

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Большие и бесконечные дополнительные измерения

В.А. Рубаков

В последнее время основной акцент в развитии теорий, имеющих более чем три пространственных измерения, сместился в сторону представления "мира на бране". Эта модель предполагает, что обычное вещество (за исключением, может быть, гравитонов и других гипотетических частиц, очень слабо взаимодействующих с веществом) находится на трехмерном многообразии — "бране", вложенном в многомерное пространство. В представлении мира на бране дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечный размер, они могут непосредственно проявляться в существующих или будущих экспериментах. Цель настоящего обзора — используя простые теоретико-полевые модели, на общедоступном уровне изложить основные идеи этой концепции.

PACS numbers: 04.50.+b, 11.25.Mj, 12.60.-i

Содержание

1. Введение (913).
 2. Модель Калуцы–Клейна (914).
 3. Локализация вещества (914).
 - 3.1. Локализация фермионов. 3.2. Локализация калибровочных полей.
 4. Большие дополнительные измерения (917).
 - 4.1. Размер дополнительных измерений. 4.2. Легкие КК-гравитоны: ускорители, космология и астрофизика. 4.3. Стерильные нейтрино вне браны. 4.4. Объединение взаимодействий. 4.5. Проблема стабильности протона.
 5. Нефакторизуемая геометрия (924).
 - 5.1. Стянутые дополнительные измерения. 5.2. Конфигурация из двух бран. 5.3. Вещество на бране с отрицательным натяжением и иерархия. 5.4. Вещество на бране с положительным натяжением.
 6. Бесконечные дополнительные измерения (927).
 - 6.1. Локализация гравитонов. 6.2. Исчезновение в дополнительные измерения. 6.3. Голографическая интерпретация. 6.4. Два и более дополнительных измерения. Гравитационная локализация калибровочных полей.
 7. Дальнейшее развитие (932).
 - 7.1. Космологическая постоянная. 7.2. Гравитация на сверхдалеких расстояниях. 7.3. Приближенная лоренц-инвариантность. 7.4. Рождение Вселенной на бране.
 8. Заключение (936).
- Список литературы (936).

1. Введение

Возможность того, что наше пространство имеет больше трех измерений, вызывает большой интерес уже на протяжении многих лет. Основным стимулом для рассмотрения пространства как многомерного дают теории, которые наиболее адекватным образом включают в себя гравитацию: теория струн и М-теория. Почти все варианты этих теорий естественно и/или самосогласованно формулируются в пространстве-времени с числом измерений больше четырех. Параллельно с развитием фундаментальной теории исследования феноменологического характера недавно привели к новому пониманию того, как могут проявиться дополнительные измерения и как они могут способствовать решению известных проблем теории частиц (проблем иерархии, космологической постоянной и др.).

Феноменологические исследования часто базируются на упрощенных (порой даже слишком) теоретико-полевых моделях, которые имеют свои преимущества и недостатки. Преимущества состоят в том, что, рассматривая различные модели, можно обнаружить целый спектр новых явлений. Недостатки же заключаются в том, что некоторые (большинство?) из феноменологических моделей могут не иметь ничего общего с фундаментальной теорией, и тогда становится неясным, какая из возможностей имеет шанс реализоваться в природе. Кроме того, нередко количественные оценки известны в лучшем случае по порядку величины; зачастую их вообще нельзя сделать, так как большинство моделей имеет свободные параметры. Тем не менее феноменологический подход, который является предметом настоящего обзора, способствует пониманию того, как можно обнаружить дополнительные измерения, если они существуют.

Одной из проблем многомерных теорий является механизм, благодаря которому дополнительные измерения скрыты, так что при изучении обычных физических

В.А. Рубаков. Институт ядерных исследований РАН,
117312 Москва, просп. 60-летия Октября 7а, Российская Федерация
Тел. (095) 135-77-66
Факс (095) 135-22-68
E-mail: rubakov@ms2.inr.ac.ru

Статья поступила 18 апреля 2001 г.

явлений пространство-время выглядит как эффективно четырехмерное. До последнего времени в основном рассматривались теории типа модели Калуцы–Клейна, в которых дополнительные измерения компактны и по существу однородны. Именно компактность дополнительных измерений обеспечивает в таких моделях эффективную четырехмерность пространства-времени на расстояниях, превышающих масштаб компактификации (размер дополнительных измерений). При этом лишние измерения должны быть микроскопического размера. Согласно распространенной точке зрения масштаб компактификации должен быть порядка планковского (хотя также рассматривался масштаб электрослабых взаимодействий [1–3]). На планковских масштабах (расстояние $l_{\text{Pl}} \sim 10^{-33}$ см, соответствующая энергия $M_{\text{Pl}} \sim 10^{19}$ ГэВ) непосредственное обнаружение дополнительных измерений представляется безнадежным.

Однако недавно особое внимание стало уделяться представлению о "мире на бране", в котором подразумевается локализация обычного вещества (за исключением, может быть, гравитонов и других гипотетических частиц, очень слабо взаимодействующих с веществом) на трехмерном многообразии — "бране", вложенном в объемлющее многомерное пространство. В моделях мира на бране дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер и могут приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам.

Конечно, именно возможность обнаружения больших и бесконечных дополнительных измерений является основной причиной, из-за которой они представляют интерес. Другой аргумент состоит в том, что многообразия меньших размерностей — p -браны — присущи теории струн и М-теории. Некоторые типы p -бран способны удерживать поля материи; например, на D -бранах находятся калибровочные поля (см. обзор [4]), так что в контексте М-теории общая идея о бранах возникает естественным образом (реалистичные модели бран, базирующиеся на М-теории, предложены в работах [5, 6]). Несмотря на то что феноменологические модели, которые обсуждаются ниже, могут не иметь ничего общего с p -бранами М-теории, можно надеяться, что для некоторых их свойств все же существуют аналоги в фундаментальной теории. Отметим в связи с этим, что термин "брана" имеет совершенно различные значения в разных контекстах; мы будем использовать термин "брана" для любого трехмерного многообразия с обычным веществом независимо от механизма удержания вещества на бране.

Цель настоящего обзора — используя простые модели, изложить некоторые идеи и результаты, имеющие отношение к большому и бесконечным дополнительным измерениям. Мы не будем пытаться детально разбирать подобные конструкции, так что выбор предмета обсуждения носит во многом субъективный характер, а список литературы очень неполон. Мы не будем также давать исторический обзор; история развития моделей мира на бране приведена, например, в работе [7].

2. Модель Калуцы–Клейна

Для начала обсудим основную идею моделей типа модели Калуцы–Клейна, которая послужит нам отправной точкой для дальнейшего рассмотрения. Самым простым случаем является модель одного дополнительного

измерения z , так что (x^μ, z) , где $\mu = 0, 1, 2, 3$, — это полный набор координат в $(4 + 1)$ -мерном пространстве. При низких энергиях физика будет эффективно четырехмерной, если координата z "свернута" с некоторым радиусом компактификации R . Это означает, что z пробегает значения от 0 до $2\pi R$, а точки $z = 0$ и $z = 2\pi R$ отождествлены.

Другими словами, эффективно четырехмерное пространство представляет собой цилиндр, три измерения которого x^1, x^2, x^3 бесконечны, а четвертое измерение z — окружность радиусом R . Предполагая, что цилиндр однороден и метрика на нем плоская, можно выписать полный набор волновых функций свободной безмассовой частицы на цилиндре, например решений пятимерного уравнения Клейна–Гордона:

$$\phi_{p,n} = \exp(ip_\mu x^\mu) \exp \frac{inz}{R}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь p_μ — $(3 + 1)$ -мерный импульс, а n — собственное значение (одномерного) момента импульса. Так как $\phi(x, z)$ удовлетворяет уравнению $\square_{(5)}\phi = 0$, получаем

$$p_\mu p^\mu - \frac{n^2}{R^2} = 0. \quad (1)$$

Следовательно, неоднородные состояния с $n \neq 0$ имеют энергию $E \sim 1/R$ и их нельзя возбудить в низкоэнергетических процессах. Ниже энергии $1/R$ возможны только состояния с $n = 0$, и физика при низких энергиях является четырехмерной.

С $(3 + 1)$ -мерной точки зрения каждое состояние Калуцы–Клейна (КК) можно рассматривать как частицу определенного типа, масса которой $m_n = |n|/R$ в соответствии с уравнением (1). Каждое многомерное поле соответствует "башне" состояний Калуцы–Клейна четырехмерных частиц с возрастающими массами. При низких энергиях рождаются только безмассовые (по сравнению с масштабом $1/R$) частицы, поэтому дополнительные измерения проявляются только при энергиях $E \sim 1/R$. Так как КК-партнеры обычных частиц (электронов, фотонов и др.) еще не наблюдались, энергия $1/R$ должна быть по крайней мере порядка нескольких сотен ГэВ. Таким образом, в модели Калуцы–Клейна дополнительные измерения должны быть микроскопического размера: $R \lesssim 10^{-17}$ см. Эти черты свойственны всем моделям типа модели Калуцы–Клейна. (Для большого числа дополнительных измерений компактификация может иметь место на нетривиальном многообразии или орбиформе вместо окружности.)

3. Локализация вещества

Начнем с простых теоретико-полевых моделей, иллюстрирующих возможность того, что обычное вещество действительно может удерживаться браной. Всюду в этом разделе мы будем пренебрегать гравитационным взаимодействием. Позже мы увидим, что при включении гравитационного взаимодействия могут появляться новые эффекты.

3.1. Локализация фермионов

Построить модель с локализованными фермионами достаточно легко. В самом простом случае такая модель

имеет одно дополнительное измерение z , а брана представляет собой доменную стенку [8] (см. также [9]). Рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля φ с действием

$$S_\varphi = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \varphi)^2 - V(\varphi) \right]. \quad (2)$$

Здесь индекс A пробегает все пять координат, а скалярный потенциал $V(\varphi)$ имеет два вырожденных минимума при $\varphi = \pm v$, как показано на рис. 1.

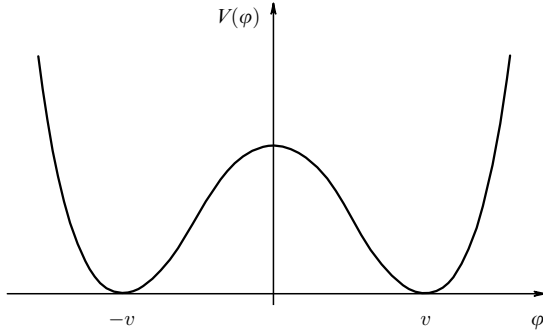


Рис. 1. Скалярный потенциал в модели (2).

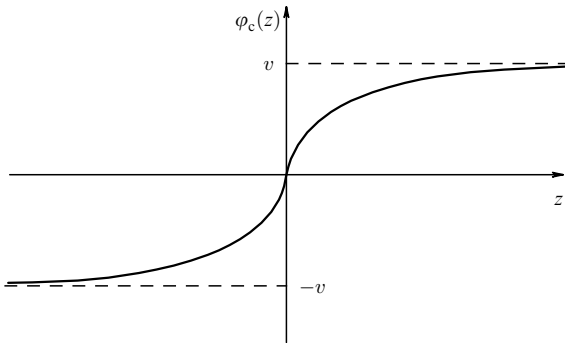


Рис. 2. Решение для доменной стенки.

Существует классическое решение $\varphi_c(z)$ — кинк, зависящее только от одной координаты (рис. 2). Это решение имеет асимптотики

$$\varphi_c(z \rightarrow +\infty) = v, \quad \varphi_c(z \rightarrow -\infty) = -v$$

и описывает доменную стенку, разделяющую два классических вакуума модели. Очевидно, что поле $\varphi_c(z)$ нарушает трансляционную инвариантность вдоль дополнительного измерения, но не нарушает четырехмерную пуанкаре-инвариантность.

Теперь добавим в модель фермионы. Напомним, что в пятимерном пространстве-времени фермионы представляют собой четырехкомпонентные столбцы. Выберем пятимерные гамма-матрицы следующим образом:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

$$\Gamma^z = -i\gamma^5,$$

где γ^μ и γ^5 — стандартные матрицы Дирака в четырехмерной теории.

Вводя потенциал взаимодействия Юкавы для фермионов со скалярным полем φ , запишем для них пятимерное действие:

$$S_\Psi = \int d^4x dz (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - h\varphi\bar{\Psi}\Psi). \quad (3)$$

Отметим, что в каждом из вакуумов скалярного поля $\varphi = \pm v$ пятимерные фермионы приобретают массу

$$m_5 = hv.$$

Рассмотрим фермионы в присутствии доменной стенки. Соответствующее уравнение Дирака таково:

$$i\Gamma^A\partial_A\Psi - h\varphi_c(z)\Psi = 0. \quad (4)$$

Благодаря тому что четырехмерная пуанкаре-инвариантность не нарушена, волновые функции характеризуются четырехимпульсом p_μ . Нас интересует спектр четырехмерных масс $m^2 = p_\mu p^\mu$. Ключевой момент состоит в том, что существует нулевая мода [10], т.е. решение уравнения (4) с $m = 0$. Для нулевой моды $\gamma^\mu p_\mu\Psi_0 = 0$, и уравнение Дирака (4) превращается в уравнение

$$\gamma^5\partial_z\Psi_0 = h\varphi_c(z)\Psi_0.$$

С четырехмерной точки зрения нулевая мода является левой:

$$\gamma_5\Psi_0 = -\Psi_0,$$

и имеет вид

$$\Psi_0 = \exp\left[-\int_0^z dz' h\varphi_c(z')\right] \psi_L(p), \quad (5)$$

где $\psi_L(p)$ — обычное решение четырехмерного уравнения Вейля. Нулевая мода (5) локализована вблизи $z = 0$, т.е. на доменной стенке, и спадает экспоненциально при больших $|z|$: $\Psi_0 \propto \exp(-m_5|z|)$.

Спектр четырехмерных масс фермионов для модели доменной стенки представлен на рис. 3. Помимо киральной нулевой моды, могут существовать (а могут и не существовать) связанные состояния, но в любом случае

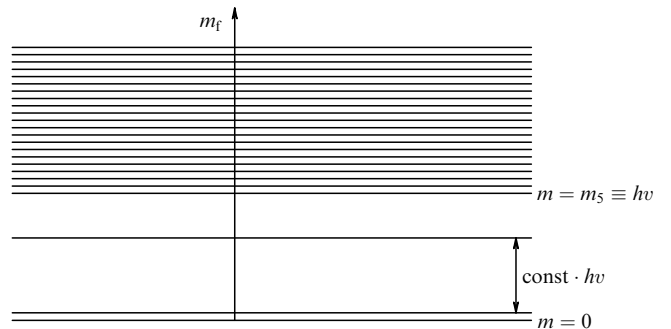


Рис. 3. Спектр четырехмерных масс фермионов для модели доменной стенки. Щель между нулевой модой ($m = 0$) и ненулевыми модами порядка hv . Непрерывный спектр начинается при $m = m_5 \equiv hv$.

массы последних пропорциональны v и велики при больших значениях v . Имеется также непрерывный спектр, который начинается при $m = m_5 \equiv hv$. Состояния непрерывного спектра соответствуют пятимерным фермионам, которые не привязаны к доменной стенке и уходят на бесконечность ($|z| = \infty$) вдоль дополнительного измерения.

Безмассовые четырехмерные фермионы, локализованные на доменной стенке, — нулевые моды — имитируют наше вещество. Они распространяются со скоростью света вдоль доменной стенки, но не перемещаются вдоль z . В реалистичных теориях фермионы, конечно, должны каким-то образом приобретать небольшие массы. Взаимодействуя при низких энергиях, они могут порождать снова только состояния в нулевых модах, так что физика будет действительно четырехмерной.

В то же время при больших энергиях взаимодействий нулевые моды могут порождать состояния из непрерывного спектра. Тогда дополнительные измерения "открываются", частицы могут покидать брану, уходить на $|z| = \infty$ (если дополнительное измерение имеет бесконечно большой размер) и буквально исчезать из нашего мира. Для четырехмерного наблюдателя (состоящего из частиц, локализованных на бране) эти высокоэнергичные процессы будут выглядеть как $e^+e^- \rightarrow$ ничто или $e^+e^- \rightarrow \gamma +$ ничто. Позже мы обсудим, возможны ли такие или подобные процессы при учете гравитационных и калибровочных взаимодействий, а также вопрос о кажущемся несохранении энергии, электрического заряда и т.д. в результате этих процессов.

Приведенная выше конструкция непосредственно обобщается на случай теории, имеющей более чем одно дополнительное измерение. Для этого вместо доменных стенок можно рассмотреть топологические дефекты больших коразмерностей: вихрь Абрикосова–Нильсена–Ольсена в шестимерном пространстве-времени ($D = 6$, число дополнительных измерений $d = 2$), монополю 'т Хофта–Полякова ($D = 7$, $d = 3$) и др. Во многих случаях существование у фермиона нулевой моды на фоне топологического дефекта гарантируется соответствующей теоремой об индексе. Явные выражения для нулевых мод фермионов в различных ситуациях представлены в работах [10–12]. В качестве дополнительного вознаграждения, как правило, получается, что четырехмерные безмассовые фермионы, локализованные на топологическом дефекте, киральны. Более того, число фермионных нулевых мод может быть больше единицы, так что из одного семейства многомерных фермионов может образоваться несколько четырехмерных семейств. Эта возможность объяснения происхождения трех поколений Стандартной модели исследована в работах [13, 14], где было обнаружено, что разумную картину масс и смешиваний можно получить вполне естественным путем.

3.2. Локализация калибровочных полей

Локализовать калибровочные поля на бране сложнее. Описанный в предыдущем разделе механизм здесь не работает (по крайней мере для безмассовых неабелевых полей) по следующей причине. Если бы нулевая мода калибровочного поля с волновой функцией $A(z)$ была локализована вблизи браны, эффективное четырехмер-

ное взаимодействие между этим и другими локализованными полями (например, фермионами) включало бы в себя интеграл перекрытия вида

$$\int dz \Psi_0^\dagger(z) A(z) \Psi_0(z), \quad (6)$$

где Ψ_0 — нулевая мода фермиона.

Как мы видели, нулевые моды фермионов могут зависеть от разных параметров: скажем, от константы взаимодействия h в примере раздела 3.1 (ширина нулевой моды явно зависит от h ; см. выражение (5)). Поэтому калибровочные заряды в эффективной четырехмерной теории могут быть разными (по крайней мере в принципе) для различных типов частиц и могут иметь произвольные значения в зависимости от интегралов перекрытия типа (6). Подобное невозможно в неабелевых калибровочных теориях, где калибровочный заряд квантован, т.е. зависит только от представления, которому принадлежат поля вещества (с точностью до фактора, общего для всех полей).

Любой способ локализации (неабелевых) безмассовых калибровочных полей должен автоматически сохранять универсальность заряда, т.е. гарантировать одинаковость калибровочных зарядов всех четырехмерных частиц (с точностью до групповых факторов) независимо от структуры их волновых функций в поперечных направлениях или других деталей механизма, удерживающего частицы на нашей бране. Насколько известно автору, в отсутствие гравитационного взаимодействия¹ единственный теоретико-полевой механизм², локализуящий калибровочные поля и гарантирующий универсальность заряда, представлен в работе [15]. В этой работе предлагалось рассматривать калибровочную теорию, которая находится в фазе конфайнмента в пространстве (объеме — от англ. bulk) вне браны и не имеет конфайнмента на бране. Тогда электрическое поле заряда на бране не распространяется во внешний объем, многомерный закон Гаусса сводится к четырехмерному закону Гаусса, и электрическое поле на бране спадает по четырехмерному закону Кулона: $E \propto 1/r^2$.

Дуальным аналогом рассматриваемой ситуации является неоднородный сверхпроводник, когда сверхпроводимость разрушается на плоскости (на этой плоскости исчезает конденсат куперовских пар). Магнитные монополи, отнесенные далеко от плоскости, будут испытывать конфайнмент (появится вихрь Абрикосова, соединяющий монополю и антимонюлю), в то время как монополи, находящиеся на плоскости, будут взаимодействовать в соответствии с двумерным законом Кулона. В этом случае универсальность заряда гарантируется конфайнментом в объеме вне браны. Если снять заряд с браны, то образуется вихрь (рис. 4), который соединяет его с браной и содержит весь поток. Заряд индуцирует на бране калибровочное поле, которое на больших расстояниях не зависит от местоположения заряда в дополнительном измерении и идентично трех-

¹ Как мы увидим ниже, при включении гравитационного взаимодействия могут появляться другие механизмы.

² Альтернативный механизм, предложенный в работах [16–18], вообще говоря, не сохраняет универсальность заряда и, следовательно, сталкивается с трудностями в неабелевом случае. Это — предмет отдельного обсуждения.

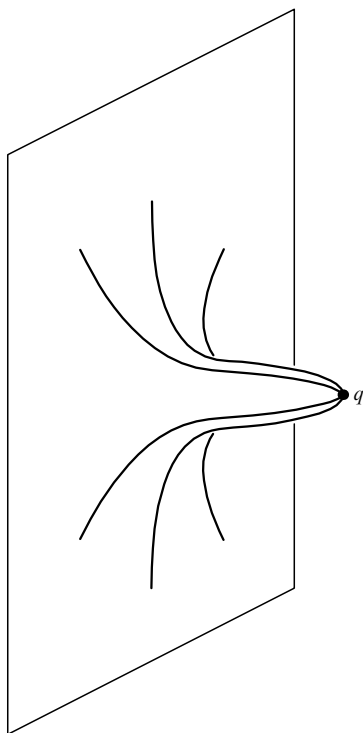


Рис. 4. Заряд q , удаленный от браны, соединяется с ней вихрем.

мерному кулоновскому полю заряда, находящегося точно на бране.

Представленную выше картину можно сделать явной [19], если рассмотреть абелеву модель дуальной сверхпроводимости при произвольном числе измерений подобно тому, как это было сделано в работе [20]. Соответствующие вычисления достаточно сложны, и мы их воспроизводить не будем.

Стоит отметить, что конфайнмент в объеме вне браны может привести к тому, что все состояния, распространяющиеся в этом объеме, будут тяжелыми. Если соответствующая массовая щель достаточно велика, то легкие частицы, несущие калибровочный заряд, будут связаны с браной и при низких энергиях моды во внешнем объеме не будут возбуждаться. Следовательно, предложенный в работе [15] теоретико-полевой механизм одновременно является способом удержания вещества (фермионов, хиггсовских бозонов и др.) на бране и представляет альтернативу механизму, обсуждавшемуся в разделе 3.1.

Тем не менее мы хотели бы предупредить читателя о том, что вопрос о существовании неабелевых теорий поля со свойством конфайнмента в пространстве-времени, имеющем размерность больше четырех, остается открытым. Таким образом, в теоретико-полевом контексте представленный в работе [15] механизм в какой-то степени повисает в воздухе. В то же время модель с конфайнментом во внешнем объеме при отсутствии конфайнмента на бране имеет много общего с локализацией калибровочных полей на D -бране в теории струн и M -теории.

4. Большие дополнительные измерения

4.1. Размер дополнительных измерений

До тех пор, пока учитываются все взаимодействия, кроме гравитационного, эффективная четырехмерность физики при низких энергиях объясняется тем, что вещество локализовано на бране. Включить в теорию гравитационное взаимодействие можно разными способами. В одном из них [21, 22] (в дальнейшем ADD-модель) пренебрегают натяжением браны (плотностью энергии на единицу трехмерного объема браны) и рассматривают компактные дополнительные измерения. При этом для гравитонов воспроизводится картина Калуцы–Клейна.

Однако размер дополнительных измерений не обязан быть микроскопическим (для простоты предполагается, что размеры всех дополнительных измерений одного порядка). Действительно, расстояния, при которых негравитационные взаимодействия перестают быть четырехмерными, определяются динамикой на бране и могут быть намного меньше R . Только гравитационное взаимодействие становится многомерным на масштабах, меньших R . Четырехмерный закон гравитационного взаимодействия экспериментально подтвержден вплоть до расстояний³ порядка 0,2 мм [23], поэтому размер дополнительных измерений может быть порядка 0,1 мм.

Указанная возможность позволяет по-новому взглянуть на проблему иерархии [21, 22], т.е. на вопрос о том, почему масштаб электрослабых взаимодействий ($M_{EW} \sim 1$ ТэВ) так сильно отличается от планковского ($M_{Pl} \sim 10^{16}$ ТэВ). Дело в том, что в многомерных теориях четырехмерная планковская масса не является фундаментальным параметром. Вместо нее фундаментальным параметром является массовый масштаб многомерного гравитационного взаимодействия, который мы обозначим как M . Именно этот параметр входит в полное действие многомерной гравитации

$$S = -\frac{1}{16\pi G_{(D)}} \int d^D X \sqrt{g^{(D)}} R^{(D)}. \quad (7)$$

Здесь

$$G_{(D)} = \frac{1}{M^{D-2}} \equiv \frac{1}{M^{d+2}}$$

— фундаментальная D -мерная гравитационная постоянная, $d = D - 4$ — число дополнительных измерений, $d^D X = d^4 x d^d z$.

В ADD-модели далекодействующее четырехмерное гравитационное взаимодействие передается нулевой модой гравитона (см. раздел 2), волновая функция которой однородна в дополнительных измерениях. При этом эффективное четырехмерное действие, описывающее далекодействующую гравитацию, получается из формулы (7), если метрика не зависит от дополнительных координат z .

³ До недавнего времени расстояние, до которого закон Ньютона был проверен экспериментально, было порядка нескольких миллиметров [24, 25]; подробно см. [26]. Новые эксперименты были стимулированы именно идеей о макроскопических дополнительных измерениях.

Интегрирование по z в (7) тривиально; в результате эффективное действие для четырехмерной гравитации записывается как

$$S_{\text{eff}} = \frac{V_{(d)}}{16\pi G_{(D)}} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)},$$

где $V_{(d)} \sim R^d$ — объем дополнительных измерений. Отсюда видно, что четырехмерная планковская масса с точностью до множителя порядка единицы равна

$$M_{\text{Pl}} = M(MR)^{d/2}. \quad (8)$$

Если размер дополнительных измерений велик по сравнению с длиной M^{-1} , планковская масса M_{Pl} оказывается значительно больше фундаментальной гравитационной массы M .

В предельном случае можно предположить, что фундаментальный масштаб гравитационного взаимодействия того же порядка, что и масштаб электрослабых взаимодействий: $M \sim 1$ ТэВ. Тогда разница между M_{Pl} и M_{EW} будет обусловлена только большим размером дополнительных измерений. Проблема иерархии, таким образом, переходит в проблему объяснения, почему R велико. Это, несомненно, интересная переформулировка.

Полагая $M \sim 1$ ТэВ, из выражения (8) можно оценить значение R :

$$R \sim M^{-1} \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{M} \right)^{2/d} \sim 10^{32/d} \times 10^{-17} \text{ см}. \quad (9)$$

Для одного дополнительного измерения из формулы (9) получается неприемлемо большое значение R .

Интересным представляется случай $d=2$, когда $R \sim 1$ мм. Это обстоятельство [21] недавно стимулировало активные поиски отклонений гравитационного взаимодействия от закона Ньютона при низких энергиях. Как мы увидим ниже, в действительности масштаб $M \sim 1$ ТэВ для $d=2$ исключен по астрофизическим и космологическим соображениям; более реалистичное значение $M \sim 30$ ТэВ дает $R \sim 1-10$ мкм. Поиски отклонений от закона Ньютона на масштабах порядка микрометра представляются трудными, но не безнадежными [27, 28].

В случае $d > 2$ формула (9) приводит к меньшим значениям R ; например, для $d=3$ и $M \sim 1$ ТэВ значение $R \sim 10^{-6}$ см. Поиски отклонений от закона Ньютона на таких малых масштабах, вероятно, безнадежны. Для $d=6$ (полная размерность пространства-времени $D=10$, как предлагает теория суперструн) значение $R \sim 10^{-12}$ см, что все еще намного больше масштаба электрослабых взаимодействий $(1 \text{ ТэВ})^{-1} \sim 10^{-17}$ см. Тем не менее отметим, что масштабы компактификации разных дополнительных измерений не обязаны быть одного порядка. Если одни из них намного меньше других, то отклонение от закона Ньютона в пространстве с $d > 2$ может быть таким же, как и при $d=2$. Другими словами, нарушение закона Ньютона может произойти на расстояниях порядка микрометра даже для $d > 2$.

4.2. Легкие КК-гравитоны: ускорители, космология и астрофизика

Если фундаментальный масштаб гравитационных взаимодействий действительно порядка нескольких ТэВ, то

дополнительные измерения могут проявиться в экспериментах на ускорителях при энергиях, приближающихся к этому значению. В обсуждаемой ниже модели только гравитоны способны "почувствовать" дополнительные измерения, поскольку именно они могут распространяться в объеме вне браны. Следовательно, отличительной чертой такого сценария является возможность излучать гравитоны в пространство за пределы браны. Этот процесс сильно зависит от энергии в системе центра масс сталкивающихся на бране частиц и имеет большую вероятность при энергиях, сравнимых с фундаментальным масштабом.

С точки зрения четырехмерного наблюдателя излучение гравитонов в дополнительные измерения соответствует рождению гравитонов Калуцы–Клейна (КК-гравитонов). Процесс такого типа показан на рис. 5.

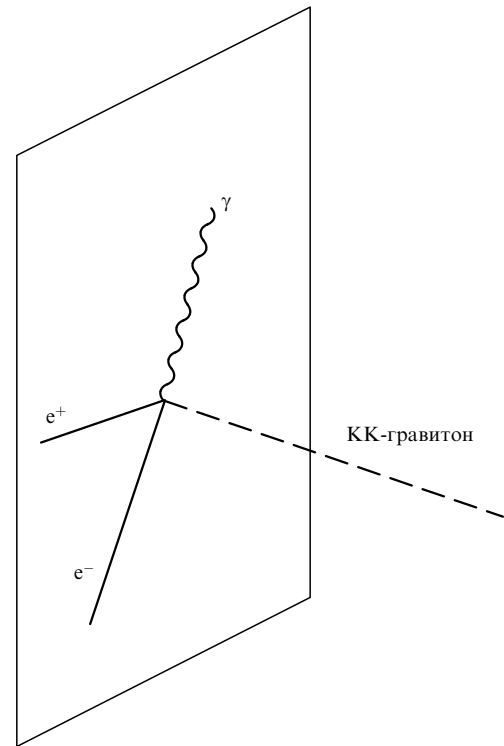


Рис. 5. Излучение гравитона в дополнительные измерения (или рождение КК-гравитона) в процессе $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{гравитон}$. Электрон, позитрон и фотон распространяются вдоль браны, гравитон уходит за ее пределы.

Каждый КК-гравитон взаимодействует с веществом на бране с интенсивностью, характерной для четырехмерного гравитационного взаимодействия. Действительно, квадратичное действие для каждого типа КК-гравитонов и их взаимодействие с веществом на бране схематично (опуская все индексы, тензорную структуру и пр.) можно записать в виде

$$S_{\text{n}} = \frac{1}{16\pi G_{(D)}} \int d^D X [\partial h(x) \exp(i\mathbf{q}_n \mathbf{z})]^* [\partial h(x) \exp(i\mathbf{q}_n \mathbf{z})] + \int d^4x h(x) T(x).$$

Здесь \mathbf{q}_n — дискретный импульс вдоль дополнительных измерений (в случае тороидальной компактификации с

одинаковыми размерами дополнительных измерений импульс $\mathbf{q}_n = \mathbf{n}/R$, где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$, а $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи на бране. При интегрировании по z перед первым слагаемым опять появляется множитель $V_{(d)}$. Таким образом, взаимодействие КК-гравитонов каждого типа определяется четырехмерной планковской массой.

Хотя каждый КК-гравитон является слабо взаимодействующим, полная интенсивность излучения КК-гравитонов при энергиях порядка M велика из-за большого числа состояний. Рожденные КК-гравитоны детектировать невозможно, так что типичные процессы на ускорителе будут сопровождаться видимой потерей энергии; например,

$$e^+e^- \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T \quad (10)$$

или

$$q\bar{q} \rightarrow \text{струя} + \cancel{E}_T. \quad (11)$$

Сечение рождения КК-гравитонов определенного типа в процессе (10) порядка α/M_{Pl}^2 , так что полное сечение

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T) \sim \frac{\alpha}{M_{\text{Pl}}^2} N(E),$$

где E — энергия в системе центра масс, а $N(E)$ — число КК-гравитонов с массами ниже энергии E . Поскольку импульс вдоль дополнительных измерений \mathbf{q}_n квантован в единицах $1/R$, а массы КК-гравитонов $m_n = |\mathbf{q}_n|$, имеем

$$N(E) \sim (ER)^d. \quad (12)$$

Используя соотношение (8), получаем, что полное сечение

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma + \cancel{E}_T) \sim \frac{\alpha}{E^2} \left(\frac{E}{M}\right)^{d+2}.$$

Следовательно, сечение действительно быстро растет с энергией в системе центра масс и при $E \sim M$ становится сравнимым с сечением электромагнитных взаимодействий.

Процессы (10) и (11) детально изучались в работах [29, 30]. Было показано, что ускоритель LHC в CERN, так же как и e^+e^- -коллайдеры с энергией в системе центра масс порядка 1 ТэВ, будет в состоянии обнаружить фундаментальный масштаб гравитационных взаимодействий M вплоть до нескольких ТэВ (точное значение зависит от числа дополнительных измерений d).

Другой эффект дополнительных измерений в ускорительной физике состоит в обмене виртуальными КК-гравитонами [34, 29, 31–33]. Поиск этого процесса на проектируемых коллайдерах также будет чувствительным к масштабу гравитационных взаимодействий M в диапазоне нескольких ТэВ.

По существу, легкие КК-гравитоны являются модельно-независимой особенностью ADD-модели (см., однако, [35]). Если действительно $M \sim 1$ ТэВ — фундаментальный масштаб теории, то можно ожидать, что физика при таких энергиях будет очень богатой; в частности, в этом случае возможно существование новых частиц с массами порядка M , находящихся на

бране или распространяющихся в объеме вне браны. Эти частицы могут довольно сильно взаимодействовать с обычным веществом; например, они могут нести калибровочный заряд и вести себя подобно тяжелым электронам, кваркам, векторным или скалярным бозонам. Их свойства зависят от конкретной модели, но поиски таких состояний в настоящих и будущих экспериментах на ускорителях в любом случае представляются интересными. Возможность обнаружения тяжелых состояний в контексте теории струн обсуждалась в работах [36–38].

Легкие КК-гравитоны могут заметно проявляться в космологии и астрофизике. Они должны были рождаться при достаточно высоких температурах в ранней Вселенной и повлиять на модель первичного нуклеосинтеза. Как мы увидим ниже, отсутствие противоречий с первичным нуклеосинтезом и современным составом вещества во Вселенной накладывает сильные ограничения на максимальную температуру Вселенной [34].

При достаточно высоких температурах ($T \gg 1/R$) частота рождения (в единицу времени на единицу объема) КК-гравитонов с массой $m_n \lesssim T$ равна

$$\Gamma \sim \frac{T^6}{M_{\text{Pl}}^2}.$$

Здесь множитель M_{Pl}^{-2} возникает из-за константы взаимодействия между гравитонами и веществом, а зависимость от температуры восстанавливается из соображений размерности. Учитывая число КК-состояний (см. формулу (12)), получаем оценку полной частоты рождения КК-гравитонов:

$$\frac{dn}{dt} \sim \frac{T^6}{M_{\text{Pl}}^2} (TR)^d \sim T^4 \left(\frac{T}{M}\right)^{2+d} \quad (13)$$

(это соотношение следует из (8)).

В Стандартной модели расширяющейся Вселенной⁴ имеем

$$H = \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}^*}, \quad (14)$$

где $M_{\text{Pl}}^* = M_{\text{Pl}}/1,66g_*^{1/2} \sim 10^{18}$ ГэВ (g_* — эффективное число степеней свободы). Можно найти полную плотность числа КК-гравитонов, образовавшихся за хаббловское время H^{-1} :

$$n(T) \sim T^2 M_{\text{Pl}}^* \left(\frac{T}{M}\right)^{2+d}.$$

Даже если частота рождения (13) мала (при $T \ll M$), полное число КК-гравитонов может быть велико благодаря малой скорости расширения (14).

Если буквально принять ADD-модель, т.е. предположить, что КК-гравитоны выживают в объеме вне браны, то возникает сильное ограничение на максимальную температуру T_* , которую могла бы иметь Вселенная после инфляции. Большинство гравитонов, образовав-

⁴ Если КК-гравитоны определяли расширение Вселенной, то уравнение (13) не выполняется. Легко видеть, что такой сценарий нежизнеспособен, так что мы не будем останавливаться на этом вопросе.

шихся при температуре T_* , имеют массу порядка T_* . При более низких температурах гравитоны становятся нерелятивистскими и плотность их числа падает, как T^3 .

В эпоху первичного нуклеосинтеза ($T_{\text{NS}} \sim 1$ МэВ) массовая плотность КК-гравитонов должна быть порядка

$$\rho_{\text{grav}}(T_{\text{NS}}) \sim \left(\frac{T_{\text{NS}}}{T_*}\right)^3 T_* n(T_*) \sim T_{\text{NS}}^3 M_{\text{Pl}}^* \left(\frac{T_*}{M}\right)^{2+d}. \quad (15)$$

Из требования, чтобы плотность энергии (15) не превышала плотность энергии безмассовых частиц (условие стандартного первичного нуклеосинтеза), т.е. чтобы $\rho_{\text{grav}}(T_{\text{NS}}) \lesssim T_{\text{NS}}^4$, получаем, что

$$T_* \lesssim M \left(\frac{T_{\text{NS}}}{M_{\text{Pl}}^*}\right)^{1/(2+d)} \sim M \times 10^{-21/(2+d)}.$$

Для $d = 2$ и $M = 1$ ТэВ находим, что максимальная температура не должна превышать 10 МэВ, и даже для $d = 6$ мы имеем довольно низкую максимальную температуру: $T_* \lesssim 1$ ГэВ.

Еще более сильные ограничения на температуру T_* получаются из требования, чтобы современная массовая плотность КК-гравитонов не превышала реальную плотность энергии, которая близка к критической плотности современной Вселенной, а также из требования, чтобы распад КК-гравитонов не давал слишком большого фона диффузных фотонов [34]. Для $d = 2$ простой факт, что во Вселенной была эпоха нуклеосинтеза, т.е. что температура T_* была не ниже нескольких МэВ, сдвигает фундаментальный масштаб гравитационных взаимодействий в область выше нескольких десятков ТэВ.

Низкая максимальная температура Вселенной (в диапазоне 10 МэВ–1 ГэВ) непосредственно не противоречит космологическим наблюдениям. Надежно известно, что во Вселенной имела место эпоха первичного нуклеосинтеза, но нет никаких наблюдательных фактов об эпохах с более высокой температурой⁵. В случае низкой температуры T_* приходится привлекать экзотические механизмы бариогенезиса и инфляции, которые в принципе возможны, однако не очень привлекательны.

Отметим, что выше предполагалось, что до эпохи нуклеосинтеза КК-гравитоны не распались. Это верно, если с гравитонами, испущенными за пределы браны, ничего не происходит. Темп распада гравитонов с массой порядка T_* на обычные частицы (фотоны, e^+e^- -пары и др.) порядка T_*^3/M_{Pl}^2 , что для $T_* \lesssim 1$ ГэВ (и даже значительно больших T_*) намного меньше скорости расширения до и во время нуклеосинтеза $H \sim T_{\text{NS}}^2/M_{\text{Pl}}^*$.

Можно придумать механизм более быстрого распада КК-гравитонов на какие-нибудь безмассовые частицы вне браны (или на другой бране). В этом случае плотность энергии безмассовых частиц будет меняться, как T^4 , космологические ограничения на температуру T_* могут быть слабее, но значение T_* должно быть все же достаточно низким. Действительно, вместо (15) теперь нужно написать

$$\rho_{\text{extra}}(T_{\text{NS}}) \sim \left(\frac{T_{\text{NS}}}{T_*}\right)^4 T_* n(T_*) \sim \frac{T_{\text{NS}}^4}{T_*} M_{\text{Pl}}^* \left(\frac{T_*}{M}\right)^{2+d}.$$

Требую снова, чтобы $\rho_{\text{extra}}(T_{\text{NS}}) \lesssim T_{\text{NS}}^4$, получаем

$$T_* \lesssim M \left(\frac{M}{M_{\text{Pl}}^*}\right)^{1/(2+d)}.$$

Для $M \sim 1$ МэВ и $d = 2$ вновь приходим к $T_* \lesssim 10$ МэВ, а для $d = 6$ имеем $T_* \lesssim 10$ ГэВ. Эта модельно-независимая оценка показывает, что максимальная температура должна быть достаточно низкой независимо от судьбы излучаемых гравитонов.

Легкие КК-гравитоны потенциально влияют и на астрофизику, так как они могут рождаться в звездах или сверхновых, уносить при этом энергию, что может приводить к противоречиям с наблюдениями [34]. Сильные ограничения на фундаментальный масштаб M получаются только для случая $d = 2$, поскольку для большего числа дополнительных измерений КК-состояния с малыми массами подавлены (см. уравнение (12)). В этом случае из требования, чтобы при взрыве сверхновой 1987a излучение гравитонов не было преобладающим механизмом охлаждения (иначе не возникло бы нейтринное излучение, что противоречит наблюдениям), находим [34, 40–42]

$$M > 30 \text{ ТэВ},$$

что сравнимо с космологическими ограничениями.

Отметим, что это ограничение получается без каких бы то ни было предположений о времени жизни КК-гравитонов. Как уже упоминалось, при таком высоком значении M отклонение от закона Ньютона допустимо только на масштабах, значительно меньших 1 мм: в диапазоне от 1 до 10 мкм. Еще более сильные ограничения [43] дает предположение о том, что КК-гравитоны, образованные в процессе коллапса сверхновой, распадаются на обычные фотоны (а, скажем, не на частицы, живущие на других бранах).

Таким образом, ADD-сценарий предсказывает интересные явления в диапазоне энергий несколько ТэВ. Его модельно-независимое свойство состоит в существовании легких КК-гравитонов, которые могут проявиться на ускорителях либо непосредственно в процессах (10) и (11), либо косвенно: через контактные взаимодействия, вызванные обменом виртуальными КК-гравитонами. Модельно-зависимым свойством ADD-сценария является существование тяжелых партнеров обычных частиц. Однако космология в ADD-модели выглядит не очень привлекательно: максимальная температура Вселенной должна быть ниже 10 ГэВ, так что приходится полагаться на достаточно экзотические механизмы бариогенезиса и инфляции.

4.3. Стерильные нейтрино вне браны

Могут существовать и другие легкие поля (не только гравитоны), не привязанные к бране и свободно распространяющиеся вне ее. Наличие у них большого числа КК-состояний с очень малыми массами будет феноменологически допустимым, только если эти поля нейтральны относительно калибровочной группы Стандартной модели $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Интересным кандидатом в данном случае является нейтральный фермион, взаимодействующий с обычным левым нейтрино и хиггсовским полем Стандартной модели, которые оба локализованы на бране. Это взаимодействие естествен-

⁵ Подробно это обсуждалось в работе [39].

ным образом приводит к малым дираковским массам нейтрино [44, 45].

D -мерное действие, включающее D -мерные поля Ψ_ν и H с нулевыми модами, которые описывают четырехмерное нейтрино и хиггсовский бозон соответственно, а также нейтральный фермион Ψ в объеме вне браны, выглядит следующим образом:

$$S_{(D)} = \int d^4x d^d z \bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - \kappa \int d^4x d^d z \bar{\Psi}_\nu H \Psi + \text{h.c.} + \dots \quad (16)$$

где многоточие обозначает члены, не содержащие нейтральный фермион Ψ . Константа взаимодействия имеет размерность (масса) $^{-d/2}$.

Рассмотрим эффективную четырехмерную теорию обычного нейтрино и поля Хиггса, взаимодействующих с КК-состояниями фермиона из пространства вне браны. Для Ψ_ν и H запишем

$$\begin{aligned} \Psi_\nu(x, z) &= v(x)\psi_0(z), \\ H(x, z) &= h(x)H_0(z), \end{aligned} \quad (17)$$

где $v(x)$ и $h(x)$ — четырехмерные поля, а $\psi_0(z)$ и $H_0(z)$ — волновые функции в поперечном направлении, которые сконцентрированы вблизи браны ($z = 0$) и нормированы на единицу.

Раскладывая нейтральный фермион, распространяющийся вне браны, по КК-состояниям, имеем

$$\Psi(x, z) \propto \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \psi_{\mathbf{n}}(x) \frac{1}{R^{d/2}} \exp\left(\frac{i\mathbf{n}z}{R}\right).$$

Здесь множитель $R^{-d/2}$ представляет собой каноническую нормировку четырехмерной волновой функции фермиона $\psi_{\mathbf{n}}(x)$. Тогда эффективная четырехмерная теория описывается действием

$$S_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \int d^4x \left(\bar{\psi}_{\mathbf{n}} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\mathbf{n}} - m_{\mathbf{n}} \bar{\psi}_{\mathbf{n}} \psi_{\mathbf{n}} - \frac{\kappa'}{R^{d/2}} \bar{\nu}_L h \psi_{\mathbf{n}, R} \right) + \dots \quad (18)$$

где $m_{\mathbf{n}} \sim |\mathbf{n}|/R$. Предполагается, что с четырехмерной точки зрения нулевая мода нейтрино является левой, что обязательно для реалистичной теории и естественно для теоретико-полевых моделей (см. раздел 3).

Константа взаимодействия κ' в действии (18) включает в себя интеграл перекрытия $\psi_0(z)$ и $H_0(z)$, который не содержит множителей, зависящих от R , и, следовательно, порядка единицы, так что

$$\kappa' \sim \kappa.$$

Когда хиггсовское поле h приобретает вакуумное среднее $v \sim M_{\text{EW}}$, последнее слагаемое в (18) приводит к появлению дираковской массы нейтрино

$$m_{\nu, LR} = \frac{\kappa' v}{R^{d/2}}. \quad (19)$$

Для $n = 0$ (самое нижнее КК-состояние фермиона вне браны) она является единственным массовым членом в эффективной теории. Это означает, что дираковская масса нейтрино $m_{\nu, LR} \ll 1/R$ (т.е. $m_{\nu, LR} \ll m_{\mathbf{n}}$ для $\mathbf{n} \neq 0$), КК-состояния с $\mathbf{n} \neq 0$ не существенны при очень низких

энергиях, а четырехмерная теория сводится к теории дираковских нейтрино, включающей в себя массу (19) и другие невзаимодействующие стерильные фермионы.

Дираковская масса (19) оказывается малой, поскольку подавлена размером дополнительных измерений. Выбирая для оценки

$$\kappa' \sim \kappa \sim M^{-d/2},$$

где M — все тот же фундаментальный гравитационный масштаб, находим

$$m_{\nu, LR} \sim \frac{v}{(MR)^{d/2}}.$$

Вспоминая соотношение (8), получаем

$$m_{\nu, LR} \sim \frac{vM}{M_{\text{Pl}}},$$

что порядка 10^{-4} эВ для значений M , равных нескольким ТэВ. Эта оценка показывает, что массы нейтрино могут естественным образом попадать в диапазон, соответствующий экспериментальным данным по солнечным и атмосферным нейтрино.

Стоит отметить, что причина малых масс нейтрино в описанной модели та же, по которой мала четырехмерная гравитационная постоянная Ньютона. Поля вне браны простираются по всему пространству дополнительных измерений и очень слабо взаимодействуют с веществом на бране.

Усовершенствование изложенного подхода привело к некоторым интересным эффектам [45–50]. Взаимодействие Юкавы в выражении (16) в общем случае не является диагональным по отношению к ароматам. Это свойство, в особенности смешивание нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ с более высокими КК-состояниями $\psi_{\mathbf{n}}$, часто приводит к нетривиальным нейтринным осцилляциям. Было обнаружено, что в достаточно широком диапазоне параметров они согласуются с экспериментальными данными по осцилляциям нейтрино. Будущие эксперименты позволят проверить, какой из механизмов (этот или обычный четырехмерный) отвечает за нейтринные осцилляции.

Существуют сильные ограничения на представленную выше модель, особенно из наблюдений нейтрино от сверхновой 1987а [48, 49]. Эти и другие вопросы обсуждаются, например, в работе [51].

4.4. Объединение взаимодействий

Привлекательное свойство четырехмерной минимальной суперсимметричной Стандартной модели (MSSM) и ее многочисленных расширений состоит в том, что бегущие калибровочные константы связи α_i (где $i = 1, 2, 3$), соответствующие калибровочным группам $U(1)_Y, SU(2)_L$ и $SU(3)_C$, объединяются на масштабе Великого объединения $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ ГэВ (здесь α_1 определяется как $(5/3)\alpha_Y$). Это происходит благодаря логарифмическому поведению констант взаимодействий в соответствии с ренормгруппой. Объединение калибровочных взаимодействий является очень сильным аргументом в пользу MSSM и Великого объединения. Кажется очевидным, что в теориях с большими дополнительными измерениями этот довод теряет силу, поскольку гравитационное взаимодействие становится сильным при относительно низких энергиях, так что при

энергиях, на много порядков меньших M_{GUT} , начинается уже совершенно новая физика (струны).

Тем не менее положение не безнадежно. Исследовались по крайней мере две возможности объединения калибровочных констант в теориях с большими дополнительными измерениями. В одной из них используют степенное поведение констант связи в многомерных теориях [52], в другой апеллируют к безмассовым полям, распространяющимся в двух больших измерениях [53–55], что приводит к логарифмическому объединению.

Идея степенного объединения состоит в следующем. Предположим, что существует масштаб энергий μ_0 , при котором дополнительные измерения становятся доступными для калибровочных, хиггсовых, а также, возможно, кварковых и лептонных полей MSSM. Другими словами, предположим, что частицы MSSM могут покинуть нашу брану, если их энергия выше μ_0 . Тогда при более низких энергиях MSSM является эффективно четырехмерной, в то время как при больших энергиях она становится D -мерной. На языке четырехмерного пространства у каждой MSSM-частицы есть свои КК-партнеры, массы которых начинаются со значения μ_0 . При этом гравитационный масштаб M должен восприниматься как масштаб ультрафиолетового обрезания для D -мерной MSSM.

Поскольку MSSM неперенормируема в пространстве-времени, имеющем более чем четыре измерения, калибровочные константы взаимодействий при низких энергиях сильно зависят (по степенному закону) от M и μ_0 . В этом смысле калибровочные константы эволюционируют по степенному закону на масштабах выше μ_0 . Вопрос только в том, существуют ли такие M и μ_0 в области нескольких ТэВ, чтобы калибровочные константы взаимодействия объединялись на масштабе ультрафиолетового обрезания:

$$\alpha_1(M) = \alpha_2(M) = \alpha_3(M) \equiv \alpha'_{\text{GUT}}, \quad (20)$$

а их значения при низких энергиях совпадали с экспериментально измеренными, а именно

$$\begin{aligned} \alpha_Y^{-1}(M_Z) &= 98,3, \quad \text{т.е.} \quad \alpha_1^{-1}(M_Z) = \frac{3}{5} \alpha_Y^{-1}(M_Z) = 59,0, \\ \alpha_2^{-1}(M_Z) &= 29,6, \\ \alpha_3^{-1}(M_Z) &= 8,5. \end{aligned} \quad (21)$$

В этом случае соотношение (20) заменило бы общепринятое объединение взаимодействий и означало бы, что можно построить теорию Великого объединения на энергиях выше фундаментального масштаба M . Именно степенной закон эволюции констант связи делает эту возможность вполне вероятной.

Рассмотрим теорию в d плоских дополнительных измерениях, свернутых в тор, так же как это делалось выше. Самосогласованное включение MSSM в многомерную теорию требует существования дополнительных частиц выше масштаба μ_0 . Минимальное расширение [52] состоит в том, что башня КК-состояний имеет эффективную $N = 2$ суперсимметрию: с четырехмерной точки зрения существует векторный $N = 2$ супермультиплет для каждой калибровочной группы, $N = 2$ гипермультиплет для двух хиггсовских полей и η семейств $N = 2$ гипермультиплетов кварков и лептонов.

С таким составом материи однопетлевое соотношение между низкоэнергетическими значениями калибровочных констант и их значениями на масштабе обрезания выглядит следующим образом:

$$\alpha_i^{-1}(M) = \alpha_i^{-1}(M_Z) - \frac{b_i}{2\pi} \ln \frac{M}{M_Z} + \frac{\tilde{b}_i}{2\pi} \ln \frac{M}{\mu_0} - \frac{\tilde{b}_i \pi^{d/2-1}}{d^2 \Gamma(d/2)} \left[\left(\frac{M}{\mu_0} \right)^d - 1 \right], \quad (22)$$

где $(b_1, b_2, b_3) = (33/5, 1, -3)$ — обычные для MSSM коэффициенты однопетлевой β -функции, а

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) = \left(\frac{3}{5} + 4\eta, -3 + 4\eta, -6 + 4\eta \right)$$

— "коэффициенты β -функции" многомерной теории. Степенная зависимость $\alpha_i^{-1}(M_Z) - \alpha_i^{-1}(M)$ от M и μ_0 , очевидная из уравнения (22), представляет собой не что иное, как степенную эволюцию констант, которая отражает размерность констант в $(D = d + 4)$ -мерных пространствах.

Удивительно то, что объединение взаимодействий действительно имеет место [52], как это схематично изображено на рис. 6. Оно происходит независимо от числа дополнительных измерений d и числа кварк-лептонных поколений η , распространяющихся за пределами браны. А именно, для данного значения M (при фиксированных d и η) параметр μ_0 можно выбрать так, что будет выполняться соотношение (20). Так же как и в четырехмерной MSSM, это свойство является нетривиальным в теориях с большими измерениями. Выбирая один параметр μ_0 , можно удовлетворить сразу двум уравнениям. Объединение происходит при значениях μ_0 чуть ниже (в пределах одного порядка величины) M , а константы связи очень быстро эволюционируют выше μ_0 .

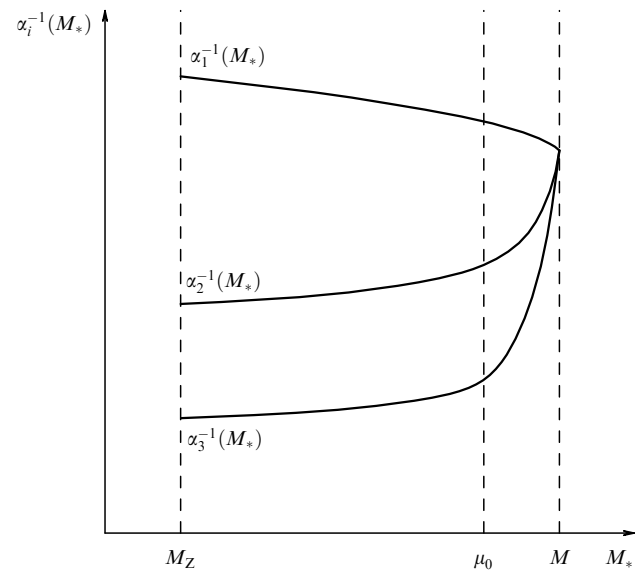


Рис. 6. Объединение калибровочных взаимодействий при наличии дополнительных измерений. Для фиксированных $\alpha_i(M_Z)$ калибровочные константы на масштабе обрезания M_* зависят от него логарифмически при $M_* < \mu_0$ и по степенному закону при $M_* > \mu_0$. Объединение происходит при $M_* = M$, где M — фундаментальный масштаб.

Константа калибровочного взаимодействия в точке объединения заведомо меньше единицы:

$$\alpha_i(M) \equiv \alpha'_{\text{GUT}} \ll 1.$$

В [52] приведены аргументы в пользу того, что картина не изменится, если учесть более высокие петли. Следовательно, вопреки наивному ожиданию свойство объединения констант связи может быть присуще теориям с большими дополнительными измерениями, хотя вместо логарифмического объединения в этих теориях имеет место степенное объединение взаимодействий.

Стоит отметить, что в теориях с большими дополнительными измерениями для объединения калибровочных констант, вообще говоря, суперсимметрии не требуется. В некоторых несуперсимметричных многомерных расширениях Стандартной модели калибровочные взаимодействия также объединяются по степенному закону [52]. Таким образом, обе мотивировки для суперсимметрии — стабилизация электрослабого масштаба и объединение калибровочных взаимодействий — не являются столь же сильными в теориях с большими дополнительными измерениями, как в четырехмерных теориях.

Тем не менее у степенного объединения есть свои трудности. Техническая проблема состоит в том, что такая картина нестабильна по отношению к эффектам, появляющимся при добавлении возможных неперенормируемых операторов на масштабе обрезания. Эстетически не очень приятно то, что приходится отказываться от "старой" теории объединения: логарифмическое объединение, присущее MSSM, выглядит чисто случайным.

Логарифмическая эволюция констант калибровочных взаимодействий в теориях с большими дополнительными измерениями может появиться довольно необычным образом [53–55]. Предположим в духе теории струн, что калибровочные константы являются на самом деле безмассовыми скалярными полями $\alpha_i^{-1}(z)$, распространяющимися в двух больших дополнительных измерениях⁶. Пусть также, помимо нашей браны, существует другая брана, которая является источником этих полей и на которой имеется объединение взаимодействий:

$$\alpha_i^{-1}(z_{\text{source}}) = \alpha_0^{-1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Естественно считать, что расстояние между бранами по порядку величины совпадает с размером R дополнительных измерений. Так как двумерный пропагатор имеет логарифмическое поведение, значение $\alpha_i^{-1}(z)$ на нашей бране⁷ равно

$$\alpha_i^{-1}(z_{\text{our}}) = \alpha_0^{-1} - \frac{c_i}{2\pi} \ln(|z_{\text{our}} - z_{\text{source}}|M) \quad (23)$$

с некоторой константой c_i , где масштаб M появляется в логарифме из соображений размерности. Для $|z_{\text{our}} - z_{\text{source}}| \sim R \sim M_{\text{Pl}}/M^2$, как следует из уравнения (8) с $d = 2$, логарифмический член

$$-\frac{c_i}{2\pi} \ln \frac{M_{\text{Pl}}}{M} \quad (24)$$

⁶ Число дополнительных измерений не обязано быть равным двум; важно только, что скалярные поля являются двумерными [55].

⁷ Здесь $\alpha_i^{-1}(z_{\text{our}})$ и α_0^{-1} — значения констант на фундаментальном масштабе M .

является почти тем же логарифмом, что и $\ln(M_{\text{GUT}}/M_{\text{EW}})$, возникающий в обычных теориях Великого объединения.

В отличие от обычной ренормгрупповой эволюции "бег" констант, описываемый уравнением (23), представляет собой инфракрасный эффект. Однако он работает правильно: значение константы калибровочных взаимодействий в нашем мире отличается от "фундаментального" значения α_0^{-1} на большой логарифм. Удивительно то, что в некоторых струнных конструкциях бран константы в уравнении (23) в точности совпадают с коэффициентами β -функции в теории, локализованной на нашей бране!

Обсуждение указанного выше свойства и его отношение к струнным дуальностям выходит за рамки этого обзора (читатель может обратиться к [55] и ссылкам там). Мы только подчеркнем, что это свойство открывает дорогу к объединению калибровочных взаимодействий, а не только к логарифмической эволюции констант связи. Хотя феноменологически приемлемая модель с подобными свойствами, включающая в себя MSSM, на нашей бране еще не построена, изложенный выше механизм определенно является многообещающим, так как он указывает на то, что логарифмическое объединение, существующее в MSSM, может иметь близкие аналоги в теориях с большими дополнительными измерениями.

4.5. Проблема стабильности протона

Представленные выше рассуждения приводят нас к еще одной проблеме в теориях с большими (и бесконечными) дополнительными измерениями — к потенциально очень быстрому распаду протона. Эта проблема появляется, если встать на точку зрения предыдущего раздела и рассматривать объединение калибровочных взаимодействий как сигнал к Великому объединению сильных и электрослабых взаимодействий на масштабе M .

В обычных теориях Великого объединения операторы размерности 6 приводят к распаду протона с временем жизни⁸

$$\tau_p \sim \frac{1}{\alpha_{\text{GUT}}^2 M_p} \left(\frac{M_{\text{GUT}}}{M_p} \right)^4. \quad (25)$$

При $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ ГэВ оценка (25) не противоречит экспериментальным ограничениям на стабильность протона, однако если M_{GUT} сдвинута к M (т.е. составляет примерно несколько ТэВ в ADD-модели, обсуждавшейся выше) эта оценка дает слишком малое время жизни протона. Великое объединение на масштабе M должно произойти каким-то образом так, чтобы распад протона был на много порядков подавлен по отношению к оценкам, вытекающим из соображений размерности.

В более общем случае глобальные квантовые числа, такие как лептонное и барионное числа, не обязательно должны сохраняться при включении эффектов квантовой гравитации. При фундаментальном гравитационном масштабе $M_{\text{Pl}} \sim 10^{19}$ ГэВ оценка из соображений размер-

⁸ В суперсимметричных теориях Великого объединения распад протона может также происходить из-за операторов размерности 5. Мы рассматриваем оценку (25) просто в качестве иллюстрации.

ности, аналогичная (25), а именно

$$\tau_p \sim \frac{1}{M_p} \left(\frac{M_{Pl}}{M_p} \right)^4,$$

показывает, что нестабильность протона из-за эффектов гравитации не опасна. В то же время, если фундаментальный квантово-гравитационный масштаб составляет несколько ТэВ, та же оценка дает неприемлемо малое время жизни протона. Поэтому приходится привлекать специальные механизмы, такие как дискретные калибровочные симметрии [56–60], чтобы запретить распад протона в теориях с большими дополнительными измерениями.

5. Нефакторизуемая геометрия

5.1. Стянутые дополнительные измерения

До сих пор мы пренебрегали плотностью энергии самой браны, т.е. ее собственным гравитационным полем. Сейчас мы покажем, что гравитирующая брана индуцирует в многомерном пространстве интересную геометрию и дает много новых эффектов.

С точки зрения расстояний, много больших толщины браны, последняя представляет собой источник гравитационного поля в виде дельта-функции. В простейшем случае гравитирующая брана характеризуется одним параметром — плотностью энергии на единицу трехмерного объема σ , которая называется также натяжением браны. Мы будем рассматривать преимущественно случай одного дополнительного измерения, когда пятимерное действие для гравитационного взаимодействия в присутствии браны имеет вид

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G_{(5)}} \int d^4x dz \sqrt{g^{(5)}} R^{(5)} - \Lambda \int d^4x dz \sqrt{g^{(5)}} - \sigma \int d^4x \sqrt{g^{(4)}}, \quad (26)$$

где Λ — пятимерная космологическая постоянная, а интеграл в последнем слагаемом уравнения (26) берется вдоль мировой поверхности 3-браны с индуцированной метрикой $g_{\mu\nu}^{(4)}$.

Теперь достаточно легко получить уравнения поля. Вне браны — это стандартные пятимерные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной Λ . На поверхности браны последнее слагаемое уравнения (26) приводит к условиям сшивки Израэля [61] (педагогическое изложение условий Израэля представлено в [62]). Примечательно, что система уравнений (26) имеет решение, сохраняющее четырехмерную пуанкаре-инвариантность. Это обстоятельство активно обсуждалось в связи с D-бранами (см., например, [63] и ссылки там), а его отношение к феноменологическим теориям подчеркивалось в [64–67].

Существование четырехмерно-плоского решения требует тонкой подстройки Λ и σ , а именно пятимерная космологическая постоянная должна быть отрицательной и равной [66]

$$\Lambda = -\frac{4\pi}{3} G_{(5)} \sigma^2. \quad (27)$$

(Отметим, что параметры в соотношении (27) имеют размерности $[\Lambda] = M^5$, $[\sigma] = M^4$, $[G_{(5)}] = M^{-3}$.) Эта тонкая настройка очень похожа на подгонку космологической постоянной к нулю в стандартной четырехмерной гравитации.

Действительно, если равенство (27) не выполняется, геометрия на бране будет де-ситтеровской (или анти-де-ситтеровской), а не плоской. Если равенство (27) выполняется, то четырехмерно-плоское решение имеет вид [66]

$$ds^2 = a^2(z) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2. \quad (28)$$

Здесь $\eta_{\mu\nu}$ — четырехмерная метрика Минковского, масштабный фактор равен

$$a(z) = \exp(-k|z|), \quad k = \frac{4\pi}{3} G_{(5)} \sigma, \quad (29)$$

а брана расположена в точке $z = 0$.

Чтобы убедиться, что метрика (28) есть действительно решение полной системы уравнений Эйнштейна, запишем

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu}^{(5)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(5)} R^{(5)} = g_{\mu\nu}^{(5)} \left[-3 \frac{a''}{a} - 3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right], \\ G_{z\mu} &= 0, \\ G_{zz} &= g_{zz}^{(5)} \left[-6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где штрих обозначает производную по z . Теперь легко видеть, что уравнения Эйнштейна

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi G_{(5)} \Lambda g_{\mu\nu}^{(5)} + 8\pi G_{(5)} \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z), \\ G_{z\mu} &= 0, \\ G_{zz} &= 8\pi G_{(5)} \Lambda g_{zz}^{(5)} \end{aligned} \quad (31)$$

выполняются при условии (29), причем

$$k^2 = -\frac{4\pi}{3} G_{(5)} \Lambda,$$

что эквивалентно условию (27).

Отметим, что соотношение (29) выводится из требования

$$-3 \frac{[a']}{a} g_{\mu\nu}^{(5)} = 8\pi G_{(5)} \sigma g_{\mu\nu}^{(5)}, \quad z = 0,$$

где $[a']$ обозначает скачок величины a' при $z = 0$. Последнее требование в рассмотренном случае является по существу условием Израэля.

В отличие от метрики обычной модели Калуцы–Клейна метрика (28) не факторизуется: она не соответствует произведению четырехмерного пространства Минковского и (компактного) многообразия дополнительных измерений. Такая метрика соответствует двум частям пространства анти-де-Ситтера с радиусом $1/k$, склеенным друг с другом вдоль $z = 0$, т.е. вдоль браны. Четырехмерная гиперповерхность $z = \text{const}$ плоская; в частности, метрика, индуцированная на бране, является метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu}$.

Здесь стоит отметить одну особенность метрики (28). Благодаря четырехмерной пуанкаре-инвариантности

каждое поле на фоне этой метрики можно разложить по четырехмерным плоским волнам:

$$\phi \propto \exp(i p_\mu x^\mu) \phi_p(z).$$

Координатный четырехимпульс p_μ совпадает с физическим импульсом *на бране*, но с точки зрения наблюдателя на $z \neq 0$ физический четырехимпульс больше:

$$p_\mu^{\text{phys}}(z) = \frac{1}{a(z)} p_\mu = \exp(k|z|) p_\mu. \quad (32)$$

Мягкие моды на бране становятся более жесткими вдали от нее. Этому масштабному свойству обязаны многочисленные специфические особенности физики в геометрии (28).

5.2. Конфигурация из двух бран

Существует несколько подходов, в которых используется решение (28). В одном из них [66] предлагается компактифицировать дополнительные измерения, вводя две браны: брану с положительным натяжением σ при $z = 0$ и брану с отрицательным натяжением $-\sigma$, расположенную на расстоянии z_c (рис. 7). Было бы рискованно позволять бране с отрицательным натяжением свободно колебаться, так как это может привести к физическим возбуждениям сколь угодно большой отрицательной энергии (подробнее см. [68]).

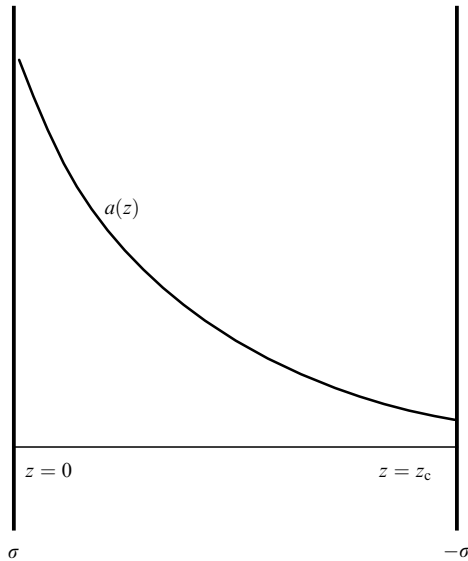


Рис. 7. Модель бран с положительным и отрицательным натяжениями и масштабный фактор между ними.

Чтобы обойти указанную проблему, поместим брану в фиксированную точку орбифлекса. В нашем случае это означает, что все бозонные поля, включая гравитационное, должны быть симметричными по отношению к отражениям относительно положения браны z_c с отрицательным натяжением и положения браны $z = 0$ с положительным натяжением (фермионные поля могут иметь более нетривиальные симметрии). Метрика (28) все еще является решением полной системы уравнений Эйнштейна даже при наличии двух бран. Дополнительные измерения компактны, поскольку координата z пробе-

гает значения от $z = 0$ до $z = z_c$:

$$z \in [0, z_c].$$

Граничные условия орбифлекса (симметрия по отношению к отражению) отсекают нежелательные моды с отрицательной энергией, в результате остаются только возбуждения с положительной энергией.

Рассмотрим малые возмущения метрики (28). Упрощая анализ, можно использовать калибровку

$$g_{55} = -1, \quad g_{5\mu} = 0,$$

т.е. рассмотреть возмущенную метрику в виде

$$ds^2 = [a^2(z)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, z)] dx^\mu dx^\nu - dz^2.$$

Если, кроме космологической постоянной, в пространстве вне бран других источников гравитационного поля нет, можно задать систему координат (т.е. зафиксировать калибровку) так, что поле $h_{\mu\nu}$ будет поперечным и бесследовым в объеме вне бран:

$$\partial_\mu h^\mu_\nu = 0, \quad h^\mu_\mu = 0.$$

Для всех типов возмущений, кроме одного, введенная система координат является гауссовой нормальной одновременно для обеих бран. Это означает, что положения бран останутся в точках $z = 0$ и $z = z_c$. Тогда все компоненты $h_{\mu\nu}$ подчиняются одному и тому же уравнению (индексы опускаем)

$$h'' - 4k^2 h - \frac{m^2}{a^2(z)} h = 0, \quad (33)$$

где

$$m^2 = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$$

— четырехмерная масса возмущения. Условия сшивки на бранах (в предположении симметрии орбифлекса) имеют вид

$$h' + 2kh = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = z_c. \quad (34)$$

Уравнения (33) и (34) определяют спектр масс КК-гравитонов, причем масса определяется по отношению к бране с положительным натяжением (см. уравнение (32)).

Прежде чем рассмотреть спектр КК-гравитонов отметим, что существует одно скалярное возбуждение, которое нельзя описать приведенным выше способом: эта мода — безмассовый "радион" (от англ. "radion"), соответствующий колебаниям относительного расстояния между бранами (его свойства обсуждаются, например, в [69, 70, 68]). Во многих феноменологических моделях, основанных на такой схеме, существование безмассового радиона недопустимо (ниже мы вкратце обсудим этот вопрос). Появление у радиона массы соответствует стабилизации расстояния между бранами. Теоретико-полевые механизмы подобной стабилизации предложены, например, в работах [71, 72]. В дальнейшем мы не будем рассматривать радионное возбуждение, предполагая, что расстояние между бранами стабилизируется тем или иным способом.

Теперь вернемся к спектру гравитонов, т.е. к решению уравнений (33) и (34). Существует нулевая мода ($m^2 = 0$), волновая функция которой (с точностью до нормировки)

$$h_0(z) = \exp(-2kz). \quad (35)$$

Эта мода описывает обычную четырехмерную гравитацию. В отличие от теорий Калуцы–Клейна с факторизуемой геометрией волновая функция основного состояния нетривиально зависит от z и спадает с приближением к точке $z = z_c$. Поэтому естественно ожидать, что гравитационное взаимодействие частиц на бране с отрицательным натяжением слабее, чем взаимодействие частиц на бране с положительным натяжением. Ниже мы обсудим это свойство более подробно.

Решение уравнения (33), удовлетворяющее граничным условиям (34) при $z = 0$ (но не при $z = z_c$), с точностью до нормировки выглядит следующим образом:

$$h_m(z) = N_1 \left(\frac{m}{k} \right) J_2 \left(\frac{m}{k} \exp(kz) \right) - J_1 \left(\frac{m}{k} \right) N_2 \left(\frac{m}{k} \exp(kz) \right), \quad (36)$$

где N и J — функции Бесселя. Спектр масс определяется граничными условиями (34) при $z = z_c$. Таким образом, расщепление масс между КК-состояниями равно

$$\Delta m \sim k \exp(-kz_c). \quad (37)$$

Феноменологическая интерпретация полученных результатов зависит от того, к какой бране привязаны частицы Стандартной модели: с положительным натяжением или отрицательным.

5.3. Вещество на бране с отрицательным натяжением и иерархия

Рассмотрим сначала случай, когда обычное вещество находится на бране с отрицательным натяжением (RS1-модель [66]). Нас интересуют гравитационные взаимодействия вещества на больших расстояниях, в которые основной вклад дает нулевая мода гравитона. Удобно перемасштабировать четырехмерные координаты так, чтобы на бране с отрицательным натяжением (т.е. при $z = z_c$) масштабный фактор был равен единице:

$$a(z) = \exp[k(z_c - z)].$$

Введем нормировку нулевой моды так, чтобы она тоже была равна единице на бране с отрицательным натяжением. Тогда безмассовые гравитационные возмущения описываются полем

$$h_{\mu\nu}(x, z) = \exp[2k(z_c - z)] h_{\mu\nu}^{(4)}(x). \quad (38)$$

Теперь x^μ — это физические координаты на бране с отрицательным натяжением, а четырехмерное поле гравитона $h_{\mu\nu}^{(4)}(x)$ обычным образом взаимодействует с энергией-импульсом обычного вещества:

$$S_{\text{int}} = \int d^4x h_{\mu\nu}^{(4)} T^{\mu\nu}. \quad (39)$$

Сила гравитационного взаимодействия определяется и квадратичной частью действия для $h_{\mu\nu}^{(4)}$, которая получается, если в пятимерное действие для гравитации (26) подставить выражение (38). Опуская детали, имеем

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{1}{16\pi G_{(5)}} \int_{-z_c}^{z_c} \frac{dz}{a^2(z)} d^4x (\partial_\mu h)^2 = \\ &= \frac{1}{8\pi G_{(5)}} \int_0^{z_c} dz \exp[2k(z_c - z)] \int d^4x (\partial_\mu h^{(4)})^2 = \\ &= \frac{\exp(2kz_c) - 1}{16\pi G_{(5)}k} \int d^4x (\partial_\mu h^{(4)})^2 \end{aligned} \quad (40)$$

(множитель $a^{-2}(z)$ в первом интеграле можно получить явным вычислением или вывести из структуры уравнения (33)).

Интеграл в последнем выражении (40) представляет собой квадратичное действие для четырехмерных гравитонов. Поэтому четырехмерная гравитационная постоянная равна

$$G_{(4)} = G_{(5)}k \frac{1}{\exp(2kz_c) - 1}. \quad (41)$$

Следовательно, при достаточно больших значениях z_c гравитационное взаимодействие является слабым для вещества на бране с отрицательным натяжением.

Указанное обстоятельство позволяет по-новому взглянуть на проблему иерархий. Действительно, можно предположить, что фундаментальный масштаб пятимерной гравитации, а также обратный анти-де-Ситтеровский радиус k по порядку величины совпадают с масштабом электрослабых взаимодействий $M_{EW} \sim 1$ ТэВ. Тогда, как следует из выражения (41), четырехмерная планковская масса

$$M_{\text{Pl}} \sim \exp(kz_c) M_{EW}, \quad (42)$$

что означает экспоненциальную иерархию между планковским масштабом и масштабом электрослабых взаимодействий: отношение M_{Pl}/M_{EW} по порядку величины оказывается правильным при значении z_c , всего лишь в 37 раз большем радиуса анти-де Ситтера k^{-1} .

Вопрос о том, соответствует ли данная модель гравитационного взаимодействия при низких энергиях обычной четырехмерной ОТО, рассматривался в работах [73, 74]. Было показано, что это действительно так, *при условии* ненулевой массы радиона (см. также [69]). Иначе радион вел бы себя подобно полю Бранса–Дикке, причем его взаимодействие с веществом было бы недопустимо сильным (константа порядка нескольких ТэВ).

Обратимся к КК-гравитонам. Расщепление масс (37) относится к массам, измеренным наблюдателем на бране с положительным натяжением. Согласно соотношению (32) измеренные наблюдателем на бране с отрицательным натяжением физические массы

$$m_{\text{grav}} \sim k.$$

Следовательно, массы КК-гравитонов приходятся на масштаб энергий порядка нескольких ТэВ, что явно отличается от ADD-сценария. В частности, здесь не появляются космологические трудности, присущие ADD-модели: максимальная температура Вселенной может достигать нескольких ТэВ.

В отличие от нулевой моды взаимодействие КК-гравитонов и вещества на бране с отрицательным натяжением определяется фундаментальной массой (порядка M_{EW}). Чтобы показать это, запишем массивные моды в виде (для значений m , больших $k \exp(-kz_c)$)

$$h_m(x, z) = \exp\left[\frac{k(z_c - z)}{2}\right] \sin\left(\frac{m}{k} \exp(kz) - \varphi_m\right) h_m^{(4)}(x). \quad (43)$$

Выражение (43) верно, когда $(m/k) \exp(kz) \gg 1$, в то время как волновые функции КК-состояний спадают к $z = 0$. Первый множитель в уравнении (43) выбран так, чтобы четырехмерные поля $h_m^{(4)}(x)$ и вещество взаимодействовали при $z = z_c$ с единичной константой (см. выражение (39)).

Аналогично соотношению (40) получаем квадратичное действие:

$$\begin{aligned} S_{g,m} &= \frac{1}{16\pi G_{(5)}} \int \frac{dz}{a^2(z)} d^4x (\partial_\mu h_m)^2 = \\ &= \frac{1}{8\pi G_{(5)}} \int_0^{z_c} dz \exp[-k(z_c - z)] \int d^4x (\partial_\mu h_m^{(4)})^2 = \\ &= \frac{1 - \exp(-kz_c)}{8\pi G_{(5)}k} \int d^4x (\partial_\mu h_m^{(4)})^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Следовательно, определяющий взаимодействие КК-гравитонов и вещества масштаб

$$M_m \sim \frac{1}{\sqrt{G_{(5)}k}}$$

имеет порядок масштаба электрослабых взаимодействий M_{EW} . Взаимодействие КК-гравитонов и вещества становится сильным в диапазоне нескольких ТэВ.

Таким образом, RS1-модель ведет к экспоненциальной иерархии между слабым и планковским масштабами. Так же как в ADD-модели, гравитационное взаимодействие в RS1-модели становится сильным при энергиях несколько ТэВ; в экспериментах на ускорителях проявление новых свойств гравитационного взаимодействия в RS1-модели будет сильно отличаться от ADD-модели [75]. Конечно, причина этого в том, что спектры гравитонов в RS1- и ADD-сценариях совершенно разные. Отличительной чертой феноменологии RS1-модели на масштабах несколько ТэВ являются гравитонные резонансы, сильно взаимодействующие с обычными частицами. Дальнейшее обсуждение феноменологии RS1-модели см. в [76] и ссылках там.

5.4. Вещество на бране с положительным натяжением

Другой вариант состоит в том, что обычное вещество находится на бране с положительным натяжением. Рассуждения, подобные тем, которые привели к уравнению (41), показывают, что в этом случае эффективная четырехмерная гравитационная постоянная

$$G_{(4)} = G_{(5)}k \frac{1}{1 - \exp(-2kz_c)}. \quad (45)$$

Если не вводить огромной разницы между масштабом пятимерной гравитации и обратным радиусом анти-Ситтера k , то фундаментальный масштаб должен

быть порядка M_{Pl} . Это, однако, не означает, что нельзя создать экспоненциальную иерархию между масштабами.

Возможно, нарушение электрослабой симметрии и/или суперсимметрии обусловлено физикой браны с отрицательным натяжением, причем каким-то образом [77] нарушение передается на нашу брану. В этом случае масштаб нарушения электрослабой симметрии и/или суперсимметрии в нашем мире будет экспоненциально меньше планковского масштаба вновь благодаря масштабному соотношению (32), и возникнет экспоненциальная иерархия (42). Конкретные модели такого типа обсуждались в [77] и их феноменология оказалась очень интересной. Отметим, что массы КК-гравитонов опять попадают в диапазон нескольких ТэВ: они даются соотношением (37) с $k \sim M_{Pl}$.

6. Бесконечные дополнительные измерения

6.1. Локализация гравитонов

Нулевая мода гравитонов (35), появляющаяся в модели, рассмотренной в разделе 5, нормируема при $z_c \rightarrow \infty$, т.е. при удалении браны с отрицательным натяжением. Это означает, что гравитация останется локализованной на бране при наличии браны только с положительным натяжением и при бесконечном дополнительном измерении. В результате мы приходим к RS2-модели [67] с веществом, находящимся на бране с положительным натяжением, и четырехмерным законом тяготения на больших расстояниях благодаря обмену нулевыми модами гравитонов.

То, что на больших расстояниях гравитационное взаимодействие является четырехмерным, ясно также из выражения (45). В пределе $z_c \rightarrow \infty$ четырехмерная гравитационная постоянная стремится к конечному значению:

$$G_{(4)} = G_{(5)}k.$$

Очевидно, что в этой постановке (в отличие от моделей, представленных в разделах 4 и 5) иерархия между планковским и электрослабым масштабами не объясняется физикой дополнительных измерений. Стало быть, приходится полагаться на другие, более общепринятые механизмы. (В дальнейшем мы упомянем и о другой возможности.) Интерес к простейшей модели с бесконечным дополнительным измерением возник, с одной стороны, в связи с особой физикой при низких энергиях, а с другой — в связи с AdS/CFT-соответствием (краткий обзор по этой теме см., например, в работе [78]).

Стоит отметить одно свойство геометрии анти-де Ситтера в пространстве вне браны. Хотя расстояние между браной и $z = \infty$, измеренное вдоль оси z , бесконечное, легко видеть, что предел $z = \infty$ является горизонтом частиц. Действительно, рассмотрим в качестве примера частицу, покидающую брану при $t = 0$ и $x = 0$ с нулевой скоростью, а затем свободно распространяющуюся вдоль оси z . В этом случае решение уравнения для геодезической имеет вид [79, 80]

$$z_c(t) = \frac{1}{2k} \ln(1 + k^2 t^2).$$

Частица ускоряется в направлении $z \rightarrow \infty$, при этом ее скорость стремится к скорости света. В соответствии с

метрикой (28) элемент собственного времени определяется как

$$d\tau^2 = a^2(z_c(t)) dt^2 - \left(\frac{dz_c}{dt}\right)^2 dt^2.$$

Частица достигает $z = \infty$ за бесконечное время t , но конечное собственное время

$$\tau = \int_0^\infty \frac{dt}{1 + k^2 t^2} = \frac{\pi}{2k}.$$

Следовательно, предел $z = \infty$ действительно является горизонтом частиц. Когда рассматривается физика на фоне метрики (28), приходится накладывать граничные условия на горизонте $z = \infty$ (которые, вообще говоря, могут повлиять на физику браны). Обычно предполагается, что из-за горизонта ничто не вылетает.

Чтобы убедиться в том, что вещество на бране (с положительным натяжением) взаимодействует на больших расстояниях согласно четырехмерному закону тяготения, рассмотрим гравитоны Калуцы–Клейна. Согласно (36) спектр КК-гравитонов является *непрерывным* и начинается с *нулевых* значений m^2 . В этом случае волновые функции КК-гравитонов необходимо нормировать на дельта-функцию (опять же с весом $a^{-2}(z)$; см. выражение (40)):

$$\int \frac{dz}{a^2(z)} h_m(z) h_{m'}(z) = \delta(m - m').$$

Используя асимптотики функций Бесселя, для нормированных волновых функций КК-гравитонов получаем

$$\begin{aligned} h_m(z) = & \sqrt{\frac{m}{k}} \left[J_1\left(\frac{m}{k}\right) N_2\left(\frac{m}{k} \exp(kz)\right) - \right. \\ & \left. - N_1\left(\frac{m}{k}\right) J_2\left(\frac{m}{k} \exp(kz)\right) \right] \times \\ & \times \left[J_1^2\left(\frac{m}{k}\right) + N_1^2\left(\frac{m}{k}\right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Эти волновые функции осциллируют при больших z :

$$h_m(z) = \text{const} \cdot \sin\left(\frac{m}{k} \exp(kz) + \varphi_m\right),$$

падают при малых z и подавлены при $z = 0$:

$$h_m(0) = \text{const} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Волновые функции (46) соответствуют КК-гравитонам, уходящим в дополнительные измерения, т.е. на $z \rightarrow \infty$ (или прилетающим на брану с $z = \infty$). Взаимодействие этих гравитонов с веществом браны очень слабо при малых m , так что при относительно низких энергиях (и/или температурах) их рождением можно пренебречь (подробнее см. [82] и ссылки там). По тем же причинам вклад виртуальных КК-гравитонов в низкоэнергетические процессы мал.

В качестве примера рассмотрим вклад обменов КК-гравитонами в гравитационный потенциал между двумя частицами с единичной массой, помещенными на брану.

Каждый КК-гравитон создает поле с потенциалом Юкавы, так что

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{КК}}(r) = & -G_{(5)} \int_0^\infty dm |h_m(0)|^2 \frac{\exp(-mr)}{r} = \\ = & -\frac{G_{(5)} k}{r} \cdot \text{const} \cdot \int_0^\infty dm \frac{m}{k^2} \exp(-mr) = \\ = & -\frac{G_{(4)}}{r} \cdot \frac{\text{const}}{k^2 r^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Учитывая вклад нулевых мод гравитонов, для гравитационного потенциала получаем [67]

$$V(r) = -\frac{G_{(4)}}{r} \left(1 + \frac{\text{const}}{k^2 r^2}\right).$$

В отличие от теорий с компактными дополнительными измерениями, где поправка к закону Ньютона на больших расстояниях r экспоненциально подавлена, здесь она имеет степенную зависимость. Однако эта поправка пренебрежимо мала на расстояниях, превышающих радиус анти-де Ситтера k^{-1} . В работах [73, 74] явно показано, что на больших расстояниях тензорная структура гравитационного взаимодействия действительно соответствует (в пределе слабого поля) четырехмерной ОТО. Отметим, что в RS2-модели отсутствуют радионные моды.

Мы уже упоминали, что в RS2-модели с одной браной дополнительные измерения не помогают решить проблему иерархии. Тем не менее было замечено, что небольшое расширение этой модели приводит к экспоненциальной иерархии даже в случае бесконечного дополнительного измерения [81]. Вместо того чтобы предполагать, что наше вещество привязано к "центральной" бране, можно ввести "пробную" брану, расположенную в дополнительном измерении на расстоянии z_c и имеющую, для простоты, нулевое натяжение. Метрика (28) на этой бране также обладает четырехмерной пуанкаре-инвариантностью. Если поместить наше вещество на пробную брану, то точно так же, как в RS1-модели (обсуждавшейся в разделе 5), появится экспоненциальная иерархия.

6.2. Исчезновение в дополнительные измерения

Если одно или несколько дополнительных измерений бесконечны, можно ожидать, что частицы покинут нашу брану, устремляясь в другие измерения. Для гравитонов этот процесс вполне реализуем в RS2-модели, так как возбуждения КК-мод интерпретируются именно как уход гравитонов на $z \rightarrow \infty$. Покинуть нашу брану могут и другие частицы, если соответствующие поля имеют подобные моды. Например, даже в отсутствие гравитационного взаимодействия фермионы, удерживаемые на бране механизмом, рассмотренном в разделе 3.1, способны вырваться с браны, если им передать достаточно большую энергию. Как мы уже отмечали, это может привести при *высоких* энергиях к появлению процессов типа $e^+e^- \rightarrow \text{ничто}$.

Новая особенность пространства с метрикой анти-де Ситтера вне браны состоит в том, что процессы подобного рода становятся возможными и при *низких* энергиях [83]. Основная причина опять лежит в масштабном свойстве (32): низкие энергии, измеренные на бране, становятся высокими на больших расстояниях z . Низко-

энергетическая физика на бране — это физика высоких энергий вдали от нее.

Количественно указанная особенность проявляется в характерном свойстве КК-континуума для полей, имеющих КК-моды вне браны: непрерывный спектр начинается с нулевых значений m^2 независимо от динамики вблизи браны. Предположим, что в отсутствие гравитационного взаимодействия некоторое поле обладает связанным состоянием с ненулевой массой и волновой функцией, сконцентрированной около браны и, следовательно, соответствующей некоторой четырехмерной частице. При включении гравитационного взаимодействия это состояние оказывается погруженным в непрерывный спектр КК-возмущений, которые описывают частицы, способные улететь на $z \rightarrow \infty$. Таким образом, бывшее связанное состояние становится квазилокализованным (для не слишком искусственного потенциала не существует настоящих связанных состояний, погруженных в непрерывный спектр): его энергия приобретает мнимую часть, которая задает (конечную) вероятность туннелирования в область больших z . Частицы на бране становятся метастабильными по отношению к исчезновению в другие измерения.

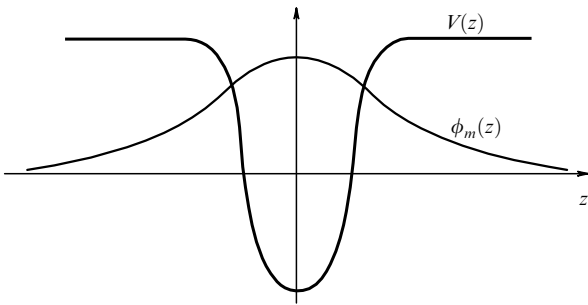


Рис. 8. Потенциал $V(z)$ и связанное состояние $m^2 \neq 0$ в отсутствие масштабного фактора.

Чтобы продемонстрировать это довольно общее явление, рассмотрим действительное скалярное поле в присутствии браны с действием

$$S_\phi = \int d^4x dz \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} g^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi - \frac{1}{2} V(z) \phi^2 \right], \quad (48)$$

где $x^A = (x^\mu, z)$ — координаты в пятимерном пространстве-времени. Влияние браны учтено в потенциале $V(z)$, который при $z \rightarrow \infty$ может стремиться к (ненулевой) неотрицательной константе (для простоты предполагается симметрия орбифлекда: $z \rightarrow -z$).

При выключении гравитации поле ϕ подчиняется уравнению Клейна–Гордона:

$$-\partial_\mu^2 \phi + \partial_z^2 \phi - V(z) \phi = 0.$$

Спектр четырехмерных масс определяется потенциалом $V(z)$:

$$p_\mu p^\mu \phi \equiv m^2 \phi = [-\partial_z^2 + V(z)] \phi. \quad (49)$$

Интересен случай, когда оператор правой части уравнения (49) имеет дискретный набор собственных состояний, соответствующих частицам на бране. Этот случай представлен на рис. 8; непрерывный спектр начинается при $m^2 = V(\infty)$.

Ситуация меняется при включении гравитации на бране. На фоне метрики (28) действие

$$S_\phi = \int d^4x dz a^4 \left[\frac{1}{a^2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} (\partial_z \phi)^2 - \frac{1}{2} V(z) \phi^2 \right], \quad (50)$$

где, как и прежде, $a(z) = \exp(-k|z|)$. Так как $a^{-2}(z)$ растет при больших z , вдали от браны первый член в подынтегральном выражении (50) преобладает по сравнению с потенциальным и непрерывный спектр КК-состояний начинается с нуля. Теперь уравнение на собственные значения для четырехмерных масс принимает вид

$$\frac{1}{a^4} \partial_z (a^4 \partial_z \phi) - V(z) \phi + \frac{m^2}{a^2} \phi = 0. \quad (51)$$

Полезно отметить, что условие нормировки для собственных функций $\phi_m(z)$ таково:

$$\int dz a^2(z) \phi_m(z) \phi_{m'}(z) = \delta_{mm'}. \quad (52)$$

Действительно, уравнение на собственные значения (51) можно переписать как

$$-\partial_z (a^4 \partial_z \phi_m) + a^4 V(z) \phi_m = m^2 a^2 \phi_m.$$

Оператор, входящий в левую часть уравнения, эрмитов, так что собственные функции ортогональны с весом $a^2(z)$. Это тот самый множитель, который появляется в кинетическом члене (в первом слагаемом подынтегрального выражения (50)).

При больших z вторым слагаемым в уравнении (51) можно пренебречь по сравнению с третьим. Фактически это означает, что потенциал модифицируется и устремляется к нулю при $|z| \rightarrow \infty$ (рис. 9). Теперь волновые функции при $z \rightarrow \infty$ выглядят следующим образом:

$$\phi(z) = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{3kz}{2}\right) \sin\left(\frac{m}{k} \exp(kz) + \varphi_m\right)$$

(они нормированы на дельта-функцию с весом a^2). Дело в том, что непрерывный спектр определяется асимптотикой уравнения (51) при больших z и начинается с нулевого значения m^2 независимо от формы потенциала $V(z)$ (если $V(z)$ не растет быстро при $z \rightarrow \infty$). Поскольку не суще-

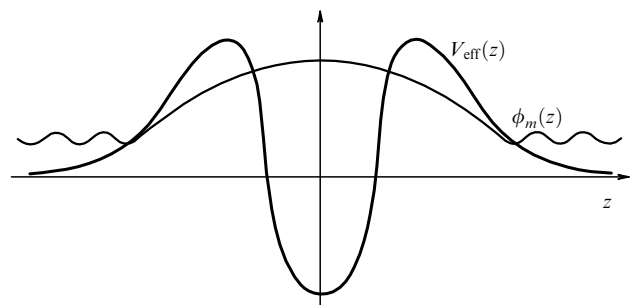


Рис. 9. В пространстве анти-де Ситтера эффективный потенциал модифицируется, а бывшее связанное состояние с $m^2 \neq 0$ становится квазилокализованным. Частица имеет конечную вероятность протуннелировать с браны.

ствуется связанных состояний, погруженных в континуум, массивные связанные моды уравнения (49) становятся резонансами, т.е. квазилокализованными состояниями, имеющими конечную ширину распада (конечную вероятность ухода с браны на $z = \infty$). Эти ширины зависят от потенциала $V(z)$, привязывающего частицы к бране.

Стоит отметить, что в RS2-модели безмассовое скалярное поле имеет нулевую моду даже в отсутствие потенциала $V(z)$ [84]. Волновая функция нулевой моды $\phi = \text{const}$ нормируема с соответствующим весом $a^2(z)$. Как только это поле приобретает массу, бывшее связанное состояние становится метастабильным по отношению к уходу в другое измерение. Например, для постоянного потенциала $V(z) \equiv \mu^2$ масса четырехмерной частицы [83]

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{2}}, \quad (53)$$

а вероятность ее туннелирования в область $z = \infty$ есть

$$\Gamma = m \frac{\pi}{16} \left(\frac{m}{k}\right)^2.$$

Эта формула демонстрирует общее свойство таких распадов: если масса потенциально связанного состояния мала, вероятность его распада также мала. Причина в том, что процесс идет туннельным образом и, следовательно, подавлен.

Приведенные выше аргументы показывают, что метастабильность массивных частиц по отношению к уходу в другие измерения должна быть присуща всем видам материи (включая фермионы) при условии, что последние имеют моды вне браны. В работе [83] приведены оценки времени жизни фермионов, удерживаемых на бране механизмом, который обсуждался в разделе 3.1. Это время жизни зависит не только от массы фермиона и радиуса пространства анти-де Ситтера, но и от других параметров, так что на данном этапе полученные в [83] количественные оценки весьма приближительные.

Еще одно интересное свойство пространства анти-де Ситтера связано с виртуальными КК-состояниями. В теории с массивными четырехмерными бозонами потенциал между источниками имеет вид потенциала Юкавы. Поскольку существуют сколь угодно легкие КК-моды, можно ожидать, что потенциал будет иметь дальнедействующий "хвост". Например, в модели скалярного поля (50) с постоянным $V(z) \equiv \mu^2$ потенциал $V(r)$ между двумя удаленными источниками скалярного поля q_1 и q_2 , расположенными на бране, имеет вид [83]

$$V(r) = -\pi q_1 q_2 k \frac{\exp(-mr)}{r} - 60\pi q_1 q_2 \frac{1}{km^4} \frac{1}{r^7}, \quad (54)$$

где m определяется соотношением (53). Первое слагаемое (Юкавы) возникает в соотношении (54) из-за обмена массивными квазилокализованными модами, второе — из-за обмена модами непрерывного КК-спектра. В модели, которая должна описывать массивные четырехмерные частицы, потенциал на больших расстояниях ведет себя степенным образом!

Предположение о том, что поле обладает модами в объеме вне браны, было критично для приведенных в

данном разделе рассуждений; в действительности оно не является таким уж безобидным, особенно если частицы заряжены. В самом деле, если частицы локализованы на бране механизмом, обсуждавшимся в разделе 3.2, заряженные частицы испытывают конфаинмент в объеме вне браны, т.е. они *не имеют* состояний вне браны. В этом сценарии невозможно исчезновение заряженных частиц с браны в другие измерения. В дальнейшем мы опишем способ локализации калибровочных полей, допускающий уход заряженных частиц на $z \rightarrow \infty$.

6.3. Голографическая интерпретация

Можно ли описать физику на бране при низких энергиях деликом в четырехмерных терминах? Конечно нельзя, если мыслить категориями обычных теорий, допускающих интерпретацию в терминах частиц: непрерывный спектр КК-состояний не соответствует частицам, движущимся вдоль браны в четырехмерном пространстве-времени. Тем не менее, как утверждается в работах [85–87], на основе AdS/CFT-соответствия можно описать RS2-модель в терминах четырехмерной конформной теории с сильной связью (CFT) и с ультрафиолетовым обрезанием, причем конформная материя взаимодействует с обычным гравитационным полем.

Поправка (47) к закону Ньютона получается при учете однопетлевого вклада конформной материи в пропагатор гравитона [88, 89, 76]. Действительно, на языке конформной теории поля поправка к пропагатору гравитона дается диаграммой, представленной на рис. 10, и имеет следующий вид (индексы опускаем):

$$\delta G(x-y) = \text{const} \cdot \int d^4u d^4v D(x-u) \langle T(u) T(v) \rangle D(v-y),$$

где $D(x-y)$ — четырехмерный пропагатор гравитона, а $T(u)$ — тензор энергии-импульса конформного поля. Отсюда получается уравнение

$$\square_x \square_y (\delta G(x-y)) = \text{const} \cdot \langle T(x) T(y) \rangle.$$

Далее, коррелятор тензора энергии-импульса в конформной теории поля записывается как

$$\langle T(x) T(y) \rangle = \frac{\text{const}}{(x-y)^8},$$

так что

$$\delta G(x-y) = \frac{\text{const}}{(x-y)^4}.$$

Вклад в гравитационный потенциал представляет собой интеграл по времени от этого выражения, который сразу дает

$$\Delta V(r) = \frac{\text{const}}{r^3}$$

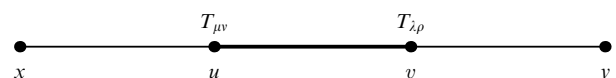


Рис. 10. Однопетлевая поправка конформной материи к пропагатору гравитона в эквивалентной четырехмерной теории. Тонкие линии обозначают свободный пропагатор гравитона, толстая линия соответствует двухточечной функции тензора энергии-импульса в конформной теории поля.

в согласии с формулой (47). Это самая непосредственная проверка интерпретации КК-гравитонов в терминах четырехмерной конформной теории поля; существуют и другие тесты.

Аналогично, конформная теория поля интерпретирует уход частиц в другие измерения как распад на конформные состояния, взаимодействующие теперь с полями материи. Степенное поведение поправки к потенциалу Юкавы снова объясняется обменом конформными модами.

Другая возможность увидеть, как проявляется конформная материя в четырехмерной теории, состоит в том, чтобы рассмотреть гравитационное поле массивной точечной частицы, которая до некоторого момента времени находится на бране, а потом покидает ее и уходит в другие измерения по нормальным к бране геодезическим [80, 90]. Четырехмерное гравитационное поле этой частицы легко вычислить в линеаризованной пятимерной теории. Получается, что вне светового конуса, т.е. при $x^2 - t^2 > 0$, созданное на бране четырехмерное гравитационное поле по-прежнему описывается линеаризованной метрикой Шварцшильда. (Другими словами, четырехмерное гравитационное поле не изменяется за световым конусом, что согласуется с принципом причинности.) Индуцированная внутри светового конуса метрика является плоской. Если эффективный четырехмерный тензор энергии-импульса *определить* как

$$8\pi G_{(4)} T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} \equiv R_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(4)} R^{(4)},$$

где $g_{\mu\nu}^{(4)}$ — индуцированная на бране четырехмерная метрика, то $T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}$ будет соответствовать тонкому слою вещества, расширяющегося вдоль четырехмерного светового конуса и диссипирующего, как $1/r^2$. Это в точности соответствует поведению тензора энергии-импульса, ожидаемому в любой конформной теории [91].

Голографический подход полезен для анализа феноменологических аспектов RS2-модели [74, 90, 76] и проливает новый свет на космологию с бесконечными дополнительными измерениями (см., например, [92–94] и ссылки там). До некоторой степени язык конформной теории поля полезен также в RS1-сценарии с двумя бранами и компактным дополнительным измерением [76]. В последнем случае четырехмерное толкование основано на теориях с сильной связью и нарушенной конформной инвариантностью.

Приведенные примеры показывают, что четырехмерные конформные теории полей, слабо взаимодействующих с обычным веществом, могут появляться естественным образом в контексте многомерных теорий. Независимо от дополнительных измерений интересно понять феноменологические следствия возможного существования в природе конформного сектора с нарушенной или ненарушенной конформной инвариантностью.

6.4. Два и более дополнительных измерения.

Гравитационная локализация калибровочных полей

Один из способов обобщить обрисованную выше модель на случай двух и более дополнительных измерений состоит в рассмотрении пересекающихся бран коразмерности один [95]. В $(3+n)$ -мерном пространстве каждая из этих бран имеет размерность $3+n-1$, так что ни одна из них не может быть кандидатом для нашего мира. Но пересечение $n-1$ бран порождает трехмерное много-

образии, к которому может быть привязано наше вещество. К тому же на таком пересечении естественным образом локализуется гравитация, так что эта модель является феноменологически приемлемой [95].

Гораздо труднее поместить гравитацию на настоящую 3-брану, погруженную в пространство, имеющее более чем одно дополнительное измерение. Для многих решений уравнений Эйнштейна в пространстве-времени с двумя и более поперечными измерениями гравитационное поле браны исчезает на больших расстояниях. Здесь ситуация до некоторой степени напоминает классические решения в электродинамике: электрическое поле заряженной плоскости распространяется до бесконечности, а электрическое поле заряженной прямой и заряженной точки спадает, как $1/r$ и $1/r^2$ соответственно. Аналогично, в пространстве с двумя и более дополнительными измерениями гравитационное поле массивной браны падает на бесконечности в поперечном пространстве, так что нет оснований для локализации гравитона на бране.

Одно из интересных исключений представляет собой геометрия с компактным, но стянутым дополнительным измерением. В случае двух дополнительных измерений метрика такого пространства вдали от браны записывается как

$$ds^2 = a^2(z) [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - d\theta^2] - dz^2. \quad (55)$$

Здесь z — координата вдоль единственного некомпактного дополнительного измерения, θ — компактная дополнительная координата, пробегающая значения от 0 до $2\pi R$, а масштабный фактор по-прежнему имеет вид

$$a(z) = \exp(-k|z|).$$

Эта метрика является асимптотическим решением $(4+1+1)$ -мерных уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической постоянной в объеме вне браны и 3-браной с тензором энергии-импульса, подстроенным соответствующим образом [96]. (Аналогичные решения можно найти в [97, 98].) Сама брана представляет собой что-то вроде космической струны. Обобщения этой модели на случай более двух дополнительных измерений представлены в работах [99, 100].

Другой способ получения метрики типа (55) состоит в рассмотрении $(3+n)$ -мерной браны, погруженной в $(3+n+1)$ -мерное пространство [101]. Другими словами, рассматривается брана коразмерности один (как в RS2-модели), но теперь в $(5+n)$ -мерном пространстве-времени. В этом случае метрика

$$ds^2 = a^2(z) [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \delta_{ij} d\theta^i d\theta^j] - dz^2 \quad (56)$$

(которая является простым обобщением выражения (28)) подчиняется полной системе уравнений Эйнштейна с той же подстройкой параметров, что и в исходной RS2-модели. Пусть θ^i — компактная координата: $\theta^i \in (0, 2\pi R_i)$. Тогда в полной аналогии с моделью Калуцы–Клейна эти измерения невидимы при низких энергиях.

В любом из вариантов существует нулевая мода гравитона, независимая от θ^i за пределами браны и спадающая при больших z , как $\exp(-2k|z|)$. Гравитация локализуется на бране тем же способом, что и в RS2-модели.

Новым свойством в представленной картине является локализация калибровочных полей за счет гравитационного взаимодействия [102, 101]. Запишем действие калибровочных полей на фоне (56) с соответствующей нормировкой:

$$S_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} \int \prod_i \frac{d\theta^i}{2\pi R_i} dz d^4x \sqrt{g} g^{AC} g^{BD} F_{AB} F_{CD}.$$

При низких энергиях ($E \ll 1/R_i$) существенные конфигурации калибровочного поля не зависят от θ^i . Нас интересует четырехвекторная часть калибровочного поля, когда можно выбрать калибровку $A_z = 0$ и положить $A_{\theta^i} = 0$. С учетом этого линеаризованные уравнения для калибровочного поля приобретают вид

$$-\frac{1}{a^{2+n}} \partial_z (a^{2+n} \partial_z A_\mu) + \frac{1}{a^2} \eta^{\lambda\nu} \partial_\lambda F_{\nu\mu} = 0, \quad (57)$$

$$\partial_z (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu) = 0. \quad (58)$$

В полной аналогии с уравнением (52) собственные функции уравнения (57) необходимо нормировать с весом

$$\int dz a^n. \quad (59)$$

Для $n > 0$ (одно или более стянутых компактных измерений) существует нулевая мода, не зависящая от z :

$$A_\mu = A_\mu(x),$$

и нормируемая с весом (59). Эта мода соответствует безмассовому векторному бозону, локализованному на бране.

Тот факт, что нулевая мода калибровочного поля *постоянна* в дополнительных измерениях, гарантирует универсальность заряда, которая в противном случае может служить препятствием для локализации калибровочного бозона (см. раздел 3.2). При постоянной нулевой моде калибровочного бозона интегралы перекрытия типа (6) становятся нормами нулевых мод материи, значения которых не зависят от формы волновых функций нулевых мод. Такой способ обойти проблему универсальности заряда целиком опирается, конечно, на специфику геометрии объема вне браны.

Помимо нулевой моды, калибровочные поля в метрике (56) имеют произвольно легкие возбуждения в объеме вне браны; там отсутствует конфайнмент. Это резко отличается от механизма, обсуждавшегося в разделе 3.2. Кроме того, гравитационная локализация калибровочного поля разрешает электрическому и другим калибровочным зарядам уходить в другие измерения. Фактически это может означать несохранение калибровочного заряда в нашем мире [101]. Четким признаком наличия бесконечных дополнительных измерений может быть процесс типа $e^- \rightarrow \text{ничто}$.

Одной из проблем [103] модели со стянутыми компактными измерениями является сингулярность метрики (56) при $z = \infty$. В самом деле, размеры компактных измерений $R_i \exp(-k|z|)$ стремятся к нулю при $z \rightarrow \infty$. Хотя собственное расстояние до сингулярности вдоль оси z бесконечно, собственная длина вдоль времениподобных геодезических конечна. Это означает, что физика

вблизи сингулярности может влиять на физику браны. Возможное решение проблемы сингулярности и ее влияния на физику браны обсуждалось недавно в работе [103].

7. Дальнейшее развитие

Оба варианта мира на бране — с большими плоскими дополнительными измерениями, а также со стянутыми дополнительными измерениями — исследуются в различных направлениях. Не претендуя на полноту изложения, кратко обсудим некоторые из них.

7.1. Космологическая постоянная

В контексте мира на бране проблему космологической постоянной можно переформулировать как вопрос о том, почему плотность энергии вакуума (почти) не влияет на кривизну, индуцированную на нашей бране. Эта новая формулировка наводит на некоторые размышления, поскольку из нее следует, что плотность энергии вакуума *может* влиять на геометрию всего многомерного пространства-времени, но так, чтобы метрика нашей браны оставалась плоской. На первый взгляд, кажется правдоподобным, что в случае нефакторизуемой геометрии плотность энергии вакуума может индуцировать нетривиальный масштабный фактор, не затрагивая при этом четырехмерную пуанкаре-инвариантность. Последнее возможно независимо от модели мира на бране [104, 105].

Недавние попытки [106, 107] решить проблему космологической постоянной в рамках моделей бран и стянутых дополнительных измерений совмещают эти идеи с предложением, выдвинутым в сходном контексте для четырехмерных теорий [108–110], что гипотетическое скалярное поле, конформно связанное с нашей материей, может играть важную роль. Это поле существует в объеме вне браны, так что действие представляет собой сумму вкладов браны и объема вне браны:

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{brane}}.$$

Слагаемое, отвечающее объему вне браны, имеет вид

$$S_{\text{bulk}} = \int dz d^4x \sqrt{g^{(5)}} \left(-\frac{1}{2\kappa_{(5)}} R^{(5)} + \frac{b}{2} g^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi \right),$$

где $\kappa_{(5)} = 8\pi G_{(5)}$, b — произвольная константа, а пространство-время пятимерное. Предполагается, что вклад браны имеет структуру

$$S_{\text{brane}} = \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \exp(4\kappa_{(5)} \phi(0)) \times \\ \times \mathcal{L}(\psi, g_{\mu\nu}^{(4)} \exp(\kappa_{(5)} \phi(0))).$$

Здесь \mathcal{L} — полный лагранжиан материи на бране, ψ обозначает все поля на бране, $g_{\mu\nu}^{(4)}$ — индуцированная метрика, а $\phi(0) \equiv \phi(x, z=0)$ — индуцированное скалярное поле.

В отсутствие реальных частиц на бране лагранжиан браны сводится к энергии вакуума (включая все квантовые эффекты), которая взаимодействует с гравитационным и скалярным полями:

$$S_{\text{brane}} = -\epsilon_{\text{vac}} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \exp(4\kappa_{(5)} \phi(0)).$$

Теперь понятно, что значение величины ϵ_{vac} не важно, поскольку оно может компенсироваться сдвигом ϕ : если для некоторого значения ϵ_{vac} существует решение с четырехмерной пуанкаре-инвариантностью, то такое решение существует для любого значения ϵ_{vac} того же знака.

Действительно, решения получающейся системы уравнений обладают четырехмерной пуанкаре-инвариантностью [106, 107]. В частности, для $b = 3$ существуют только четырехмерно-плоские решения с максимальной четырехмерной симметрией [106]; решения с четырехмерной симметрией де Ситтера и анти-де Ситтера отсутствуют. Для $b = 3$ метрику в явном виде можно представить как

$$ds^2 = \hat{a}^2(z) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2. \quad (60)$$

Масштабный фактор в метрике (60) равен

$$\hat{a}(z) = \left(1 - \frac{2}{3\kappa_{(5)}^{2/3}} |z| \exp(2\kappa_{(5)} \tilde{\phi}_0) \right)^{1/4},$$

где $\tilde{\phi}_0$ — произвольный параметр решения, связанный с $\phi(z=0)$ следующим образом:

$$\tilde{\phi}_0 = \phi(0) + \frac{1}{2\kappa_{(5)}} \ln(\epsilon_{\text{vac}} \kappa_{(5)}^{8/3}).$$

Индукцированная на бране метрика будет плоской независимо от значения ϵ_{vac} .

Одной из проблем изложенного подхода является наличие в метрике (60) "голой" сингулярности на конечном собственном расстоянии от браны

$$|z_{\text{sing}}| = \frac{3}{2} \kappa_{(5)}^{2/3} \exp(-2\kappa_{(5)}).$$

Возможное решение проблемы этой сингулярности вновь приводит к проблеме космологической постоянной [111–113]. Например, если предположить симметрию орбифлекда и поместить другую брану на некотором расстоянии $|z| < |z_{\text{sing}}|$, то между бранами, т.е. на всем орбифлекде, сингулярности не будет. Однако для того чтобы метрика (60) оставалась решением полной системы уравнений Эйнштейна, требуется тонкая настройка натяжения второй браны, которая ничем не лучше обычной подгонки космологической постоянной в четырехмерных теориях.

Другая потенциальная сложность, общая для многих попыток решить проблему космологической постоянной, состоит в том, что при наличии материи плотность энергии (в нашем случае плотность энергии на бране) содержит вклады вакуума и реального вещества, которые очень сложно отличить друг от друга. Другими словами, механизм, компенсирующий космологическую постоянную, стремится модифицировать гравитационные взаимодействия обычного вещества. Сомнительно, что на больших расстояниях гравитационные взаимодействия в этих моделях могут сводиться к четырехмерной ОТО, в частности, что какой-либо компенсационный механизм может быть жизнеспособным с точки зрения космологии (см., однако, [114]).

7.2. Гравитация на сверхдалеких расстояниях

В относительно простых моделях, рассмотренных в разделах 5 и 6, гравитация на бране при достаточно

больших расстояниях эффективно четырехмерная из-за наличия нулевой моды гравитона. Возникает вопрос: может ли спектр гравитонов в каких-то других ситуациях быть более сложным; в частности, может ли четырехмерная гравитация модифицироваться на очень больших расстояниях?

Первоначальные (неудачные) предложения [70, 115, 116], в которых изучалась такая возможность, включали в себя динамические браны с отрицательным натяжением (в одном дополнительном измерении). В подходе [115] предлагалось рассматривать две браны с равными положительными натяжениями σ и брану с отрицательным натяжением $-\sigma$ между ними. Для простоты браны с положительным натяжением помещались в фиксированные точки орбифлекда; в любом случае дополнительное измерение компактно.

При отрицательной космологической постоянной в объеме вне браны, подобранной в соответствии с равенством (27), масштабный фактор имеет минимум в точке z_- , т.е. на бране с отрицательным натяжением

$$a(z) = \exp(k|z - z_-|), \quad 0 \leq z \leq z_c,$$

где $z = 0$ и $z = z_c$ — координаты бран с положительным натяжением. В пределе $z_c \rightarrow \infty$, $z_- \rightarrow \infty$, $z_c - z_- \rightarrow \infty$ все три браны бесконечно удалены друг от друга и существуют две нулевые моды гравитона, сосредоточенные вблизи $z = 0$ и $z = z_c$ соответственно.

При конечных, но достаточно больших z_- и z_c , а именно при $z_c, z_-, z_c - z_- \gg k^{-1}$, вырождение между модами гравитона снимается, как это обычно бывает в квантовой механике. Одна линейная комбинация мод остается безмассовой, а другая приобретает массу m_g , которая значительно меньше масс КК-возбуждений $m_{\text{КК}}$. На промежуточных расстояниях $m_{\text{КК}}^{-1} \ll r \ll m_g^{-1}$ вклад в четырехмерный закон Ньютона вносят легчайший и безмассовый гравитоны, в то время как на очень больших расстояниях ($r \gg m_g^{-1}$) вклад дает только безмассовый гравитон. (В действительности ситуация более тонкая, так как существует "духовая" безмассовая скалярная мода, которая тоже дает вклад во взаимодействие на очень больших расстояниях; см. ниже.) Четырехмерная гравитация модифицируется на расстоянии m_g^{-1} , которое вполне может быть порядка 100 Мпк или больше.

Другая модель [70, 116] включает в себя брану с положительным натяжением σ и брану с отрицательным натяжением $-\sigma/2$. Космологическая постоянная в объеме между бранами снова дается выражением (27), но она полагается равной нулю за пределами браны с отрицательным натяжением. В этом случае четырехмерно-плоское решение имеет нетривиальный масштабный фактор между бранами, равный

$$a(z) = \exp(-k|z|), \quad 0 \leq z \leq z_-,$$

а пятимерное пространство-время является плоским вне браны с отрицательным натяжением:

$$a(z) = \text{const}, \quad z > z_-.$$

В этой модели дополнительное измерение бесконечно.

В пределе $z_- \rightarrow \infty$ картина сводится к RS2-модели с нулевой модой гравитонов, сосредоточенной вблизи

браны с положительным натяжением. Для конечного z эта потенциально нулевая мода становится резонансом малой, но конечной ширины Γ_g [116–118], т.е. четырехмерный гравитон становится метастабильным по отношению к исчезновению в другие измерения. На умеренных расстояниях $k^{-1} \ll r \ll \Gamma_g^{-1}$ гравитационное взаимодействие на бране с положительным натяжением четырехмерное. Закон гравитации Ньютона на очень больших расстояниях не выполняется; на самом деле притяжение между массами заменяется на отталкивание при $r \sim \Gamma_g^{-1}$ [119, 120].

Проблема двух представленных сценариев [121], так же как и промежуточных вариантов [122], заключается в существовании динамических ("вибрирующих") бран с отрицательным натяжением. Для второй модели, как явно показано в работе [68], среди возбуждений вблизи классического решения имеется четырехмерное скалярное поле с отрицательным кинетическим членом, т.е. энергия не является положительно-определенной величиной и, более того, не ограничена снизу. На квантовом уровне становится возможным спонтанное рождение кванта с отрицательной энергией, так что вся модель оказывается неустойчивой.

Явление ван-Дама–Вельтмана–Захарова [124, 125] дает другой способ убедиться [118, 123] в сложности модификации гравитации на сверхдалеких расстояниях. А именно, эффективное четырехмерное описание гравитации с нетривиальными свойствами на очень больших расстояниях может включать в себя одно или несколько тензорных полей с малой, но ненулевой массой (или шириной распада). Однако пропагатор массивного тензорного поля на плоском фоне не совпадает с безмассовым пропагатором даже для $p \gg m$. Существенная часть первого пропагатора имеет вид

$$G_{\mu\nu\lambda\rho}^{(m)}(p \gg m) = \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{2} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda}) - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \right],$$

в то время как второй пропагатор обладает другой тензорной структурой:

$$G_{\mu\nu\lambda\rho}^{(0)} = \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{2} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \right].$$

Таким образом, даже на умеренных расстояниях теория с массивным гравитоном отличается от ОТО. В частности, массивное тензорное поле приводит к неверному (и феноменологически неприемлемому) предсказанию для отклонения луча света [118, 123]. В плоском пространстве правильную тензорную структуру можно восстановить, если добавить "духовое" скалярное поле, которое имеет отрицательный кинетический член и взаимодействует со следом тензора энергии-импульса, причем константа этого взаимодействия равна $1/6$. Именно это и происходит в приведенных выше сценариях.

Возможный выход состоит в том, чтобы рассмотреть искривленные четырехмерные пространства. Например, в теории с массивным гравитоном в четырехмерном пространстве анти-де Ситтера пропагатор имеет правильную тензорную структуру при условии, что масса гравитона меньше обратного радиуса анти-де Ситтера [126, 127] (см., однако, [128]). В случае дополнительных измерений искривленное четырехмерное пространство-

время появляется, если ослабить условие (27). Действительно, как показано в работах [129, 130], даже в моделях, включающих в себя только брану с положительным натяжением, смягчение условия (27) приводит к четырехмерной гравитации, которая на очень больших масштабах ("за горизонтом") отличается от ОТО. Остается понять, имеет ли это свойство заметные последствия с наблюдательной и/или космологической точки зрения.

7.3. Приближенная лоренц-инвариантность

Помимо прочего, дополнительные измерения предлагают схему для изучения возможности малых нарушений лоренц-инвариантности, а также феноменологических последствий этого нарушения. Уже давно стало ясно [131], что геометрия многомерного пространства-времени может не обладать четырехмерной лоренц-инвариантностью и в то же время четырехмерная геометрия, индуцированная на нашей бране, может быть инвариантной по отношению к преобразованиям Лоренца.

Например, в пяти измерениях масштабные факторы для времени и трехмерного пространства могут различаться, так что метрика может иметь вид

$$ds^2 = a^2(z) dt^2 - b^2(z) dx^2 - dz^2. \quad (61)$$

В работах [131–135] найдены классические решения с $a(z) \neq b(z)$, включающие в себя дополнительную материю в объеме вне бран. Четырехмерные координаты можно выбрать так, что в месте, где расположена брана ($z = 0$), масштабные факторы

$$a(0) = b(0) = 1$$

и индуцированная на бране четырехмерная метрика является метрикой Минковского.

Если волновые функции наших частиц имеют нулевую ширину вдоль пятого измерения, то именно метрика Минковского определяет динамику частиц, так что эффективная четырехмерная теория будет в точности лоренц-инвариантной. Однако если волновые функции имеют конечную протяженность в дополнительном измерении, отклонения $a(z)$ и $b(z)$ от единицы будут чувствоваться частицами на бране и четырехмерная лоренц-инвариантность будет только приближенной. Это, в частности, касается гравитонов: если $a(z)$ (не обязательно $b(z)$) достаточно быстро падает при $z \rightarrow \infty$, гравитоны оказываются привязанными к бране по сути дела тем же самым механизмом, что и в RS2-модели, и волновая функция нулевой моды гравитона имеет конечную протяженность в пятом измерении.

Один из эффектов нарушения лоренц-инвариантности при относительно низких значениях пространственного импульса заключается в изменении дисперсионного соотношения: вместо обычного соотношения $\omega^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$ (где ω и \mathbf{p} — энергия и трехмерный импульс частицы на бране) получается

$$\omega^2 = m^2 + c^2 \mathbf{p}^2, \quad (62)$$

причем параметр c зависит от ширины волновой функции в пятом измерении [133, 134]. Дисперсионное соотношение в форме (62) находится в согласии со стандартным анализом [136].

Чтобы увидеть, как возникает уравнение (62), рассмотрим модель скалярного поля с действием (48), но

теперь на фоне метрики (61). Уравнение для волновой функции ϕ и энергии ω принимает вид

$$\frac{b^3(z)}{a(z)} \omega^2 \phi = a(z) b(z) \mathbf{p}^2 \phi + \mathcal{H}(z) \phi, \quad (63)$$

$$\mathcal{H} = -\partial_z(ab^3\partial_z) + ab^3V(z).$$

Отметим, что оператор \mathcal{H} эрмитов. Предположим, что при $\mathbf{p} = 0$ уравнение (63) имеет собственное значение $\omega^2 = m^2$, а соответствующая волновая функция $\phi_m(z)$ сосредоточена около браны.

Рассматривая первое слагаемое правой части уравнения (63) как возмущение при малом, но не исчезающем значении \mathbf{p} , получаем низшую поправку к энергии:

$$\Delta\omega^2 = c^2 \mathbf{p}^2.$$

Здесь

$$c^2 = \frac{\int dz ab |\phi_m(z)|^2}{\int dz (b^3/a) |\phi_m(z)|^2}.$$

При $a(z) \neq b(z)$ параметр c не универсален, поскольку он зависит от вида волновой функции ϕ_m . Для узких волновых функций имеем

$$c^2 = 1 + 2[a'(0) - b'(0)] \frac{\int dz z |\phi_m(z)|^2}{\int dz |\phi_m(z)|^2}.$$

Нарушение лоренц-инвариантности мало при условии малости поправки⁹ к соотношению $c^2 = 1$. Однако в этой модели волновая функция гравитона не является узкой, так что нарушение лоренц-инвариантности в гравитационном секторе может быть существенным. Отметим, что модификация дисперсионного закона может иметь место как для массивных, так и для безмассовых частиц.

Другой эффект [135] появляется, если масштабные факторы $a(z)$ и $b(z)$ имеют разные асимптотики при $|z| \rightarrow \infty$. Предположим, что $a(z)$ спадает быстрее, чем $b(z)$:

$$a(z) \rightarrow 0, \quad \frac{a(z)}{b(z)} \rightarrow 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

Будем считать также, что потенциал $V(z)$ стремится к константе при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда в полной аналогии с разделом 6.2 непрерывный спектр собственных значений ω^2 уравнения (63) начинается с нуля (слагаемое, пропорциональное $V(z)$, не важно, так как $ab^3V \ll (b^3/a)\omega^2$ при $|z| \rightarrow \infty$ и произвольно малом значении ω^2). Для $\mathbf{p}^2 = 0$ может существовать локализованная нулевая мода, которая могла бы описывать безмассовую частицу, находящуюся на бране. Однако в отличие от раздела 6.2 континуум здесь будет начинаться с нуля и для $\mathbf{p}^2 \neq 0$: слагаемое, содержащее \mathbf{p}^2 , в уравнении (63) также пренебрежимо мало по сравнению с $(b^3/a)\omega^2$ при больших $|z|$.

В то же время нулевая мода смещается: действительная часть ее энергии равна $\omega = c|\mathbf{p}|$. Следовательно,

состояние становится *квазилокализованным* для $\mathbf{p}^2 \neq 0$ (нет связанных состояний, вложенных в континуум). Это означает, что даже безмассовые частицы будут метастабильны по отношению к исчезновению в другие измерения при условии, что соответствующие поля имеют моды в объеме за пределами браны. Чем больше трехмерный импульс $|\mathbf{p}|$, тем больше ширина $\Gamma(|\mathbf{p}|)$ [135]. Механизм метастабильности движущихся частиц в теориях с нарушенной четырехмерной лоренц-инвариантностью может иметь интересные феноменологические последствия, особенно для физики космических лучей сверхвысоких энергий.

7.4. Рождение Вселенной на бране

На поздних стадиях эволюции Вселенной, соответствующих температурам намного ниже максимальной температуры T_* в ADD-модели или значительно ниже нескольких ТэВ в RS1- и RS2-моделях, космология бран определяется теми же четырехмерными законами, что и стандартная космология FRW (Фридмана–Робертсона–Уокера) [137–139]. (В случае RS1-модели утверждение выполняется, только если радион стабилизирован; иначе поздние космологические стадии становятся весьма необычными [140, 141].) Важное предположение здесь состоит в том, что объем вне браны пуст, а в случае бесконечных дополнительных измерений — в том, что горизонт "не светит" на нашу брану. Разумны ли эти предположения? Является ли наш мир со всей его богатой структурой всего лишь браной, вложенной в пустое многомерное пространство?

Эти вопросы подводят нас к проблеме происхождения Вселенной на бране. Требуя, чтобы объем вне браны был пуст, мы приходим к картине спонтанного возникновения нашей браны в многомерном пространстве, которое изначально не имело ни бран, ни других возбуждений [142]. Модель, в которой реализуется такая возможность, представляет собой пятимерную теорию поля четыре-формы (четырёхиндексного антисимметричного тензорного поля) B и бран, как заряженных, так и нейтральных по отношению к этому полю.

Аналогично тому, как заряженная частица взаимодействует с векторным полем вдоль своей мировой линии: $S_{\text{int}} = e \int A_\mu dx^\mu$, заряженная брана взаимодействует с полем четыре-формы вдоль своего четырехмерного мирового объема:

$$S_{\text{int}} = e \int d\Omega^{ABCD} B_{ABCD}.$$

Тогда картина выглядит следующим образом. Предположим, что в начальном состоянии пятимерная Вселенная содержит B -поле с постоянной напряженностью

$$H_{ABCDE} \equiv \partial_{[A} B_{BCDE]} = h \sqrt{g^{(5)}} \epsilon_{ABCDE}.$$

Если бы не заряженные браны, поле B вело бы себя, как космологическая постоянная, поскольку уравнения такого поля требуют, чтобы

$$h = \text{const}.$$

Для конечного значения h заряженные браны рождаются спонтанно [143] подобно спонтанному рождению e^+e^- -пар в электрическом поле. Более того, нейтральная

⁹ Другой вариант состоит в том, что волновые функции всех частиц, привязанных к бране, очень похожи.

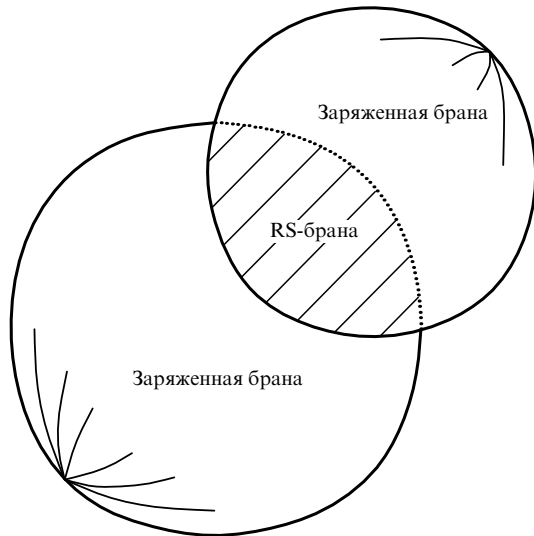


Рис. 11. Спонтанно рожденная система из двух заряженных бран с одной нейтральной RS-браной между ними.

брана может возникнуть между заряженными [142]. Именно нейтральная брана интерпретируется как наша Вселенная. Система из трех бран к моменту их материализации представлена на рис. 11. После спонтанного возникновения трехмерный объем всех трех бран возрастает, область соединения бран удаляется, и основная часть нейтральной браны становится однородным трехмерным пространством. Окружающий ее объем остается пустым.

Если значение h не очень велико, вероятность рождения браны экспоненциально мала. Поэтому представляется вполне естественным, что другие браны, которые могли создаваться в пятимерном пространстве, очень далеки от нашей. При достаточно сложной теории на нашей бране можно допустить, что ее начальное состояние было таким, что после образования браны на ней начинается стадия обычной четырехмерной инфляции. Тогда модель [142] способна воспроизвести обычную космологическую картину, в которой наша Вселенная представляет собой брану, погруженную в пустое многомерное пространство. Эта модель определенно представляет собой интересный поворот в обсуждении вопроса о происхождении нашей Вселенной.

8. Заключение

Теории с большими и бесконечными дополнительными измерениями выглядят весьма экзотическими по крайней мере на сегодняшний день. Тем не менее они приводят к важным представлениям как о том, какие необычные явления могут происходить на масштабах энергий, доступных для будущих ускорителей, так и о редких эффектах в области низких энергий. В рамках этих теорий можно рассмотреть много интересных феноменологических вопросов: возможность кажущегося несохранения энергии и электрического заряда, естественность малого нарушения лоренц-инвариантности или возможные проявления конформного сильно взаимодействующего сектора, который слабо связан с полями Стандартной модели. Более того, возникают новые идеи в подходах к решению фундаментальных проблем, таких

как проблема космологической постоянной или начало нашей Вселенной.

Все это делает обсуждаемый предмет интересным и актуальным. Вопрос только в том, следует ли Природа по какому-либо из путей, изучаемых данной областью физики.

Автор признателен Л.Б. Окуню за предложение написать этот миниобзор. Автор благодарен многочисленным коллегам из Института ядерных исследований РАН и других институтов за полезные дискуссии.

Работа выполнена частично при поддержке грантов Совета по президентским грантам и государственной поддержке ведущих научных школ (00-15-96626), Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-18410) и Швейцарского научного общества (7SUPJ062239).

Список литературы

1. Волобуев И П, Кубышин Ю А *ТМФ* **68** 225, 368 (1986); *Письма в ЖЭТФ* **45** 455 (1987)
2. Antoniadis I *Phys. Lett. B* **246** 377 (1990)
3. Lykken J D *Phys. Rev. D* **54** 3693 (1996); hep-th/9603133
4. Polchinski J "TASI lectures on D-branes", hep-th/9611050
5. Horava P, Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 506 (1996); hep-th/9510209
6. Lukas A, Ovrut B A, Stelle K S, Waldram D *Phys. Rev. D* **59** 086001 (1999); hep-th/9803235
7. Visser M *Phys. Lett. B* **159** 22 (1985); hep-th/9910093
8. Rubakov V A, Shaposhnikov M E *Phys. Lett. B* **125** 136 (1983)
9. Akama K *Lect. Notes Phys.* **176** 267 (1982); hep-th/0001113
10. Jackiw R, Rebbi C *Phys. Rev. D* **13** 3398 (1976)
11. Jackiw R, Rossi P *Nucl. Phys. B* **190** 681 (1981)
12. 't Hooft G *Phys. Rev. D* **14** 3432 (1976)
13. Libanov M V, Troitsky S V *Nucl. Phys. B* **599** 319 (2001); hep-ph/0011095
14. Frere J-M, Libanov M V, Troitsky S V *Phys. Lett. B* **512** 169 (2001); hep-ph/0012306
15. Dvali G, Shifman M *Phys. Lett. B* **396** 64 (1997); hep-th/9612128
16. Dvali G, Gabadadze G, Porrati M *Phys. Lett. B* **485** 208 (2000); hep-th/0005016
17. Dvali G, Gabadadze G *Phys. Rev. D* **63** 065007 (2001); hep-th/0008054
18. Dvali G, Gabadadze G, Shifman M *Phys. Lett. B* **497** 271 (2001); hep-th/0010071
19. Dubovsky S L, Rubakov V A "On models of gauge field localization on a brane", hep-th/0105243
20. Quevedo F, Trugenberger C A *Nucl. Phys. B* **501** 143 (1997); hep-th/9604196; Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **486** 23 (1997); hep-th/9607049
21. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Lett. B* **429** 263 (1998); hep-ph/9803315
22. Antoniadis I, Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Lett. B* **436** 257 (1998); hep-ph/9804398
23. Hoyle C D et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 1418 (2001); hep-ph/0011014
24. Митрофанов В П, Пономарева О И *ЖЭТФ* **94** 16 (1988)
25. Su Y et al. *Phys. Rev. D* **50** 3614 (1994)
26. Long J C, Chan H W, Price J C *Nucl. Phys. B* **539** 23 (1999); hep-ph/9805217
27. Long J C, Churnside A B, Price J C "Gravitational experiment below 1 millimeter and comment on shielded Casimir backgrounds for experiments in the micron regime", hep-ph/0009062
28. Брагинский В Б, Частное сообщение
29. Giudice G F, Rattazzi R, Wells J D *Nucl. Phys. B* **544** 3 (1999); hep-ph/9811291
30. Giudice G F, Rattazzi R, Wells J D *Nucl. Phys. B* **595** 250 (2001); hep-ph/0002178
31. Nussinov S, Shrock R *Phys. Rev. D* **59** 105002 (1999); hep-ph/9811323
32. Hewett J L *Phys. Rev. Lett.* **82** 4765 (1999); hep-ph/9811356
33. Han T, Lykken J D, Zhang R-J *Phys. Rev. D* **59** 105006 (1999); hep-ph/9811350

34. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Rev. D* **59** 086004 (1999); hep-ph/9807344
35. Kaloper N, March-Russell J, Starkman G D, Trodden M *Phys. Rev. Lett.* **85** 928 (2000); hep-ph/0002001
36. Kakushadze Z, Tye S-H H *Nucl. Phys. B* **548** 180 (1999); hep-th/9809147
37. Shiu G, Shroock R, Tye S-H H *Phys. Lett. B* **458** 274 (1999); hep-ph/9904262
38. Cullen S, Perelstein M, Peskin M E *Phys. Rev. D* **62** 055012 (2000); hep-ph/0001166
39. Giudice G F, Kolb E W, Riotto A *Phys. Rev. D* **64** 023508 (2001); hep-ph/0005123
40. Cullen S, Perelstein M *Phys. Rev. Lett.* **83** 268 (1999); hep-ph/9903422
41. Barger V, Han T, Kao C, Zhang R-J *Phys. Lett. B* **461** 34 (1999); hep-ph/9905474
42. Hanhart C, Phillips D R, Reddy S, Savage M J *Nucl. Phys. B* **595** 335 (2001); nucl-th/0007016
43. Hannestad S, Raffelt G "New supernova limit on large extra dimensions", hep-ph/0103201
44. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G, March-Russell J "Neutrino masses from large extra dimensions", hep-ph/9811448
45. Dienes K R, Dudas E, Gherghetta T *Nucl. Phys. B* **557** 25 (1999); hep-ph/9811428
46. Dvali G, Smirnov A Yu *Nucl. Phys. B* **563** 63 (1999); hep-ph/9904211
47. Mohapatra R N, Nandi S, Perez-Lorenzana A *Phys. Lett. B* **466** 115 (1999); hep-ph/9907520; Mohapatra R N, Perez-Lorenzana A *Nucl. Phys. B* **576** 466 (2000); hep-ph/9910474
48. Barbieri R, Creminelli P, Strumia A *Nucl. Phys. B* **585** 28 (2000); hep-ph/0002199
49. Lukas A, Ramond P, Romanino A, Ross G G *Phys. Lett. B* **495** 136 (2000); hep-ph/0008049
50. Cosme N et al. *Phys. Rev. D* **63** 113018 (2001); hep-ph/0010192
51. Pérez-Lorenzana A "Theories in more than four dimensions", hep-ph/0008333
52. Dienes K R, Dudas E, Gherghetta T *Phys. Lett. B* **436** 55 (1998); hep-ph/9803466; *Nucl. Phys. B* **537** 47 (1999); hep-ph/9806292
53. Bachas C P *JHEP* **9811** 023 (1998); hep-ph/9807415
54. Antoniadis I, Bachas C *Phys. Lett. B* **450** 83 (1999); hep-th/9812093
55. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, March-Russell J "Logarithmic unification from symmetries enhanced in the submillimeter infrared", hep-th/9908146
56. Krauss L M, Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **62** 1221 (1989)
57. Alford M G, March-Russell J, Wilczek F *Nucl. Phys. B* **337** 695 (1990)
58. Preskill J, Krauss L M *Nucl. Phys. B* **341** 50 (1990)
59. Alford M G, Coleman S, March-Russell J *Nucl. Phys. B* **351** 735 (1991)
60. Kamionkowski M, March-Russell J *Phys. Lett. B* **282** 137 (1992); hep-th/9202003
61. Israel W *Nuovo Cimento B* **44** (S10) 1 (1966)
62. Berezin V A, Kuzmin V A, Tkachev I I *Phys. Rev. D* **36** 2919 (1987)
63. Freedman D Z, Gubser S S, Pilch K, Warner N P *JHEP* **0007** 038 (2000); hep-th/9906194
64. Gogberashvili M *Europhys. Lett.* **49** 396 (2000); hep-ph/9812365
65. Gogberashvili M *Mod. Phys. Lett. A* **14** 2025 (1999); hep-ph/9904383
66. Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 3370 (1999); hep-ph/9905221
67. Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 4690 (1999); hep-th/9906064
68. Pilo L, Rattazzi R, Zaffaroni A *JHEP* **0007** 056 (2000); hep-th/0004028
69. Csaki C, Graesser M, Randall L, Terning J *Phys. Rev. D* **62** 045015 (2000); hep-ph/9911406
70. Charmousis C, Gregory R, Rubakov V A *Phys. Rev. D* **62** 067505 (2000); hep-th/9912160
71. Goldberger W D, Wise M B *Phys. Rev. Lett.* **83** 4922 (1999); hep-ph/9907447
72. Luty M A, Sundrum R *Phys. Rev. D* **62** 035008 (2000); hep-th/9910202
73. Garriga J, Tanaka T *Phys. Rev. Lett.* **84** 2778 (2000); hep-th/9911055
74. Giddings S B, Katz E, Randall L *JHEP* **0003** 023 (2000); hep-th/0002091
75. Davoudiasl H, Hewett J L, Rizzo T G *Phys. Rev. Lett.* **84** 2080 (2000); hep-ph/9909255
76. Arkani-Hamed N, Porrati M, Randall L "Holography and phenomenology", hep-th/0012148
77. Gherghetta T, Pomarol A *Nucl. Phys. B* **602** 3 (2001); hep-ph/0012378
78. Ахмедов Э Т *УФН* **171** 1005 (2001); hep-th/9911095
79. Mueck W, Viswanathan K S, Volovich I V *Phys. Rev. D* **62** 105019 (2000); hep-th/0002132
80. Gregory R, Rubakov V A, Sibiryakov S M *Class. Quant. Grav.* **17** 4437 (2000); hep-th/0003109
81. Lykken J, Randall L *JHEP* **0006** 014 (2000); hep-th/9908076
82. Hebecker A, March-Russell J "Randall–Sundrum II cosmology, AdS/CFT, and the bulk black hole", hep-ph/0103214
83. Dubovsky S L, Rubakov V A, Tinyakov P G *Phys. Rev. D* **62** 105011 (2000); hep-th/0006046
84. Bajc B, Gabadadze G *Phys. Lett. B* **474** 282 (2000); hep-th/9912232
85. Maldacena J M *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998); *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113 (1999); hep-th/9711200
86. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998); hep-th/9802109
87. Witten E *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 505 (1998); hep-th/9803131
88. Verlinde H, Talk at ITP Santa Barbara Conf. "New dimensions in field theory and string theory", http://www.itp.ucsb.edu/online/susy_c99/verlinde; Witten E, *ibid.*, http://www.itp.ucsb.edu/online/susy_c99/discussion
89. Gubser S S *Phys. Rev. D* **63** 084017 (2001); hep-th/9912001
90. Giddings S B, Katz E "Effective theories and black hole production in warped compactifications", hep-th/0009176
91. Coleman S, Smarr L *Commun. Math. Phys.* **56** 1 (1977)
92. Hawking S W, Hertog T, Reall H S *Phys. Rev. D* **62** 043501 (2000); hep-th/0003052
93. Nojiri S, Odintsov S D *Phys. Lett. B* **484** 119 (2000); hep-th/0004097
94. Anchordoqui L, Nunez C, Olsen K *JHEP* **0010** 050 (2000); hep-th/0007064
95. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G, Kaloper N *Phys. Rev. Lett.* **84** 586 (2000); hep-th/9907209
96. Gherghetta T, Shaposhnikov M *Phys. Rev. Lett.* **85** 240 (2000); hep-th/0004014
97. Cohen A G, Kaplan D B *Phys. Lett. B* **470** 52 (1999); hep-th/9910132
98. Gregory R *Phys. Rev. Lett.* **84** 2564 (2000); hep-th/9911015
99. Gherghetta T, Roessl E, Shaposhnikov M *Phys. Lett. B* **491** 353 (2000); hep-th/0006251
100. Randjbar-Daemi S, Shaposhnikov M *Phys. Lett. B* **491** 329 (2000); hep-th/0008087
101. Dubovsky S L, Rubakov V A, Tinyakov P G *JHEP* **0008** 041 (2000); hep-ph/0007179
102. Oda I *Phys. Lett. B* **496** 113 (2000); hep-th/0006203
103. Ponton E, Poppitz E *JHEP* **0102** 042 (2001); hep-th/0012033
104. Rubakov V A, Shaposhnikov M E *Phys. Lett. B* **125** 139 (1983)
105. Randjbar-Daemi S, Wetterich C *Phys. Lett. B* **166** 65 (1986)
106. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Kaloper N, Sundrum R *Phys. Lett. B* **480** 193 (2000); hep-th/0001197
107. Kachru S, Schulz M, Silverstein E *Phys. Rev. D* **62** 085003 (2000); hep-th/0002121
108. Dolgov A D, in *Proc. Intern. Conf. "The Very Early Universe"* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982) p. 449
109. Peccei R D, Sola J, Wetterich C *Phys. Lett. B* **195** 183 (1987)
110. Barr S M, Hochberg D *Phys. Lett. B* **211** 49 (1988)
111. de Alwis S P *Nucl. Phys. B* **597** 263 (2001); hep-th/0002174; de Alwis S P, Flournoy A T, Irges N *JHEP* **0101** 027 (2001); hep-th/0004125
112. Forste S, Lalak Z, Lavignac S, Nilles H P *Phys. Lett. B* **481** 360 (2000); hep-th/0002164
113. Csaki C, Erlich J, Grojean C, Hollowood T *Nucl. Phys. B* **584** 359 (2000); hep-th/0004133

114. Rubakov V A *Phys. Rev. D* **61** 061501 (2000); hep-ph/9911305
115. Kogan I I et al. *Nucl. Phys. B* **584** 313 (2000); hep-ph/9912552
116. Gregory R, Rubakov V A, Sibiryakov S M *Phys. Rev. Lett.* **84** 5928 (2000); hep-th/0002072
117. Csaki C, Erlich J, Hollowood T J *Phys. Rev. Lett.* **84** 5932 (2000); hep-th/0002161
118. Dvali G, Gabadadze G, Porrati M *Phys. Lett. B* **484** 112 (2000); hep-th/0002190
119. Gregory R, Rubakov V A, Sibiryakov S M *Phys. Lett. B* **489** 203 (2000); hep-th/0003045
120. Csaki C, Erlich J, Hollowood T J, Terning J *Phys. Rev. D* **63** 065019 (2001); hep-th/0003076
121. Witten E "The cosmological constant from the viewpoint of string theory", hep-ph/0002297
122. Kogan I I, Ross G G *Phys. Lett. B* **485** 255 (2000); hep-th/0003074
123. Dvali G, Gabadadze G, Porrati M *Phys. Lett. B* **484** 129 (2000); hep-th/0003054
124. van Dam H, Veltman M *Nucl. Phys. B* **22** 397 (1970)
125. Захаров В И *Письма в ЖЭТФ* **12** 447 (1970)
126. Kogan I I, Mouslopoulos S, Papazoglou A *Phys. Lett. B* **503** 173 (2001); hep-th/0011138
127. Porrati M *Phys. Lett. B* **498** 92 (2001); hep-th/0011152
128. Dilkes F A, Duff M J, Liu J T, Sati H *Phys. Rev. Lett.* **87** 041301 (2001); hep-th/0102093
129. Kogan I I, Mouslopoulos S, Papazoglou A *Phys. Lett. B* **501** 140 (2001); hep-th/0011141
130. Karch A, Randall L *JHEP* **0105** 008 (2001); hep-th/0011156
131. Visser M *Phys. Lett. B* **159** 22 (1985)
132. Bowcock P, Charmousis C, Gregory R *Class. Quant. Grav.* **17** 4745 (2000); hep-th/0007177
133. Chung D J H, Kolb E W, Riotto A "Extra dimensions present a new flatness problem", hep-ph/0008126
134. Csaki C, Erlich J, Grojean C *Nucl. Phys. B* **604** 312 (2001); hep-th/0012143
135. Dubovsky S L "Tunneling into extra dimension and high-energy violation of Lorentz invariance", hep-th/0103205
136. Coleman S, Glashow S L *Phys. Rev. D* **59** 116008 (1999); hep-ph/9812418
137. Csaki C, Graesser M, Kolda C, Terning J *Phys. Lett. B* **462** 34 (1999); hep-ph/9906513
138. Cline J M, Grojean C, Servant G *Phys. Rev. Lett.* **83** 4245 (1999); hep-ph/9906523
139. Csaki C, Graesser M, Randall L, Terning J *Phys. Rev. D* **62** 045015 (2000); hep-ph/9911406
140. Binetruy P, Deffayet C, Langlois D *Nucl. Phys. B* **565** 269 (2000); hep-th/9905012
141. Chung D J H, Freese K *Phys. Rev. D* **61** 023511 (2000); hep-ph/9906542
142. Gorsky A, Selivanov K *Phys. Lett. B* **485** 271 (2000); hep-th/0005066; "Brane tunneling and the brane world scenario", hep-th/0009207
143. Brown J D, Teitelboim C *Nucl. Phys. B* **297** 787 (1988).

Large and infinite extra dimensions

V.A. Rubakov

*Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences,
prosp. 60-letiya Oktyabrya 7a, 117312 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 135-77 66
Fax (7-095) 135-22 68
E-mail: rubakov@ms2.inr.ac.ru*

Theoretical studies on more than three spatial dimensions are currently showing a distinct shift toward the 'brane world' picture, in which ordinary matter (with possible exceptions of gravitons and hypothetical particles interacting very weakly with matter) is within a three-dimensional submanifold — brane — embedded in multi-dimensional space. The extra dimensions may be large and indeed infinite and may show up directly in current or future experiments. In the present paper the basic ideas of the brane theory are presented in an accessible way using simple field-theoretical models.

PACS numbers: **04.50. + b**, **11.25.Mj**, **12.60. - i**

Bibliography — 143 references

Received 18 April 2001