

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Суперсимметрия — 30 лет тому назад

Е.П. Лихтман

Изложена история создания первой суперсимметричной модели в четырех измерениях. Это также история совместной работы Е.П. Лихтмана с Ю.А. Гольфандом, которая инициировала исследования в области новой симметрии. В качестве приложения публикуется препринт работы Е.П. Лихтмана 1971 г.

PACS numbers: 01.65. + g, 12.60.Jv

Настоящие заметки написаны на основе моего выступления на конференции "Тридцать лет суперсимметрии", состоявшейся в Миннеаполисе 13–15 октября 2000 г., и посвящены истории построения первой суперсимметричной модели в четырех измерениях [1]. Мною сделан краткий обзор статей, опубликованных в начале семидесятых годов по этой теме, и менее значимых результатов, отраженных только в моей диссертации [2], а также уделено внимание некоторым заблуждениям и упущенным возможностям.

В начале 1968 г. я с красным дипломом закончил физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ). К этому времени я был соавтором двух публикаций [3, 4], посвященных возможному эффекту нарушения пространственно-зарядовой симметрии в атомных ядрах. Я мечтал о решении более масштабных задач, для чего было нужно поступать в аспирантуру. Однако руководитель моей дипломной работы — Юрий Михайлович Широков — не смог устроить меня в аспирантуру ни в Математический институт им. В.А. Стеклова Академии наук СССР, где он был штатным сотрудником, ни на физический факультет МГУ, где он преподавал. Поэтому он порекомендовал меня Юрию Абрамовичу Гольфанду, работавшему в Теоретическом отделе Физического института им. П.Н. Лебедева Академии наук СССР (ФИАН).

В конце 60-х — начале 70-х годов в Теоретическом отделе ФИАНа работали известные советские физики: И.Е. Тамм, В.Л. Гинзбург, А.Д. Сахаров. Ю.А. Гольфанд в то время еще только писал докторскую диссертацию. Его невысокий рост, стремительная походка и обаятельная, доброжелательная улыбка делали менее заметной разницу наших возрастов и статусов. Он показал мне несколько перестановочных соотношений

между операторами импульса, углового момента и какими-то спинорами и объяснил мне, что их непротиворечивость проверяется тождествами Якоби. Эти перестановочные соотношения и легли в основу науки, которая через шесть лет была названа "Суперсимметрией" [5].

На первом этапе мне предстояло установить, является ли предложенная алгебра единственной или есть альтернатива. Для этого надо было решить систему уравнений на структурные постоянные алгебры, которые вытекали из тождеств Якоби. Я ограничился набором из 4-х комплексных спинорных зарядов и выяснил, что существуют 4 варианта таких алгебр: две из них известны сейчас как $N = 1$ и $N = 2$ супералгебры, а в двух других импульс не коммутирует со спинорными зарядами (наподобие алгебры де Ситтера). Полученные в конце 1968 г. результаты были опубликованы позднее [6, 7], так как совершенно не было ясно, имеют ли они какое-либо отношение к физике. Из этих алгебр для дальнейших исследований мы выбрали простейшую ($N = 1$).

Два раза в неделю, перед началом семинаров Теоретического отдела, я показывал Гольфанду мои вычисления, и мы их обсуждали. На моем столе были учебники по различным аспектам применения теории групп в физике, но никаких свежее опубликованных статей по предложенной мне теме я не нашел. Позднее, при подготовке диссертации, надо было писать обзор современной литературы, и тут опять мои поиски были малопродуктивными. Сейчас я с большим интересом прочел исторический обзор М.С. Маринова [8]. Знал ли Гольфанд или нет о работах Ф.А. Березина или каких-либо подобных публикациях, я не знаю. Возможно, он считал, что все необходимое для работы он мне уже сообщил. Всем своим видом Гольфанд давал понять мне, а может и не только мне, что, в отличие от остальных, мы занимаемся важным и серьезным делом. В то же время, со всеми сотрудниками Теоротдела, как мне казалось, у него в то время были равные отношения. Он очень любил пошутить и посмеяться, в частности, над проблемами в моем образовании.

Главная задача, которую я должен был решить, состояла в том, чтобы установить связь между построенной алгеброй и квантовой теорией поля. Никто не знал,

Е.П. Лихтман, Всероссийский институт научной и технической информации, РАН
125315 Москва, ул. Усевича 20, Российская Федерация
Тел. (095) 155-46-04. Факс (095) 152-62-00
E-mail: peisv@viniti.ru

Статья поступила 5 марта 2001 г.

существует ли такая связь, и, если существует, будут ли представления алгебры конечными. Я все время говорю "алгебра", а не "группа", по следующей причине. Мы рассматривали группу с параметрами как грассмановскими переменными и установили закон преобразования суперкоординат при спинорных трансляциях. Мы, однако, не догадались разложить суперполе в ряд по грассмановским переменным и тем самым установить связь между суперполем и набором обычных полей, входящих в супермультиплет. Поэтому понятие суперполя, не давшее механизма построения супервзаимодействия, не попало в наши первые публикации, а отражено только в моей диссертации. Путь, который привел к успеху, как сейчас видно, оказался не столь изысканным и поэтому более трудоемким. Я стал искать представления алгебры через операторы рождения и уничтожения частиц.

Пока мы имели дело только с операторами алгебры, основная проблема заключалась в том, чтобы правильно обращаться с гамма-матрицами и не забывать менять знак при работе с антикоммутаторами в определенных местах тождеств Якоби. После перехода к теории поля было очень трудно привыкнуть к тому, что в одном мультиплете находятся бозоны и фермионы, и еще труднее было представить, как они переходят друг в друга в результате спинорных трансляций. Списывать, как я это делал на экзамене по марксистско-ленинской философии, было неоткуда. Гольфанд ободрял меня: "Не боги горшки обжигают". Единственное, что было очевидно с самого начала, — это равенство масс всех частиц в супермультиплете, что также не вселяло оптимизма.

Наконец, в конце 1969 г. были построены оператор суперспина и два неприводимых представления алгебры (со спинами 0 и $1/2$ — киральный мультиплет; а со спинами 0, $1/2$ и 1 — векторный мультиплет) и установлены некоторые общие свойства неприводимых представлений:

- Во-первых, в каждом неприводимом представлении максимальный спин отличается от минимального не более чем на 1. Этот вывод был сделан путем разложения оператора группы (а не суперполя) в ряд Тейлора по грассмановским параметрам спинорных трансляций. Разложение обрывалось, и, следовательно, представления были конечными!

- Во-вторых, число бозонных степеней свободы в каждом мультиплете равно числу фермионных, и, в силу этого, сумма вакуумных энергий бозонных и фермионных состояний равна нулю.

Мне очень хотелось сразу опубликовать полученные результаты, но Гольфанд чувствовал, что они не привлекут внимания. Кроме того, он, наверное, не хотел, чтобы я терял время на подготовку рукописи. Поэтому основы суперсимметричной теории свободных полей были опубликованы только в 1971 г. [9] (см. ниже Препринт № 41). А в 1969 г. я занялся построением суперсимметричного взаимодействия найденных мультиплетов.

В то время в Академию наук приходили письма с проектами от изобретателей, а аспиранты должны были анализировать эти проекты и готовить заключения. Мне достался проект ракеты, в которой жидкость двигалась внутри ракеты по замкнутой трубе: в одну сторону прямо, а в другую сторону — зигзагами. Автор проекта считал, что за счет релятивистских эффектов должна возникать сила, толкающая ракету вперед. Я не мог указать автору проекта на то, что это противоречит

закону сохранения импульса, о котором автор проекта, очевидно, не знал. Пришлось повозиться, чтобы найти ошибку в его рассуждениях. После этого случая я стал опасаться войти в противоречие в своих вычислениях с каким-то законом сохранения и оказаться на месте незадачливого изобретателя.

Психологический барьер, связанный с ферми-бозе мешаниной, был сломлен, но возникли некоторые технические трудности. Методика построения взаимодействия заключалась в том, что выписывались спинорные генераторы алгебры уже не только через вторые, а и через третьи степени полей, после чего с помощью алгебры вычислялся гамильтониан, который должен был коммутировать с генераторами спинорных трансляций. В результате возникла система уравнений, в которой число неизвестных констант при различных комбинациях полей было порядка дюжины.

Сегодня я многократно решаю сотни нелинейных уравнений, и у меня возникают проблемы с компьютером, когда их число переваливает за тысячу. В 1970 г. для решения уравнений я использовал авторучку и длинные рулоны бумаги из-под светокопий старых чертежей. Легко решать задачу из задачника, когда знаешь, что ответ существует и остается лишь найти его. Когда одно из уравнений противоречило другим, я не знал, то ли это следствие арифметических ошибок, то ли задача вообще не имеет решения. Срок окончания моей аспирантуры приближался к концу, и мне надо было думать о защите диссертации и трудоустройстве. Наконец, когда константы, вычисленные из одних уравнений, стали удовлетворять другим, я воспринял это как чудо. Более того, неизвестные константы в операторах спинорных трансляций при четвертых степенях полей можно было положить равными нулю. Система уравнений была решена, первое суперсимметричное взаимодействие было построено. Сейчас его называют массивной суперсимметричной электродинамикой.

Началось оформление результатов. Я собрался писать одну большую последовательную статью, но Гольфанд принял другое решение. Сроки редакционной подготовки в наших журналах были очень велики, и он решил подготовить краткую заметку [1] для журнала *Письма в ЖЭТФ*. Гольфанд безжалостно сокращал мою рукопись, чтобы уложиться в установленный объем. Вырезанные фрагменты были разбросаны по другим публикациям [6, 7, 9]. Параллельно я строил самодействие векторного мультиплета. Мне удалось построить только трилинейную часть взаимодействия, поэтому этот результат отражен только в моей диссертации [2].

Заглавие диссертации было столь замысловатым, что ученый секретарь на защите в сентябре 1971 г. с трудом его зачитал. По-видимому, оно отражало уровень нашего понимания проблемы. Мы ошибочно полагали, что построение суперсимметричного взаимодействия путем разложения генераторов группы в степенной ряд по константе связи продиктовано спецификой суперсимметрии. Тем не менее, подводя итог трехлетней работы, можно сказать, что при постоянной поддержке Гольфанда я решил сформулированную им задачу, т.е. на конкретном примере продемонстрировал квантово-полевую реализацию суперсимметрии. Доклады на семинарах и защита диссертации не вызвали какого-либо интереса в научных кругах. На банкет мой научный руководитель пришел с большим букетом цветов, кото-

рый, к моему удивлению, предназначался не мне — первопроходцу и герою, а моей жене, оставшейся дома с грудным сыном.

Места в ФИАНе для меня не нашлось, и в конце 1971 г. после полугодовых поисков я устроился на работу в Отдел физики Всесоюзного института научной и технической информации, где с трудом выкраивал время для продолжения работы над ферми-бозе симметрией. Один теоретик, услышав о моем месте работы, провел аналогию с Эйнштейном. У Гольфанда положение оказалось еще хуже: в 1972 г. его уволили из Теоретического отдела ФИАНа, и он стал перебиваться случайными заработками. Выставленная таким способом оценка нашей работы продемонстрировала, насколько не соответствовала новая симметрия научному мировоззрению ученых, стоявших у руля советской физики в те годы. Только в 1989 г. эта оценка изменилась: по представлению Л.В. Келдыша — главы не только Теоретического отдела, но и всего ФИАНа — наши работы по суперсимметрии были удостоены премии АН СССР в области теоретической физики имени И.Е. Тамма.

Что побудило Гольфанда сформулировать задачу? Ясно, что для этого не существовало каких-либо конкретных экспериментальных данных, подобных постоянству скорости света или приближительному равенству масс нейтрона и протона. При этом не ставился также вопрос о преодолении каких-то внутренних противоречий теории, как это имело место при создании ОТО или модели Вайнберга–Салама. Я думаю, что его вдохновляли многочисленные положительные результаты, которые давало применение той или иной симметрии в физике на протяжении всего XX века.

После защиты диссертации и трудоустройства я проанализировал полученные результаты и предположил, что обнаруженное мною сокращение расходимостей вакуумных энергий свободных полей как-то проявится и для взаимодействующих полей. Зная константы взаимодействия полей в построенной модели суперсимметричной электродинамики, было нетрудно установить, что в однопетлевом приближении массовые расходимости бозонного поля не квадратичны, а, как и у фермионного поля, — логарифмичны. Этот результат не вызвал никакого энтузиазма у Гольфанда, так как показался ему игрой случая. Может, ему изменила интуиция, а может, голова у него была забита совершенно другими, не научными проблемами. Рассматривая действие спинорных трансляций на S -матрицу, я пришел к выводу, что сокращение расходимостей не явилось случайностью и должно выполняться в следующих приближениях. Но, увы, — расходимости не исчезали полностью. Вот если бы неперенормируемая модель стала перенормируемой! К сожалению, моя техника построения моделей не позволяла исследовать неперенормируемые модели.

В 1974 г. И.В. Тютин рассказал мне о статье Весса–Зумино [5], которую я прочел с огромным интересом. Линейность представлений за счет присутствия вспомогательных полей, ковариантные производные по грассмановским переменным — все это было очень красиво и позволяло легко строить супервзаимодействие. В работе Салама–Стратди [10] интегрирование по грассмановским переменным, постулаты которого сформулированы Ф.А. Березиным в 1965 г. [11], окончательно уравнило оба типа аргументов суперполей. Используя

эту технику, я построил две модели с абелевым [12] и неабелевым [13] массивными векторными полями и доказал их перенормируемость. В то же время я указал на то, что доказательство перенормируемости можно было выполнить и другим способом, используя стандартный механизм спонтанного нарушения калибровочной симметрии. Вопрос о какой-либо связи суперсимметрии с физикой высоких энергий оставался открытым.

Большая конкуренция и отсутствие какой-либо поддержки привели к тому, что после публикации этих двух работ я фактически прекратил работу в области суперсимметрии и стал искать свою собственную тему. Малое число предположений и простота конструкции в сочетании с нетривиальным и, может, не очень реалистичным на первых порах результатом — вот главное, что я вынес из совместной работы с Гольфандом. С другой стороны, мои навыки работы с персональным компьютером позволяют мне пытаться решать такие задачи, о существовании решений которых мне ничего неизвестно. Я слышал, что искать черную кошку в темной комнате — очень рискованное занятие, в особенности, если ее там нет. Сегодня, тем не менее, я пытаюсь численно исследовать модель электродинамики Борна–Инфельда с мембраной конечных размеров, ограниченной струной, в которой сокращаются расходимости электрической и магнитной энергий. Но это сокращение — не самоцель. Оказывается, что, с одной стороны, некоторая комбинация массы, магнитного момента и электрического заряда не зависит от двух неизвестных размерных констант модели, а, с другой стороны, связана с хорошо известной наблюдаемой величиной — постоянной тонкой структуры. Полученные решения пока плохо сходятся с ростом числа ячеек решетки. Возможно, это указывает на отсутствие решений, может быть, мне следует лучше натягивать на пространство эту решетку, а может, надо искать неизвестную симметрию уравнений движения для предварительного аналитического анализа.

В заключение я хочу прежде всего поблагодарить организаторов конференции "Тридцать лет суперсимметрии" за предоставленную мне возможность поделиться своим видением событий тридцатилетней давности и за финансовую поддержку. И наконец последнее и самое важное. Юрий Абрамович Гольфанд остается для меня не только человеком, который учил меня ремеслу, а человеком, который привил мне вкус к рискованному занятию — ходить нехоженными дорогами.

Список литературы

1. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. *Письма в ЖЭТФ* **13** 452 (1971)
2. Лихтман Е. П. "Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение Р-инвариантности" Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (М.: ФИАН, 1971)
3. Дубовик В. М., Лихтман Е. П., Чешков А. А., Препринт ОИЯИ, Р-2891 (Дубна: ОИЯИ, 1966)
4. Лихтман Е. П., Широков Ю. М. *ЯФ* **9** 975 (1969)
5. Wess J., Zumino B. *Nucl. Phys. B* **70** 39 (1974)
6. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П., в сб. *Проблемы теоретической физики. Памяти Игоря Евгеньевича Тамма* (Под ред. В. Л. Гинзбурга и др.) (М.: Наука, 1972) с. 37
7. Лихтман Е. П. *Краткие сообщения по физике* (5) 33 (1971)
8. Marinov M. S., in *The Many Faces of the Superworld: Yuri Golfand Memorial Volume* (Ed. M. Shifman) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 32
9. Лихтман Е. П., Препринт ФИАН № 41 (М.: ФИАН, 1971)
10. Salam A., Strathdee J. *Phys. Lett. B* **51** 353 (1974)
11. Березин Ф. А. *Метод вторичного квантования* (М.: Наука, 1965)
12. Лихтман Е. П. *Письма в ЖЭТФ* **21** 243 (1975)
13. Лихтман Е. П. *Письма в ЖЭТФ* **22** 127 (1975)

Неприводимые представления расширения алгебры генераторов группы Пуанкаре биспинорными генераторами

Е.П. Лихтман

1. Введение

В работе [1] рассматривалось специальное расширение алгебры $\mathcal{P}$ генераторов группы Пуанкаре посредством введения генераторов спинорных трансляций W_α и $\bar{W}_\beta$:

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\sigma\lambda}]_- &= i(\delta_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} + \delta_{\nu\lambda}M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda}); \\ [P_\mu, P_\nu]_- &= 0; \quad [M_{\mu\nu}, P_\lambda]_- = i(\delta_{\mu\lambda}P_\nu - \delta_{\nu\lambda}P_\mu); \\ [M_{\mu\nu}, W]_- &= \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]W; \quad \bar{W} = W^+\gamma_0; \\ [W, \bar{W}]_+ &= \gamma_\mu^+ P_\mu; \quad [W, W]_+ = 0; \quad [P_\mu, W]_- = 0; \\ \gamma_\mu^\pm &= \pm \gamma_\mu; \quad \gamma_5^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5), \quad \gamma_5^2 = 1, \end{aligned} \quad (1a)$$

спинорные индексы опущены, и выражение типа $d_\mu d_\mu$ здесь и далее равно $d_0 d_0 - d_1 d_1 - d_2 d_2 - d_3 d_3$. Там же была построена такая реализация этой алгебры, в которой гамильтониан описывает взаимодействие квантованных полей. Этот пример показывает, что алгебра (1) накладывает жесткие ограничения на форму взаимодействия квантованных полей. При построении этого примера использовались два линейных неприводимых представления алгебры (1), вывод которых не был дан. В настоящей работе дается вывод этих представлений, строятся другие представления алгебры (1), а также исследуются свойства этих представлений.

2. Пространство состояний и инвариантные подпространства

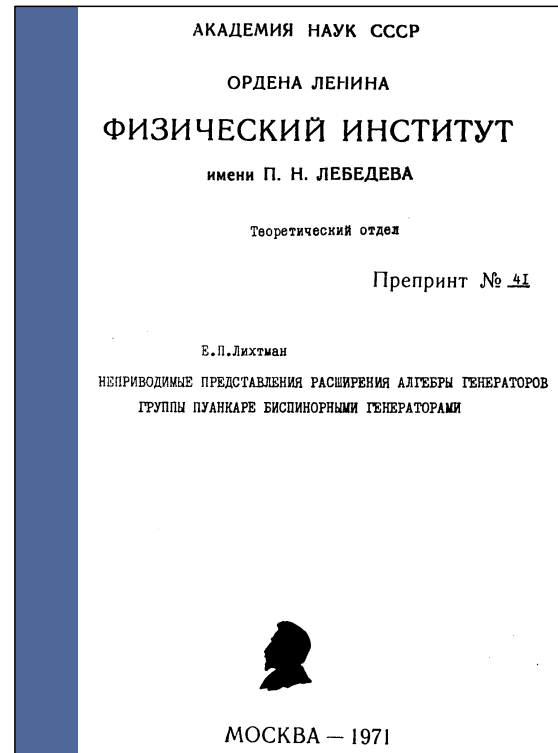
Для того чтобы определить, в каком пространстве действуют представления алгебры (1), заметим, что алгебра $\mathcal{P}$ является ее подалгеброй. Поэтому любое представление алгебры (1) является также представлением алгебры $\mathcal{P}$, и пространства, в которых действуют эти представления, совпадают. Однако неприводимое представление алгебры (1) будет приводимым представлением алгебры $\mathcal{P}$. Это приводимое представление распадается на ряд неприводимых представлений, причем одно и то же неприводимое представление может встречаться несколько раз. Для их различия мы введем номер неприводимого представления χ .

Физически интересны те представления (1), которые редуцируются по неприводимым представлениям $\mathcal{P}$, характеризуемым массой и спином. Поэтому базисный вектор пространства, в котором строятся представления алгебры (1), запишется следующим образом:

$$|\chi, p_\lambda, j, m, \chi\rangle, \quad (2)$$

где χ — масса, p_λ — трехмерный импульс, j — спин, m — проекция спина на ось z и χ — номер неприводимого представления алгебры $\mathcal{P}$.

В пространстве с базисными векторами (2) имеются подпространства, инвариантные относительно действия операторов алгебры (1). Согласно лемме Шура [2], для отыскания инвариантных подпространств необходимо



Факсимильное воспроизведение титульного листа Препринта № 41.

найти инвариантные операторы, которые, по определению, коммутируют со всеми операторами алгебры (1). Легко заметить, что этим свойством обладает оператор P_μ^2 . Поэтому пространство, базисные векторы которого соответствуют частицам с одной и той же массой χ , будет инвариантным подпространством. Спины у векторов этого инвариантного подпространства не могут быть все одинаковы, так как квадрат оператора спина не является инвариантным оператором алгебры (1):

$$[\Gamma_\mu^2, W]_- \neq 0; \quad \Gamma_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M_{\nu\lambda} P_\sigma.$$

Инвариантным оператором в алгебре (1) будет оператор D_μ^2 , где

$$D_\mu = \Gamma_\mu + \frac{1}{2} \left(\bar{W} \gamma_\mu W - \frac{P_\mu P_\nu}{P_\sigma^2} \bar{W} \gamma_\nu W \right), \quad P_\sigma^2 = \chi^2 > 0.$$

Других инвариантных операторов в алгебре (1), по видимому, нет. Мы не знаем заранее точно, какие векторы (2) образуют базис неприводимого представления алгебры (1), так как не знаем свойств оператора D_μ^2 . Однако, кроме того, что масса у них одинакова, можно утверждать, что разница между максимальным и минимальным спинами в неприводимом представлении (1) не превышает единицы. Другими словами, в неприводимом представлении (1) содержится не более трех различных спинов. В противном случае, действуя последовательно операторами алгебры (1) на вектор состояния со спином j_1 , можно получить такой вектор, проекция которого на векторы состояний со спином j_2 при $|j_1 - j_2| > 1$ не равнялась бы нулю. Чтобы убедиться в невозможности этого, заметим, что последовательное действие операторов алгебры (1) в общем случае можно представить в виде действия полинома по степеням алгебры (1), который в силу перестановочных соотношений (1) предста-

вим следующим образом:

$$\sum C_{\mu\nu,\dots;\lambda,\dots}^{\alpha,\dots;\beta,\dots} M_{\mu\nu} \times \dots \times P_{\lambda} \times \dots \times W_{\alpha} \times \dots \times \overline{W}_{\beta} \times \dots,$$

где $C_{\mu\nu,\dots;\lambda,\dots}^{\alpha,\dots;\beta,\dots}$ — числовые коэффициенты.

Произведение произвольного числа операторов $M_{\mu\nu}$ и P_{λ} не изменяет спина состояния. Число операторов W (и $\overline{W}$) в каждом слагаемом может быть равно единице или двум, так как произведение большего числа операторов W (и $\overline{W}$) в силу антикоммутационных соотношений в (1) обращается в нуль. По той же причине произведение двух операторов $W_{\alpha} W_{\beta}$ не равно нулю лишь при $\alpha \neq \beta$, а такой оператор не изменяет спина состояния. И только один оператор W (или $\overline{W}$) изменяет спин на половину, а произведение $W_{\alpha} \overline{W}_{\beta}$ может менять его на единицу. Таким образом, в инвариантном подпространстве могут содержаться лишь спины $j, j + \frac{1}{2}, j + 1$. Чтобы построить неприводимое представление алгебры (1), необходимо найти матричные элементы операторов алгебры (1) между этими состояниями.

3. Уравнения для приведенных матричных элементов

Матричные элементы оператора обычных трансляций записываются, очевидно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \kappa, p_{\lambda}, j, m, \chi | P_{\mu} | \kappa, p'_{\lambda}, j', m', \chi' \rangle = \\ = \left(\delta_{\mu 0} \sqrt{\kappa^2 + p_{\lambda}^2} + \delta_{\mu \lambda} p_{\lambda} \right) \delta(p_{\lambda} - p'_{\lambda}) \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{\chi\chi'}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\lambda = 1, 2, 3$. Оператор $M_{\mu\nu}$ также будет иметь свой обычный вид. Нас будут интересовать матричные элементы операторов W_{α} и $\overline{W}_{\beta}$, которые в силу (1) диагональны по κ и p_{λ} . Нетрудно убедиться, что операторы $\overline{s} W$ и $\overline{W} s$ удовлетворяют лишь тривиальным перестановочным соотношениям. Поэтому мы ограничимся исследованием лишь тех представлений¹, в которых $\overline{s} W = \overline{W} s = 0$. Без ущерба для общности выберем представление γ -матриц с диагональной γ_5 . Тогда операторы W_{α} и $\overline{W}_{\beta}$ становятся двухкомпонентными. Далее, зная закон преобразования спиноров при лоренцевских преобразованиях и предполагая, что $\kappa > 0$, перейдем в систему отсчета с $p_{\lambda} = p'_{\lambda} = 0$. В этой системе отсчета можно применить теорему Вигнера–Эккарта [4], согласно которой:

$$\begin{aligned} \langle \kappa, 0, j, m, \chi | \overline{s} W_{\alpha} | \kappa, 0, j', m', \chi' \rangle = \\ = \begin{pmatrix} j & \frac{1}{2} & j' \\ m & \alpha & -m' \end{pmatrix} (-1)^{j'-m'} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \langle j\chi | f | j'\chi' \rangle; \\ \langle \kappa, 0, j, m, \chi | \overline{W} s_{\beta} | \kappa, 0, j', m', \chi' \rangle = \\ = \begin{pmatrix} j' & \frac{1}{2} & j \\ m' & \beta & -m \end{pmatrix} (-1)^{j-m} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \langle j\chi | f^+ | j'\chi' \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{pmatrix} j & \frac{1}{2} & j' \\ m & \alpha & -m' \end{pmatrix}$$

¹ Отказ от этого требования приводит к необходимости введения индефинитной метрики [3].

— символы Вигнера, $|j - j'| = 1/2$, $\langle j\chi | f | j'\chi' \rangle$ — приведенные матричные элементы,

$$\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}$$

— удобный нормировочный множитель. Представление (4) обеспечивает правильные коммутации с оператором импульса и операторами трехмерных вращений. Чтобы удовлетворить остальным соотношениям алгебры (1), подставим (3) и (4) в (16) и воспользуемся формулами суммирования 3j-символов по проекциям спина [4]:

$$\begin{aligned} \sum_{m'} (-1)^{j'+m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j' \\ m_3 & m_4 & -m' \end{pmatrix} = \\ = \sum_{JM} (-1)^{2j_4+J+M} (2J+1) \times \\ \times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & J \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & J \\ m_3 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & J \\ m_1 & m_4 & -M \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & J \end{Bmatrix}$$

— 6j-символ. В результате подстановки и выполнения суммирования получим:

$$\begin{aligned} \sum_{JMj'\chi'} (-1)^{2j''+J+M} (2J+1) \times \\ \times \begin{Bmatrix} j & j' & J \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & j' \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & J \\ -\beta & \alpha & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j'' & J \\ m & -m'' & -M \end{pmatrix} \times \\ \times (-1)^{m+\alpha-j'} \sqrt{(2j+1)(2j''+1)(2j'+1)^2} \times \\ \times \left(\langle j\chi | f | j'\chi' \rangle \langle j'\chi' | f^+ | j''\chi'' \rangle + \right. \\ \left. + (-1)^{J-j+j''} \langle j\chi | f^+ | j'\chi' \rangle \langle j'\chi' | f | j''\chi'' \rangle \right) = \kappa \delta_{jj''} \delta_{mm''} \delta_{\chi\chi''}. \end{aligned} \quad (5)$$

(Аналогичная формула получается при подстановке (4) в соотношение $[W, W]_+ = 0$.) Далее воспользуемся значениями 6j-символов [4]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \frac{1}{2} & j_3 - \frac{1}{2} & j_2 + \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \\ = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \left[\frac{(j_1+j_3-j_2)(j_1+j_2-j_3+1)}{(2j_2+1)(2j_2+2)(2j_3)(2j_3+1)} \right]^{1/2}; \\ \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \frac{1}{2} & j_3 - \frac{1}{2} & j_2 - \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \\ = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \left[\frac{(j_1+j_2+j_3+1)(j_2+j_3-j_1)}{(2j_2)(2j_2+1)(2j_3)(2j_3+1)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда (5) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j'\chi'} \left(\frac{2j'+1}{2} \right) \left(\langle j\chi | f | j'\chi' \rangle \langle j'\chi' | f^+ | j''\chi'' \rangle + \right. \\ \left. + \langle j\chi | f^+ | j'\chi' \rangle \langle j'\chi' | f | j''\chi'' \rangle \right) = \kappa \delta_{jj''} \delta_{\chi\chi''}; \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\sum_{j'\chi'} (-1)^{j'} \left(\langle j\chi | f | j'\chi' \rangle \langle j'\chi' | f^+ | j\chi'' \rangle - \langle j\chi | f^+ | j'\chi' \rangle \langle j'\chi' | f | j\chi'' \rangle \right) = 0 \quad (\text{при } j \neq 0); \quad (6б)$$

$$\sum_{j'\chi'} \langle j\chi | f | j'\chi' \rangle \langle j'\chi' | f | j''\chi'' \rangle = 0 \quad (\text{кроме случая } j = j'' = 0). \quad (6в)$$

Это и есть искомые уравнения, решение которых позволит найти явный вид операторов ${}^+W$ и $\overline{W}^-$. Заметим, что решения (6) описывают представления, в которых инвариантный оператор D_μ^2 может быть и не кратен единичному оператору, т.е., вообще говоря, приводимые представления алгебры (1).

4. Число частиц в представлении алгебры (1) и некоторые решения уравнений (6)

Прежде всего, исходя из формул (6), выведем ограничения на число частиц в представлении алгебры (1). Для этого умножим уравнение (6а) на $(-1)^{2j}(2j+1)/2$ и просуммируем по $j = j''$ и $\chi = \chi''$. Левая часть после этой операции обратится в нуль. Чтобы в этом убедиться, достаточно во втором слагаемом переставить сомножители под знаком шпура и воспользоваться тем, что $(-1)^{2j} = (-1)^{2j'+1}$ (см. (4)). Тогда второе слагаемое будет отличаться от первого лишь знаком. Правая часть (6а) тоже должна равняться нулю, и мы получаем ограничение на число частиц n_j со спином j в представлении алгебры (1):

$$\sum_j (-1)^{2j}(2j+1)n_j = 0. \quad (7)$$

Как известно [5], в релятивистской квантовой теории поля при приведении оператора свободной энергии частицы к нормальному виду возникает бесконечное слагаемое, которое интерпретируется как энергия вакуума. Известно также, что знак этого слагаемого различен для частиц, подчиняющихся статистике Бозе или Ферми. В представлении алгебры (1), согласно (7), входят частицы с разными статистиками, причем число бозонных состояний всегда равно числу фермионных состояний. Из этого следует, что бесконечная положительная энергия бозонных состояний в любом представлении алгебры (1) уничтожается бесконечной отрицательной энергией фермионных состояний.

После этих предварительных замечаний перейдем непосредственно к решению уравнений (6). Попытаемся найти представления, в которых содержатся частицы лишь с двумя значениями спинов. В этом случае j' в формулах (6) принимает только одно значение, и суммирование по j' фактически отсутствует. Воспользовавшись этим, умножим уравнение (6б) на $(-1)^{j'}(2j'+1)/2$ и прибавим к нему уравнение (6а). В правой части результата будет стоять неособенная матрица, действующая в пространстве переменной χ (при фиксированных j, j' и j''). В левой части матрица будет неособенной лишь тогда, когда $j \neq 0$ (см. (6в)). Поэтому представление алгебры (1) с двумя спинами может содержать лишь спины 0 и 1/2. Нетрудно убедиться, что простейшее решение системы (6) в этом случае с $n_0 = 2$ ($\chi = 1, 2$) и $n_{1/2} = 1$ ($\chi = 1$) имеет

следующий вид:

$$\langle j\chi | f | j'\chi' \rangle = \sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где матрица в правой части действует на состояние

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

причем амплитуды a и b описывают частицы со спином 0, а c — со спином 1/2.

В случае представлений с тремя спинами $j, j+1/2, j+1$ наименьший спин j может быть произвольным. Простейшее решение с $n_j = 1$ ($\chi = 1$), $n_{j+1/2} = 2$ ($\chi = 1, 2$) и $n_{j+1} = 1$ ($\chi = 1$) можно записать в виде, аналогичном (8):

$$\langle j\chi | f | j'\chi' \rangle = \sqrt{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Представления (8) и (9) неприводимы. В этом можно убедиться, не вычисляя даже собственных значений инвариантного оператора D_μ^2 . Достаточно заметить, что не существует представлений с меньшим числом частиц, удовлетворяющих необходимому условию (7). Вопрос о том, существуют ли еще неприводимые представления (1), кроме найденных, требует дальнейшей разработки.

5. Вторично-квантованные релятивистские представления алгебры (1)

В этом разделе мы покажем, как от представлений (8) и (9), действующих в пространстве с базисными векторами (2), перейти к релятивистски ковариантной записи этих представлений, действующих в пространстве чисел заполнения. Операторы алгебры в таких представлениях должны выражаться через вторично-квантованные свободные поля с одинаковыми массами, но разными спинами. Поскольку релятивистски инвариантное уравнение для частиц со спином 1/2 описывает как частицы, так и античастицы, то в представлении (7) необходимо ввести еще и античастицы. Тогда операторы алгебры будут выражаться через неэрмитовы свободные скалярные поля $\varphi(x)$, $\omega(x)$ и спинорное поле $\psi_1(x)$. Покажем, что оператор

$$W^0 = {}^+W^0 = \frac{1}{i} \int \left[\varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 {}^+\psi_1(x) + \omega(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 {}^+\psi_1^c(x) \right] d^3x, \quad (10)$$

(где индекс "0" означает, что оператор билинеен по операторам поля, а индекс "с" означает зарядовое сопряжение) удовлетворяет перестановочным соотношениям (1)². Так, например:

² Оператор W определен с точностью до фазового множителя (см. [3]).

$$\begin{aligned}
[W^0, \overline{W}^0]_+ &= \\
&= i \iint d^3x d^3y \left[\varphi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_{x_0} \gamma_\mu^\dagger i \partial_{x_\mu} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \varphi(y) \right] + \\
&+ i \iint d^3x d^3y \left[\omega(x) \overleftrightarrow{\partial}_{x_0} \gamma_\mu^\dagger i \partial_{x_\mu} D(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \omega^*(y) \right] + \\
&+ i \iint d^3x d^3y \left[\bar{\psi}_1(y) \bar{s} \times \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} D(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{x_0} \bar{s} \psi_1(x) \right] + \\
&+ i \iint d^3x d^3y \left[\bar{\psi}_1^c(y) \bar{s} \times \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} D(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{x_0} \bar{s} \psi_1^c(x) \right] = \\
&= - \int d^3x \left[\varphi^*(x) \partial_\mu \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x) \right] \times \gamma_\mu^\dagger - \\
&- \int d^3x \left[\omega^*(x) \partial_\mu \overleftrightarrow{\partial}_0 \omega(x) \right] \times \gamma_\mu^\dagger + \\
&+ \frac{i}{2} \int d^3x \left[\bar{\psi}_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \bar{\gamma}_\mu \psi_1(x) \right] \times \gamma_\mu^\dagger + \\
&+ \frac{i}{2} \int d^3x \left[\bar{\psi}_1^c(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \bar{\gamma}_\mu \psi_1^c(x) \right] \times \gamma_\mu^\dagger = \\
&= \int d^3x T_{\mu 0}(x) \times \gamma_\mu^\dagger. \quad (11)
\end{aligned}$$

При вычислениях использовались тождества Фирца, а также уравнения движения и перестановочные соотношения для свободных полей. Заметим далее, что тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, вообще говоря, не симметричен в случае спинорного поля. Однако, если один из индексов равен нулю, то

$$T_{\mu 0} = T_{0\mu},$$

и в правой части (11) интеграл превращается в оператор энергии-импульса полей $\varphi(x)$, $\omega(x)$ и $\psi_1(x)$. Остальные соотношения (1) проверяются аналогичным образом. Действие оператора W^0 на операторы поля является линейным преобразованием этих полей. Схематически его можно записать в следующем виде:

$$\varphi(x) \rightarrow \psi(x) \rightarrow \omega(x) \rightarrow 0,$$

$$\omega^*(x) \rightarrow \psi^c(x) \rightarrow \varphi^*(x) \rightarrow 0.$$

Перейдем теперь к обобщению представления (9) на случай квантованных полей. Мы ограничимся лишь той возможностью, когда наименьший спин j равен нулю, и две частицы со спинами $1/2$ можно считать связанными операцией зарядового сопряжения. Тогда операторы алгебры (1) в этом представлении выражаются через эрмитово скалярное поле $\chi(x)$, эрмитово векторное поперечное поле $A_\mu(x)$, а также спинорное поле $\psi_2(x)$. Это неприводимое представление может отличаться от неприводимого представления (10) массой частиц и должно отличаться собственными значениями инвариантного оператора D_μ^2 . Оператор W^0 в этом представлении имеет следующий вид:

$$W^0 = \bar{s} W^0 = \frac{1}{i\sqrt{2}} \int \left[\chi(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \bar{s} \psi_2(x) + A_\mu(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \gamma_\mu^\dagger \psi_2(x) \right] d^3x. \quad (12)$$

Проверка (12) производится так же, как и проверка (10):

$$\begin{aligned}
[\bar{s} W^0, \overline{W}^0 \bar{s}]_+ &= \\
&= -\frac{1}{2i} \iint d^3x d^3y \left[\bar{\psi}_2(y) \bar{s} \times \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} D(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{x_0} \bar{s} \psi_2(x) \right] + \\
&+ \frac{1}{2i} \iint d^3x d^3y \left[\psi_2(y) \gamma_\mu^\dagger \times \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu^2} \partial_{y_\mu} \partial_{y_\nu} \right) \times \right. \\
&\times D(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{x_0} \gamma_\mu^\dagger \psi_2(x) \left. \right] - \\
&- \frac{1}{2} \int \left[\chi(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \partial_\mu \chi(x) \right] d^3x \times \gamma_\mu^\dagger - \\
&- \frac{1}{2} \int \left[A_\mu(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \partial_\mu A_\nu(x) \right] d^3x \times \gamma_\mu^\dagger \bar{\gamma}_\mu^\dagger = \gamma_\mu^\dagger P_\mu, \quad (13)
\end{aligned}$$

где $\mu \neq 0$ — масса полей $\chi(x)$, $A_\mu(x)$ и $\psi_2(x)$. В этом представлении действие оператора W^0 на свободные поля схематически можно записать следующим образом:

$$\psi_2^c(x) \begin{array}{c} \nearrow \chi(x) \\ \searrow A_\mu(x) \end{array} \psi_2(x) \rightarrow 0.$$

В промежуточных результатах формулы (13) масса полей μ стоит в знаменателе. Поэтому ее нельзя положить равной нулю. Переход к массе нуль осуществляется путем отказа от условия поперечности векторного поля и переходом к диагональному спариванию:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)]_- = -\frac{1}{i} \delta_{\mu\nu} D(x-y).$$

В этом случае поле $\psi_2(x)$ становится двухкомпонентным ($\bar{s} \psi_2 = 0$), необходимость первого слагаемого в промежуточных выкладках (13) исчезает, и поэтому исчезает надобность во введении скалярного поля $\chi(x)$. При $\mu = 0$ оператор W^0 имеет следующий вид:

$$W^0 = \bar{s} W^0 = \frac{1}{i\sqrt{2}} \int \left[A_\mu(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \gamma_\mu^\dagger \psi_2(x) \right] d^3x. \quad (14)$$

В разделах 2–4, когда исследовались свойства представлений с ненулевой массой, было показано, что число фермионных и бозонных состояний в представлении алгебры (1) совпадают, и поэтому оператор P_μ^0 автоматически представляется в нормальном виде. Это видно также из того, что действие операторов W^0 и $\overline{W}^0$ на вакуум всегда дает нуль, а

$$P_\mu^0 = \text{Sp} (\bar{\gamma}_\mu [W^0, \overline{W}^0]_+).$$

Поэтому представление (14) также обладает этим свойством, а векторная и спинорная безмассовые частицы могут находиться лишь в двух состояниях с противоположной спиральностью.

6. Заключение

Таким образом, мы нашли несколько неприводимых представлений алгебры (1). В этих представлениях обычные поля объединяются в определенные мультиплеты. Возникает вопрос, можно ли отождествлять эти мультиплеты с какими-либо наблюдающимися частицами. Основная трудность при ответе на этот вопрос заклю-

чается в том, что массы всех частиц в мультиплете одинаковы, а спины различны. Поэтому в настоящее время алгебру (1) и ее реализации следует рассматривать как некоторую модель гамильтоновой формулировки квантовой теории поля.

В заключение выражаю признательность Ю.А. Гольфанду за постоянное внимание к работе и стимулирующие обсуждения³.

³ Выходные данные Препринта № 41:
Т-06188

Подписано в печать 12 апреля 1971 года

Заказ № 195. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ротапринте в ФИАН СССР
Москва, В-312, Ленинский проспект, 53

Список литературы

1. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. *Письма в ЖЭТФ* (в печати)⁴
2. Петрашень М.И., Трифонов Е.Д. *Применение теории групп в квантовой механике* (М.: Наука, 1967)
3. Лихтман Е.П. *Краткие сообщения по физике* (в печати)⁵
4. Эдмондс А. "Угловые моменты в квантовой механике", в сб. *Деформация атомных ядер* (М.: ИИЛ, 1958)
5. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Релятивистская квантовая теория* Ч. I (М.: Наука, 1968)

⁴ Так в Препринте № 41. Опубликовано в дальнейшем в журнале *Письма в ЖЭТФ* 13 323 (1971)

⁵ Так в Препринте № 41. Опубликовано в дальнейшем в журнале *Краткие сообщения по физике* (5) 33 (1971)

Supersymmetry: 30 years ago

E.P. Likhthman

All-Russian Institute of Scientific and Technical Information, Russian Academy of Sciences
ul. Usievicha 20, 125315 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 155-46 04. Fax (7-095) 152-62 00
E-mail: peisv@viniti.ru

A personal history of the creation of the first supersymmetric model in four dimensions, this paper is also the author's memoir of his cooperation with Yu.A. Gol'fand who pioneered supersymmetry studies. The preprint of the author's 1971 paper is presented in the appendix.

PACS numbers: 01.65, +g, 12.60.Jv
Bibliography — 13 references

Received 5 March 2001

В Редакции журнала "Успехи физических наук" вышла книга Кладдор-Клайнротхаус Г.В., Цюбер К. "Астрофизика элементарных частиц" Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 99-02-30058

Кладдор-Клайнротхаус Г.В., Цюбер К. *Астрофизика элементарных частиц*. (Пер. с нем. под ред. В.А. Беднякова) (М.: Ред. журн. "Успехи физических наук", 2000) 496 с. Библи.: 1459 назв. ISBN 5-85504-012-7. Проект РФФИ 99-02-30058. [Klapdor-Kleingrothaus H.V., Zuber K. *Teilchenastrophysik*. (Stuttgart: B.G. Teubner GmbH, 1997)]

Книгу можно заказать по e-mail: ludmila.gladneva@yahoo.com или по почте в ООО "ЦЕНТРОЭКС" (занимающимся распространением УФН) по телефону (095) 456-86-01 у Кольцовой Ларисы Арсентьевны. После приема заказа просим Вас оплатить заказ книги по почте через банк или на почте почтовым переводом на счет ООО "ЦЕНТРОЭКС": ИНН 7714109278 на р/счет № 40702810538300103299 в Войковском ОСБ 5282/155 МБ АК СБ РФ, БИК 044525342, к/с 30101810600000000342.

Копию платежного поручения (для организаций) или квитанцию почтового перевода (для частных лиц), а также бланк заказа просим Вас переслать в ООО "ЦЕНТРОЭКС" по адресу:

125493 Москва А-493, Смольная ул., 14 ООО "ЦЕНТРОЭКС"
редакция журнала "Успехи физических наук"
заказ книги Кладдор-Клайнротхаус Г.В., Цюбер К.
"Астрофизика элементарных частиц"

Стоимость книги в розницу — 60 рублей, при заказе по почте — 90 рублей.

✂

БЛАНК ЗАКАЗА

Просим выслать по заказу _____ экземпляров книги Кладдор-Клайнротхаус Г.В., Цюбер К. "Астрофизика элементарных частиц". Оплата в сумме _____ рублей произведена платежным поручением (почтовым переводом) № _____ от "_____" _____ 200 _____ года на расчетный счет ООО "ЦЕНТРОЭКС" ИНН 7714109278 на р/счет № 40702810538300103299 в Войковском ОСБ 5282/155 МБ АК СБ РФ, БИК 044525342, к/с 30101810600000000342

Почтовый адрес для доставки книги _____