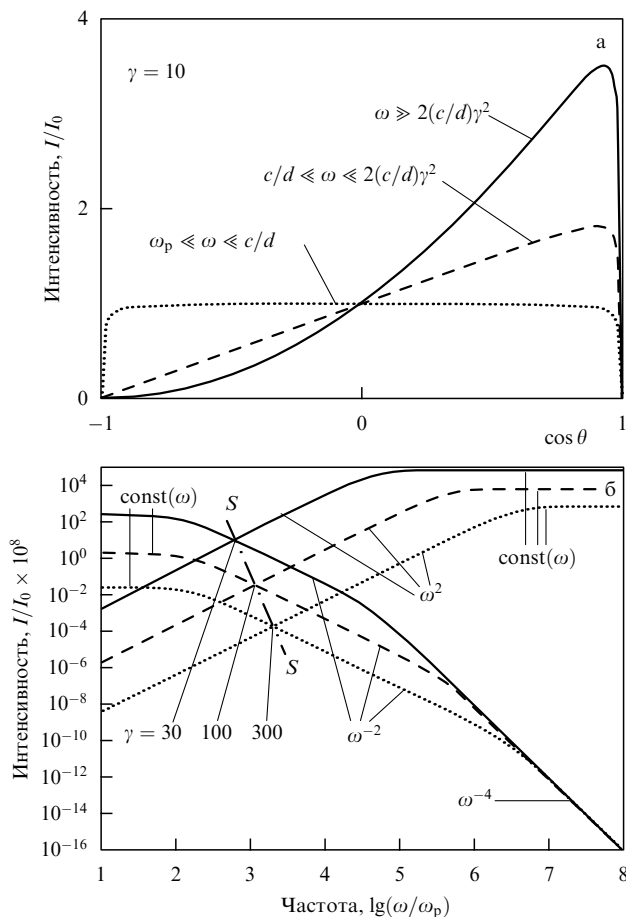
$$I_\omega^{\text{БГ}} = \frac{4r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{3\gamma^6} \left(\frac{\omega d}{c}\right)^2 \left(\ln \frac{2\gamma^2 \omega d}{c} - 1\right), \quad \frac{c}{d} \ll \omega \ll \frac{2\gamma^2 c}{d}, \quad (373)$$

$$I_\omega^{\text{БГ}} = \frac{8r_0^2 Q^2 n_i Z^2}{\gamma^6} \left(\frac{\omega d}{c}\right)^2 (\ln 2\gamma - 1), \quad \omega_p \ll \omega \ll \frac{c}{d}. \quad (374)$$

Сравнив формулы (371), (372) и (373), (374), приходим к выводу, что поляризационное тормозное излучение в плазме в присутствии сильного магнитного поля доминирует при условии

$$\omega < \omega_* = \frac{\sqrt{\gamma} c}{d}, \quad (375)$$

причем частота  $\omega_*$  попадает в интервал  $c/d \ll \omega \ll 2\gamma^2 c/d$ . На рисунке 14б изображены поляризационное и обычное тормозное излучения при разных энергиях релятивистской частицы, а штрихпунктирная линия  $S-S$ , соответствующая (375), разграничивает области, в которых доминирует тот или иной вклад. В интервале же частот  $\omega_p \ll \omega \ll c/d$ , где длина излучаемой волны  $\lambda \gg d$ , поляризационное тормозное излучение в сильном магнитном поле всегда доминирует, поскольку тепловые электроны плазмы, образующие динамическую поляризацию, при рассеянии на них виртуальных квантов излучают когерентно, что и приводит к максимальной интенсивности излучения. Что же касается интерференции между обычным и поляризационным тормозными излучениями, то она будет играть малую



**Рис. 14.** Угловые зависимости (а) и спектры (б) поляризационного тормозного излучения в очень сильном магнитном поле. ПТИ не имеет острой направленности излучения ни на каких частотах, причем на низких частотах зависимость от угла практически отсутствует. При построении спектров принято  $c/v_T = 10^2$ . Левее штрихпунктирной линии  $S-S$ , соответствующей формуле (375), доминирует поляризационное, а правее — обычное тормозное излучение.



роль из-за разных зависимостей соответствующих формул от частоты и энергии частицы.

Подводя итог сказанному, подчеркнем, что полное тормозное излучение быстрой частицы в плазме для сильного магнитного поля существенно зависит от частоты излучения и энергии частицы. При этом в области частот  $\omega \gg 2\gamma^2 c/d$  излучение обусловлено обычным тормозным механизмом, достигающим в этом диапазоне наибольшей интенсивности. Поляризационное тормозное излучение доминирует на низких частотах (375), его интенсивность достигает наибольшей величины в интервале  $\omega_p \ll \omega \ll c/d$ . Максимальный уровень ПТИ в этой области частот (372) в  $\gamma^2$  раз меньше максимального уровня обычного тормозного излучения (368), который достигается на высоких частотах  $\omega \gg 2\gamma^2 c/d$ .

Напомним в заключение, что в соответствии с результатами раздела 4.1, ПТИ состоит из трех различных вкладов  $I_{\omega}^{(1)\text{ion}}$ ,  $I_{\omega}^{(1)\text{el}}$ ,  $I_{\omega}^{(2)}$ . В изотропной среде без магнитного поля первый из них в  $Z$  раз превышает вклад двух других и, таким образом, является доминирующим при  $Z \gg 1$ . По этой причине (а также для простоты рассмотрения) в разделе 4.6 рассматривался только вклад  $I_{\omega}^{(1)\text{ion}}$ . Однако в разделе 4.5 показано, что магнитное поле может влиять на указанные вклады существенно поразному, так что в условиях, рассмотренных в разделе 4.5, доминирует как раз электронный вклад  $I_{\omega}^{(1)\text{el}}$ . При наличии сверхсильного магнитного поля, обсуждаемого в данном разделе, величины указанных вкладов  $I_{\omega}^{(1)\text{el}}$  и  $I_{\omega}^{(2)}$  до настоящего времени в литературе не рассматривались.

## 5. Астрофизические приложения теории переходного излучения

Теория переходного излучения сегодня составляет весьма обширную область физики [28]. Соответствующие экспериментальные исследования, ведущиеся на протяжении последних десятилетий, дают блестящее подтверждение теории ПИ как в случае отдельной границы, так и при движении зарядов в периодических средах [4, 10, 85–89]. Были проведены и успешные эксперименты по наблюдению когерентного ПИ, генерируемого в далекой инфракрасной области спектра сгустками ультрарелятивистских электронов, проходящими через металлическую фольгу [90], а также в рентгеновской области [91].

Однако несмотря на весьма общий характер эффекта переходного излучения, простоту и стройность теории, этот эффект пока еще не нашел достаточно широкого применения в астрофизических (и, вообще, в природных) условиях.

Насколько известно авторам, первая попытка применения теории ПИ в астрофизике была предпринята в [92]. В указанной работе формулы ПИ на отдельной границе раздела двух сред применялись для анализа ПИ, возникающего в межзвездной среде при взаимодействии заряженных частиц высоких энергий с космическими пылинками. Было показано, что вычисленная таким образом интенсивность ПИ (с учетом независимых данных о количестве пыли и космических лучей) согласуется с данными наблюдений фонового мягкого рентгеновского излучения Галактики. Однако в последующих работах [93, 94] было показано, что поскольку

характерный размер космических пылинок примерно на три порядка меньше зоны формирования ПИ, интенсивность рентгеновского ПИ составляет порядка 0,1 % от наблюдаемой величины.

Переходное излучение релятивистских частиц на случайных неоднородностях плазмы привлекалось для объяснения низкочастотных подъемов в спектрах некоторых радиогалактик на декаметровых волнах [66]. Выяснилось, что для согласования наблюдательных данных с теорией требуются довольно высокие значения плотности среды  $N \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$ , в которой генерируется ПИ. В протяженных областях (лоубах) радиогалактик концентрация фоновой плазмы значительно ниже,  $N \sim 10^{-2} - 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ , поэтому ПИ могло бы возникать только в более плотных ядрах радиогалактик. Однако имеющееся пространственное разрешение на декаметровых волнах пока не позволяет напрямую определить, где (в ядре или в лоубах) генерируется декаметровое радиоизлучение радиогалактик. Возможно, что ПИ вносит значительный вклад в экссесс инфракрасного излучения, наблюдающийся в некоторых ядрах активных галактик [95], а также в избытки континуального миллиметрового излучения звезд, объяснение которых синхротронным механизмом затруднительно [96].

В предыдущих разделах приведены некоторые количественные оценки переходного излучения в природных условиях. Например, оценку эффекта подавления ПИ в окрестности нейтронной звезды можно найти в конце раздела 2.2, а эффекта подавления ПИ из-за рассеяния — в конце раздела 2.3.

Резонансное переходное излучение было открыто и корректно описано сравнительно недавно [57, 63], поэтому его приложения (несмотря на высокую интенсивность РПИ) весьма ограничены. Ниже мы подробно рассмотрим вопрос о генерации ПИ и РПИ в космической плазме.

### 5.1. Генерация переходного излучения в межзвездной среде

Общепринято, что диффузное радиоизлучение Галактики объясняется синхротронным излучением электронов космических лучей, движущихся в галактическом магнитном поле. Таким образом, галактическое синхротронное излучение (со степенным распределением по частотам от нескольких ГГц до нескольких МГц [97]) несет информацию о распределении релятивистских электронов и магнитных полей в Галактике. При уменьшении частоты наблюдения на параметры синхротронного радиоизлучения начинает влиять межзвездная среда (МЗС), в которой это излучение генерируется и распространяется. В первую очередь проявляется эффект Фарадея, приводящий к деполяризации излучения, а на еще более низких частотах включается тормозное поглощение радиоволн и эффект плотности (эффект Разина – Цытовича). Это означает, что исследование достаточно низкочастотного радиоизлучения несет информацию не только о магнитных полях и релятивистских электронах, но и о самой межзвездной среде (ее концентрации, температуре, пространственном распределении и т.п.).

Особый интерес в этом плане представляет анализ галактического радиоизлучения на предельно низких частотах,  $f \leq 3 \text{ МГц}$ , где поведение спектра радикально отличается от ситуации на высоких частотах [98]. В частности, интенсивность излучения уменьшается более

чем на два порядка при уменьшении частоты в десять раз (об этой особенности спектра говорят как о низкочастотном завале), что не может быть связано ни с какими особенностями энергетического спектра релятивистских электронов.

На низких частотах, где синхротронное излучение экспоненциально мало, основной вклад в радиоспектр могут давать интегрально менее интенсивные механизмы излучения. Такими механизмами могут быть (комптоновское) излучение релятивистских электронов в мелкомасштабных магнитных полях [99, 100, 32], которое подавляется эффектом плотности слабее, чем синхротронное, и переходное излучение на неоднородностях электронной плотности фоновой плазмы.

Для определения уровня переходного излучения используем современные данные о неоднородностях электронной плотности в галактическом диске, найденные из анализа мерцаний радиоисточников. Согласно работе [101], спектр неоднородностей  $|\delta N|_k^2$  удовлетворяет степенному закону для большинства направлений наблюдения:

$$|\delta N|_k^2 = C_N^2 k^{-\alpha}, \quad \frac{2\pi}{l_0} < k < \frac{2\pi}{l_1}, \quad (376)$$

где  $l_1 \approx c/f_p \approx 10^7$  см,  $l_0 \geq 10^{14}$  см,

$$\alpha = \nu + 2 = \frac{11}{3} \pm 0,3, \quad (377)$$

$f_p$  — плазменная частота. В среднем по диску (толщиной  $L \approx 1$  кпк и радиусом  $R \approx 20$  кпк) величина  $C_N^2$  равна [101]

$$C_N^2 \approx 10^{-3,5} \text{ м}^{-20/3}. \quad (378)$$

Область повышенного рассеяния с  $C_N^2 \sim 1 \text{ м}^{-20/3}$  находится на расстоянии  $(4 \pm 2)$  кпк от галактического центра, хотя в отдельных местах наблюдаются еще большие величины с максимальным значением  $C_N^2 \approx 10^5 \text{ м}^{-20/3}$  в NG6334 на расстоянии 1,7 кпк от Солнца.

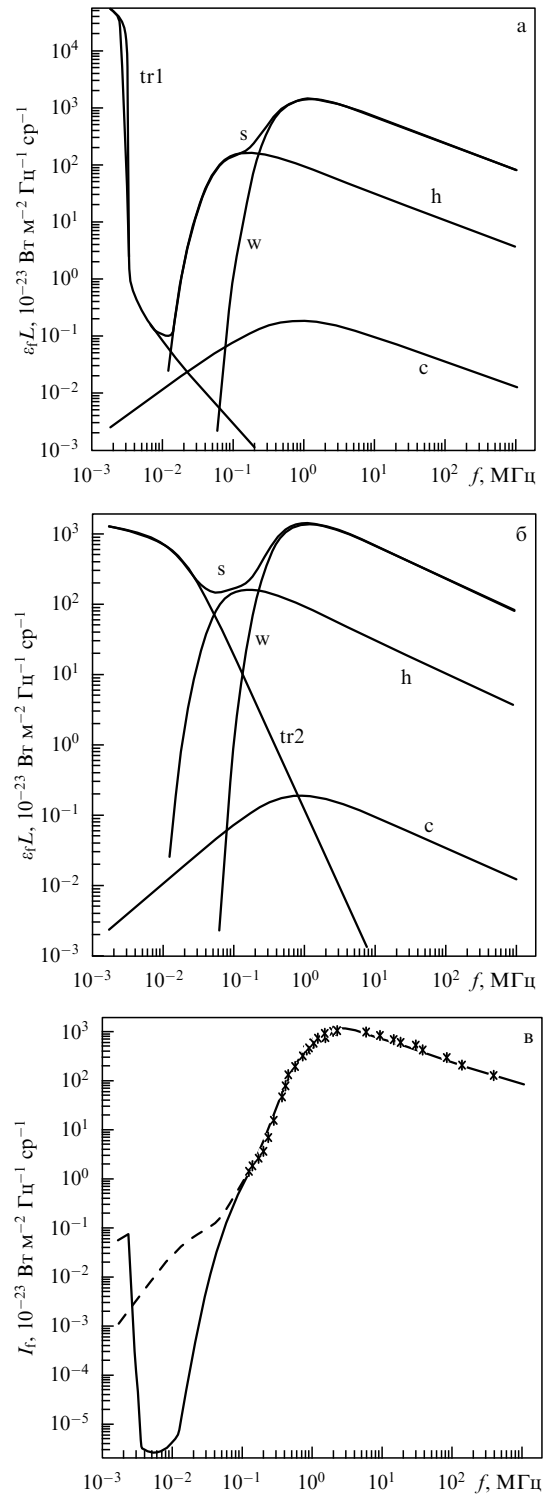
Для колмогоровского спектра (376) и минимальной величины  $C_N^2$  (378) имеем

$$\langle \Delta N^2 \rangle = (1-3) \times 10^{-10} \text{ см}^{-6} \quad (379)$$

в масштабах  $l < 2\pi c/\omega_B \approx (2-3) \times 10^9$  см, ответственных за генерацию переходного излучения. При  $\bar{N} \approx 0,025 \text{ см}^{-3}$  [101], находим

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{\bar{N}^2} \approx (2-5) \times 10^{-7}. \quad (380)$$

Результирующий спектр переходного излучения сильно зависит от распределения средней электронной плотности по излучающему объему (см. раздел 3). Вычислим этот спектр для двух предельных случаев такого распределения. В первом из них предполагается, что плазменные частоты  $f_p$  однородно распределены в области  $f_p = (2 \pm 0,5)$  кГц. Примем также  $\langle \Delta N^2 \rangle / \bar{N}^2 \approx 3 \times 10^{-7}$  и  $\nu = \alpha - 2 = 1,7$  [101]. При этом на самых низких частотах  $f \sim f_p$  генерируется резонансное переходное излучение (раздел 3), а на более высоких — обычное переходное излучение релятивистских частиц (раздел 2). Соответствующий вклад показан кривой tr1 на рис. 15а. Этот спектр зависит от частоты по закону  $P_{tr1} \propto f^{-1,1}$  при  $f \gg f_p$ .



**Рис. 15.** (а, б) Различные вклады в излучательную способность единицы объема галактического диска согласно работе [98]: w — синхротронное излучение из теплого межзвездного газа, h — синхротронное излучение из горячей плазмы, с — обратное комптоновское излучение на мелкомасштабных магнитных полях, tr — переходное излучение на неоднородностях электронной концентрации в двух различных моделях (а и б), s — сумма всех вкладов. (в) Интенсивность фонового радиоизлучения Галактики с учетом тормозного поглощения в теплом газе. Звездочками показаны имеющиеся наблюдения в диапазоне 0,13–408 МГц. Сплошная кривая соответствует модели tr1 (а), штриховая — модели tr2 (б). В модели tr2 переходное излучение доминирует при  $f < 100$  кГц.

Вторая модель (кривая tr2 на рис. 15б) использует распределение средней электронной плотности, выведенное из анализа соотношения мер эмиссии и дисперсии в МЗС [102]:

$$F(f_p) = \frac{0,5 f_{p0}^{0,5}}{f_p^{1,5}}, \quad f_{p0} < f_p < f_{pm} \approx 20 \text{ кГц}, \quad (381)$$

где  $F(f_p)$  — фактор заполнения областей с плазменной частотой  $f_p$  в теплой МЗС,  $f_{p0}$  — типичное значение плазменной частоты в МЗС,  $f_{p0} \approx 2$  кГц. Усреднение спектра резонансного переходного излучения с функцией распределения (381) дает

$$P^{tr2} = 0,5 \tilde{K}_{tr} \frac{e^2}{c} N_e \omega_{p0} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \frac{c^2}{v_T^2} \left( \frac{k_0 c}{\omega_{p0}} \right)^{v-1} \left( \frac{\omega_*}{\omega} \right)^{v-1,5}, \quad (382)$$

где  $\omega_* = 2\pi f_* = \omega_p^2 / \omega_B$  (вместо фактора  $c^2 / v_T^2$  в (382) может стоять меньшая величина при учете магнитного поля, см. раздел 3); отношение (382) к синхротронному излучению на частоте  $\omega_*$  равно

$$\frac{P^{tr2}}{P^s} \approx 3 \times 10^{-3} \frac{c^2}{v_T^2} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{k_0 c}{\omega_{p0}} \right)^{v-1,5} \left( \frac{\omega_*}{\omega_{p0}} \right)^{\xi-v+1,5}. \quad (383)$$

Переходное излучение (382) демонстрирует плоский спектр (со спектральным индексом 0,2), похожий на спектр тормозного излучения, однако уровень переходного излучения (382) выше, чем тормозного в теплой МЗС, если  $\langle \Delta N^2 \rangle / N^2 > 10^{-9}$ . Важно отметить, что если бы уровень неоднородностей был выше, чем  $3 \times 10^{-7}$  (и распределение (381) было справедливо для МЗС), или  $v < 1,6-1,7$ , или  $f_{pm} \gg 20$  кГц, то интенсивность переходного излучения превосходила бы наблюдаемое радиоизлучение при 0,1–0,2 МГц. Таким образом, величина

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} = 3 \times 10^{-7} \quad (384)$$

дает верхний предел мелкомасштабных флуктуаций электронной плотности в локальной МЗС, если распределение (381) справедливо.

На рисунке 15в представлена интенсивность фонового радиоизлучения с учетом тормозного поглощения радиоволн в диске. Две теоретические кривые соответствуют двум моделям генерации переходного излучения, рассмотренным выше. Видно, что переходное излучение оказывается доминирующим механизмом при  $f < 50$  кГц. Это означает, что наблюдения галактического переходного излучения на столь низких частотах позволяют исследовать усредненные характеристики мелкомасштабной структуры локальной межзвездной среды.

Наиболее низкочастотные наблюдения фонового радиоизлучения Галактики ( $f = 0,13-2,6$  МГц) были выполнены на космическом аппарате IMP-6 [103] тридцать лет назад. Недавние наблюдения на аппарате WIND [104, 105] на  $f > 0,2$  МГц согласуются (с точностью до фактора 2) с более ранними наблюдениями [103, 106, 107].

Все указанные наблюдения проводились вблизи орбиты Земли, где высокий уровень помех (солнечного и земного происхождения) не позволяет продвинуться в сторону еще более низких частот. Существенного прогресса в исследовании низкочастотного фонового радио-

излучения Галактики и, в частности, вклада переходного излучения следует ожидать от аппарата CASSINI [108], движущегося на большом расстоянии от Солнца, а также от других удаленных от Солнца аппаратов, снабженных соответствующей измерительной аппаратурой.

## 5.2. Оценка интенсивности переходного излучения в солнечной короне

Наличие релятивистских частиц и магнитоактивной турбулентной плазмы типично для большинства астрофизических объектов. Однако для многих источников, таких как радиогалактики или остатки сверхновых звезд, переходное излучение генерируется в низкочастотном диапазоне длин волн и не может наблюдаться с Земли из-за поглощения в межзвездной среде и непрозрачности атмосферы. Значения же плазменных частот, реализующихся в атмосфере Солнца, лежат в диапазоне радиоволн, наблюдаемых обычными наземными радиотелескопами.

Хорошо известно, что всплески солнечного радиоизлучения отличаются значительным разнообразием. Многообразие видов солнечного радиоизлучения является следствием как различия физических условий в источнике, так и различия микроскопических механизмов электромагнитного излучения, доминирующих в тех или иных событиях [109]. Важная роль тормозного, магнитотормозного (в том числе мазерного), плазменного механизмов излучения для солнечной короны считается надежно установленной [109, 67]. Роль переходного излучения (ПИ) быстрых частиц в плазме со случайными неоднородностями плотности исследована в значительно меньшей степени, хотя в настоящее время имеются обширные наблюдательные и теоретические свидетельства наличия надтепловых (в частности, релятивистских) частиц и турбулентности во вспышках (подробнее см. [110]).

Для понимания процесса возникновения электромагнитного излучения в солнечной вспышке важно иметь в виду, что первичное энерговыделение происходит не в однородной среде, а в магнитных структурах арочного типа. Такая арка опирается своими основаниями (ногами) на плотную фотосферу, тогда как ее вершина находится в более разреженной короне (рис. 16). Таким образом, заряженные частицы, ускоренные вследствие энерговыделения, движутся в среде с меняющимися параметрами (концентрация, температура, магнитное поле). Естественно, что в этой ситуации основной вклад в радиоизлучение (R) дают относительно более высокие

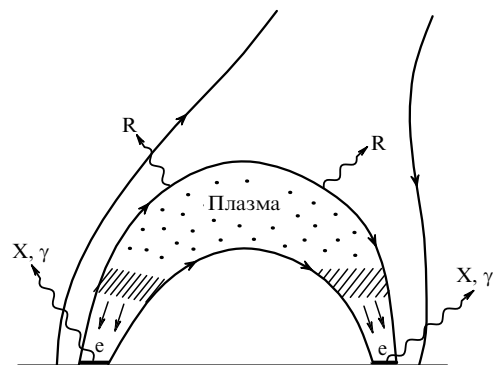


Рис. 16. Магнитная арка в солнечной короне.

(разреженные) области арки, а генерация жесткого рентгеновского и гамма-излучения ( $X, \gamma$ ) (за счет тормозного механизма) происходит в плотных основаниях арки.

Как уже обсуждалось выше, интенсивность переходного излучения особенно высока вблизи локальной плазменной частоты. Важно иметь в виду, что на этих же частотах может эффективно работать плазменный механизм радиоизлучения, основанный на неустойчивости плазменных волн и их последующей конверсии в радиоволны. Для реализации этой неустойчивости требуются анизотропные распределения быстрых частиц (конусного или пучкового типа). Переходное излучение будет доминирующим механизмом (вблизи плазменной частоты) в тех случаях, когда распределения излучающих быстрых электронов в достаточной мере изотропны и условия плазменной неустойчивости не выполнены. Такая ситуация, по-видимому, реализуется в континуальных дециметровых и микроволновых всплесках радиоизлучения Солнца. При этом высокочастотная часть всплеска несомненно связана с гиротронным излучением электронов достаточно высоких энергий [109], а низкочастотная часть может генерироваться благодаря переходному механизму.

В разделе 5.1 при вычислении переходного излучения, генерируемого в межзвездной среде, мы использовали независимые данные о спектре неоднородностей среды. Для солнечной атмосферы (и, в частности, солнечных вспышек) такие данные отсутствуют. Однако анализ радиоизлучения вспышек облегчается, если учесть, что ускоренные в солнечной вспышке электроны генерируют наряду с радиоизлучением, также жесткое рентгеновское и гамма-излучение. Анализ этих жестких излучений позволяет найти спектры и концентрации быстрых частиц, поэтому при интерпретации радиоданных следует учитывать и наблюдения в рентгеновском и гамма-диапазонах, чтобы получить согласованную и непротиворечивую картину.

При движении релятивистских электронов в магнитной ловушке, заполненной фоновой турбулентной плазмой, генерируется и переходное, и синхротронное радиоизлучение. Однако эти два механизма работают в различных частотных областях, так что высокочастотная часть (правее максимума) наблюдаемого спектра связана с синхротронным излучением [109], а низкочастотная (левее минимума) — с переходным. Дело в том, что синхротронное излучение на частотах  $f < f_R = 2f_p^2/3f_B$  ( $f_p$  и  $f_B$  — соответственно плазменная частота и гирочастота электронов) экспоненциально уменьшается вследствие влияния дисперсии плазмы [53], и эффективно генерируется на частотах (область I)

$$f > f_R. \quad (385)$$

Если  $f_p \gg f_B$ , то переходное излучение генерируется при  $f_p < f < f_R$  (область II), а на больших частотах — подавляется из-за влияния магнитного поля (раздел 2.2).

Рассмотрим сначала грубую модель, в которой радиоисточник считается в среднем однородным, так что вклад резонансного переходного излучения на частотах  $f > f_p$  несуществен. Тогда поток переходного излучения в области II может быть представлен в виде [110]

$$F_f^{\text{tr}} = \beta \times 10^6 \frac{f_p}{1 \text{ ГГц}} \frac{VN_e(> 1 \text{ МэВ})}{10^{33}} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{f_p}{f} \right)^{\xi+1-\nu} \text{ сеп} \quad (386)$$

(1 сеп =  $10^{-19}$  эрг  $\text{см}^{-2} \text{с}^{-1} \text{Гц}^{-1}$  — солнечная единица потока), где  $\langle \Delta N^2 \rangle$  и  $\nu$  — средний квадрат и спектральный индекс неоднородностей в масштабах  $l_0 \sim 2c/f_p$ ,  $N$  — плотность плазмы,  $\beta(\nu; \xi) \sim 1$  (например,  $\beta(1,5; 3,5) \approx 3,3$ ,  $\beta(1,7; 4) \approx 4,4$ ).

Заметим, что переходное излучение может быть более интенсивным, чем синхротронное: отношение переходного излучения вблизи  $f \sim f_p$  (но вне пика РПИ!) к максимуму синхротронного излучения (при  $f \approx f_R$ ) равно

$$\frac{F^{\text{tr}}}{F^{\text{s}}} \sim \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N} \left[ \frac{f_p}{f_B} \right]^{\xi} \quad (387)$$

в тонком источнике. Величина (387) может превосходить единицу в плотной плазме, где  $f_p \gg f_B$ .

Микроволновые солнечные всплески часто имеют спектры, содержащие максимум и минимум. Рассмотрим три солнечных вспышки, наблюдавшиеся в гамма-диапазоне  $E_\gamma > 300 \text{ кэВ}$ : 21 июня 1980 г., 2 апреля 1982 г. и 9 июля 1982 г. Эти вспышки длились около 1 мин как в радио-, так и в гамма-диапазоне, т.е. они относятся к импульсным вспышкам [111]. Дифференциальные энергетические спектры определялись из соответствующих спектров гамма-излучения, опубликованных в [112], число электронов определялось согласованно из анализа микроволнового (синхротронного) и гамма- (тормозного) излучения.

**Вспышка 9 июля 1982 г.** Радиоизлучение этой вспышки зарегистрировано в дециметровой и микроволновой областях (рис. 17) [113]. Примем для простоты оценок, что реальная (регулярно-неоднородная) арка (см. рис. 16) состоит из двух, однородных в среднем областей — плотных оснований и разреженной вершины. В такой модели гамма-излучение генерируется в нижнем источнике (основания арки), а радиоизлучение — в верхнем источнике (вершина арки).

Найдем параметры радиоисточника из микроволнового спектра. Пусть  $f_p \sim 1 \text{ ГГц}$ , т.е. меньше частоты спектрального минимума  $f_{\text{min}} \approx 3 \text{ ГГц}$ . Максимум микроволнового спектра при  $f_{\text{max}} \approx 9 \text{ ГГц}$  определяется эффектом Разина–Цытовича, если  $B \approx 90 \text{ Гс}$ . Тогда

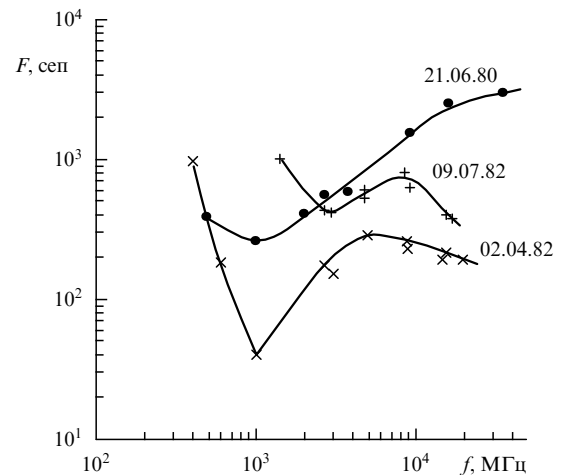


Рис. 17. Радиоспектры трех солнечных вспышек в максимуме спектра.

мгновенное число электронов должно составлять

$$N_e(> 1 \text{ МэВ}) \approx 10^{32}, \quad (388)$$

чтобы обеспечить наблюдаемый поток 700 сеп на частоте  $f_{\text{max}}$ . Величина (388), как и должно быть, на порядок меньше, чем полное (за все время вспышки) число ускоренных электронов  $N_{\text{tot}}(> 1 \text{ МэВ}) \sim 10^{33}$ , найденное из гамма-излучения. Спектральный индекс энергетического спектра электронов, найденный из наклона высокочастотной части микроволнового спектра, равен  $\xi \approx 3,5$  и совпадает с величиной, полученной из гамма-спектра, следовательно, предложенная интерпретация является согласованной.

Если низкочастотное излучение генерируется благодаря переходному механизму, то подстановка (388),  $f_p$  и наблюдаемого потока 500 сеп при  $f \approx 1,5 \text{ ГГц}$  в уравнение (386) дает

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \approx 6 \times 10^{-4} \quad (389)$$

в масштабах  $l_0 \sim 2c/f_p$ .

Предложенная интерпретация будет согласованной, если радиоизлучение, генерируемое в нижнем источнике, не превосходит наблюдаемых величин. При типичных параметрах  $B \sim 200 \text{ Гс}$ ,  $N \sim 2 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$  имеем  $f_R \approx 20 \text{ ГГц}$ , т.е. синхротронное излучение нижнего источника несущественно на рассматриваемых частотах. Переходное излучение из нижнего источника не превосходит наблюдаемого радиопотока, если

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} < 4 \times 10^{-4}. \quad (390)$$

Аналогичный анализ двух других вспышек (подробнее см. [114]) показывает, что низкочастотный подъем в их радиоспектрах объясняется переходным излучением при

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \approx (1-2) \times 10^{-3}. \quad (391)$$

Таким образом, привлечение синхротронного и переходного механизмов позволяет получить согласованную картину радиоизлучения, генерируемого в ходе солнечных гамма-вспышек (наиболее мощных).

Большинство солнечных вспышек не сопровождается наблюдаемым гамма-излучением — они генерируют жесткое рентгеновское излучение. В работе [110] показано, что и в этом случае удается получить согласованную картину и объяснить низкочастотный подъем радиоспектра переходным механизмом.

Таким образом, приложение теории переходного излучения к солнечным радиовсплескам с низкочастотным подъемом спектра приводит к логически непротиворечивым результатам. Однако величины неоднородностей плазмы, найденные из анализа спектров, оказываются довольно большими —  $\langle \Delta N^2 \rangle / N^2 \approx 10^{-4} - 10^{-2}$ , хотя они и малы по сравнению с единицей. С другой стороны, приведенные оценки не учитывали реальную крупномасштабную неоднородность радиоисточника и доминирующего в этом случае резонансного переходного излучения.

### 5.3. Резонансное переходное излучение в солнечных вспышках

Резонансное переходное излучение в однородном (в среднем) источнике представляет собой узкий пик вблизи плазменной частоты. Очевидно, что в природных условиях результирующая форма спектра РПИ существенно зависит от реальной крупномасштабной неоднородности среды, в которой это излучение генерируется.

Примем для определенности, что распределение источника ПИ "по плазменной частоте" в некотором интервале плазменных частот может быть описано степенным законом

$$F(\omega_p) = (\lambda - 1) \frac{\omega_{p0}^{\lambda-1}}{\omega_p^\lambda}, \quad \omega_p > \omega_{p0}, \quad (392)$$

где  $\omega_{p0}$  — наименьшее значение плазменной частоты в источнике.

В зависимости от типа электромагнитной волны (обыкновенная или необыкновенная), соотношения безразмерных параметров  $\omega_B/\omega_p$  и  $v_T/c$  (где  $v_T$  — тепловая скорость электронов плазмы,  $c$  — скорость света) и спектральных индексов  $\xi$  и  $\nu$ , интенсивность РПИ описывается восемью различными формулами (см. раздел 3.3). Учитывая узость пика РПИ, в каждом из этих случаев (256)–(263) спектральная плотность РПИ однородной среды может быть представлена в виде

$$P_\omega^{(i)} = P_i \delta(\omega - \omega_p), \quad 1 \leq i \leq 8. \quad (393)$$

Для получения потока излучения, генерируемого за счет переходного механизма в неоднородном источнике, расположенном в атмосфере Солнца, интенсивность (393) следует проинтегрировать с функцией распределения (392) по объему источника и учесть расстояние от него до наблюдателя:

$$F_f = \frac{2\pi V}{R_s^2} \int F(\omega_p) P^{(i)} \delta(\omega - \omega_p) d\omega_p, \quad (394)$$

где  $V$  — объем источника излучения,  $R_s$  — расстояние от Солнца до Земли.

В источниках солнечных дециметровых и сантиметровых радиовсплесков обычно выполняется соотношение

$$\frac{v_T}{c} < \frac{\omega_B}{\omega_p} < \left( \frac{v_T}{c} \right)^{1/2}. \quad (395)$$

При этом, если  $\xi < \nu + 2$ , то РПИ обыкновенных волн описывается формулой для  $P_5$  (260), если  $\xi > \nu + 2,5$ , то формулой для  $P_3$  (258), а если  $\nu + 2 < \xi < \nu + 2,5$ , то их суммой. Рассмотрим подробнее случай, когда РПИ описывается выражением для  $P_5$  (260). Подставив (260) в (394), получим:

$$F_f = \frac{V}{R_s^2} C_5 \frac{e^2}{c} (1 + \cos^2 \theta) \int f_p x_0^{\xi-1} N_e \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{\nu-1} \times \\ \times \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{1/2} \frac{c}{v_T} \left( \frac{\omega_{p0}}{\omega_p} \right)^\lambda \delta(\omega - \omega_p) d\omega_p, \quad (396)$$

где

$$C_5 = \frac{\pi^2 (\lambda - 1)(\nu - 1)(\xi - 1) \Gamma[(\xi - 1)/2] \Gamma[(\nu - \xi + 2,5)/2]}{36 \times 6^{1/2} (\nu + 2) \Gamma(\nu/2 + 3/4)}. \quad (397)$$

Подчеркнем, что результат интегрирования (396) определяется тем, зависят ли (и как) входящие в него параметры  $\langle \Delta N^2 \rangle$ ,  $k_0$ ,  $\omega_B$  от плазменной частоты  $\omega_p$ . Если ограничиться случаем, когда зависимость любого из параметров от плазменной частоты может аппроксимироваться степенной функцией, то результат интегрирования (396) представляется в общем виде следующим образом:

$$F_f = C_5 \frac{e^2 f_{p0}}{R_s^2 c} (1 + \cos^2 \theta) x_0^{\xi-1} V N_e \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{k_0 c}{\omega_{p0}} \right)^{v-1} \times \\ \times \left( \frac{\omega_{p0}}{\omega_B} \right)^{1/2} \frac{c}{v_T} \left( \frac{\omega_{p0}}{\omega} \right)^\alpha. \quad (398)$$

Спектральный индекс  $\alpha$  определяется зависимостью величин, входящих в (396), от локальной плазменной частоты. Например, если

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} = \text{const}, \quad \frac{k_0 c}{\omega_p} = \text{const}, \quad \frac{\omega_p}{\omega_B} = \text{const}, \quad (399)$$

то

$$\alpha = \lambda - 1; \quad (400)$$

если

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} = \text{const}, \quad k_0 = \text{const}(\omega_p), \quad \omega_B = \text{const}(\omega_p), \quad (401)$$

то

$$\alpha = \lambda + v - 2,5 \quad (402)$$

и т.д. В дальнейших формулах мы для краткости будем опускать индекс "0" у  $\omega_{p0}$  и пользоваться величиной  $\omega_p$ . Подставив в (398) известные значения фундаментальных констант и расстояние от Солнца до Земли  $R_s = 1,49 \times 10^{13}$  см, выразим поток РПИ из неоднородного источника в солнечных единицах потока:

$$F_f = 3,45 \times 10^5 C_5 (1 + \cos^2 \theta) \frac{f_p}{1 \text{ ГГц}} x_0^{\xi-1} \frac{V N_e}{10^{33}} \times \\ \times \left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{1/2} \frac{c}{v_T} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^\alpha \text{ сеп.} \quad (403)$$

Напоминаем, что выражение (403) справедливо (при условии (395)) для достаточно жестких спектров быстрых электронов,  $\xi < v + 2$ . Для мягких спектров частиц,  $v + 2,5 < \xi < v + 3$ , использование интенсивности РПИ  $P_3$  (258) дает для обыкновенной волны:

$$F_f = 3,45 \times 10^5 C_3 \frac{f_p}{1 \text{ ГГц}} x_0^{\xi-1} \frac{V N_e}{10^{33}} \left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \times \\ \times \frac{c^2}{v_T^2} \left[ \frac{\omega_p}{\omega_B} \left( \frac{6 \times 3^{1/2} v_T^3}{c^3} \right)^{1/2} \right]^{v+3-\xi} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^\alpha \text{ сеп,} \quad (404)$$

где

$$C_3 = \frac{\pi(\lambda - 1)(v - 1)(\xi - 1)}{12(v + 2)} \times \\ \times \left[ \frac{8}{15(v + 3 - \xi)} + \frac{\pi(1 + \cos^2 \theta)}{8(\xi - v - 2)} \right]. \quad (405)$$

В промежуточном случае  $v + 2 < \xi < v + 2,5$  излучение описывается суммой выражений (403) и (404). Преимущественная поляризация РПИ соответствует обыкновенной волне (см. раздел 3.3), причем степень поляризации может достигать очень высоких значений, близких к 100 %.

Обратим внимание на то, что в солнечных вспышках достаточно часто реализуются еще более мягкие спектры быстрых электронов,

$$\xi > v + 3. \quad (406)$$

Действительно, спектры жесткого рентгеновского излучения солнечных вспышек (определяемые спектром инжектированных в ловушку электронов) обычно имеют вид

$$F_E \propto E^{-\gamma_X}, \quad 3 < \gamma_X < 7. \quad (407)$$

Соответствующие энергетические спектры накопленных в ловушке быстрых нерелятивистских электронов также степенные [115, 116]:

$$N(E) \propto E^{-\xi_E}, \quad 2,5 < \xi_E < 8. \quad (408)$$

Спектральный индекс в распределении по импульсам (172)  $\xi$  в нерелятивистской области связан с  $\xi_E$  соотношением

$$\xi = 2\xi_E - 1 > 4, \quad (409)$$

и для колмогоровского спектра неоднородностей (406) справедливо при  $\xi > 4,7$ .

В таком случае (при  $\omega_B/\omega_p < (v_T/c)^{1/2}$ ) переходное излучение каждой из нормальных мод описывается величиной  $P_2$  (257). Для суммарного излучения (в обе моды), которое в данном случае слабо поляризовано, аналогично (403), (404) найдем

$$F_f = 3,45 \times 10^5 C_2 \frac{f_p}{1 \text{ ГГц}} \left( \frac{k_0 c}{\omega_p} \right)^{v-1} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} x_0^{v+2} \times \\ \times \frac{V N_e(> x_0)}{10^{33}} \frac{c^2}{v_T^2} \left( \frac{f_p}{f} \right)^\alpha \text{ сеп,} \quad (410)$$

где

$$C_2 = \frac{4\pi(\lambda - 1)(v - 1)(\xi - 1)}{45(v + 2)(\xi - v - 3)}. \quad (411)$$

Поскольку наличие плавной неоднородности (392) слабо скажется на высокочастотной (синхротронной) части спектра (см. раздел 5.2), перейдем сразу к оценкам резонансного переходного излучения.

Будем считать, что

$$\lambda = v = 1,5, \quad \xi = 3,5, \quad (412)$$

$$f_p = 1 \text{ ГГц}, \quad V N_e(> 1 \text{ МэВ}) = 10^{32}, \quad \left( \frac{\omega_p}{\omega_B} \right)^{1/2} \frac{c}{v_T} = 10^2, \quad (413)$$

$$k_0 = \frac{\omega_p}{c}, \quad \cos^2 \theta \approx 0,5. \quad (414)$$

Тогда поток РПИ, вычисленный с помощью (403), равен

$$F_f = 3 \times 10^6 \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{f_p}{f} \right)^\alpha \text{ сеп.} \quad (415)$$

Это означает, что для обеспечения интенсивности переходного излучения вблизи 1 ГГц на уровне 100 сеп, требуется (при принятых параметрах (412)–(414)) наличие неоднородностей плотности среды на уровне

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} = 3 \times 10^{-5} \quad (416)$$

в масштабах  $l < l_0 = 2\pi c/\omega_p$  (при  $f_p = 1$  ГГц,  $l_0 = 30$  см).

При более крутых (мягких) спектрах быстрых электронов величина интенсивности РПИ дается формулой (404). Если принять

$$\lambda = 2, \quad \nu = 1,7, \quad \xi = 4,5, \quad (417)$$

то для тех же значений параметров (413), (414), (416) из (404) найдем

$$F_f \approx 5000 \text{ сеп.} \quad (418)$$

Соответствующий поток излучения превышает величину (415) более чем на порядок, т.е. при уровне неоднородностей (416) поток радиоизлучения может превосходить 1000 сеп. Отметим, что основной причиной указанного увеличения потока является возрастание числа нерелятивистских быстрых электронов в случае более мягких спектров при прежнем числе частиц с  $E_{\text{kin}} > 1$  МэВ (413).

Поток РПИ зависит от целого ряда параметров, что, казалось бы, должно приводить к сильной неопределенности результатов. Однако при проведении детальной диагностики параметров источника континуального всплеска значительная информация (о числе быстрых электронов, их спектре, величине магнитного поля и т.д.) извлекается из гиротронного участка спектра и анализа сопутствующих жесткого рентгеновского и гамма-излучений. Анализ мягкого рентгеновского и/или миллиметрового излучений позволяет оценить температуру и плотность среды.

Таким образом, значительная часть параметров ( $\omega_p$ ,  $\omega_B$ ,  $v_T$ ,  $IN_e$ ,  $\xi$ ) может быть найдена из независимых наблюдений, после чего неизвестными остаются только уровень неоднородностей  $\langle \Delta N^2 \rangle/N^2$  и спектральные индексы  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ . Значение  $\alpha$  может быть найдено из наклона низкочастотной части спектра (который связан с переходным излучением). К сожалению, однозначная связь между  $\alpha$  с одной стороны и  $\nu$  и  $\lambda$  с другой отсутствует, что не позволяет делать однозначные заключения об их величине. Тем не менее  $\nu$  и  $\lambda$  — числа порядка единицы, так что незнание их точных значений не приводит к существенной неопределенности величины мелкомасштабных неоднородностей плотности  $\langle \Delta N^2 \rangle/N^2$ , оцениваемой из значения потока радиоизлучения в низкочастотной части спектра.

Рассмотрим в качестве примера **радиовсплеск, зарегистрированный 24 декабря 1991 г.** [117], континуальное дециметровое излучение которого генерируется за счет переходного механизма [118]. Спектры радиоизлучения этого всплеска в различные моменты времени представлены на рис. 18. Наряду с указанными спектрами имеется также наблюдательная информация о временных профилях и спектрах жесткого рентгеновского излучения, данные о мягком рентгеновском излучении, временные профили радиоизлучения на частотах 410, 606, 1415, 2695, 4880, 8800, 15400 МГц, а также изображения радиоисточника на частотах 333 и 1446 МГц.

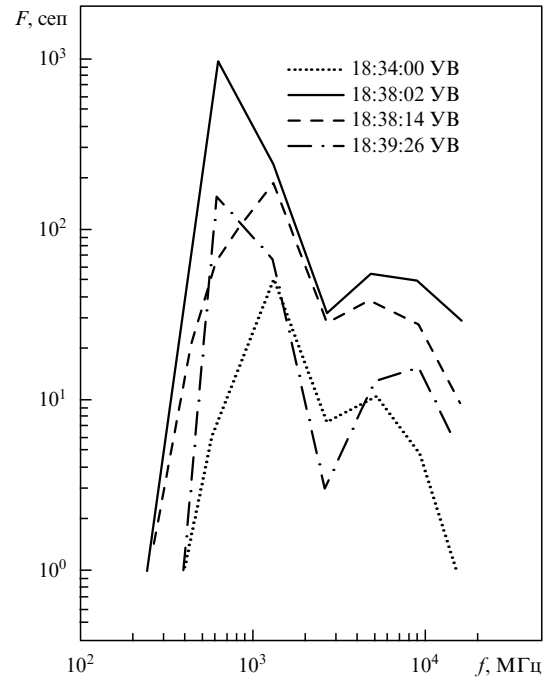


Рис. 18. Радиоспектры солнечной вспышки 24 декабря 1991 г. в последовательные моменты времени (УВ — время по Гринвичу).

В области максимума радиоизлучения мгновенное число излучающих электронов  $IN_e(> 10 \text{ кэВ})$  определяется из данных по жесткому рентгеновскому излучению:

$$IN_e(> 10 \text{ кэВ}) \approx 10^{38}, \quad (419)$$

показатель спектра рентгеновского излучения  $\gamma_X = 4$ . Соответствующие показатели распределения (по энергиям и импульсам) захваченных в радиоисточнике нерелятивистских электронов равны [119, 120]

$$\xi_E = 3,5, \quad \xi = 6. \quad (420)$$

Температура плазмы, испускающей наблюдаемое мягкое рентгеновское излучение, равна

$$T \sim 7 \times 10^6 \text{ К} \quad (v_T \approx 10^9 \text{ см с}^{-1}). \quad (421)$$

Считая, что микроволновое излучение вспышки генерируется благодаря гиротронному механизму, можно получить

$$f_p \approx 6 \times 10^8 \text{ Гц} \quad (N \approx 4 \times 10^9 \text{ см}^{-3}), \quad (422)$$

$$f_B \approx 8 \times 10^7 \text{ Гц} \quad (B \approx 30 \text{ Гс}).$$

Высокочастотный ( $f = 8,8\text{--}15,4$  ГГц) спектральный индекс в максимуме излучения равен

$$\alpha_2 \approx 0,9 \quad (423)$$

и увеличивается до 1,75 в более поздние моменты времени. Поток микроволнового излучения, форма спектра, структура временных профилей прекрасно согласуются с предположением о том, что жесткое рентгеновское и микроволновое излучение генерируются быстрыми электронами, инжектированными в

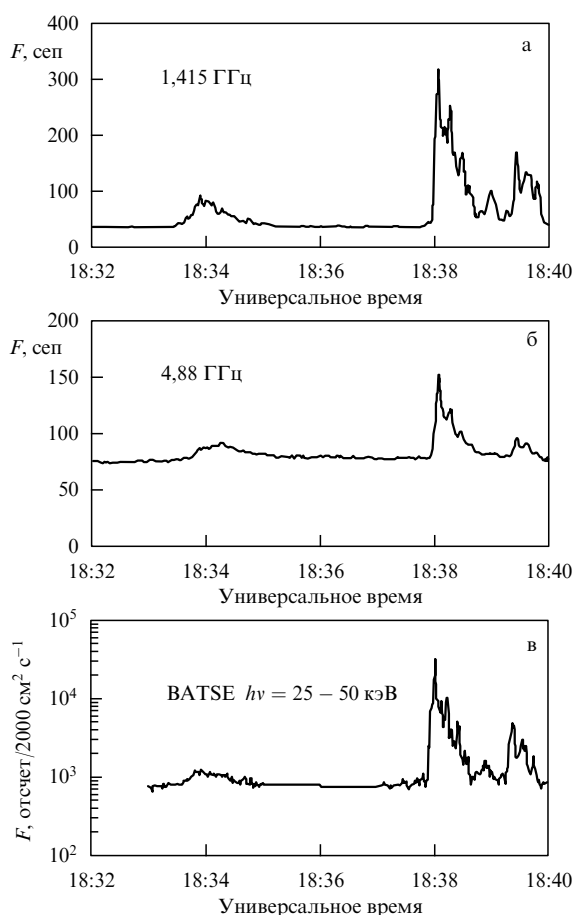


Рис. 19. Временной ход дециметрового с  $f = 1,415$  ГГц (а), микроволнового с  $f = 4,88$  ГГц (б) и жесткого рентгеновского с  $E = 25 - 50$  кэВ (в) излучений для всплеска 24 декабря 1991 г.

ловушку одним источником. При этом жесткое рентгеновское излучение в интервале 25–50 кэВ генерируется с помощью тормозного механизма "низкоэнергетическими" электронами с  $E_{\text{kin}} \sim 50 - 100$  кэВ, тогда как микроволновое излучение испускается посредством гиросинхротронного механизма "высокоэнергетическими" электронами с энергией, превосходящей несколько сотен кэВ. Характерное время жизни ускоренных электронов в магнитной ловушке увеличивается с ростом энергии, что и является причиной большей "гладкости" временных профилей микроволнового излучения (например, при  $f = 4,88$  ГГц; см. рис. 19) по сравнению с профилями жесткого рентгеновского излучения [119, 120].

Временные профили дециметрового радиоизлучения демонстрируют удивительное подобие профилям жесткого рентгеновского излучения, что свидетельствует о доминирующем вкладе низкоэнергетической части спектра быстрых электронов в генерацию дециметрового радиоизлучения. Корреляция указанных временных профилей с профилями микроволнового излучения также весьма значительна (хотя и слабее, чем между жестким рентгеновским и дециметровым излучением). Следовательно, дециметровое излучение генерируется той же популяцией быстрых электронов и в той же магнитной арке, что и жесткое рентгеновское излучение. Однако, как подробно показано в работе [117], гиросинхротронный механизм не может объяснить форму

спектра в дециметровой области. В частности, низкочастотный спектральный индекс ( $f = 1415 - 2695$  МГц)

$$\alpha_1 \approx 3 \quad (424)$$

заметно больше, чем высокочастотный  $\alpha_2$  (см. формулу (423)). Кроме того, гиросинхротронное излучение электронов с  $E_{\text{kin}} \sim 50 - 100$  кэВ, дающих дециметровое излучение, малоэффективно. Вильсон [117] предполагает, что дециметровое излучение могло бы генерироваться за счет плазменного механизма. Но в таком случае следовало бы ожидать гораздо более богатой тонкой временной структуры, чем наблюдается в действительности, поскольку плазменный механизм есть проявление кинетической неустойчивости, и результирующее излучение не пропорционально числу быстрых электронов.

Наиболее естественным образом дециметровая область спектра объясняется резонансным переходным излучением, которое эффективно генерируется низкоэнергетическими электронами. Будем считать, что безразмерные величины (399) не зависят от плазменной частоты. Тогда спектральный индекс в распределении (392) равен

$$\lambda = \alpha_1 + 1 \approx 4. \quad (425)$$

Предположим, что спектр неоднородностей плотности описывается колмогоровской зависимостью, т.е.

$$\nu = 1,7. \quad (426)$$

Тогда с учетом (419)–(422), (425), (426),  $C_2 = 0,15$ ,  $x_0(10 \text{ кэВ}) = 0,2$  величина потока резонансного переходного излучения (410) вблизи  $f_p \approx 600$  МГц равна

$$F_f = 0,7 \times 10^{10} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \text{ сеп}, \quad (427)$$

где  $\langle \Delta N^2 \rangle$  относится к масштабам  $l < c/f_p = 50$  см, так что  $k_0 c/\omega_p = 1$ .

Из наблюдаемой величины потока на частоте  $f = 606$  МГц

$$F_{606} = 1300 \text{ сеп}, \quad (428)$$

находим

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \approx 2 \times 10^{-7}. \quad (429)$$

Таким образом, весьма низкая величина неоднородностей плотности плазмы (429) обеспечивает наблюдаемое дециметровое радиоизлучение вспышки 24 декабря 1991 г. Резкий завал излучения при  $f < 600$  МГц, очевидно, связан с отличием реальной функции распределения источника по плазменным частотам от формулы (392) при  $f_p < 600$  МГц.

Актуальность изучения **мелкомасштабной турбулентности** в солнечной короне трудно переоценить, поскольку она играет ключевую роль в **кинетики быстрых частиц** в ловушке [121], **рассеянии радиоволн** в короне [122], формировании **аномальных кинетических коэффициентов плазмы** [123а] (в частности, в токовых слоях и ударных волнах [123б]) и т.п.

Следует особо подчеркнуть, что какие-либо другие методы (кроме предложенного здесь использования



резонансного переходного излучения) исследования уровня столь мелкомасштабных неоднородностей среды в солнечной атмосфере в настоящее время отсутствуют. Любопытно, что в рассмотренной вспышке (безразмерный) уровень мелкомасштабных неоднородностей плотности (429) такой же, как и в межзвездной среде (в которой он определяется из анализа мерцаний радиоисточников [101]).

#### 5.4. Генерация резонансного переходного излучения в ионосфере Земли

Рассмотрим резонансное переходное излучение, генерируемое быстрыми электронами в ионосфере Земли. Эта задача представляет особый интерес, поскольку ионосфера является ближайшей к Земле космической плазмой, свойства которой по этой причине достаточно хорошо изучены.

Известно, что ионосферная плазма неоднородна по высоте, концентрация электронов достигает максимума в так называемом F2-слое, профиль концентрации в указанном слое описывается параболической функцией:

$$N = N_m \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z}{L} \right)^2 \right], \quad (430)$$

где  $N_m$  — наибольшее (по высоте) значение концентрации электронов,  $L$  — характерный размер F2-слоя, координата  $z$  отсчитывается от уровня  $N = 0$ . Плазменная частота, соответствующая концентрации  $N_m$ , называется критической частотой ионосферы,  $f_{cr}$ .

Интенсивность РПИ из неоднородного распределенного по небу источника получается интегрированием по  $z$  и усреднением по углам величины излучательной способности единицы объема:

$$I_f = \left\langle \int P(f) dz \right\rangle = \left\langle \int P(f) \frac{dz}{df_p} df_p \right\rangle = \int P(f) \Phi(f_p) df_p, \quad (431)$$

где

$$\Phi = \left\langle \frac{dz}{df_p} \right\rangle \quad (432)$$

представляет собой функцию распределения ионосферной плазмы по плазменным частотам.

Для идеального параболического слоя с учетом (430) имеем:

$$\Phi_z = \frac{dz}{df_p} = \frac{L f_p}{f_{cr}^2 \sqrt{1 - (f_p/f_{cr})^2}}, \quad \text{если } f_p < f_{cr},$$

и  $\Phi_z = 0$ , если  $f_p > f_{cr}$ . (433)

Усреднение этой функции по углам проведем с учетом крупномасштабных ионосферных неоднородностей, распределенных по гауссову закону:

$$\phi(f_p) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta f_p} \exp \left[ -\frac{(f_p - f_0)^2}{\Delta f_p^2} \right], \quad (434)$$

где  $\Delta f_p = (1/2) f_p \langle \Delta N_t^2 \rangle^{1/2} / N$ ,  $\langle \Delta N_t^2 \rangle^{1/2}$  — среднеквадратичное значение крупномасштабных случайных неоднородностей электронной концентрации,  $f_0$  — среднее значение плазменной частоты на высоте  $z$ .

Искомая функция  $\Phi(f_p)$ , очевидно, есть свертка этих двух функций (433), (434):

$$\Phi = \frac{L}{\sqrt{\pi} \Delta f_p f_{cr}^2} \int_0^{f_{cr}} \exp \left[ -\frac{(f_p - f_0)^2}{\Delta f_p^2} \right] \frac{f_0 df_0}{\sqrt{1 - (f_0/f_{cr})^2}}. \quad (435)$$

Для условий, реализующихся в ионосфере, имеем  $\omega_B/\omega_p > (v_T/c)^{1/2}$ , поэтому РПИ практически полностью поляризовано как о-мода. Примем для определенности  $\xi < v + 2,5$ , тогда РПИ описывается выражением для  $P_5$  (260). Подстановка (260), (435) в (431) приводит окончательно к интенсивности РПИ, генерируемого в ионосфере Земли:

$$I_f = \frac{C(\theta) e^2 L}{\sqrt{\pi} c \Delta f_p} x_0^{\xi-1} N_e \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N^2} \left( \frac{c}{l_0 f} \right)^{v-1} \left( \frac{f}{f_{cr}} \right)^2 \left( \frac{f}{f_B} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{c}{v_T} \int_0^{f_{cr}} \exp \left[ -\frac{(f - \delta f - f_0)^2}{\Delta f_p^2} \right] \frac{f_0 df_0}{\sqrt{1 - (f_0/f_{cr})^2}}, \quad (436)$$

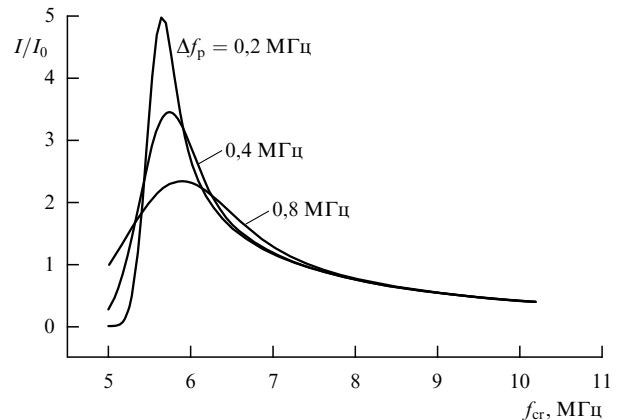
где

$$C(\theta) = (1 + \cos^2 \theta) \times \\ \times \frac{\pi^2 (v-1)(\xi-1) \Gamma[(\xi-1)/2] \Gamma[(v-\xi+2,5)/2]}{36 \times 6^{1/2} (v+2) \Gamma(v/2 + 3/4)}, \quad (437)$$

$\langle \Delta N^2 \rangle$  — средний квадрат мелкомасштабных неоднородностей плотности с  $l < l_0$  ( $l_0 \sim 100$  м в нашем случае),  $\delta f \approx f_B^2/f_p$  — отстройка частоты пика РПИ от локальной плазменной частоты. Обратим внимание на то, что  $\langle \Delta N^2 \rangle$  отличается от величины  $\langle \Delta N_t^2 \rangle$ , описывающей крупномасштабные неоднородности плазмы.

Спектр РПИ (436) можно было бы измерить стандартным способом, используя многочастотные измерения, например, на радиотелескопе ВДР-300, работающем в области частот 4,5–9,3 МГц [124]. Проще, однако, исследовать зависимость РПИ от критической частоты ионосферы, которая испытывает значительные суточные вариации. С этой целью следует наблюдать суточный ход интенсивности излучения на фиксированной частоте [125].

На рисунке 20 представлены теоретические зависимости РПИ, генерируемого на частоте  $f = 5,6$  МГц (которая



**Рис. 20.** Зависимость РПИ, генерируемого в ионосфере Земли, от критической частоты ионосферы при различных значениях крупномасштабных неоднородностей плотности плазмы. Принятые параметры:  $L = 1,3 \times 10^7$  см,  $f/f_B = 4$ ,  $c/v_T = 2 \times 10^3$ ,  $x_0^{\xi-1} N_e \langle \Delta N^2 \rangle / N^2 = 4 \times 10^{-7}$ .

относительно свободна от помех, [126]), от критической частоты ионосферы  $f_{cr}$  для параметров, характерных для средних широт [127]. Ожидаемая абсолютная величина интенсивности РПИ того же порядка, что и фоновое космическое радиоизлучение на этих частотах, а потому РПИ должно доминировать в дневное время, когда космический фон экранируется ионосферой.

### 5.5. Будущие приложения теории резонансного переходного излучения к космическим плазмам

Интенсивность РПИ вблизи плазменной частоты весьма велика, что позволяет ожидать его генерации всякий раз, когда быстрые электроны движутся в плазме с мелкомасштабными случайными неоднородностями электронной плотности.

Остановимся на некоторых важных случаях, когда РПИ может наблюдаться (или же фактически наблюдается, но иначе интерпретируется, либо не интерпретируется вовсе).

**Всплески типа II.** Солнечные и межпланетные всплески типа II связаны с распространяющимися от Солнца ударными волнами. Обычно вблизи ударного фронта имеется усиленный уровень турбулентности и ускоренных частиц. Следовательно, интенсивность РПИ из области фронта также должна быть повышена. При распространении достаточно сильной ударной волны (со степенью сжатия, близкой к 4) плотность плазмы перед и за фронтом будет различаться в 4 раза. Соответственно, характерные частоты РПИ из этих двух областей будут отличаться вдвое, имитируя гармоническую структуру излучения с отношением частот 1:2.

**Корональные выбросы массы** (coronal mass ejections, CME) являются одним из проявлений солнечной активности, они оказывают существенное влияние на состояние межпланетной среды, геомагнитные явления и т.п. В работе [128] приведены спектры радиоизлучения выделенных областей CME, происшедшего 20 апреля 1998 г., на частотах 164, 236,6, 327 МГц и показано, что это синхротронное излучение среднрелятивистских электронов (0,5–5 МэВ) в области действия эффекта плотности (эффекта Разина–Цытовича).

Переходное излучение (из тех же областей CME) должно доминировать на более низких частотах, где синхротронное излучение сильно подавлено. Для того, чтобы обнаружить переходное излучение на тех же (фиксированных) частотах, следует проанализировать более плотные участки CME. Вклад переходного излучения будет наблюдаться в виде эксцесса радиопотока на частоте 164 МГц.

**Низкочастотное радиоизлучение земного происхождения.** В полярных областях магнитосферы Земли генерируются различные типы радиоизлучения [129]. Давно известно, что интенсивность такого излучения сильно коррелирована с потоками быстрых электронов в полярной ионосфере [130, 131]. Некоторые типы этого излучения — довольно узкополосные и сосредоточены между локальными плазменной и верхнегибридной частотами [129]. РПИ наиболее эффективно в этой области частот и может здесь обеспечивать основной вклад. Отметим, что механизмы генерации широкополосного радиоизлучения полярной ионосферы, такие как излучение при ионизации и перезарядке частиц [72, 130, 132], есть не что иное, как

частный случай рассмотренного в разделе 4 (неупругого) поляризационного тормозного излучения.

Вместе с тем, РПИ может наблюдаться и в экспериментах по активному воздействию мощными сигналами на ионосферу [21, 133], поскольку в них возникают как ускоренные частицы [134], так и мелкомасштабные неоднородности плотности плазмы [135, 136].

**Радиоизлучение планет.** Все планеты-гиганты являются радиоисточниками. Типы радиоизлучения каждой из них отличаются большим разнообразием [137], так что здесь имеется просторное поле для приложений теории переходного излучения. Отметим для примера, что спектр широкополосного радиоизлучения Юпитера содержит низкочастотный подъем [137, с. 43], причем соответствующее излучение сильно поляризовано ( $\sim 100\%$ ) в виде обыкновенной волны. Такое поведение радиоизлучения характерно для резонансного переходного механизма.

На внешней границе гелиосферы наблюдаются всплески дрейфующего радиоизлучения ( $f = 2-3$  кГц) [138]. Поскольку в этой области предполагается наличие ударной волны (и, следовательно, повышенного уровня неоднородностей плотности), а плазменные частоты порядка  $f = 2-3$  кГц, то вклад РПИ в генерацию указанных всплесков может быть весьма существенным.

**Мазерное переходное излучение.** Под мазерным переходным излучением мы понимаем генерацию электромагнитных волн, обусловленную переходной неустойчивостью (т.е. в условиях, когда коэффициент переходной реабсорбции отрицателен, см. раздел 3.5). Оценки величины инкремента переходной неустойчивости для ионосферной плазмы приведены в разделе 3.5, однако, вопрос о том, реализуется ли на самом деле переходная неустойчивость в ионосфере Земли, в настоящее время не решен.

Очевидно, что переходная неустойчивость могла бы развиваться там, где имеются сильно анизотропные распределения быстрых электронов. Например, солнечные и межпланетные **всплески типа III** генерируются пучками быстрых электронов [109]. Считается, что это радиоизлучение обеспечивается плазменным механизмом излучения. Действительно, пучки быстрых электронов легко генерируют плазменные волны. Эти плазменные волны могут трансформироваться в поперечные волны в результате процессов слияния друг с другом (и тогда возникает излучение вблизи удвоенной плазменной частоты) или процессов рассеяния плазменных волн на частицах фоновой плазмы или низкочастотных волнах (и тогда возникает излучение вблизи плазменной частоты).

Во всплесках типа III на самом деле часто наблюдается подобная гармоническая структура (с отношением частот 1:2). Однако в рамках плазменного механизма можно было бы ожидать меньшей величины отношения интенсивности излучения на первой и второй гармониках ( $I_1/I_2$ ), чем это наблюдается. Возможно, что РПИ (обычное либо мазерное) дает основной вклад в генерацию первой гармоники во всплесках типа III.

## 6. Заключение

Переходное излучение — чрезвычайно общее явление, составляющее обширный раздел современной физики. В настоящей статье довольно подробно проанализирован

частный случай этого явления — переходное излучение, возникающее в природных условиях. Если в лабораторных экспериментах характеристики как быстрых частиц, так и среды можно контролировать (например, исследовать излучение моноэнергетических частиц, проходящих через отдельную границу, или распространяющихся в периодической среде), то в источниках электромагнитного излучения естественного происхождения ситуация существенно иная.

Астрофизические среды (включая межпланетную и ионосферную плазму), как правило, сильно неоднородны, причем обычно сосуществуют плавная крупномасштабная неоднородность и мелкомасштабные случайные неоднородности плотности и/или полей. Роль регулярного (крупномасштабного) магнитного поля весьма велика, а быстрые частицы обладают протяженными энергетическими спектрами, их угловые распределения часто анизотропны.

Теория переходного излучения быстрых частиц в магнитоактивной плазме со случайными неоднородностями плотности, изложенная в настоящем обзоре, учитывает все перечисленные физические факторы, и ее применение для интерпретации определенных типов астрофизического радиоизлучения является адекватным и приводит к надежным непротиворечивым результатам. Вместе с тем, актуальным является дальнейшее развитие теории переходного излучения с учетом процессов поглощения и рассеяния волн, рассмотрение оптически толстых сред, исследование мазерных эффектов в магнитоактивной плазме, а также создание детальных моделей космических источников переходного излучения и их применение для анализа наблюдений.

По существу, использование теории переходного излучения в астрофизике только начинается, и нет сомнения в том, что область применения этой теории в ближайшее время будет стремительно расширяться.

Авторы благодарят В.Л. Гинзбурга и рецензента за обсуждение принципиальных вопросов генерации переходного излучения, а также Т. Bastian, D. Gary, W. Kurth, Ю.В. Токарева за обсуждение различных астрофизических приложений теории ПИ. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 00-02-16356.

## Список литературы

1. Гинзбург В Л *УФН* **166** 1033 (1996); **172** 373 (2002)
2. Гинзбург В Л, Франк И М *ЖЭТФ* **16** 15 (1946)
3. Болотовский Б М, Галстян Е А *УФН* **170** 809 (2000)
4. Тер-Микаелян М Л *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях* (Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1969)
5. Амусья М Я и др. *Поляризационное тормозное излучение частиц и атомов* (Отв. ред. В Н Цытович, И М Ойрингель) (М.: Наука, 1987)
6. Франк И М *Излучение Вавилова – Черенкова (вопросы теории)* (М.: Наука, 1988)
7. Тамм И Е *УФН* **68** 387 (1959)
8. Цытович В Н *УФН* **165** 89 (1995)
9. Ахиезер А И, Шульга Н Ф *УФН* **137** 560 (1982)
10. Базылев В А, Жеваго Н К *Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях* (М.: Наука, 1987)
11. Платонов К Ю, Топтыгин И Н, Флейшман Г Д *УФН* **160** (4) 59 (1990)
12. Платонов К Ю, Топтыгин И Н, Флейшман Г Д *Физика плазмы* **16** 1517 (1990)
13. Тамойкин В В *Изв. вузов. Радиофиз.* **11** 1879 (1968)
14. Рыжов Ю А, Тамойкин В В *Изв. вузов. Радиофиз.* **13** 358 (1970)
15. Tamoikin V V *Astrophys. Space Sci.* **53** 3 (1978)
16. Басс Ф Г *Изв. вузов. Радиофиз.* **2** 1015 (1959)
17. Тамойкин В В *Изв. вузов. Радиофиз.* **14** 285 (1971)
18. Ермакова Е Н, Трахтенгерц В Ю *Физика плазмы* **18** 1358 (1992)
19. Флейшман Г Д *УФН* **161** (1) 165 (1991)
20. Ермакова Е Н, Трахтенгерц В Ю *Физика плазмы* **18** 1403 (1992)
21. Ермакова Е Н, Трахтенгерц В Ю *Изв. вузов. Радиофиз.* **39** 286 (1996)
22. Бельков С А, Николаев Ю А, Цытович В Н *Изв. вузов. Радиофиз.* **23** 261 (1980)
23. Давыдов В А *Изв. вузов. Радиофиз.* **25** 1429 (1982)
24. Давыдов В А *Изв. вузов. Радиофиз.* **26** 1134 (1983)
25. Давыдов В А *Изв. вузов. Радиофиз.* **26** 1251 (1983)
26. Тамойкин В В, Бигаров С Б *ЖЭТФ* **44** 1544 (1963)
27. Весницкий А И, Метрикин А В *УФН* **166** 1043 (1996)
28. Гинзбург В Л, Цытович В Н *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984)
29. Флейшман Г Д *ЖЭТФ* **99** 488 (1991)
30. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
31. Байер В Н, Катко В М, Фадин В С *Излучение релятивистских электронов* (М.: Атомиздат, 1973)
32. Toptygin I N, Fleishman G D *Astrophys. Space Sci.* **132** 213 (1987)
33. Мигдал А Б *ДАН СССР* **96** 49 (1954)
34. Долгинов А З, Топтыгин И Н *ЖЭТФ* **51** 1771 (1966)
35. Гарибян Г М *ЖЭТФ* **39** 332 (1960)
36. Топтыгин И Н *Космические лучи в межпланетных магнитных полях* (М.: Наука, 1983)
37. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **10** 601 (1940)
38. Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **10** 608 (1940)
39. Коломенский А А *ЖЭТФ* **24** 167 (1953)
40. Коломенский А А *ДАН СССР* **106** 982 (1956)
41. Барсуков К А *ЖЭТФ* **56** 1485 (1959)
42. Гинзбург В Л *УФН* **69** 537 (1959)
43. Базылев В А, Жеваго Н К *УФН* **160** (12) 47 (1990)
44. Арутюнов В А и др. *ЖТФ* **61** 1 (1991)
45. Бирюков В М, Котов В И, Чесноков Ю А *УФН* **164** 1017 (1994)
46. Болотовский Б М, Мергелян О С *Опт. и спектроск.* **18** 3 (1965)
47. Пафомов В Е *ЖЭТФ* **39** 134 (1960)
48. Флейшман Г Д *ЖЭТФ* **101** 432 (1992)
49. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979)
50. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика* 2-е изд. (М.: Наука, 1981)
51. Эйдем В Я *ЖЭТФ* **34** 31 (1958); **36** 1335 (1959)
52. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967)
53. Пахольчик А *Радиоастрофизика* (М.: Мир, 1973)
54. Капица С П *ЖЭТФ* **39** 1367 (1960)
55. Абрамовиц М, Стиган И (Ред.) *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (М.: Наука, 1979)
56. Mathews T, Venkatesan D *Nature* **345** 600 (1990)
57. Платонов К Ю, Флейшман Г Д *ЖЭТФ* **106** 1053 (1994)
58. Fleishman G D, Platonov K Yu *Space Sci. Rev.* **68** 243 (1994)
59. Акоюн А В, Цытович В Н *ЖЭТФ* **71** 166 (1976)
60. Прудников А П, Брычков Ю А, Маричев О И *Интегралы и ряды: Элементарные функции* (М.: Наука, 1981)
61. Бредов М М, Румянцев В В, Топтыгин И Н *Классическая электродинамика* (М.: Наука, 1985)
62. *Электродинамика плазмы* (Под ред. А И Ахиезера) (М.: Наука, 1974)
63. Платонов К Ю, Флейшман Г Д *ЖЭТФ* **108** 1942 (1995)
64. Истомин Я Н, Лукьянов А В *ЖЭТФ* **97** 1578 (1990)
65. Платонов К Ю, Флейшман Г Д *Изв. вузов. Радиофиз.* **40** 941 (1997)
66. Флейшман Г Д *Астрон. журн.* **66** 932 (1989)
67. Флейшман Г Д, Мельников В Ф *УФН* **168** 1265 (1998)
68. Fleishman G D, Yastrebov S G *Solar Phys.* **154** 361 (1994)
69. Fleishman G D, Platonov K Yu, in *Magnetic Fields and Solar Processes: Proc. 9th European Meeting on Solar Physics, Florence, Italy, 12–18 September 1999* (ESA SP, 448, Ed. A Wilson) Vol. 2 (Noordwijk: ESA Publ. Division, ESTEC, 1999) p. 809
70. Fleishman G D, Platonov K Yu *Astrophys. Rep. (Publ. Beijing Astron. Observ.)* **36** 111 (2000)
71. Платонов К Ю, Флейшман Г Д *Астрон. журн.* **78** 238 (2001)

72. Топтыгин И Н *ЖЭТФ* **43** 1031 (1964)
73. Астапенко В А и др. *ЖЭТФ* **88** 1560 (1985)
74. Амусья М Я и др. *ЖЭТФ* **88** 353 (1985)
75. Амусья М Я, Соловьев А В, Король А В *Письма в ЖТФ* **12** 705 (1986)
76. Платонов К Ю, Топтыгин И Н, в сб. *Тез. докл. XVI Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами* (М.: Изд-во МГУ, 1986) с. 70
77. Платонов К Ю, Топтыгин И Н *Изв. вузов. Радиофиз.* **32** 735 (1989)
78. Ситенко А Г *Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме* (Киев: Наукова думка, 1977)
79. Шеффилд Дж *Рассеяние электромагнитного излучения в плазме* (М.: Атомиздат, 1978)
80. Платонов К Ю, Флейшман Г Д *Письма в ЖЭТФ* **59** 586 (1994)
81. Акопян А В, Цытович В Н, Препринт ФИАН № 184 (М.: ФИАН, 1978)
82. Корсаков В Б, Флейшман Г Д *Изв. вузов. Радиофиз.* **38** 887 (1995)
83. Баткин Я С, Алмалиев А Н *ЖЭТФ* **88** 1958 (1985)
84. Акопян А В, Цытович В Н *ЖЭТФ* **72** 1824 (1977)
85. Yuan L C L et al. *Phys. Rev. Lett.* **25** 1513 (1970)
86. Cherry M L et al. *Phys. Rev. D* **10** 3594 (1974)
87. Лорикян М П, Сардарян Р А, Шихляров К К *Изв. АН Арм. ССР. Сер. Физ.* **24** 159 (1989); **24** 252 (1989)
88. Piestrup M A et al. *Phys. Rev. A* **45** 1183 (1992)
89. Тер-Микаелян М Л *УФН* **171** 597 (2001)
90. Harpek U, Sievers A J, Blum E B *Phys. Rev. Lett.* **67** 2962 (1991)
91. Moran M J et al. *Phys. Rev. Lett.* **57** 1223 (1986)
92. Johansson S A E *Astrophys. Lett.* **9** 143 (1971)
93. Ramaty R, Bleach R D *Astrophys. Lett.* **11** 35 (1972)
94. Yodh G B, Artru X, Ramaty R *Astrophys. J.* **181** 725 (1973)
95. Гнедин Ю Н, Частное сообщение (1998)
96. Doyle J G, Mathioudakis M *Astron. Astrophys.* **241** L41 (1991)
97. Гинзбург В Л, Сыроватский С И *Происхождение космических лучей* (М.: Изд-во АН СССР, 1963)
98. Fleishman G D, Tokarev Yu V *Astron. Astrophys.* **293** 565 (1995)
99. Getmantsev G G, Tokarev Yu V *Astrophys. Lett.* **12** 57 (1972)
100. Nikolaev Iu A, Tsytoich V N *Phys. Scripta* **20** 665 (1979)
101. Cordes J M et al. *Nature* **354** 121 (1991)
102. Пынзарь А В *Астрон. журн.* **70** 480 (1993)
103. Brown L W *Astrophys. J.* **180** 359 (1973)
104. Токарев Ю В и др. *Письма в Астрон. журн.* **26** 643 (2000)
105. Manning R, Dulk G A *Astron. Astrophys.* **372** 663 (2001)
106. Alexander J K et al. *Astrophys. J. Lett.* **157** L163 (1969)
107. Novaco J C, Brown L W *Astrophys. J.* **221** 114 (1978)
108. Токарев Ю В и др., в сб. *Тезисы докл. Всерос. астрон. конф., Санкт-Петербург, 6–12 авг. 2001* (СПб: НИИХ СПбГУ, 2001) с. 175
109. Bastian T S, Benz A O, Gary D E *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **36** 131 (1998)
110. Fleishman G D, Kahler S W *Astrophys. J.* **394** 688 (1992)
111. Кочаров Г Е и др., в сб. *Проблемы солнечных вспышек* (Под ред. В В Фомичева) (М.: Наука, 1986) с. 176
112. Vestrand W T et al. *Astrophys. J.* **322** 1010 (1987)
113. *Solar Geophys. Data Pt. II* (436) (1980); (458) (1982); (461) (1983)
114. Fleishman G D, Kovaltsov G A, в сб. *Ядерная астрофизика* (Под ред. Г Е Кочарова) (СПб: ФТИ, 1991) с. 102
115. Мельников В Ф *Изв. вузов. Радиофиз.* **37** 856 (1994)
116. Мельников В Ф, Магун А *Изв. вузов. Радиофиз.* **39** 1456 (1996)
117. Willson R F *Astrophys. J.* **413** 798 (1993)
118. Флейшман Г Д *Письма в Астрон. журн.* **27** 296 (2001)
119. Melnikov V F, Magun A *Solar Phys.* **178** 591 (1998)
120. Melnikov V F, Silva A V R, in *Magnetic Fields and Solar Processes: Proc. 9th European Meeting on Solar Physics, Florence, Italy, 12–18 September 1999* (ESA SP, 448, Ed. A Wilson) Vol. 2 (Noordwijk: ESA Publ. Division, ESTEC, 1999) p. 1053
121. Bepalov P A, Zaitsev V V, Stepanov A V *Astrophys. J.* **374** 369 (1991)
122. Bastian T S *Astrophys. J.* **426** 774 (1994)
123. а) Priest E R, Forbes T *Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000); б) Вайнштейн С И, Быков А М, Топтыгин И Н *Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме* (М.: Наука, 1989)
124. Токарев Ю В, в сб. *Тезисы докл. XXV Радиоастрон. конф., Пуццо, 20–24 сент. 1993* (Пуццо: Пуццинский НЦ РАН, 1993) с. 209
125. Токарев Ю В, Частное сообщение (2001)
126. Виняйкин Е Н и др. *Астрон. журн.* **64** 987 (1987)
127. Таран В И *Геомагн. и аэронавигация* **41** 659 (2001)
128. Bastian T S et al. *Astrophys. J.* **558** L65 (2001)
129. LaBelle J J. *Atmosph. Terrest. Phys.* **51** 197 (1989)
130. Божков А И, Осипов Н К *Геомагн. и аэронавигация* **11** 1021 (1971)
131. Осипов Н К, Шевелев Ю Г *Геомагн. и аэронавигация* **13** 674 (1973)
132. Раппопорт В О, Эйдем В Я *Геомагн. и аэронавигация* **5** 930 (1965)
133. Thidé B, Kopka H, Stubbe P *Phys. Rev. Lett.* **49** 1561 (1982)
134. Carlson H C, Wickwar V B, Mantas G P J. *Atmosph. Terrest. Phys.* **44** 1089 (1982)
135. Inhester B, Fejer J A, Das A C J. *Geophys. Res.* **86** 9101 (1981)
136. Kelley M C et al. *J. Geophys. Res.* **100** 17367 (1995)
137. Рябов Б П, Герасимова Н Н *Декаметровое спорадическое радиоизлучение Юпитера* (Киев: Наукова думка, 1990)
138. Kurth W S et al. *Nature* **312** 27 (1984)

## Transition radiation in media with random inhomogeneities

**K.Yu. Platonov**

*St.-Petersburg State Technical University,  
ul. Politekhmicheskaya 29, 195251 St.-Petersburg, Russian Federation  
Tel. (7-812) 552-65 01  
E-mail: platonov@quark.stu.neva.ru*

**G.D. Fleishman**

*A.F. Ioffe Physical-Technical Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Politekhmicheskaya 26, 194021 St.-Petersburg, Russian Federation  
Tel. (7-812) 247-93 68. Fax (7-812) 247-10 17  
E-mail: gregory@sun.ioffe.rssi.ru*

This review analyzes radiation produced by randomly inhomogeneous media excited by fast particles — i.e., polarization Bremsstrahlung for thermodynamically equilibrium inhomogeneities or transition radiation for nonthermal ones — taking into account all the effects important for natural sources. Magnetic field effects on both the motion of fast particles and dispersion of background plasma are considered, and the multiple scattering of fast particles in the medium is examined. Various resonant effects occurring under the conditions of Cherenkov (or cyclotron) emission for a particular eigenmode are discussed. The transition radiation intensity and absorption (amplification) coefficients are calculated for ensembles of fast particles with realistic distributions over momentum and angles. The value of the developed theory of transition radiation is illustrated by applying it to astrophysical objects. Transition radiation is shown to contribute significantly to the radio emission of the Sun, planets (including Earth), interplanetary and interstellar media. Possible further applications of transition radiation (particularly, stimulated one) are discussed.

PACS numbers: **41.60. – m**, **52.35.Hr**, **95.30.Gv**

Bibliography — 138 references

*Received 9 February 2001, revised 15 September 2001*