Январь 2002 г. УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК *Том 172, № 1*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

К теории рассеяния света в газах

И.И. Собельман

Излагается история развития теории рассеяния света и теории дисперсии в газах от работ Рэлея, Планка, Мандельштама до работ Лорентца и Эйнштейна. Показывается, что фактически в центре внимания находилась проблема тепловых флуктуаций в среде. Дается вывод формулы для диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ в изотропных средах с учетом сил радиационного трения.

PACS numbers: **01.65.+g**, **03.80.+r**, **42.68.–w**, 94.10.Gb

Содержание

1. Введение

В начале XX века, т.е. примерно 100 лет назад, имела место полемика, касающаяся проблемы рассеяния света в газах. Отправным пунктом послужили работы Рэлея [1], который описал рассеяние света в атмосфере Земли, объяснил природу голубого цвета неба, получил из экспериментальных данных правильный порядок величины числа Лошмидта.

Эта работа была подвергнута критике Л.И. Мандельштамом (1907 г.), который, кроме работы Рэлея, затронул и работу Планка по теории дисперсии. Разгорелась полемика между Мандельштамом и Планком (1907–1908 гг.). Напоминание о ней представляется довольно поучительным.

Забегая вперед отмечу, что хотя Лорентц в полемике участия не принимал, но и он высказался по обсуждаемой проблеме (1910 г.). Он выполнил вычисления диэлектрической проницаемости газов $\varepsilon(\omega)$, которые привели его к результатам Планка и Рэлея (подробнее см. ниже в разделе 3).

Сегодня комментировать работы столетней давности, даже великих физиков, одновременно легко и трудно. Легко, так как многие сегодняшние азбучные истины были совершенно неизвестны тогда. Трудно, поскольку то, что относилось к центральным проблемам физики того времени, не актуально сегодня. Все может казаться тривиально простым. Это, в частности, относится к проблеме рассеяния света и теории дисперсии.

В обсуждении полемики Мандельштам–Планк я постараюсь быть предельно объективным. Я буду отмечать ошибки и погрешности, но при этом не упрощать трудности, которые стояли перед физиками 100 лет назад. Постараюсь также показать, что фактически спор между Мандельштамом и Планком шел не о частной проблеме рассеяния света. Это была полемика о том, может ли среда быть однородной, несмотря на тепловое движение молекул среды. Сегодня мы бы сказали, возможна ли среда без флуктуаций. Но в то время понятия флуктуаций, их неизбежности и универсальности не существовало. Работы Смолуховского и Эйнштейна появились позднее. В этом споре прав оказался Планк, хотя идею флуктуаций в явном виде он не использовал, но полученные им результаты оказались для рассеяния света в газах такими же, как если бы он вел все вычисления с учетом флуктуаций.

2. Формула Рэлея

Первое рассмотрение вопроса о рассеянии света в атмосфере Земли было сделано Рэлеем в конце XIX века [1]. Он предположил, что, поскольку молекулы участвуют в тепловом движении, они рассеивают некогерентно. Это позволяет просуммировать интенсивности рассеяния отдельными осцилляторами. Интенсивность рассеяния принято характеризовать коэффициентом экстинкции $h[\text{см}^{-1}]$, который в отсутствие истинного поглощения описывает ослабление интенсивности пучка света на пути L: $I(L) = I(o)\exp(-hL)$. Рэлей получил

$$h[\text{см}^{-1}] = \frac{8\pi}{3}\, k^4|\alpha|^2 N\,. \tag{1}$$

Здесь $k = \omega/c$; α — поляризуемость осциллятора, N — число осцилляторов в см^3. Поляризуемость α входит в простейшую формулу для диэлектрической проницаемости среды ε:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N\alpha\,.$$

И.И. Собельман. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
117924 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (095) 135-20-98
Факс (095) 135-24-08
E-mail: spic@sci.lebedev.ru

Статья поступила 8 октября 2001 г.

В газах вне области полос поглощения действительная часть $\alpha(\omega)$, а также $\varepsilon(\omega)$, много больше мнимой части. Это позволяет выразить (1) через $\varepsilon - 1 \cong 2(n-1)$, где n — показатель преломления. Окончательно формула Рэлея обычно записывается в виде

$$h = \frac{2}{3\pi}\,\frac{\omega^4}{c^4}\,\frac{(n-1)^2}{N}\,. \tag{2}$$

Основное положение работы Рэлея, а именно, что движение осцилляторов приводит к некогерентности их рассеяния, вызвало резкую критику со стороны Мандельштама [2]. Его аргументы сводились к следующему. Для видимого света длина волны λ имеет порядок величины 10^{-4} см. В то же время при $N \cong 10^{19}-10^{18}$ см$^{-3}$ (верхняя атмосфера Земли) среднее расстояние между молекулами $\bar{R} \cong 10^{-6}$ см. Таким образом, в объеме, меньшем λ^3, находится очень много молекул $\sim 10^6$. Отсюда Мандельштам заключил, что рассеяние составляющих среду частиц обусловливает световое поле одной и той же интенсивности и фазы, независимо от того, будут ли частицы находиться в покое или в движении. Последнее утверждение одновременно формулируется в более общих терминах: "оптически однородная среда не может рассеивать свет".

Последнее, несомненно, правильно. Но то, что при условии $\bar{R} \ll \lambda$ движение несущественно, неверно. В этом нетрудно убедиться. В поле $\mathbf{E} \propto \exp\left[-\mathrm{i}\omega t + \mathbf{kR}(t)\right]$ вынужденные колебания осциллятора содержат множитель $\exp\left[\mathrm{i}\mathbf{kR}(t)\right]$, где $\mathbf{R}(t)$ — координата осциллятора. Фаза $\mathbf{kR}(t)$ за время свободного пробега молекулы τ получает приращение $\mathbf{kv}\tau$, где $\mathbf{v}$ — скорость осциллятора. Но $v\tau = l$, где l — длина свободного пробега. Поэтому

$$\mathbf{kv}\tau \cong \frac{2\pi}{\lambda}\,l\,,$$

и вопрос о когерентности вынужденных колебаний осцилляторов среды надо решать, сравнивая λ не с $\bar{R}$, а с длиной свободного пробега l.

Но $l = 1/N\sigma$, где σ — упругое сечение. Для газов, составляющих атмосферу Земли, σ имеет порядок величины 3×10^{-16} см^2. Для оптического спектра $\lambda \cong 0{,}5\times 10^{-4}$ см и высот $H \geqslant 15$ км, $N \leqslant 4\times 10^{18}$ см$^{-3}$, имеем $l \geqslant 5\times 10^{-5}$ см, $l/\lambda \geqslant 1$ и случайные фазовые сдвиги $\mathbf{kv}\tau$ превышают 2π. Для более низких слоев атмосферы $H \sim 5-10$ км эти фазовые сдвиги все еще велики. Так, для $H = 6$ км имеем $2\pi l/\lambda = 1{,}75$. Приведенные оценки, основанные на модели атмосферы Земли [3], показывают, что, считая рассеяние молекулами верхней атмосферы некогерентными, Рэлей был прав.

Резюме этой части начавшейся полемики состоит в следующем:

1) критерием когерентности является соотношение между λ и l, а не λ и $\bar{R}$, как полагал Мандельштам;

2) считая возможным пренебречь движением молекул, т.е. рассматривая рассеяние средой, где молекулы покоятся, Мандельштам принял, что условие $\bar{R} \ll \lambda$ обеспечивает также однородность среды.

Приведу цитаты из работ Мандельштама [2, 4]:

"Воздух следует рассматривать как оптически однородную среду, ибо в кубе λ^3 содержится 5×10^6 молекул" [2, с. 116].

"Газы в обычных условиях (атмосферное давление) должны рассматриваться как оптически однородные тела" [4, с. 130].

Оба эти утверждения базируются на критерии $\bar{R} \ll \lambda$.

3. К теории дисперсии

Причем вообще микроскопическая теория дисперсии, если стоит вопрос о рассеянии света?

Можно двояко подходить к вычислению коэффициента экстинкции h[см$^{-1}$] для разреженных газов. Можно отправляться от вычислений интенсивности рассеяния и эффективного сечения рассеяния частицами среды $\sigma_{\text{расс}}$ или исходить из определения h через диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$:

$$h = \sigma_{\text{расс}}\,N = \frac{8\pi}{3}\,k^4|\alpha|^2 N\,, \tag{3}$$

или

$$h = \frac{\omega}{c}\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)\ldots \tag{4}$$

Различие этих формул в следующем: в (3) на α никаких дополнительных условий не накладывается. Если α комплексно, т.е. $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, то всегда (в газах вне области поглощения) $\alpha' \gg \alpha''$. Поэтому при вычислении $\sigma_{\text{расс}}$ можно положить α действительной величиной и получить правильный (количественно) результат, что использовано в (2).

Другое дело $\mathrm{Im}\,\varepsilon$. Центральным становится именно мнимость $\varepsilon(\omega)$ и причины, которые величину этой мнимости определяют, какой бы малой величина $\mathrm{Im}\,\varepsilon$ по сравнению с $\mathrm{Re}\,\varepsilon$ не была.

В своих работах по теории дисперсии [5] Планк показал, что в отсутствие диссипации ослабление проходящей световой волны определяется рассеянием и это приводит к мнимости диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$, которая определяется константой радиационного затухания $\gamma_{\text{рад}} = 2e^2\omega^2/3mc^3$. Это затухание вызывается торможением колебаний осциллятора его собственным радиационным полем $\mathbf{E} = (2/3c^3)\dddot{\mathbf{d}}$ (см. [6]), где $\mathbf{d}$ — дипольный момент осциллятора. В своих вычислениях Планк принимал постулат Рэлея о некогерентности рассеяния в атмосфере Земли. Именно этот результат Планка подвергся критике Мандельштама в работе [4, с. 125]: "Если рассматривать всю среду, включая и резонаторы, как оптически однородную, то в этом случае не следует ожидать никакого затухания вследствие рассеяния".

Таким образом, исходя из (4), надо провести вычисления $\varepsilon(\omega)$ с учетом действия на осцилляторы среды их радиационных полей. Интенсивность рассеяния (или его отсутствие) должны быть согласованы с величиной $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$. Эта связь вытекает из сравнения (3) и (4).

Приведу в качестве примера рассеяние на гармоническом осцилляторе. Вынужденные колебания даются уравнением для дипольного момента осциллятора $\mathbf{d}$:

$$\ddot{d} + \gamma\dot{\mathbf{d}} + \omega_0^2\mathbf{d} = \frac{e^2}{m}\left\{\mathbf{E}\exp(-\mathrm{i}\omega t) + \mathbf{E}^*\exp(\mathrm{i}\omega t)\right\}, \quad \mathbf{d} = e\mathbf{x}\,. \tag{5}$$

Здесь член $\gamma\dot{\mathbf{d}}$ описывает возможное затухание колебаний осциллятора, причем причины затухания никак не конкретизируются. Легко вычисляются поляризуемость $\alpha(\omega)$, полное сечение σ_{t}, определяемое работой поля над осциллятором, и сечение рассеяния $\sigma_{\text{расс}}$:

$$\alpha = \frac{e^2}{m}\,\frac{1}{-\omega^2+\omega_0^2-\mathrm{i}\omega\gamma}\,, \tag{6}$$

$$\sigma_{\mathrm{t}} = 4\pi k\,\mathrm{Im}\,\alpha\,, \tag{7}$$

$$\sigma_{\text{расс}} = \frac{8\pi}{3}\,k^4|\alpha|^2\,. \tag{8}$$

Здесь $k=\omega/c$. Поскольку в общем случае $\sigma_{\mathrm{t}} = \sigma_{\text{расс}} + \sigma_{\text{дис}}$, где $\sigma_{\text{дис}}$ — сечение диссипации, имеет место неравенство $\sigma_{\mathrm{t}} \geqslant \sigma_{\text{расс}}$,

$$\mathrm{Im}\,\alpha(\omega) \geqslant \frac{2}{3}\,k^3|\alpha|^2\,, \tag{9}$$

которое носит название оптической теоремы. Из (6), (9) следует

$$\gamma \geqslant \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}\,.$$

Правая часть этого неравенства и есть константа радиационного затухания (см. [6]):

$$\gamma_{\text{рад}} = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}\,. \tag{10}$$

Если диссипация отсутствует, то γ в (5) есть $\gamma=\gamma_{\text{рад}}$, т.е. затухание определяется только процессом рассеяния. Можно сказать и несколько иначе. Если осциллятор рассеивает, то константа затухания в (5) не может быть равна нулю: $\gamma \geqslant \gamma_{\text{рад}}$.

Видно, что определение h из (4) очень тонкий инструмент. Л.И. Мандельштам обратился именно к нему, т.е. решил предпринять вычисления $\varepsilon(\omega)$ и таким путем определить h. Но он подошел к реализации этой задачи, полагая, что условие $\bar{R} \ll \lambda$ гарантирует оптическую однородность среды. Напомним утверждение из работы [2]: "Воздух следует рассматривать как оптически однородную среду, ибо в кубе λ^3 содержится 5×10^6 молекул". Но раз так, то заранее предполагается, что вычисления $\varepsilon(\omega)$ в отсутствие диссипации дадут $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)=0$ и $h=0$.

Все это происходило во времена, когда полностью отсутствовало понимание роли флуктуаций, их универсальности и в ряде явлений их главнейшей роли. Над Мандельштамом довлела совершенно правильная идея, что однородная среда рассеивать не может. Он в споре с Рэлеем пытался воспользоваться неравенством $\bar{R} \ll \lambda$, чтобы фактически навязать среде однородность. В работе [2] он прежде всего говорит о несущественности движения, что им надо пренебречь и "остановить" осцилляторы, но вскользь упоминает, что среда при этом становится однородной. В дальнейшем утверждение об однородности среды становится основным. Но раз среда однородна, то $h=(\omega/c)\,\mathrm{Im}\,\varepsilon$ должно быть равно нулю.

Напротив, Планк, приняв вслед за Рэлеем, что рассеивают независимые осцилляторы (некогерентно), отправляясь от условия $h\neq0$, строит теорию дисперсии так, чтобы получить $\mathrm{Im}\,\varepsilon\neq0$ и чтобы это определялось наличием затухания с $\gamma=\gamma_{\text{рад}}$ из (10). Он тем самым неявно вводил флуктуации и притом правильно. Позднее, когда идея флуктуаций была осознана (Смолуховский, Эйнштейн), стало ясно, что в разреженных газах рассеяние определяется флуктуациями плотности или числа частиц, т.е. величиной $\overline{\Delta N^2}$. Но для идеального газа $\overline{\Delta N^2}=N$, т.е. точно получается то же самое, что дает рассмотрение рассеяния на отдельных частицах. Планк был обречен в дискуссии Мандельштам – Планк на получение правильного результата. Планк, по-видимому, чувствовал, что тепловое движение неминуемо нарушает однородность.

Мандельштам, исходя из утверждения об однородности среды, был обязан показать, что $\mathrm{Im}\,\varepsilon=0$ и что радиационное затухание в уравнении для осциллятора среды компенсируется присутствием соседей.

Отмечу (и это можно легко показать), что знаменитая формула Эйнштейна для рассеяния на флуктуациях плотности ρ и температуры T (1910 г.)

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left\{\rho T\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 + \frac{T^2}{\rho C_V}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2\right\}, \tag{11}$$

если перейти в ней к переменным P и S (давлению и энтропии, что, кстати, всегда делается при описании спектрального состава рассеянного света), для газов сильно упрощается и переходит в формулу Рэлея (2) (см. [7]) [1]

$$h = \frac{2\omega^4}{3\pi c^4}\,\frac{(n-1)^2}{N}\,.$$

После сказанного нет нужды излагать подробно работы Мандельштама и Планка по теории дисперсии (настолько довлела над Мандельштамом идея однородности среды). Отмечу только основные моменты.

В первой работе по теории дисперсии [4] (это полуфеноменологическая работа с элементами микроскопики) Мандельштам пишет уравнения Максвелла, где вектор индукции

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi N\mathbf{d}\,.$$

Для $\mathbf{d}(t)$ используется уравнение

$$\ddot{\mathbf{d}} + \omega_0^2\mathbf{d} - \frac{e^2}{m}\,\frac{2}{3c^3}\,\dddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\,\mathbf{E}'\,, \tag{12}$$

где $\mathbf{E}'$ есть напряженность поля, которое существовало бы в месте нахождения резонатора, если бы мы удалили соответствующий резонатор вместе с его полем. Планк называет $\mathbf{E}'$ "возбуждающей силой" [4]. Член, содержащий $\dddot{\mathbf{d}}$, ответствен за затухание вследствие радиационного трения. Поскольку затухание мало, для гармонических колебаний на частоте ω можно сделать замену

$$-\frac{e^2}{m}\,\frac{2}{3c^3}\,\dddot{\mathbf{d}} \cong \frac{2}{3}\,\frac{e^2\omega^2}{mc^3}\,\dot{\mathbf{d}} = \gamma_{\text{рад}}\dot{\mathbf{d}}\,.$$

У Планка

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\,N\mathbf{d}\,.$$

Вычисления Мандельштама и соответствующая аргументация дают [4]

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\,N\mathbf{d} - \frac{2}{3c^3}\,\dddot{\mathbf{d}}\,.$$

[1] Теперь мы могли бы сказать, что формула Рэлея есть правильная формула для h в газах (не только в предположении некогерентности).

Таким образом, радиационное трение из (12) убирается. В последующих работах в ответ на критику Планка [8], указавшего, что надо учесть также радиационные поля соседей, Мандельштам это учитывает [9, 10]. Он проводит детальное вычисление радиационных полей осцилляторов среды, но при суммировании полей соседних осцилляторов принимает все меры, чтобы среда была однородна. При вычислении возникающих сумм большой объем V разбивается на ячейки, в каждой из которых находится строго одна частица.

В результате Мандельштам получает полную компенсацию сил радиационного трения. "Коэффициент преломления оказывается действительным. Таким образом, никакого затухания вследствие рассеяния нет" [9, 10]. Это, безусловно, правильно для однородной среды. Флуктуации отсутствуют — рассеяния нет. Но это фактически специально навязано вычислениям.

В 1910 г. в полемику вмешивается Лорентц, опубликовав свою работу "К вопросу рассеяния света молекулами" [11]. Надо отметить, что Мандельштама и Планка он вообще не упоминает, как будто их полемики вообще не было. Есть ссылка только на Рэлея. Но из текста статьи, очень обширной и детальной, видно, что статья есть прямой ответ на вопросы, поставленные Мандельштамом. Лорентц дает подробный вывод формул, определяющих взаимодействие осцилляторов среды посредством их радиационных полей. Возникающие суммы по осцилляторам среды, окружающим данный осциллятор, он вычисляет двумя способами — сначала предполагая, что осцилляторы среды распределены в пространстве регулярно, а затем и для нерегулярного распределения. В первом случае он получает, что в отсутствие диссипации функция $\varepsilon(\omega)$ действительна, $\mathrm{Im}\,\varepsilon = 0$, а во втором приходит к результатам Рэлея и Планка. Расчеты $\varepsilon(\omega)$ Лорентц дополняет прямыми расчетами интенсивности рассеяния средой с нерегулярным распределением осцилляторов в пространстве. Достигается полное согласование. Основной результат формулируется следующим образом: "Рассеяние может иметь место только, когда молекулы распределены нерегулярно, как они распределены в газах и жидкостях".

Ниже приводится основной момент вычислений Лорентца функции $\varepsilon(\omega)$, а именно метод суммирования радиационных полей осцилляторов среды. Я воспользуюсь подходом и терминологией современной теории дисперсии, что позволяет сделать изложение более компактным, но при этом буду полностью следовать Лорентцу.

Радиационное поле осциллятора на расстоянии $\mathbf{R}$ дается выражением (см. [6])

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{d}(t - R/c)}{R}\,.$$

Переходя к компонентам Фурье на частоте ω и используя общее соотношение для разложения Фурье функции $f(t')$ с запаздывающим аргументом $t' = t - a$

$$\big\{f(t-a)\big\}_\omega = \big\{f(t)\big\}_\omega \exp{(\mathrm{i}\omega\alpha)}\,,$$

получим

$$\mathbf{E}_\omega = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\exp[\mathrm{i}(\omega/c)R]}{R}\,\mathbf{d}_\omega\,.$$

Поэтому уравнение движения осцилляторов среды с учетом реакции собственного поля излучения и полей всех остальных осцилляторов, записанное для фурье-компоненты дипольного момента $\mathbf{d}^i_\omega$, имеет вид

$$\mathbf{d}^i_\omega\big\{-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_{\text{рад}} + \omega_0^2\big\} = \\ = \frac{e^2}{m}\sum_{j\neq i}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|\big]}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}\,\mathbf{d}^j_\omega + \frac{e^2}{m}\,\mathbf{E}_\omega\,. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_j$ — координаты осцилляторов, операция rot в сумме по j действует на $\mathbf{R}_i$; возможными процессами диссипации пренебрегается, затухание определяется одной только силой радиационного трения, $\mathbf{E}_\omega$ — внешнее поле.

Нетрудно показать, что выражение

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|\big]}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}\,\mathbf{d}^j_\omega$$

при $|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| \ll \lambda$ содержит эффект радиационного трения. Разлагая в ряд экспоненту

$$\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|\big]}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}$$

и оставив в этом разложении лишь первый неисчезающий мнимый член, получим

$$\frac{e^2}{m}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|\big]}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}\,\mathbf{d}^j_\omega \cong \mathrm{i}\,\frac{e^2}{m}\,\frac{2}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3\mathbf{d}^j_\omega = \\ = \mathrm{i}\omega\gamma_{\text{рад}}\mathbf{d}^j_\omega\,. \quad (14)$$

Вычисления $\varepsilon(\omega)$ с помощью системы (13) проводятся следующим образом (см., например, [12]). Рассмотрим уравнения (13) без внешнего поля $\mathbf{E}_\omega$. Усредним правую часть уравнения (13) по координатам $\mathbf{R}_j$, предполагая, что каждый осциллятор с равной вероятностью может оказаться в любой точке пространства, независимо от местоположения других осцилляторов, в том числе осциллятора i (это есть приближение идеального газа, которое использовал Лорентц):

$$\sum_{j\neq i} \to \lim_{V\to\infty}(NV - 1)\,\times \\ \times\,\frac{1}{V}\int_\delta \mathrm{d}\mathbf{R}_j\,\mathrm{rot}_{R_i}\,\mathrm{rot}_{R_j}\,\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|\big]}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}\,\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}_j)\,. \quad (15)$$

Нижний предел δ у интеграла означает, что интегрирование должно проводиться по области $|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| > \delta \to 0$. Далее воспользуемся соотношением (см. [13])

$$\int_{\delta\to 0}\mathrm{d}\mathbf{R}'\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|\big]}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}\,\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}') = \\ = \int \mathrm{d}\mathbf{R}'\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R} - \mathbf{R}'\big]}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}\,\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}') - \frac{8\pi}{3}\,\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}) \quad (16)$$

и получаем интегральное уравнение для $\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R})$:

$$\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}) = N\alpha(\omega)\int \mathrm{d}\mathbf{R}'\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\frac{\exp\big[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|\big]}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}\,\times \\ \times\,\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}') - \frac{8\pi}{3}\,N\alpha(\omega)\,\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R})\,. \quad (17)$$

Здесь $\alpha(\omega)$ — поляризуемость одного изолированного осциллятора (6); при $\gamma = \gamma_{\text{рад}}$

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m}\,\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_{\text{рад}}}\,. \tag{18}$$

Будем искать решение уравнения (17) в виде плоских волн, которые могут распространяться в среде диполей, чьи колебания даются системой уравнений (13) или интегральным уравнением (17). Волновой вектор плоской волны в среде не есть $\mathbf{k}$, как в вакууме. Примем, что искомые плоские волны имеют вид

$$\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\boldsymbol{\eta}\mathbf{R})\,,$$

где $\boldsymbol{\eta} \neq k$, $\eta = \sqrt{\varepsilon}(\omega/c)$. Зависимость фурье-амплитуд $\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R})$, $\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}')$ соответственно от $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ имеет вид

$$\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}) = \mathbf{d}_\omega \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\eta}\mathbf{R})\,, \quad \mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}') = \mathbf{d}_\omega \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\eta}\mathbf{R}')\,,$$

где $\mathbf{d}_\omega$ — константа, независящая от координат. Вычисление интеграла в (17) содержится в [13]:

$$\int \mathrm{d}\mathbf{R}' \left\{ \mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\mathrm{rot}_{\mathbf{R}}\,\frac{\exp\left[\mathrm{i}(\omega/c)|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|\right]}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}\,\mathbf{d}_\omega(\mathbf{R}')\right\} \times$$
$$\times \exp\left[\mathrm{i}\boldsymbol{\eta}(\mathbf{R}'-\mathbf{R})\right] = \frac{4\pi\eta^2}{\eta^2 - k^2}\,, \quad k = \frac{\omega}{c}\,. \tag{19}$$

В результате получаем дисперсионное уравнение, связывающее $\eta(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}(\omega/c)$ с частотой ω:

$$1 = N\alpha\,\frac{4\pi\eta^2}{\eta^2 - (\omega/c)^2} - \frac{8\pi}{3}\,N\alpha\,, \quad \eta^2 = \varepsilon\left(\frac{\omega}{c}\right)^2, \tag{20}$$

откуда после простых тождественных преобразований следует известная формула Лорентц – Лоренца

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}\,N\alpha(\omega) = \frac{4\pi}{3}\,N\,\frac{e^2}{m}\,\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_{\text{рад}}}\,. \tag{21}$$

Эта формула получена с применением метода суммирования по j в (13), который был развит в работе Лорентца для случая идеального газа [11].

Как было показано в работе Климантовича и Фурсова [14], в случае среды, флуктуации плотности в которой отличаются от случая идеального газа, радиационное затухание в выражениях для $\alpha(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ определяется константой

$$\gamma_{\text{рад}}\,\frac{\overline{\Delta N^2}}{N}\,. \tag{22}$$

Здесь $\overline{\Delta N^2}$ и N — соответственно средняя квадратичная флуктуация и среднее число частиц, находящихся в определенном выделенном в теле объеме. Для идеального газа $\overline{\Delta N^2} = N$, что приводит к формуле (21). Если полностью пренебречь возможностью флуктуаций, положив $\overline{\Delta N^2} = 0$, то радиационное затухание вообще исчезает.

Таким образом, в однородной среде изотропных осцилляторов взаимодействие осцилляторов через их радиационные поля приводит к полной компенсации радиационного затухания. Однородная среда не рассеивает электромагнитных волн. Этот результат, постулировав однородность распределения осцилляторов среды, прямым расчетом $\varepsilon(\omega)$ получил Мандельштам [9, 10]. Наличие флуктуаций приводит к рассеянию, причем в идеальном газе интенсивность рассеяния на флуктуациях плотности оказывается равной сумме интенсивностей рассеяния на каждом из изолированных осцилляторов, как это было принято в работах Рэлея и Планка. Действительно, в газах $|\varepsilon| \sim 1$ и (21) дает

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) = 4\pi N|\alpha|^2\,\frac{2}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3,$$

откуда из общего определения $h = (\omega/c)\,\mathrm{Im}\,\varepsilon$ следует формула Рэлея (1), (2).

Выше при вычислении функции $\varepsilon(\omega)$ не учитывалось движение осцилляторов (так же, как и в работах Мандельштама и Лорентца). Учет движения важен при вычислении спектра рассеяния, но не сказывается на интегральном по спектру коэффициенте экстинкции h.

Работы Лорентца и Эйнштейна все расставили по местам. Полемика Мандельштам – Планк прекратилась. Идея о связи интенсивности рассеяния света с флуктуациями в среде, вызываемыми тепловым движением, получила всеобщее признание. Уже в работе [15] (1913 г.) Л.И. Мандельштам рассмотрел рассеяние света на флуктуациях поверхности жидкости, полностью отказавшись от постулата оптической однородности среды, который он принимал в [9, 10]. Приведу всего две цитаты из работы [15]:

"Статистическое рассмотрение второго начала приводит, как известно, к представлению, что система, находящаяся в состоянии термодинамического равновесия, все же не остается в покое, а непрерывно флюктуирует около своего положения равновесия".

"Поверхность жидкости, которая при идеальном равновесии должна быть, например, плоской, вследствие нерегулярного теплового движения непрерывно деформируется. Если заставить отражаться от такой поверхности световой луч, то наряду с регулярным отражением должно появиться и диффузное".

Сегодня эти утверждения представляются очевидными. Но, как следует из изложенного выше, путь к ним для физиков начала XX века оказался далеко не простым.

Автор признателен Е.Л. Фейнбергу и И.Л. Фабелинскому за обсуждение данного исторического обзора начального этапа теории рассеяния света.

Список литературы

1. Rayleigh Lord *Philos. Mag.* **14** 112 (1871); **47** 377 (1899)
2. Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* (Под ред. М А Леонтовича) Т.1 (М.: Изд-во АН СССР, 1948) с. 109 [*Ann. Phys.* (Leipzig) **23** 626 (1907)]
3. Аллен К У *Астрофизические величины* (М.: ИЛ, 1960)
4. Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* (Под ред. М А Леонтовича) Т.1 (М.: Изд-во АН СССР, 1948) с. 125 [*Phys. Z.* **8** 608 (1907)]
5. Planck M *Sitzungsber. Konig. Preuss Acad.* **24** 470 (1902); **24** 480 (1904)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматгиз, 1962)
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982)
8. Planck M *Phys. Z.* **8** 906 (1907)
9. Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* (Под ред. М А Леонтовича) Т.1 (М.: Изд-во АН СССР, 1948) с. 162 [*Phys. Z.* **9** 308 (1908)]

10. Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* (Под ред. М А Леонтовича) Т.1 (М.: Изд-во АН СССР, 1948) с. 170 [*Phys. Z.* **9** 641 (1908)]
11. Lorentz H A *Proc. Acad. Amsterdam* **13** 92 (1910)
12. Алексеев В А, Виноградов А В, Собельман И И *УФН* **102** 43 (1970)
13. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1959)
14. Климонтович Ю Л, Фурсов В С *ЖЭТФ* **19** 819 (1949)
15. Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* (Под ред. М А Леонтовича) Т.1 (М.: Изд-во АН СССР, 1948) с. 246 [*Ann. Phys.* (Leipzig) **41** 609 (1913)]

On the theory of light scattering in gases

I.I. Sobel'man
P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences
Leninskiĭ prosp. 53, 117924 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 135-20 98. Fax (7-095) 135-24 08
E-mail: spic@sci.lebedev.ru

The history of how theoretical knowledge about light scattering and dispersion in gases was developed by scientists from Rayleigh, Planck, and Mandelstam to Lorentz and Einstein is reviewed. It i shown that of central concern in these studies was actually the problem of thermal fluctuations in a medium. A formula for the permittivity $\varepsilon(\omega)$ taking account for radiation friction forces is derived for the case of an isotropic medium.

PACS numbers: **01.65.+g**, **03.80.+r**, **42.68.–w**, 94.10.Gb

Bibliography — 15 references

Received 8 October 2001