Ноябрь 2002 г. **Том 172, № 11**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Инвариантная редакция потенциального метода интегрирования вихревого уравнения движения для материальной точки

А.В. Кукушкин

Как аргумент для обоснования применимости вихревого уравнения движения к решению классических задач дискретной динамики предложена релятивистская процедура вывода для кинетической части обобщенного уравнения Эйлера. Для определенного класса плоских движений сформулирована инвариантная редакция потенциального метода интегрирования вихревого уравнения. Эффективность метода проверяется доказательством ряда известных теорем динамики материальной точки. К новым результатам относится установление связи гиперэллиптических движений при нулевом уровне энергии с полем сил "мультипликативного" типа.

PACS number: **45.20.–d**, 45.50.Pk

Содержание

1. Введение

Под вихревыми уравнениями движения обычно подразумеваются уравнения гидродинамического типа: либо собственно уравнение Эйлера для идеальной жидкости [1], либо его многомерное обобщение в форме уравнения Ламба [2]. В отличие от ньютоновой формы уравнения движения уравнения гидродинамики относятся к совершенно иному типу уравнений, а именно к *континуальному* классу уравнений физики, и стоят в этом отношении гораздо ближе к теории поля, нежели к теории движения точечных объектов. Тем не менее они успешно использовались в дискретной динамике гамильтоновых систем сначала И.С. Аржаных [1], а затем В.В. Козловым, в книге которого [2] идеи И.С. Аржаных получили дальнейшую более детальную математическую разработку и содержится литература, относящаяся к этой области.

Нужно отметить, что, несмотря на широкое применение уравнений гидродинамики, главной задачей обоих упомянутых авторов было интегрирование канонических уравнений Гамильтона, в которые добавлялись, однако, "вихревые члены" [1]. Поэтому методы, которые получили развитие в [1, 2], относятся главным образом к так называемым "вихревым методам" интегрирования, и собственно их мы касаться не будем. Но идейно наша работа, как будет видно чуть позже, тесно связана своими корнями с этой проблематикой и, в частности, с гипотезой о существовании так называемого поля энергии-импульса, предложенной И.С. Аржаных в [1] на основании существования формальной аналогии между уравнениями Максвелла и уравнением Эйлера.

Нужно сказать, однако, что, решая задачи дискретной динамики, И.С. Аржаных и проводит эту аналогию в [1, 3], имея в виду дискретную форму уравнения Эйлера, в то время как объект сравнения (максвелловские уравнения) остается континуальным. На проблемах дискретной динамики эта неточность никак не отражается, но для достижения более широких целей ее нужно устранить. Попытка решения этой проблемы релятивистскими методами, кроме всего прочего, поможет понять, каким образом континуальное по своей природе уравнение Эйлера может быть последовательно приведено к его использованию в дискретной динамике. Исходя из этого, мы предложим инвариантную редакцию потенциального по своей природе метода интегрирования вихревого уравнения движения применительно к решению стандартных задач описания движений точечного объекта во внешнем поле потенциального типа (консервативная система). Нужно подчеркнуть, что формулируемый в статье метод в силу его внутренней специфики отнюдь не является общим, но направлен на выделение из всех возможных такого класса движений, процесс

А.В. Кукушкин. Нижегородский государственный технический университет,
603600 Нижний Новгород, ГСП-41, ул. Минина 24,
Российская Федерация
Тел. (8312) 36-78-40
E-mail: andkir@sbrf.nnov.ru

Статья поступила 10 января 2002 г., после доработки 15 мая 2002 г.

получения которых по сравнению с традиционными невихревыми методами исключительно благодаря прямому интегрированию вихревого уравнения движения становится существенно проще. К этому выделенному и частному классу движений относятся такие, отыскать которые, используя невихревые формы механики, по меньшей мере очень сложно (хотя бы в силу того, что с позиций традиционного подхода они, как, впрочем, и характер поддерживающих их сил "мультипликативного типа", остаются глубоко завуалированными и не столь очевидными).

Далее, поскольку мы отчасти коснемся также и континуальной стадии проблемы, то это поможет выявить и отличительные особенности нашего подхода по сравнению с тем, который успешно практикуется в гидродинамике для "потенциальных течений" [4].

К методическим результатам нашей работы следует отнести также вывод обобщенной формулы Гюйгенса для "центробежного" ускорения из вихревого уравнения движения и получение отсюда ряда известных теорем динамики материальной точки. При этом основное внимание будет сконцентрировано на том, чтобы максимально выявить, использовать и подчеркнуть сравнениями те методические преимущества, которые прямо вытекают из свойства координатной инвариантности метода.

2. Эвристическое значение гипотезы о существовании поля плотности энергии-импульса

Начнем с того, что выпишем и проанализируем используемую в [1] для решения задач дискретной динамики "вихревую", или, по-другому, обобщенную эйлерову форму уравнения движения:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \operatorname{grad} K - [\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{p}] = -m \operatorname{grad} \varphi \,, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}$ и K — соответственно вектор импульса и кинетическая энергия материальной точки с массой m, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$ по некоторой в общем случае криволинейной траектории под действием поля внешних сил с потенциальной функцией φ; t — время по часам в абсолютной системе отсчета.

Перенос правой части урвнения (1) в левую образует другую форму уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \operatorname{grad} H - [\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{p}] = 0 \,, \tag{2}$$

где H — гамильтониан.

Рассмотрим, опуская детали, релятивистскую аргументацию, наводящую на предложенную И.С. Аржаных в [1] по аналогии с теорией поля гипотезу о существовании *поля* энергии-импульса [1].

Последовательное проведение этой аналогии, как уже говорилось, прежде всего нуждается в том, чтобы рассматривать уравнение (1) как континуальное. Это означает замену всех входящих в теорию характеристических величин $(\mathbf{p}, K, m)$ на отвечающие им объемные плотности, для чего достаточно заменить везде m на μ, где μ — функция произвольным образом распределенной в пространстве-времени объемной плотности массы некоторой субстанции (не обязательно жидкости), кинематику "течения" которой и описывает левая часть субстанционального уравнения движения.

Напомним теперь последовательность действий, которая использовалась Г. Минковским [6] в релятивистском выводе уравнений Максвелла в вакууме.

Исходным понятием в этой схеме является, как известно, 4-потенциал, пространственноподобные компоненты которого представляются 3-вектором $\mathbf{A}$ (векторный потенциал электромагнитного поля), а времениподобная компонента — скалярной функцией ψ (электростатический потенциал) [2].

Внешним перемножением этого 4-вектора с дифференциальным 4-оператором Гамильтона, т.е. воздействием на него оператором 4-ротора [6], продуцируется кососимметричный тензор электромагнитного поля.

Важно подчеркнуть теперь, что орты и дифференциалы преобразуются для группы Лоренца одинаково: так же, как и координаты. Вследствие этого конечные продукты формализма Г. Минковского (внешнее перемножение ортов) и формализма внешних дифференциальных форм Пуанкаре – Картана (внешнее перемножение дифференциалов), если распространить его на пространство Минковского, при правильно выбранной и идентичной последовательности операций должны, конечно, совпадать.

Далее, с учетом формул, связывающих векторы поля с потенциалами:

$$\mathbf{e} = -\operatorname{grad} \psi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \,,$$

$$\mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \,,$$

первая группа уравнений Максвелла в вакууме

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0 \,, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0 \tag{4}$$

образуется приравниванием к нулю 4-вектора, который возникает в результате внутреннего перемножения тензора поля с 4-оператором Гамильтона.

Релятивистскую форму левой части уравнения (1) можно получить аналогичным способом как пространственноподобную часть некоторого 4-вектора. Но для этого в качестве исходной физической величины нужно взять сначала 4-вектор плотности импульса с компонентами $(-\mathbf{p}\,,' K'/c)$, где $\mathbf{p}'$ и K' — релятивистские выражения для 3-вектора плотности импульса и плотности энергии соответственно, c — скорость света. Кососимметричный тензор "поля" плотности энергии-импульса возникает и здесь также в результате действия оператора 4-ротора на исходный 4-вектор плотности импульса. Далее, подобно тому, как это имеет место в теории поля, но принимая несколько иную расстановку знаков, можно определить векторы этого "поля" через "потен-

[1] Что касается релятивистской формы левой (кинетической) части уравнения (1), то, несмотря на то, что она содержится в работах [1, 3], вывод ее там отсутствует, в то время как основанную на внешних дифференциальных формах Пуанкаре – Картана [5] релятивистскую процедуру вывода уравнений теории поля И.С. Аржаных приводит.

[2] Используемая здесь сигнатура метрики пространства-времени $(+++-)$ соответствует принятой в книге В. Паули [6].

циалы":

$$\mathbf{e}' = \operatorname{grad} \frac{K'}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial t}\,, \qquad \mathbf{h}' = \operatorname{rot} \mathbf{p}'\,. \tag{5}$$

Однако понижение ранга полученного тензора на единицу следует проводить здесь (из соображений размерности) посредством *внутреннего* перемножения с ним не оператора Гамильтона, как в теории поля, а 4-вектора скорости (берутся его контравариантные компоненты). После этого возникает новый 4-вектор с компонентами

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{c\mathbf{e}' - [\mathbf{V}\times\mathbf{h}'], -\mathbf{V}\mathbf{e}'\right\}, \tag{6}$$

где $\beta = |\mathbf{V}|/c$, $\mathbf{V}$ — обычный 3-вектор скорости.

Следует отметить, что релятивистскую форму собственно уравнения Эйлера, в котором функция μ вынесена за знаки операторов дифференцирования, можно получить совершенно аналогичным образом, если в указанной последовательности проведения операций поменять местами 4-векторы импульса и скорости.

Желая перейти далее к описанию кинематики точечных объектов, функцию μ в формулах (5) нужно представить в виде δ-функции, играющей роль функции положения материальной точки в 4-мерном пространстве-времени. Проинтегрировав затем 4-вектор (6) по объему, получим (с учетом лоренцева сокращения объемов) новый 4-вектор, пространственноподобная часть которого, как нетрудно обнаружить[3], имея в виду формулы (5) и (6), воспроизводит левую часть уравнения (1) в релятивистском обобщении, а времениподобная компонента принимает форму скаляра

$$-\frac{\mathbf{V}}{c}\,\mathbf{e}''\,,$$

в котором

$$\mathbf{e}'' = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \operatorname{grad} K\,,$$

где $\mathbf{p}$ и K — релятивистские выражения для импульса и энергии соответственно.

В отношении времениподобной компоненты 4-вектора можно сказать, что она является "кинетическим аналогом" левой части уравнения (4). Однако физический смысл этой аналогии не может быть установлен в рамках классического рассмотрения, в которых мы только и будем оставаться везде ниже.

Мы видим, что различие двух рассмотренных схем преобразований в способе понижения ранга тензора имеет последствия фундаментального характера, являясь главной причиной линейности уравнений Максвелла, с одной стороны, и нелинейности "вихревой теории движения" — с другой.

Затем следует подчеркнуть, конечно, некоторую разницу в исходных величинах, которая также носит фундаментальный характер.

В теории поля $\mathbf{A}$ и ψ — независимые, но вспомогательные величины. Напротив, в "вихревой теории движения" величины $\mathbf{p}'$ и K'/c обладают непосредственным физическим смыслом, но обе зависят от скорости и поэтому не являются независимыми.

Все это не позволяет проводить слишком больших сближений в отношении понятий, фигурирующих в обеих теориях, и нужно поэтому иметь в виду, что "поле" энергии-импульса в гипотезе И.С. Аржаных есть воображаемое поле, т.е. такое понятие, которым можно оперировать лишь в эвристических целях.

Например, тот факт, что в релятивистских преобразованиях 4-вектор плотности импульса играет роль 4-потенциала, говорит о том, что он не нуждается в переопределении через другие вспомогательные понятия, как это имеет место в невихревых формах описания движений точечных объектов, где функция действия S выступает в роли скалярного потенциала:

$$\mathbf{p} = \operatorname{grad} S\,, \tag{7}$$

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}\,. \tag{8}$$

Вообще, сравнительный анализ проблем интегрирования дискретной формы вихревого уравнения движения и невихревого заслуживает особого внимания и ведет к необходимости проведения между ними определенно очерченных границ.

Мы видели, например, что в релятивистской схеме получения кинетической части вихревого уравнения движения 3-вектор импульса, поскольку он играет там роль "векторного потенциала", есть соленоидальный вектор. С этой точки зрения применяемая в гамильтоновой механике формула (7) нуждается в обобщении, что и является предметом вихревых методов интегрирования канонических уравнений [1, 2]. С другой стороны, если вернуться к вихревой форме, столь очевидная соленоидальность вектора импульса криволинейных движений саму идею привлечения сюда потенциальных методов его интегрирования компрометирует, на первый взгляд, в высшей степени. Это видно из того, что простая подстановка формул (7) и (8) в уравнение (2) обращает его в тождество независимо от того, имеет ли функция S какое-либо отношение к реальным движениям.

Между тем хорошо известно, что потенциальный метод Гамильтона – Якоби применительно к интегрированию канонических уравнений механики является самым сильным инструментом; но и здесь не все так гладко, поскольку он сильно зависит от выбора координатной структуры, который ничем не регулируется [5].

Переходя к сравнительному анализу особенностей применения потенциальных методов интегрирования для континуальной формы вихревого уравнения движения (гидродинамика) и дискретной (динамика точечных объектов), нужно подчеркнуть следующий принципиальный момент.

В случае идеальной жидкости существование "потенциальных течений" связано с известной теоремой Томсона [4] о сохранении величины циркуляции скорости по

[3] На самом деле дифференцирование функции μ в векторе $\operatorname{rot}\mathbf{p}'$ является причиной появления в уравнении некоторых дополнительных членов. Процесс интегрирования по объему (с использованием уравнения неразрывности) уничтожает их лишь в случае центрально-симметричного распределения функции μ по объему шарообразного тела (δ-функция в пределе удовлетворяет этим требованиям) и при условии несжимаемости субстанции. Всего этого можно избежать, если за исходную взять собственно эйлерову форму уравнения движения субстанции.

жидкому контуру вокруг линий тока жидкости (нулевое значение циркуляции). Ясно, что в случае вихревого описания движений точечного объекта эта теорема неприменима, поскольку само использование такого понятия, как циркуляция скорости вокруг траектории точки, здесь некорректно. Имеет смысл говорить лишь о циркуляции скорости *вдоль* траектории вокруг неподвижного начала[4], вследствие чего для криволинейных движений мы опять приходим к соленоидальности вектора импульса.

Таким образом, соленоидальность этого вектора исключает возможность его использования в потенциальных методах интегрирования вихревого уравнения движения в дискретной форме. Однако из этого еще не следует, что методы подобного типа должны быть исключены отсюда совсем, так как в качестве вектора, характеризующего однозначным образом движение материальной точки, может быть выбран другой, уже не соленоидальный вектор.

В любых обстоятельствах таким вектором является радиус-вектор точки $\mathbf{r}$, поскольку для него имеет место формула

$$\mathbf{r} = \operatorname{grad} \frac{r_0^2}{2}\,, \tag{9}$$

где r_0 — расстояние от начала до точки.

Именно это обстоятельство будет использовано нами в дальнейшем для формулировки инвариантной редакции потенциального метода интегрирования уравнения (2) в стационарном случае.

3. Постановка задачи

Рассмотрим вихревое уравнение (2) в стационарном случае, когда отсутствует явная зависимость скорости материальной точки от времени:

$$\operatorname{grad} H - [\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V}] = 0\,, \tag{10}$$

где H — нормированный к ее массе гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2}\,\mathbf{V}^2 + \varphi\,. \tag{11}$$

Ограничение стационарным случаем означает следующее.

При произвольно задаваемой зависимости потенциальной функции от расстояния до материальной точки мы хотим безотносительно к каким-либо начальным условиям ее движения, но при тех или иных предположениях относительно возможных значений гамильтониана, найти полное семейство ее траекторий, которое при заданных значениях гамильтониана находится во взаимно однозначной связи с заданным потенциалом внешних сил.

Ясно, что после определения полной геометрической картины движения, которая может возникнуть либо при бесконечном времени его экспозиции (например, для инфинитных движений), либо (для периодических движений) при конечном (в обоих случаях время исключается), установление временнóго расписания движения точки по заранее определенному семейству траекторий уже не является сложной задачей. Достаточно указать конкретные и совместимые с найденным семейством траекторий предельные условия движения в пространстве и времени.

Следующее ограничение связано с тем, что для простоты мы будем рассматривать не все возможные для данного потенциала движения, а лишь определенный их класс, семейство траекторий которых удовлетворяет одному условию. Именно, мы будем рассматривать плоские движения по двум взаимно ортогональным семействам геодезических, характеризующихся равенством компонент фундаментального метрического тензора[5]:

$$g_{11} = g_{22} \equiv g\,, \tag{12}$$

в любой точке евклидова пространства.

Это последнее условие (как будет ясно позже) принято для того, чтобы свести задачу об отыскании геодезических к теории функций комплексного переменного.

Ясно, что в силу формулы (9) радиус-вектор точки в любой системе координат с началом в какой-либо неподвижной точке O есть безвихревой вектор:

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0\,,$$

при том, что для плоских движений

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 2\,. \tag{13}$$

В декартовой системе имеем разложение вектора $\mathbf{r}$ по ее ортам $\mathbf{x}_{01}$, $\mathbf{x}_{02}$:

$$\mathbf{r} = x_1(\eta, \xi)\mathbf{x}_{01} + x_2(\eta, \xi)\mathbf{x}_{02}\,, \tag{14}$$

где функции $x_{1,2}$ в любой ортогональной системе координат цилиндрического типа (η, ξ, x_3) должны удовлетворять вследствие соотношений (9) и (13) уравнению

$$\Delta r_0^2 = 4\,, \tag{15}$$

где Δ — оператор Лапласа в криволинейной системе.

Для систем, характеризующихся соотношением (12), где $g_{11} = g_{\eta\eta}$, $g_{22} = g_{\xi\xi}$, уравнение (15) удовлетворяется, если функции $x_{1,2}(\eta, \xi)$ гармонические.

Это означает, что декартовы компоненты вектора $\mathbf{r}$ подчиняются условиям Коши – Римана

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \frac{\partial x_2}{\partial \xi}\,, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\,, \tag{16}$$

откуда следует, что плоский вектор $\mathbf{r}$ можно рассматривать как аналитическую функцию

$$W = x_1(\eta, \xi) + \mathrm{i}x_2(\eta, \xi) \tag{17}$$

[4] Как впервые показал Э. Картан [7], трактуемая именно таким образом гидродинамическая лемма Стокса о сохранении циркуляции скорости может быть положена в основание гамильтоновой механики; примером последовательного развития этой идеи может служить тот способ построения гамильтоновой механики, который принят В.И. Арнольдом в [5].

[5] Подчеркнем еще раз, что эта работа направлена не на поиск каких-то общих решений уравнений динамики, а скорее на выделение из них некоторых частных видов движений, описание которых весьма удобно вести с позиций "вихревой теории".

на комплексной плоскости[6] $\theta = \eta + \mathrm{i}\xi$. Следовательно, задачу интегрирования уравнения в *частных производных* (10) следует попытаться свести к задаче отыскания аналитической функции W *одной переменной* θ.

Посмотрим теперь, каким образом и при каких условиях можно реализовать эту идею.

В целом проблема состоит в том, чтобы отобразить векторное уравнение (10) на комплексную плоскость W и получить там квадратуры относительно этой комплексной функции, аналитически отображающей согласно формулам (14) и (17) бесконечные семейства ($\eta = \mathrm{const}$, $\xi = \mathrm{const}$) всех возможных в данных обстоятельствах траекторий.

Будем представлять, таким образом, уравнение (10) в криволинейных ортогональных системах координат цилиндрического типа, для которых, во-первых, выполнено условие (12), во-вторых, $g_{33} = 1$ и, в-третьих, любой орт системы можно выразить через два других согласно формуле

$$[\boldsymbol{\eta}_0 \times \boldsymbol{\xi}_0] = \mathbf{x}_{03}\,, \tag{18}$$

где действует правило циклической перестановки.

Входящий в уравнение (10) вектор скорости $\mathbf{V}$ в общем случае разлагается по ортам плоскости движения:

$$\mathbf{V} = V_1\boldsymbol{\eta}_0 + V_2\boldsymbol{\xi}_0\,.$$

Однако принципиально важным для нас является то обстоятельство, что координатные линии $\eta, \xi = \mathrm{const}$ будут рассматриваться нами как геодезические, т.е. линии, по которым только и могут осуществляться движения материальной точки. Следовательно, конечно не вообще, но при указанных значениях гамильтониана, возможны лишь два вида взаимно ортогональных движений по линиям $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ соответственно:

$$\mathbf{V} = V_1\boldsymbol{\eta}_0\,, \tag{а}$$

$$\mathbf{V} = V_2\boldsymbol{\xi}_0\,. \tag{б}$$

Вихревое уравнение (10) в этих обстоятельствах значительно упрощается. Прежде чем записать его, выпишем сначала с учетом условия (12) и формулы (18) отдельно его первое и второе слагаемые для обоих случаев движений (а) и (б):

$$\operatorname{grad} H = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial H}{\partial\eta}\,\boldsymbol{\eta}_0 + \left[\frac{\partial(V_1^2/2)}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]\boldsymbol{\xi}_0\right\}, \tag{19а}$$

$$[\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V}] = -\frac{V_1}{g}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,V_1)}{\partial\xi}[\boldsymbol{\eta}_0\times\mathbf{x}_{03}] = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{2}\,V_1^2\,\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial\xi} + \frac{\partial(V_1^2/2)}{\partial\xi}\right]\boldsymbol{\xi}_0\,, \tag{20а}$$

$$\operatorname{grad} H = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial H}{\partial\xi}\,\boldsymbol{\xi}_0 + \left[\frac{\partial(V_2^2/2)}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]\boldsymbol{\eta}_0\right\}, \tag{19б}$$

$$[\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V}] = \frac{V_2}{g}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,V_2)}{\partial\eta}[\boldsymbol{\xi}_0\times\mathbf{x}_{03}] = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{2}\,V_2^2\,\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial\eta} + \frac{\partial(V_2^2/2)}{\partial\eta}\right]\boldsymbol{\eta}_0\,. \tag{20б}$$

Результатом подстановки формул (19а), (19б), (20а), (20б) в уравнение (10) являются следующие две системы скалярных уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial\eta} = 0\,, \tag{21а}$$

$$\frac{1}{2}\,V_1^2\,\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\,, \tag{22а}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\xi} = 0\,, \tag{21б}$$

$$\frac{1}{2}\,V_2^2\,\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,. \tag{22б}$$

Уравнения (21а), (21б) выражают собой существование интегралов энергии при движении по геодезическим. Действительно, из уравнения (21а), например, следует, что при движении по линиям $\xi = \mathrm{const}$ гамильтониан может зависеть только от переменной ξ, т.е. от того, по какой линии из бесконечного семейства $\xi = \mathrm{const}$ движется точка, и при этом его значение фиксировано: $H = h(\xi)$, и не меняется во все время движения. Это же относится и к уравнению (21б) с той только разницей, что здесь $H = h(\eta)$.

Далее, уравнения (22а) и (22б) в сущности представляют собой выражения для нормального (относительно траектории) ускорения точки, обобщающие формулу Гюйгенса для центростремительного (или центробежного) ускорения. Действительно, можно показать [4], что

$$\frac{1}{2g\sqrt{g}}\,\frac{\partial g}{\partial\xi} = \frac{1}{R_1}\,, \qquad \frac{1}{2g\sqrt{g}}\,\frac{\partial g}{\partial\eta} = \frac{1}{R_2}\,,$$

где $R_{1,2}$ — локальные радиусы кривизны соответствующих геодезических: $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$. Отсюда уравнения (22а) и (22б) можно переписать в форме Гюйгенса:

$$a_{\mathrm{n}1,2} = \frac{\mathbf{V}_{1,2}^2}{R_{1,2}}\,,$$

где $a_{\mathrm{n}1,2}$ — нормальные составляющие ускорения материальной точки, которые она испытывает при движении по криволинейным траекториям, принадлежащим соответствующим семействам.

Однако сразу же отметим, что эта форма крайне неудобна для интегрирования, и нужно пользоваться непосредственно уравнениями (22а), (22б), в которых локальный радиус кривизны факторизован функциями, также связанными с локальной кривизной; но это — наиболее удобный для интегрирования способ, дающий переход на комплексную плоскость W.

Итак, из существования интегралов энергии мы определили, что, следуя формуле (11), имеем

$$h(\xi) = \frac{1}{2}\,\mathbf{V}_1^2 + \varphi\,, \tag{23а}$$

$$h(\eta) = \frac{1}{2}\,\mathbf{V}_2^2 + \varphi\,. \tag{23б}$$

Выражая отсюда "кинетическую энергию" $(1/2)\mathbf{V}_{1,2}^2$ и подставляя ее в уравнения (22а), (22б), получим условия

[6] Метод отображения плоских движений на комплексную плоскость использовал, как известно [8], Болин, ограничиваясь, однако, рассмотрением только таких решений ньютонова уравнения, которые подчиняются закону площадей, чего мы постараемся избежать.

совместности для уравнений каждой системы

$$h(\xi)\,\frac{\partial g}{\partial \xi}=\frac{\partial(g\varphi)}{\partial \xi}\,, \tag{24а}$$

$$h(\eta)\,\frac{\partial g}{\partial \eta}=\frac{\partial(g\varphi)}{\partial \eta}\,, \tag{24б}$$

которые есть не что иное, как условия интегрируемости уравнения (10) в рамках принятых ограничений.

Это и есть те основные уравнения, изображения которых нужно получить теперь на комплексной плоскости W.

4. Движения с нулевым гамильтонианом. Мультипликативные потенциалы и гиперэллиптические движения

С точки зрения перехода на комплексную плоскость W уравнения (24а), (24б) обладают необходимой симметрией, и главным здесь является то, что в правых частях уравнений дифференцируется произведение неизвестной функции g и заданной функции φ. Именно это составляет предпосылку, необходимую для того, чтобы связать потенциал φ с функцией W на комплексной плоскости W и отобразить там ортогональные семейства траекторий плоских движений.

Это возможно благодаря тому обстоятельству, что все входящие в уравнения (24а), (24б) величины выражаются через функцию W.

В самом деле, во-первых, в силу формул (14), (17) квадрат расстояния от начала до любой точки на плоскости выражается формулой

$$r_0^2=W\overline{W}\,, \tag{25}$$

где, как и везде далее, чертой над символом обозначена операция комплексного сопряжения. Во-вторых, квадрат расстояния от точки с декартовыми координатами (a_1, a_2) до любой другой точки на плоскости также выражается через неизвестную функцию W:

$$r^2=(W-a)(\overline{W}-\bar{a})\,, \tag{26}$$

где $a=a_1+\mathrm{i}a_2$.

Далее, $g_{\eta\eta}$ и $g_{\xi\xi}$ по определению есть не что иное, как

$$\begin{aligned} g_{\eta\eta}&=\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2,\\ g_{\xi\xi}&=\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2. \end{aligned} \tag{27}$$

В частности, видно, что условие (12) эквивалентно условиям Коши – Римана (16).

Производную первого порядка на комплексной плоскости θ от искомой функции можно представить в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} W'&=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\partial x_1}{\partial \eta}+\mathrm{i}\,\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\,,\\ W'&=\mathrm{i}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}+\mathrm{i}\,\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Из сравнения (27) и (28) заключаем, что

$$g=W'\overline{W}'\,. \tag{29}$$

Соотношение (26) позволяет связать также известную функцию φ с неизвестной функцией W.

Если центр сил смещен относительно начала, то φ есть функция расстояния r:

$$\varphi=\pm F(r)\,,$$

где F — заданная условиями задачи, вообще говоря, произвольная функция.

Поскольку r связано с W формулой (26), то имеем отсюда

$$\varphi=\pm F\left(\sqrt{W-a}\,\sqrt{\overline{W}-\bar{a}}\right), \tag{30}$$

где a может принимать и нулевое значение, если центр внешних сил совпадает с началом.

Замечаем, что величины, относящиеся к геометрическим характеристикам траекторий относительно начала (25), (29) и центра сил (26), выражаются факторизированными формулами с комплексно сопряженными сомножителями.

Предъявим к потенциальной функции аналогичное требование

$$\varphi=\pm F\left(\sqrt{W-a}\right)F\left(\sqrt{\overline{W}-\bar{a}}\right)=\pm F\overline{F}\,, \tag{31}$$

которое, конечно, накладывает серьезные ограничения на аналитический вид потенциалов, но зато предлагает очень простой способ перехода на комплексную плоскость.

Вместе с тем наиболее интересный случай степенны́х функций удовлетворяет введенному требованию, благодаря которому мы можем записать

$$g\varphi=\pm Z\overline{Z}\,, \tag{32}$$

где

$$Z=FW'\,.$$

Рассмотрим сначала самый простой случай движений с нулевым гамильтонианом.

В.И. Арнольд, обобщив в [8] теорему Болина о своеобразной двойственности законов притяжения по Ньютону и Гуку, получил функцию W, в частности, и для этого случая. Нужно сказать, что в доказательстве теоремы Болина существенная роль принадлежит закону площадей и алгебраическим свойствам функции Жуковского, в связи с чем возникают ненужные ограничения, без которых можно обойтись, применяя более систематический метод. Это всегда очень важно, поскольку в противном случае в теоремах могут возникнуть исключения, на которые мы обратим внимание ниже.

Из формул (11) явствует, что движения с нулевым гамильтонианом достигаются только в случае отрицательных потенциалов, которые, следовательно, при отрицательных степенях соответствуют силам притяжения, а при положительных — силам отталкивания.

Переход на комплексную плоскость W от уравнений (24а), (24б), когда в их левых частях стоят нули ($h(\xi)=0$, $h(\eta)=0$), при том, что $\partial g/\partial\xi, \partial g/\partial\eta\neq 0$, не требует больших усилий и приводит, как и должно быть, к одному и тому же уравнению для обоих видов движений:

$$FW'=C\,, \tag{33}$$

где C — константа.

В случае отсутствия внешних сил ($F = \text{const}$) уравнение (33) дает решения

$$W = C\theta \qquad (C = C_1 + \mathrm{i}C_2) \tag{34}$$

с постоянными значениями g, и уравнения (24а), (24б) удовлетворяются при произвольных ненулевых значениях гамильтониана.

Поскольку из формулы (34) следует, что

$$x_1 = C_1\eta + C_2\xi\,, \qquad x_2 = C_2\eta - C_1\xi\,,$$

то геодезическими пустого пространства являются два взаимно ортогональных семейства прямолинейных траекторий. При фиксированном ненулевом уровне энергии точка движется по ним с постоянной скоростью. Следовательно, галилеев закон инерции содержится в вихревом уравнении движения.

Перейдем теперь к движениям с нулевым гамильтонианом и $g \neq \text{const}$.

Для степенны́х и нормированных потенциальных функций с силовым центром в начале

$$\varphi = -r_0^{\alpha}\,,$$

где α — любое вещественное число, согласно формуле (25) имеем

$$F = W^{\alpha/2}\,.$$

Отсюда, принимая $(1+\alpha/2)C$ в (33) за единицу, получим уравнение

$$W^{\alpha/2}\,\mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha/2}\,,$$

откуда для $\alpha \neq -2$ имеем

$$W = \theta^{2/\alpha+2}\,. \tag{35}$$

Для $\alpha = -2$ находим отдельно

$$W = \exp\theta\,. \tag{36}$$

Отметим, что это как раз то "исключение", которое появляется в теореме Болина – Арнольда для движений с нулевым гамильтонианом в поле сил центрального типа со степенной зависимостью потенциала от расстояний [8] и которое включается, таким образом, в общую схему благодаря более систематическому подходу к интегрированию уравнения движения и притом вихревого типа.

Дальнейший ход интегрирования сводится к квадратурам и в принципе ничем не отличается от интегрирования прямолинейных движений.

Покажем его на примере движений по геодезическим $\xi = \text{const}$ (случай (а)).

Поскольку

$$V_1 \equiv \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{g}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\,, \tag{37а}$$

где s — натуральный параметр (длина дуги траектории), то, обращаясь к формуле (22а), имеем отсюда равенство

$$V_1 = \sqrt{\frac{2g\,(\partial\varphi/\partial\xi)}{\partial g/\partial\xi}}\,, \tag{38а}$$

в котором g вычисляется из (29).

Подставив (38а) в (37а) и интегрируя по переменной η (ξ — фиксированный параметр), получим уравнение по определению времени движения в зависимости от текущего значения этой координаты:

$$t = \int \sqrt{\frac{2\,(\partial\varphi/\partial\xi)}{\partial g/\partial\xi}}\,\mathrm{d}\eta + C_1\,,$$

где константа C_1 определяется начальными условиями.

Проанализируем формулу (35) для сил притяжения ($\alpha < 0$).

Для ньютонова потенциала ($\alpha = -1$) имеем, как и должно быть, ортогональные семейства конфокальных парабол, так как

$$W = \theta^2 \quad (x_1 = \eta^2 - \xi^2\,,\ x_2 = 2\eta\xi)\,.$$

Вообще, функция W осуществляет вызванное действием внешних сил конформное отображение плоскости θ, в результате которого прямолинейные геодезические пустого пространства (координатные линии плоскости θ) преобразуются в криволинейные (и не обязательно бесконечные) плоские геодезические евклидова пространства (координатные линии плоскости W) с помещенным туда потенциалом φ.

Далее, можно заметить, что для $\alpha \in [0, -2)$ движения остаются, как и должно быть в этом случае, инфинитными, и бесконечно удаленные точки плоскости θ на плоскости W остаются также бесконечно удаленными. Падение на центр по прямолинейным траекториям осуществляется по геодезическим $\eta = 0$ и $\xi = 0$ (вырождение параболы в луч). С приближением степени α к значению -2 "параболы" сплющиваются, и для $\alpha = -2$ мы имеем предельную формулу (36), где

$$g = \exp 2\eta \qquad (x_1 = \exp\eta\cos\xi\,,\ x_2 = \exp\eta\sin\xi)\,.$$

Поскольку здесь $\partial g/\partial\xi = 0$, то движения с нулевым гамильтонианом осуществляются только по лучам $\eta = \text{const}$ с падением на центр ("параболы" окончательно сплющиваются в лучи при любых, а не только нулевых значениях параметра ξ).

Для $\alpha \in (-2, -\infty]$ все криволинейные траектории становятся финитными с падением на центр. Инфинитными остаются лишь прямолинейные траектории с падением на центр по лучам (их образами на плоскости θ всегда остаются геодезические, проходящие через ее начало), и о них мы больше говорить не будем.

Для финитных движений, замыкающихся в силовом полюсе (нулевая точка плоскости W), образом бесконечно удаленных точек плоскости θ становится начало плоскости W. Для отрицательных целых степеней ($\alpha < -2$) в поведении этих траекторий можно наблюдать следующие закономерности.

Для $\alpha = -3$ семейства траекторий представляют собой, как уже говорилось, замкнутые на центр кривые, по форме близкие к кардиоидам.

Случай $\alpha = -4$ соответствует теореме Ньютона о силе притяжения, обратно пропорциональной пятой степени расстояния, когда семейства траекторий состоят из окружностей, касающихся силового центра [5, 8].

При дальнейшем уменьшении α в формуле (35) появляются дробные степени. В соответствии с этим у траекторий будет наблюдаться несколько замкнутых на центр ветвей, которые с ростом их количества будут постепенно "сплющиваться". Однако (если падения на центр считать упругим ударом) движения здесь будут

оставаться по-прежнему периодическими. Лишь для нецелых α из интервала $\alpha \in (-2, -\infty]$ движения, оставаясь финитными, не будут периодическими и за бесконечный промежуток времени всюду плотно заполнят круговую область вокруг силового полюса.

Рассмотрим теперь дополнительные возможности метода, которые предлагаются им вследствие того, что он не апеллирует к закону площадей.

Потенциалы, которые не связаны с этим законом, но по-прежнему удовлетворяют необходимому здесь условию (31) и зависят только от расстояний, могут строиться как *произведение* сразу нескольких потенциалов центрального типа со сдвинутыми друг относительно друга полюсами. Поэтому мы будем называть такие потенциалы "мультипликативными". Рассмотрим один такой пример с двумя центрами:

$$\varphi = -\frac{1}{(r_1 r_2)^m}\,, \tag{39}$$

где $r_{1,2}$ — расстояния до любой точки на плоскости от двух силовых полюсов, сопряженных друг с другом условием зеркальной симметрии их координат относительно начала, $m > 0$.

Положим m равным единице, а сами сопряженные центры поместим на оси Ox_1 на расстояниях a справа и слева от начала. Изображением потенциала (39) на плоскости W будет функция

$$F = \frac{1}{\sqrt{W^2 - a^2}}\,.$$

Полагая константу C в уравнении (33) для удобства мнимой: $C = \mathrm{i}/a$, в результате интегрирования получим

$$\arccos\frac{W}{a} = \theta\,,$$

или, окончательно,

$$W = a\cos\theta\,. \tag{40}$$

Отсюда заключаем, что "мультипликативный потенциал" сил притяжения (39) с $m = 1$ и с центрами сил в двух фокусах эллипса $(-a, a)$ способен поддерживать движение материальной точки с нулевым уровнем энергии по эллиптическим траекториям (вопросы устойчивости орбит по Ляпунову мы здесь не рассматриваем).

Вследствие того, что потенциалы подобного типа нельзя отнести к центральным, этот вывод не вступает в противоречие с известной теоремой Бертрана [9], которая гласит, что из всех центральных потенциалов только два имеют отношение к эллиптическим движениям: потенциалы Ньютона и Гука.

На рисунке 1 изображены семейства траекторий движения точки, которые предлагаются аналитическими свойствами функции (40), так как декартовы координаты точки в соответствии с формулами (17) и (40) выражаются уравнениями

$$x_1 = a\cos\eta\cosh\xi\,, \qquad x_2 = -a\sin\eta\sinh\xi\,,$$

откуда видно, что геодезические $\xi = \mathrm{const}$ есть эллипсы.

На рисунке введены следующие обозначения:

$$u_1 = \cos\eta\,, \qquad u_2 = \cosh\xi\,,$$

$$\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\eta}_0\,, \qquad \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\xi}_0\,, \qquad r_{1,2} = a(u_2 \pm u_1)\,.$$

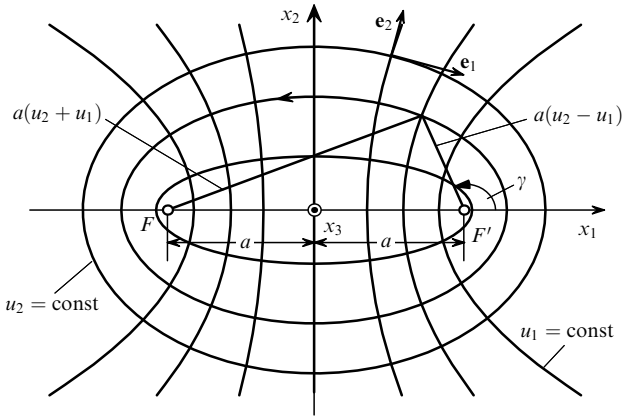

Рис. 1. Семейства траекторий движения, отображаемых аналитической функцией $W = a\cos\theta$.

Угол γ (истинная аномалия) с эксцентрической аномалией η связан известной [10] формулой

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\frac{\eta}{2}\,,$$

где e — эксцентриситет ($e = u_2^{-1}$).

Положим теперь в формуле (39) и уравнении (33) $m = 2$ и $C = -\mathrm{i}/a$. Интегрируя (33), получим

$$W = a\tan\theta\,.$$

Разделив здесь вещественную и мнимую части, можно показать, что один вид движений с нулевым гамильтонианом в поле сил с потенциалом (39) при $m = 2$ сводится к замкнутым финитным движениям без падения на центр, которые осуществляются по окружностям $u_2 = \mathrm{const}$ ($\xi = \mathrm{const}$) биполярной системы координат [11] (рис. 2). Принятые на рис. 2 обозначения те же, что и на рис. 1, с той только разницей, что здесь $\gamma = \eta$. Из рисунка видно, что для рассматриваемого вида движений один из силовых полюсов по отношению к этим окружностям всегда является внешним, и движения осуществляются вокруг второго, но с нарушением центральной симметрии.

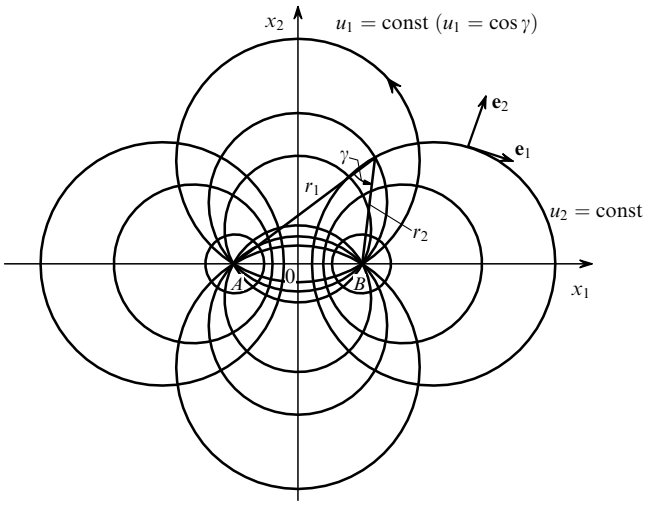

Рис. 2. Семейства траекторий движения, отображаемых аналитической функцией $W = a\tan\theta$.

Движения второго вида протекают по окружностям $u_1 = \text{const}$ ($\eta = \text{const}$) с двойным касанием полюсов (см. рис. 2). Нетрудно показать, что, как и должно быть (в силу упоминавшейся выше теоремы Ньютона), по отношению к этому виду движений "мультипликативный потенциал" (39) и центральный потенциал $\varphi = -r_{1,2}^{-4}$ взаимозаменяемы.

Наконец, приведем еще один интегрируемый пример подобного рода с двумя парами сопряженных силовых центров, причем координаты второй пары полюсов $(-b, b)$ совмещаем также с осью Ox_1 и полагаем $b > a$. Изображение потенциала

$$\varphi = -\frac{1}{r_1 r_2 r_3 r_4}\,, \tag{41}$$

все особенности которого интегрируемы, на комплексной плоскости W будет иметь вид

$$F = \frac{1}{\sqrt{(W^2 - a^2)(W^2 - b^2)}}\,.$$

Введением параметра $k = a/b$ уравнение (33) приводится к виду

$$\frac{\mathrm{d}w}{b\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}} = C\,\mathrm{d}\theta \qquad \left(w = \frac{W}{a}\right).$$

Полагая здесь $C = 1/b$ и интегрируя, мы получим эллиптический интеграл первого рода

$$\theta = \int_0^w \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}\,,$$

обращение которого и дает выражение для искомой функции через эллиптическую функцию Якоби:

$$W = a\,\mathrm{sn}\,(\theta, k)\,. \tag{42}$$

Можно показать, что согласно свойствам функции (42) (детали соответствующего конформного отображения имеются в книге Г. Бейтмена и А. Эрдейи [12]) прямые геодезические пустого пространства с появлением в нем потенциала (41) превращаются для движений с нулевым гамильтонианом в дважды ортогональную систему конфокальных бициркулярных кривых четвертого порядка.

Необходимо подчеркнуть, что эллиптическая функция (42) отображает отнюдь не эллиптические, как это характерно для тригонометрической функции (40), но уже гиперэллиптические и притом периодические движения.

Нетрудно догадаться, что системный подход к интегрированию вихревого уравнения движения (10) теоретически может дать здесь неограниченное число примеров движений подобного рода в силовом поле "мультипликативных потенциалов" (с интегрируемыми особенностями в полюсах):

$$\varphi = -\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{1i}\, r_{2i}}\,,$$

где r_{1i}, r_{2i} — расстояния до точки от двух силовых центров i-й пары сопряженных силовых полюсов, N — количество этих пар.

Очевидно, что функция W может возникнуть здесь при обращении "нормализованных" гиперэллиптических интегралов:

$$\theta = \int_0^w \left[(1 - x^2)\prod_{i=1}^{N-1}(1 - k_i^2 x^2)\right]^{-1/2} \mathrm{d}x\,, \tag{43}$$

где $k_i = a/b_i, (-a, a), (-b_i, b_i)$ — соответственно координаты ближайшей к общему центру пары и i-й по счету пары полюсов. Причем для случая произвольной угловой ориентации осей сопряженных пар силовых центров относительно оси Ox_1 их координаты b_i могут принимать здесь и комплексные значения.

Обращение интеграла (43) эквивалентно использованию обобщенных функций Якоби, которые будут зависеть уже не от одного параметра (модуля) k, как это имеет место для обычных эллиптических функций в формуле (42), а сразу от нескольких k_i. Интересно отметить, что обобщенные "гиперэллиптические функции" подобного рода (по аналогии с рассмотренным выше примером) могут отобразить "гиперэллиптические движения" по геодезическим, имеющим форму полициркулярных кривых порядка, большего четырех. Поэтому стоит обратить внимание на существование связи движений в поле сил "мультипликативного" и центрального типов, которая обнаруживается вследствие того, что функция (40), полученная здесь для движений с нулевым гамильтонианом и в поле сил "мультипликативного типа", является одновременно решением для движений с ненулевым уровнем энергии в поле сил тяготения и упругости.

5. Движения с ненулевым уровнем энергии. Теорема Бертрана

Интегрирование уравнения (10) для $H \neq 0$ предполагает ту же, что и ранее, последовательность действий, первый и главный этап которой связан с определением функции W из условий интегрируемости (24а) и (24б).

Представим их в следующем виде:

$$h(\xi) = \frac{\partial(g\varphi)/\partial\xi}{\partial g/\partial\xi}\,, \tag{44а}$$

$$h(\eta) = \frac{\partial(g\varphi)/\partial\eta}{\partial g/\partial\eta}\,. \tag{44б}$$

Затем используем то обстоятельство, что движения по геодезическим $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ сопровождаются сохранением полной энергии, что можно выразить уравнениями

$$\frac{\partial h(\xi)}{\partial\eta} = 0\,, \qquad \frac{\partial h(\eta)}{\partial\xi} = 0\,.$$

Подставляя сюда правые части равенств (44а), (44б) и переходя к дифференцированию на комплексных плоскостях W и $\overline{W}$ по переменным θ и $\bar{\theta}$ соответственно, благодаря равенству (32), а также в силу того, что

$$\frac{\partial g}{\partial\xi} = \mathrm{i}(\overline{W}'W'' - W'\overline{W}'') \neq 0\,,$$

$$\frac{\partial g}{\partial\eta} = (\overline{W}'W'' + W'\overline{W}'') \neq 0\,,$$

получим следующие уравнения:

$$\pm\left\{\frac{(\overline{Z}Z''-Z\overline{Z}'')}{(\overline{W}'W''-W'\overline{W}'')}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\overline{Z}Z'-Z\overline{Z}')}{(\overline{W}'W''-W'\overline{W}'')^2}(\overline{W}'W'''-W'\overline{W}''')\right\}=0\,, \quad (45а)$$

$$\pm\,\mathrm{i}\left\{\frac{(\overline{Z}Z''-Z\overline{Z}'')}{(\overline{W}'W''+W'\overline{W}'')}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\overline{Z}Z'+Z\overline{Z}')}{(\overline{W}'W''+W'\overline{W}'')^2}(\overline{W}'W'''-W'\overline{W}''')\right\}=0\,. \quad (45б)$$

Из них вытекает, что общим для обоих связанных между собой движений условием их существования является условие совместности решений двух уравнений:

$$\overline{Z}Z''-Z\overline{Z}''=0\,, \quad (46)$$

$$\overline{W}'W'''-W'\overline{W}'''=0\,. \quad (47)$$

Следовательно, в условиях принятых ранее ограничений перейти на комплексную плоскость W мы могли бы, отталкиваясь именно от них.

Рассмотрим сначала второе из них, поскольку оно никак не связано с внешними силами, но зато сразу же накладывает ограничения на геометрическую форму возможных здесь траекторий.

Структура уравнения (47) ясно показывает, что оно тождественно удовлетворится только в том случае, если

$$W'=a\mu'(\lambda,\theta)\,,$$

$$W'''=\frac{a}{\lambda^2}\,\mu'''(\lambda,\theta)\,,$$

при том, что функция μ есть **одно** из частных решений уравнения

$$\mu''+\lambda^2\mu=0\,, \quad (48)$$

где a и λ — некоторые константы. Причем нет никакого смысла в том, чтобы в качестве последней принять какое-либо другое число, кроме единицы, поскольку в противном случае частное решение уравнения (48)

$$\mu=\cos(\lambda\theta)$$

все равно приводится к виду

$$\mu=\cos\theta$$

простой калибровкой переменной, вещественная часть которой никак не связана вначале с какой-то угловой координатой $\gamma\in[0,2\pi]$.

Итак, мы видим, что для движений с ненулевым уровнем энергии принятое ранее ограничение (12) ведет к тому, что любые другие *криволинейные* движения, кроме эллиптических ($\xi=\mathrm{const}$) и гиперболических ($\eta=\mathrm{const}$), вообще исключаются[7].

Легко видеть, что структурно уравнения (46) и (47) совершенно аналогичны. Поэтому, переходя на комплексную плоскость W, для решений уравнения (46) принимаем те же подстановки:

$$Z\equiv FW'=q\zeta(\sigma,\theta)\,,$$
$$Z''=\frac{q}{\sigma^2}\,\zeta''(\sigma,\theta)\,, \quad (49)$$

где q — некоторая константа, а ζ — *одно* из частных решений уравнения

$$\zeta''+\sigma^2\zeta=0\,.$$

Иными словами, в качестве функции ζ мы можем взять либо

$$\zeta=\cos\sigma\theta\,, \quad (50)$$

либо

$$\zeta=\sin\sigma\theta\,, \quad (50')$$

и сделанный выбор, как и определение константы σ, должен проводиться единственно возможным образом из уравнения (49), поскольку левая его часть содержит в себе изображение потенциальной функции F.

Вместе с тем мы уже выяснили, что функция W есть не что иное, как $a\cos\theta$. Это возникшее из уравнения (47) ограничение накладывает свои и вполне определенные уравнением (49) условия для отбора возможных здесь сочетаний функций ζ и F. В самом деле, из всего сказанного следует, что уравнение (49) можно теперь представить в виде

$$-aF\sin\theta=q\zeta(\sigma,\theta)\,. \quad (51)$$

Отсюда и из соотношений (50), (50′) следует, что в качестве функции F мы можем взять только такую *тригонометрическую* функцию, умножение которой на $\sin\theta$ в соответствии с правилами тригонометрии имело бы своим продуктом правую часть (50) или (50′) с тем или иным возможным здесь значением σ.

Мы видим, что ограничения и, следовательно, механизм выбора функции F, поддерживающей эллиптические и гиперболические движения с отличным от нуля уровнем энергии, связаны здесь исключительно с правилами преобразований тригонометрических функций, т.е., говоря иначе, с элементарными действиями, что, с методической точки зрения, является несомненным успехом метода.

После сделанных замечаний нетрудно установить, что существуют вообще только три тригонометрических функции F, способных удовлетворить уравнению (51) с правой частью в виде функций (50) или (50′). Две из них связаны с ньютоновым потенциалом (имеющим полюсы в двух фокусах эллипса):

$$F_1=\frac{1}{\sqrt{W-a}}=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{a}\,\sqrt{1-\cos\theta}}=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2a}\,\sin(\theta/2)}\,,$$

$$F_2=\frac{1}{\sqrt{W+a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}\,\cos(\theta/2)}\,,$$

и для них из уравнения (51) имеем

$$q_1=\mathrm{i}\sqrt{2a}\,,\qquad \zeta_1=\cos\frac{\theta}{2}\,,\qquad \sigma=\frac{1}{2}\,,$$

$$q_2=-\sqrt{2a}\,,\qquad \zeta_2=\sin\frac{\theta}{2}\,,\qquad \sigma=\frac{1}{2}\,.$$

Третья функция, как нетрудно догадаться, есть не что иное, как изображение потенциала Гука для сил

[7] Уравнение (48) не исключает тривиального случая прямолинейных движений с падением на центр, если принять $\lambda^2=-1$, но их мы в расчет не берем.

упругости:

$$F_3 \equiv W = a\cos\theta\,, \qquad q_3 = -\frac{a^2}{2}\,, \qquad \zeta_3 = \sin 2\theta\,, \qquad \sigma = 2\,.$$

Таким образом, используя вихревую форму уравнения движения, мы доказали известную и уже упомянутую выше теорему Бертрана, так как никакие другие функции F, кроме указанных, не в состоянии удовлетворить тригонометрическому уравнению (49) ни при каких значениях параметра σ, за исключением $\sigma = 1/2, 2$.

Если сравнить приведенное доказательство с тем, которое принадлежит Альфену и воспроизводится в [9] и которое занимает там несколько страниц текста, то (не говоря уже о критерии простоты) доказательство, предлагаемое вихревым уравнением движения, явно выигрывает в лаконичности.

Наконец, в качестве еще одной иллюстрации применимости метода рассмотрим один частный случай периодического движения точки в поле двух неподвижных гравитирующих центров.

Впервые общую задачу определения движений точки в поле сил такого рода рассмотрел Эйлер, а затем более полно Лежандр [13]. Согласно классификации К. Шарлье [13], движение, которое мы рассмотрим, относится к периодическим "планетным движениям". Эти движения, в отличие от периодических "спутниковых движений" (примером которых могут служить показанные на рис. 2 движения по геодезическим $u_2 = \mathrm{const}$), охватывают оба притягивающих центра и протекают по эллиптическим орбитам.

С практической точки зрения эта задача представляет интерес, например, при учете влияния сплюснутости Земли на движение искусственных спутников [5]. Другие практически полезные примеры использования этой задачи в небесной механике указаны в книге К. Шарлье [13].

Самая важная, начальная стадия интегрирования вихревого уравнения движения и в этом случае сводится к элементарным тригонометрическим действиям. Действительно, сначала нужно доказать, что движения будут эллиптическими, при этом, однако, они не будут подчиняться второму закону Кеплера, что выясняется потом при интегрировании формулы (38а).

Для решения первой задачи нужно вновь обратиться к условиям интегрируемости (44а) и (44б), подставив в них потенциальную функцию вида

$$\varphi = -\frac{p_1}{r_1} - \frac{p_2}{r_2}\,, \tag{52}$$

где $p_{1,2} = GM_{1,2}$, $M_{1,2}$ — массы двух тяготеющих центров в фокусах эллипсов (см. рис. 1), G — гравитационная постоянная.

Входящая в (44а), (44б) величина $g\varphi$ имеет здесь форму

$$g\varphi = -(Z_1\overline{Z}_1 + Z_2\overline{Z}_2)\,,$$

где

$$Z_{1,2} = F_{1,2}W'\,,$$

а $F_{1,2}$ — изображения ньютоновых потенциалов тяготеющих полюсов

$$F_{1,2} = \sqrt{\frac{p_{1,2}}{W \pm a}}\,.$$

Можно показать, что результат дифференцирования уравнений (44а), (44б) на комплексной плоскости опять сводится к условиям совместности решений двух на этот раз следующих уравнений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1,2}(\overline{Z}_i Z_i'' - Z_i\overline{Z}_i'') = 0\,,\\ \overline{W}'W''' - W'\overline{W}''' = 0\,,\end{gathered} \tag{46*}$$

отличающихся от (46) и (47) только первым.

Для периодических "планетных движений" ($W = a\cos\theta$) имеем

$$Z_1 = F_1W' = -\sqrt{2ap_1}\,\sin\frac{\theta}{2}\,,$$

$$Z_2 = F_2W' = \mathrm{i}\sqrt{2ap_2}\,\cos\frac{\theta}{2}\,.$$

Уравнение (46*) для этого вида движений удовлетворится вследствие того, что каждое из слагаемых обращается в нуль по отдельности, что и требовалось показать.

6. Заключение

Кратко резюмируем основные результаты работы и укажем на вероятные перспективы их развития.

Прежде всего, в отношении теоретической обоснованности привлечения уравнения Эйлера к исследованию движений точечных объектов можно сказать следующее.

Тот факт, что оно (речь идет о левой кинетической части уравнения) представляет собой предельную форму пространственноподобной части некоторого 4-вектора, образованного в результате релятивистски инвариантных действий над 4-вектором плотности импульса, который обладает непосредственным физическим смыслом, вносит сюда, по нашему мнению, определенную ясность. Другое дело, что при этом нужно учитывать то, что реальные объекты отнюдь не являются точечными. И здесь еще остаются вопросы, например, в отношении того, какой вклад в их инерцию и при каких условиях будет вносить пространственная неравномерность распределения плотности массы по объему. Это же относится и к учету эффектов, связанных с тем, что реальные твердые тела отнюдь не являются абсолютно твердыми, и т.п.

Вообще, континуальная форма уравнения движения "субстанции" как исходная форма уравнения движения объектов с конечным и не обязательно постоянным объемом в состоянии сообщить проблематике подобного рода некоторый импульс. Проблемы такого рода и именно с привлечением континуальных методов, но применительно к лагранжевой и гамильтоновой механике, уже рассматривались, например, в [14].

Относительно направленности в целом и конкретных результатов работы, в частности, нужно сказать следующее.

По направлению идей ее нельзя отнести прямо к тем работам, где прослеживается гидродинамика гамильтоновых систем ни в узком, ни в широком смысле (вариационное исчисление). Это видно уже из того, что работа посвящена развитию не вихревых, а потенциальных методов интегрирования и оперирует непосредственно с уравнением Эйлера как с основным уравнением движения. Поэтому можно даже сказать, что она находится в некоторой оппозиции к методам гамильтоновой

механики, но только в том смысле, что там гидродинамические уравнения отнюдь не являются основными [1, 2]. В целом же, конечно, дело сводится к тому, какого рода удобства и где предлагаются тем или иным методом. В этом смысле разультаты нашей работы, относясь к достаточно узкой области исследований, показывают, однако, что по крайней мере здесь, в этой узкой области, прямое интегрирование уравнения Эйлера кое-что дает.

В связи с этим возникает другой горизонт сравнений, так как прямым интегрированием эйлерова уравнения в стационарном случае занимается собственно гидродинамика стационарных течений.

Сравнения такого рода показывают, что из-за существующей разницы в предметах описания возникают существенные различия как в методологии, так и в физической интерпретации результатов.

А именно, в отличие от гидродинамики, где предметом исследований является *реально* существующее поле скоростей жидкости и где вдобавок всегда имеется давление, интегрирование эйлерова уравнения применительно к исследованию движений точечных объектов (давление "выключено") предлагает решением функцию W. Ее областью определения является *вся* плоскость движения объекта, который сам не занимает никакого объема. Благодаря этому функция W отображает не реальные движения, а всюду плотные бесконечные семейства *виртуальных* траекторий, которые обретают реальность в результате "редукции", наступающей сразу после указания конкретных предельных условий движения в пространстве и времени.

Отметим, что независимо от объекта сравнений удобство и простота выражения основных закономерностей движений материальной точки возникают здесь прежде всего потому, что применительно к вихревому уравнению движения удается сформулировать потенциальный метод интегрирования в *инвариантной* редакции. Правда, пока это относится к определенному классу движений, в который отнюдь не входят финитные незамкнутые траектории с ненулевым уровнем энергии. Зато сюда включаются и притом систематическим образом движения, поддерживаемые "мультипликативными потенциалами". Очень важно подчеркнуть, что все эти движения в принципе интегрируемы и могли бы быть представлены в терминах обобщенных гиперэллиптических функций, которые возможно получить в результате обращения соответствующих им абелевых интегралов.

Совокупный методический смысл работы можно свести к заключению, что именно вихревая форма уравнения движения позволяет выдвинуть инвариантную редакцию для потенциальных методов интегрирования движений точечных объектов.

Вот, что говорит об этом В.И. Арнольд в своей книге [5], имея в виду также потенциальный по своей природе метод Гамильтона – Якоби, корни которого связаны, как известно, с невихревой формой уравнения движения.

"Переходя к аппарату производящих функций, замечу, что он удручающе неинвариантен и существенно использует координатную структуру в фазовом пространстве $\{(P, Q)\}$. В соответствии с этим приходится пользоваться аппаратом частных производных, а это такой объект, в само́м обозначении которого уже кроется двусмысленность".

Переход на комплексную плоскость, конечно, решает эту проблему, и метод здесь сам начинает заботиться о том, чтобы найти наиболее удобную систему координат, в чем и проявляет свою инвариантность. Но достигается это ценой использования условия (12), которое сужает класс рассматриваемых движений. Чтобы перейти к другим классам движений, оставаясь по-прежнему на позициях "вихревой теории", следует отказаться от условия (12). На то, что в принципе это возможно, указывает пример центрально-симметричных круговых движений, который, с одной стороны, уже не подчиняется условию (12), а с другой стороны — с точки зрения интегрирования уравнений (24а), (24б) является настолько элементарным, что не заслуживает отдельного внимания.

Список литературы

1. Аржаных И С *Поле импульсов* (Ташкент: Наука, 1965)
2. Козлов В В *Общая теория вихрей* (Сер. "Регулярная и хаотическая динамика", Т. 4) (Ижевск: Издат. дом "Удмуртский университет", 1998)
3. Аржаных И С *Опыт классификации математических исследований: Категории математического познания* (Ташкент: ФАН, 1982)
4. Морс Ф М, Фешбах Г *Методы теоретической физики* Т. 1 (М.: ИЛ, 1958)
5. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1989)
6. Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)
7. Картан Э *Интегральные инварианты* (М.-Л.: Гостехиздат, 1940)
8. Арнольд В И *Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук* (М.: Наука, 1989)
9. Аппель П *Теоретическая механика* Т. 1 (М.: Физматгиз, 1960)
10. Дубошин Г Н *Небесная механика. Основные задачи и методы* (М.: Физматгиз, 1963)
11. Корн Г, Корн Т *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1973)
12. Бейтмен Г, Эрдейи А *Высшие трансцендентные функции* Т. 3 (М.: Наука, 1967)
13. Шарлье К *Небесная механика* (М.: Наука, 1966)
14. Кильчевский Н А и др. *Аналитическая механика континуальных систем* (Киев: Наукова думка, 1979)

Invariant formulation of the potential integration method for the vortical equation of motion of a the material point

A.V. Kukushkin
Nizhniĭ Novgorod State Technical University,
ul. Minina 24, 603600 Nizhniĭ Novgorod, Russian Federation
Tel. (*7-8312*) *36-78 40. E-mail*: *andkir@sbrf.nnov.ru*

A relativistic procedure for deriving the kinetic part of the generalized Euler equation is proposed as an argument to justify the application of the vortical equation of motion to classical discrete dynamics problems. An invariant formulation of the potential integration method is given for a class of two-dimensional motions. To demonstrate the efficiency of the method, a number of well-known theorems of the dynamics of a material point are proved. A new result of the study is the fact that "hyperelliptic motions" at the zero-energy level are related to the field of "multiplicative" forces.

PACS numbers: **45.20.–d**, 45.50.Pk
Bibliography — 14 references *Received 10 January 2002, revised 15 May 2002*