

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Сверхсветовые электромагнитные солитоны
в неравновесных средах

С.В. Сазонов

На основе простейшей модели двухкомпонентных неравновесных сред из двухуровневых квантовых переходов с сильно различающимися собственными частотами обсуждается возможность устойчивого сверхсветового распространения предельно коротких (не содержащих высокочастотного заполнения) электромагнитных солитонов, бризеров и нерезонансных солитонов огибающей.

PACS numbers: 42.50.Gy, 42.55.-f, 42.65.-k, 42.65.Tg

Содержание

1. Введение (663).
 2. Линейный анализ (664).
 3. Нелинейное волновое уравнение (665).
 4. Диссипативный солитон (666).
 5. Сверхсветовые солитоны и бризеры в консервативной среде (667).
 6. Заключение (675).
- Список литературы (677).

1. Введение

В настоящее время в связи с развитием импульсной лазерной техники, позволяющей создавать сильнонеравновесные среды, возобновился интерес к проблеме существования в таких средах импульсов, распространяющихся со скоростью, большей скорости света в вакууме [1]. Сверхсветовые (таххионные) моды необходимым образом присутствуют в средах, неустойчивых по отношению к переходу в равновесное состояние [2]. На возможность сверхсветового распространения в усиливающих (активных) средах оптических монохроматических импульсов (МИ) было ранее обращено внимание в серии работ [3–5]. Термин "монохроматический" для импульса носит условный характер и может употребляться лишь в случае, если его спектральная ширина $\delta\omega \sim 1/\tau_p$ (где τ_p — временная длительность импульса) много меньше его несущей частоты ω . Таким образом, условие, при котором импульс можно считать монохроматическим, представимо в виде $\omega\tau_p \gg 1$. Следует под-

черкнуть, что речь идет именно о групповой скорости $v > c$. При этом данные импульсы не переносят информации, так как распространение максимума волнового пакета связано не с передачей энергии от точки к точке, а с его усилением за счет неравновесности среды. С этим обстоятельством также связана невозможность пространственной локализации сверхсветового объекта [2]. Трудность состоит в неустойчивости стационарных световых импульсов, возвращающих неравновесную среду в исходное инвертированное состояние [1]. Устойчивость же сверхсветовых сигналов приводит к нарушению принципа причинности [6].

В результате успехов, достигнутых в лазерной физике в последнее десятилетие, появилась возможность генерировать оптические импульсы длительностью порядка одного периода электромагнитных колебаний — предельно короткие импульсы (ПКИ) [7–9]. Взаимодействие таких импульсов с веществом приобретает дополнительные особенности (в том числе и в неравновесных средах) по сравнению с подобным взаимодействием в случае МИ с ярко выраженной несущей частотой [10, 11].

В простейшем случае, когда среда представляется в виде набора из двухуровневых атомов, динамика широкополосных ПКИ описывается трехмерным уравнением синус-Гордона [10, 11]. Широкополосность здесь понимается в том смысле, что спектр импульса $\delta\omega \sim \tau_p^{-1}$ перекрывает частоту ω_0 квантовых переходов двухуровневых атомов (т.е. $\omega_0/\delta\omega \sim \omega_0\tau_p \ll 1$; см. ниже). В неравновесном случае, когда перед подачей импульса на среду в последней преимущественно заселены возбужденные состояния, соответствующее решение уравнения синус-Гордона имеет формально вид локализованных сверхсветовых импульсов ($v > c$). Однако данные решения оказываются неустойчивыми (например, по отношению к самофокусировке) [12, 13]. То же самое можно сказать и относительно нерезонансных солитонов огибающей [12].

В связи с изложенным, представляет интерес изучение вопроса о возможности создания такого неравновесного состояния среды, при котором в ней могут распространяться устойчивые ПКИ и нерезонансные

С. В. Сазонов, Калининградский государственный технический университет
236000 Калининград, Советский просп. 1, Российская Федерация
Факс: (0112) 359-125
E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

Статья поступила 13 декабря 2000 г.,
после доработки 23 февраля 2001 г.

солитоны огибающей со сверхсветовыми групповыми скоростями.

2. Линейный анализ

Линейная дисперсия света достаточно хорошо описывается классической теорией Лоренца [14], в которой взаимодействие оптического электрона с атомным остовом моделируется квазиупругой возвращающей силой. В результате комплексный показатель преломления, мнимая часть которого κ пропорциональна коэффициенту затухания световых волн, а действительная N описывает рефрактивные свойства среды, выражается через характеристики среды и частоту ω света с помощью формулы Зельмейера [14]. На рисунке 1 представлены зависимости $N(\omega)$ и $\kappa(\omega)$, соответствующие данной формуле [14]. Заметим, что формула Зельмейера соответствует квантово-механической модели двухуровневой среды с частотой перехода между уровнями, равной ω_0 .

По определению групповой скорости $v = d\omega/dk$, где k — волновое число, соответствующее частоте ω и выражающееся через фазовую скорость $v_{ph} = c/N$ соотношением $k = \omega/v_{ph} = \omega N/c$. Тогда

$$\frac{1}{v} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega}(\omega N) = \frac{1}{c} \left(N + \omega \frac{dN}{d\omega} \right). \quad (1)$$

В окрестности частоты резонансного поглощения ω_0 из-за резкого уменьшения N может выполняться неравенство $N + \omega dN/d\omega < 1$ и, как следствие (см. (1)), $v > c$. Однако затухание света здесь столь велико, что группо-

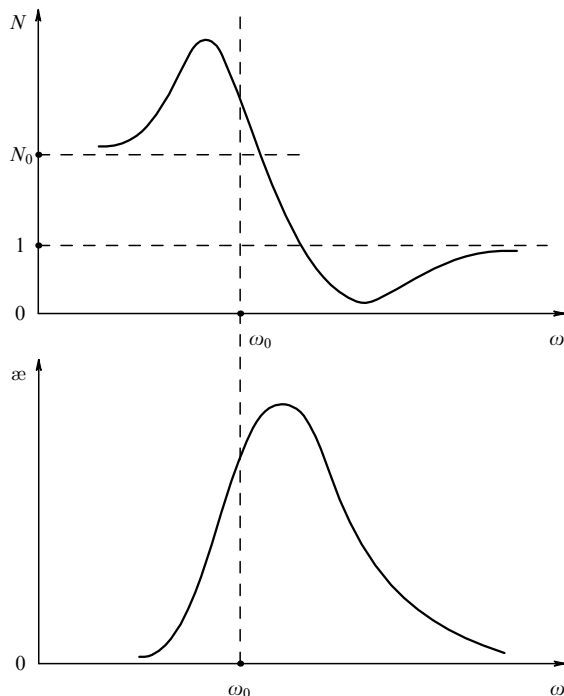


Рис. 1. Зависимости вещественного показателя преломления N и коэффициента поглощения κ от частоты излучения ω , построенные на основе классической формулы Зельмейера (ω_0 — резонансная частота среды, N_0 — показатель преломления на нулевой частоте). В окрестности ω_0 , где наблюдается крутой спад $N(\omega)$ (аномальная дисперсия), формально $v > c$. Однако из-за сильного поглощения в данной области частот параметр v теряет смысл скорости волны.

вая скорость теряет смысл скорости переноса энергии [15].

Зависимости, представленные на рис. 1, соответствуют равновесной среде. Для среды же с инверсной населенностью квантовых уровней коэффициент κ отрицателен, а области нормальной ($dN/d\omega > 0$) дисперсии в равновесной среде становятся областями аномальной ($dN/d\omega < 0$) дисперсии в инвертированной среде и наоборот. В областях существенного убывания N с ростом ω теперь велико усиление волн, что приводит к развитию их неустойчивости.

Ситуация может несколько измениться, если рассмотреть двухкомпонентную среду с резонансными частотами ω_1 и ω_2 соответственно, когда одна из компонент находится в равновесном состоянии, другая же инвертирована. Пусть при этом характерная частота ω электромагнитной волны удовлетворяет двойному неравенству

$$\omega_1^2 \ll \omega^2 \ll \omega_2^2. \quad (2)$$

Условию $\omega_1^2 \ll \omega^2$ могут удовлетворить собственные частоты ω_1 , лежащие в инфракрасном диапазоне. Неравенство же $\omega_2^2 \gg \omega^2$ справедливо для частот ω_2 видимого диапазона, соответствующих электронно-оптическим переходам. Ниже квантовые переходы, с частотой $\omega_1(\omega_2)$, будем называть 1(2)-переходами или 1(2)-компонентами. Оба типа переходов могут принадлежать как одним и тем же молекулярным структурным единицам (тогда их соответствующие концентрации n_1 и n_2 равны между собой), так и различным ($n_1 \neq n_2$).

Система материальных и волнового уравнений для среды, состоящей из двух сортов двухуровневых атомов, имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = -\omega_j^2 U_j - \omega_j \frac{2d_j E}{\hbar} W_j, \quad \frac{\partial W_j}{\partial t} = \frac{2d_j E}{\hbar \omega_j} \frac{\partial U_j}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{8\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{j=1}^2 d_j n_j U_j. \quad (4)$$

Здесь индекс $j = 1, 2$ обозначает номер соответствующей компоненты, E — напряженность электрического поля импульса, d_j — дипольный момент перехода j -й компоненты, U_j и W_j — обезразмеренный дипольный момент и инверсия населенностей атомов j -й компоненты ($-1/2 \leq W_j \leq 1/2$), γ — коэффициент потерь излучения в среде за единицу времени. Далее будем считать длительность τ_p светового воздействия значительно короче времен фазовой и энергетической релаксации для обоих переходов, чем и обусловлено пренебрежение в (3) релаксационными слагаемыми.

Линеаризация (3), (4) соответствует фиксированию значений инверсий обеих компонент. В соответствии с этим будем считать $W_j = W_{j\infty}$ ($W_{j\infty}$ — начальная инверсия j -й компоненты). Полагая затем $P, E \sim \exp(i\omega t)$, где $P = 2 \sum_{j=1}^2 d_j n_j U_j$ — поляризация среды, найдем выражения для восприимчивости $\chi = P/E$ и квадрата показателя преломления ($\gamma = 0$)

$$N^2 = 1 + 4\pi\chi = 1 - \frac{16\pi}{\hbar} \sum_{j=1}^2 \frac{d_j^2 \omega_j n_j}{\omega_j^2 - \omega^2} W_{j\infty}. \quad (5)$$

Благодаря (2) под знаком суммы в знаменателе первого слагаемого ($j = 1$) в выражении (5) можно

пренебречь ω_1^2 , а в знаменателе второго слагаемого ($j = 2$) — квадратом частоты ω внешнего поля. Тогда из (1) и (5) найдем условие, при котором $v > c$:

$$\omega_*^2 W_{1\infty} + \omega^2 W_{2\infty} > 0, \quad (6)$$

где введен параметр ω_* размерности частоты, определяемый как $\omega_* = (d_1/d_2 N_{20}) \sqrt{n_1 \omega_1 \omega_2 / n_2}$, $N_{20} = \sqrt{1 - 2\eta W_{2\infty}}$ — показатель преломления 2-компоненты в области частот, удовлетворяющих (2), $\eta = 8\pi d_2^2 n_2 / (\hbar \omega_2)$.

Из соотношений Крамерса–Кронига [16] вытекает, что дисперсия (зависимость χ от частоты) неизбежно приводит к наличию поглощения поля в среде. Причем коэффициент поглощения κ имеет острые максимумы в областях аномальной дисперсии ($\partial\chi/\partial\omega \sim \partial N^2/\partial\omega < 0$). Таким образом, аномальный ход дисперсии всегда сопровождается поглощением [14]. Из тех же соотношений Крамерса–Кронига следует, что изменение знака у коэффициента поглощения влечет за собой изменение характера дисперсии: в окрестностях резонансных частот среды дисперсия становится нормальной, за их пределами — аномальной. На рисунке 2 представлены зависимости $\chi(\omega)$ и $\kappa(\omega)$ для четырех различных состояний двухкомпонентной среды. Как видно из (6), в случае поглощающей среды (ПС, $W_{1\infty} = W_{2\infty} = -1/2$) групповая скорость всегда меньше c . В то же время в поглощающе-усиливающей (ПУС, $W_{1\infty} = -W_{2\infty} = -1/2$) и усиливающе-поглощающей (УПС, $W_{1\infty} = -W_{2\infty} = 1/2$) средах — $v > c$ соответственно при $\omega > \omega_*$ и $\omega < \omega_*$. Усиливающая же среда (УС, $W_{1\infty} = W_{2\infty} = 1/2$) всегда, согласно (6), соответствует сверхсветовым групповым скоростям в области частот между ω_1 и ω_2 . Во всех четырех случаях следует помнить о неравенствах (2),

выделяющих частотную область, где поглощение и усиление сравнительно малы.

Выполнение условия (6) не влечет за собой вывод о возможности сверхсветового переноса информации, так как плоские монохроматические волны не способны выполнять такую роль. Линейные же волновые пакеты, образованные группами волн обсуждаемого частотного диапазона, вследствие дисперсии должны быстро расплываться.

3. Нелинейное волновое уравнение

Предельно короткие импульсы получили такое название благодаря тому, что их спектр настолько широк, что в них невозможно выделить несущую частоту [17, 18]. Для того чтобы и в этом случае можно было пользоваться условиями (2), следует положить $\omega \sim \tau_p^{-1}$, и условия (2) примут вид, использованный в [10, 11, 17]: $(\omega_1 \tau_p)^2 \ll 1$ и $(\omega_2 \tau_p)^2 \gg 1$. Тогда для 1-переходов ($j = 1$) в правой части первого уравнения (3), в силу (2), можно пренебречь членом $\omega_1^2 U_1$, и решение (3) для $j = 1$ запишется, очевидно, в виде [10, 11]

$$W_1 = W_{1\infty} \cos \theta, \quad \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\omega_1 W_{1\infty} \sin \theta, \quad (7)$$

где

$$\theta = \left(\frac{2d_1}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^t E dt',$$

а $W_{j\infty}$ — инверсия j -переходов перед воздействием ПКИ.

Для $j = 2$ левая часть первого уравнения системы (3) мала (см. (2)). Пренебрегая ей в нулевом приближении,

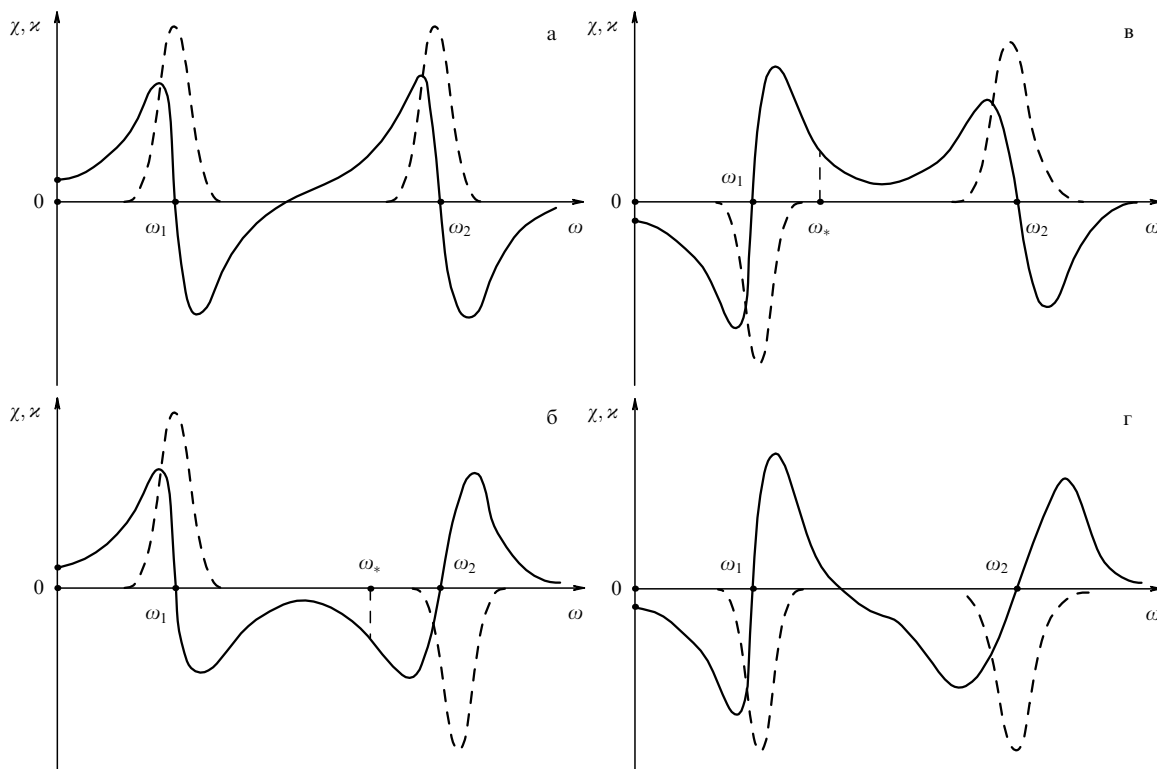


Рис. 2. Зависимости $\chi(\omega)$ (сплошные кривые) и $\kappa(\omega)$ (пунктирные кривые) при различных состояниях двухкомпонентной среды с резонансными частотами ω_1 и ω_2 : (а) поглощающая среда: $v < c$ при $\omega_1^2 \ll \omega^2 \ll \omega_2^2$; (б) поглощающе-усиливающая среда: $v > c$ при $\omega_*^2 < \omega^2 \ll \omega_2^2$; (в) усиливающе-поглощающая среда: $v > c$ при $\omega_1^2 \ll \omega^2 < \omega_*^2$; (г) усиливающая среда: $v > c$ при $\omega_1^2 \ll \omega^2 \ll \omega_2^2$.

найдем $U_2 \simeq -2d_2EW_2/(\hbar\omega_2)$. Подставляя данное выражение в левую часть первого уравнения (3), получим в следующем приближении

$$U_2 = -\frac{2d_2E}{\hbar\omega_2}W_2 + \frac{2d_2W_{2\infty}}{\hbar\omega_2^3} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Здесь во втором слагаемом правой части мы положили $W_2 = W_{2\infty}$ по причине того, что в спектре импульса отсутствуют фурье-компоненты, резонансные 2-переходам (см. (2)), в результате чего последние возбуждаются незначительно. Таким образом, изменение W_2 того же порядка, что и малый параметр $(\omega_2\tau_p)^{-2}$.

Подстановка $U_2 \simeq -2d_2EW_{2\infty}/(\hbar\omega_2)$ во второе уравнение (3) и последующее интегрирование приводят к выражению

$$W_2 = W_{2\infty} \left[1 - 2 \left(\frac{d_2E}{\hbar\omega_2} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Используя (4), (7)–(9), получаем

$$\Delta\theta - \frac{N_{20}^2}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \sin \theta + \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^4}, \quad (10)$$

где

$$\alpha = -\frac{16\pi d_1^2 \omega_1 n_1 W_{1\infty}}{\hbar c^2}, \quad \mu = -\frac{16\pi d_2^2 n_2 W_{2\infty}}{\hbar c^2 \omega_2^3}, \quad \beta = \frac{3d_2^2 \mu}{2d_1^2}. \quad (11)$$

Параметр μ соответствует дисперсии, а β — кубической нелинейности 2-компоненты. Вместе с тем дисперсия и нелинейность, создаваемые 1-переходами, неаддитивно входят в правую часть (10) в виде слагаемого $\alpha \sin \theta$.

Дальнейшее изложение в настоящей работе основано на анализе частных решений уравнения (10) в виде уединенных бегущих импульсов.

4. Диссипативный солитон

Рассмотрим неравновесную диссипативную среду, в которой существенны потери излучения ($\gamma \neq 0$). Будем искать одномерное решение (10) в виде стационарного импульса, распространяющегося вдоль оси z со скоростью v , т.е. $\theta = \theta(t - z/v)$. Очевидно, такое решение возможно, если среда обладает запасом энергии, компенсирующим потери. Пусть 1-компонента до воздействия ПКИ находится в инвертированном состоянии $W_{1\infty} = 1/2$. Тогда $\alpha = -|\alpha| < 0$. Распространяющийся ПКИ, забирая энергию у 1-переходов, переводит их в основное состояние, после чего эта энергия диссипирует в среде из-за потерь. В результате данного баланса в среде способен сформироваться стационарный импульс с "площадью"

$$\theta_\infty \equiv \left(\frac{2d_1}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} E dt = \pi$$

т.е. π -импульс. В соответствии с этим выберем анзац [19, 20]

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\tau_p} \sin \theta, \quad (12)$$

где точка над θ обозначает производную по $t - z/v$.

Подстановка (12) в (10) при $\Delta = \partial^2/\partial z^2$ и последующее приравнивание к нулю коэффициента при $\sin 4\theta$ устанавливает связь между дипольными моментами обоих переходов, при которой справедлив анзац (12): $d_2 = 2d_1$. Данное ограничение является весьма искусственным. Однако оно позволяет записать точное решение уравнения (10) в виде бегущего импульса, что в свою очередь помогает проследить основные закономерности распространения уединенных электромагнитных импульсов в неравновесных средах с диссипацией.

Приравнивание далее друг другу коэффициентов при $\sin \theta$ и $\sin 2\theta$ в обеих частях (10), а также использование (11) дает

$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{8\pi d_1^2 n_1 \omega_1}{\hbar \gamma}, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - 2\eta W_{2\infty} \left[1 - \frac{1}{(\omega_2 \tau_p)^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (13)$$

Интегрирование (12) приводит к выражению для профиля электрического поля распространяющегося импульса:

$$E = \frac{\hbar}{2d_1 \tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right). \quad (14)$$

Из (7) и (9) получим для инверсии обеих компонент:

$$W_1 = -|W_{1\infty}| \tanh \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \quad W_2 = W_{2\infty} \left[1 - \frac{1}{2(\omega_2 \tau_p)^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right) \right]. \quad (15)$$

Отсюда видно, что после прохождения импульса (14) состояние 2-компоненты совпадает с первоначальным. При этом, если до воздействия ПКИ данная компонента была инвертирована ($W_{2\infty} > 0$), то скорость импульса $v > c$ (см. (13), условие $(\omega_2 \tau_p)^2 \gg 1$ и рис. 3а). Так как $(\omega_2 \tau_p)^2 \gg 1$, то, как следует из (13), $v \approx c/N_{20}$. Это верно, пока значение η не достигнет единицы. При $\eta \rightarrow 1$ $N_{20} \rightarrow 0$ и, согласно (13), $v \rightarrow (\omega_2 \tau_p)c$, а не к бесконечности, как следовало бы из приближенного выражения $v \approx c/N_{20}$. Учитывая малость параметра $(\omega_2 \tau_p)^{-2}$, условие возможности формирования импульса (14) можно записать в виде $\eta < 1$, так как в противном случае скорость v становится мнимой. Если же $W_{2\infty} < 0$ (УПС), то $v < c$ (рис. 3б).

Состояние 1-компоненты, как следует из (15), изменяется на противоположное после прохождения ПКИ вида (14): начальная инверсия $W_{1\infty} = 1/2$ сменяется конечным основным состоянием ($W_1 = -1/2$ при $t \rightarrow +\infty$). Таким образом, общее состояние двухкомпонентной среды изменяется после прохождения в ней ПКИ. Поэтому перед прохождением через данную среду второго, третьего и т.д. сверхсветовых солитонов вида (14), (13) ее необходимо во всем объеме возвращать в состояние с $W_{1\infty} > 0$, $W_{2\infty} > 0$, что сопряжено с затратами энергии. В результате этого информация о подаче импульса на вход среды становится известной на выходе до наступления данного события. Следовательно, вопрос о сверхсветовом переносе информации с помощью импульсов (14), (13) не имеет смысла. К тому же параметры самого импульса (длительность, скорость

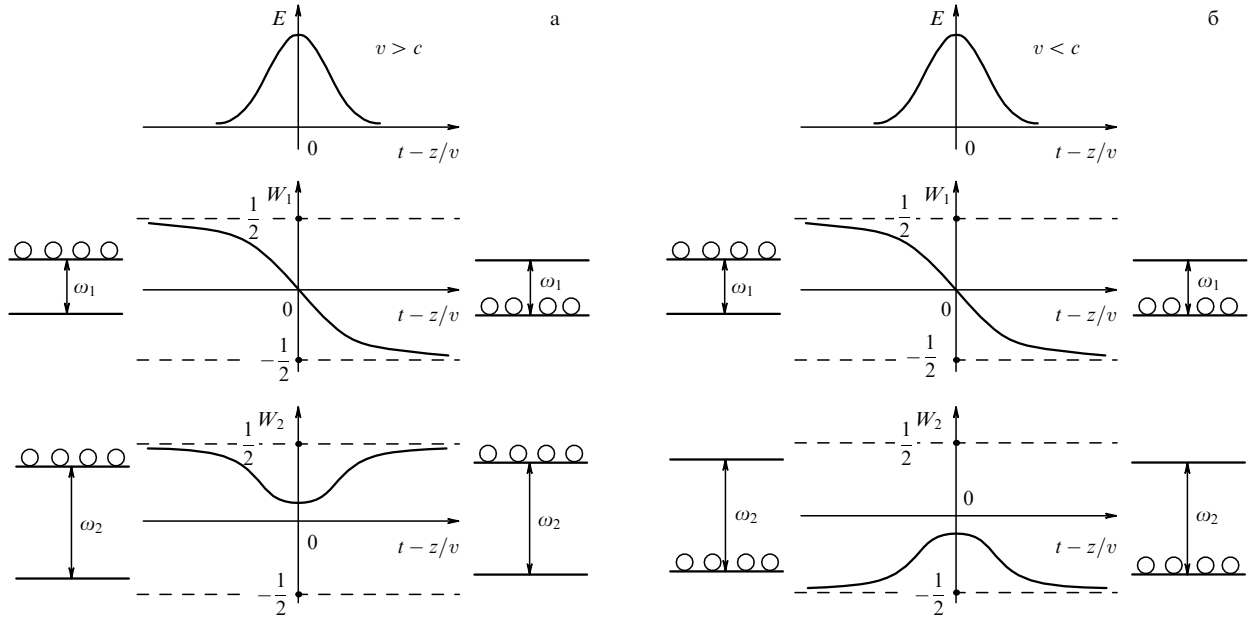


Рис. 3. Профили электрического поля предельно короткого автосолитона и соответствующих инверсий 1- и 2-компонент в сопутствующей системе координат при учете потерь излучения в среде. Состояние 1-компоненты изменяется после прохождения автосолитона, в то время как 2-компонента возвращается в исходное состояние: (а) усиливающая среда: $v > c$; (б) усиливающе-поглощающая среда: $v < c$.

и амплитуда), как видно из (13) и (14), жестко определяются параметрами среды и ее начальным состоянием (значениями $W_{1\infty}$ и $W_{2\infty}$). Таким образом, в решении (14) отсутствуют свободные параметры. Это говорит о том, что импульс по мере распространения в среде и приближения к асимптотической форме (14) теряет информацию о своих данных на входе в рассматриваемую среду. Данная информация диссипирует вместе с запасенной в среде энергией в виде потерь излучения. Таким образом, импульс вида (14) не переносит информацию как при $v < c$ ($W_{2\infty} < 0$), так и при $v > c$ ($W_{2\infty} > 0$). Условия (2) при $\omega \sim \tau_p^{-1}$, согласно (13), накладывают ограничения на параметры среды, при выполнении которых возможно формирование импульса (14): $(\gamma/\Omega_1)^2 \ll 1 \ll (\gamma/\omega_1)^2$, где $\Omega_1 = 8\pi d_1^2 n_1/\hbar$.

Стационарные импульсы с описанными выше свойствами часто называют диссипативными солитонами или автосолидонами [21, 22]. Из (14), (15) и из рис. 3 видно, что солитоны, описывающие движение электрического поля ПКИ и инверсии 2-компоненты, являются автосолидонами типа "бегущий импульс" [21, 22]. В то же время инверсия 1-компоненты распространяется в режиме "бегущего фронта" [21, 22], чем и обеспечивается необратимый характер изменения состояния диссипативной среды. В некотором смысле автосолитоны аналогичны автоколебаниям. Асимптотическая форма последних также не зависит от способа их возбуждения (т.е. от начальных условий), а определяется лишь параметрами системы, в которой они формируются. При этом необходимо только, чтобы начальные условия не вышли из области притяжения к предельному циклу, соответствующему автоколебаниям. Таким образом, автоколебания в неравновесных нелинейных системах так же, как и автосолитоны, "забывают" информацию о начальных условиях, соответствующих их возбуждению.

Область притяжения входного сигнала к автосолитону (14) определяется тем, что его полная "площадь"

θ_∞ , как следует из (12), должна лежать в интервале значений $0 < \theta_\infty < 2\pi$. Этим и обеспечивается устойчивость рассмотренного здесь автосолитона.

5. Сверхсветовые солитоны и бризеры в консервативной среде

Ниже рассмотрен сверхсветовой солитон в среде без потерь ($\gamma = 0$). Тогда при $\beta = 3\mu/2$ уравнение (10) имеет точное одномерное решение в виде бегущего солитоноподобного импульса [23]. В нашем случае условие $\beta = 3\mu/2$, как следует из (11), соответствует равенству дипольных моментов переходов у обеих компонент: $d_2 = d_1$. Здесь получим такое решение, исходя из более общих позиций, соответствующих трехмерному случаю. Для этого используем метод усредненного вариационного принципа типа Ритца–Уизема [12, 24]. Такой подход позволит нам исследовать вопрос об устойчивости данного импульса. Заметим для этого, что уравнение (10) при $\gamma = 0$ можно записать в виде уравнения Эйлера–Лагранжа, используя плотность лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 - \frac{N_{20}^2}{2c^2} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \alpha(1 - \cos\theta) + \frac{\mu}{8} \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^4 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)^2. \tag{16}$$

Состояние среды без потерь не изменяется после прохождения в ней стационарного солитона. Ниже солитон будем понимать в обобщенном смысле, не налагая на него условие упругого взаимодействия с себе подобными. Тогда его полная "площадь", согласно (7), $\theta_\infty = 2\pi$. Пробное решение, следуя [12], представим в виде

$$\theta = 4 \arctan \left\{ \exp \left(\rho(\mathbf{r}) \left[t - \frac{\Phi(\mathbf{r})}{c} \right] \right) \right\}, \tag{17}$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ — "быстрая" и "медленная" функции координат соответственно.

Следуя аналогии с плоской монохроматической волной [14], назовем $\Phi(\mathbf{r})$ солитонным эйконалом. Подставляя (17) в (16) в пренебрежении производными от $\rho(\mathbf{r})$ [12] и интегрируя полученное выражение по t , получим усредненный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dt = \left(\frac{\nabla\Phi}{c}\right)^2 \rho - \left(\frac{N_{20}}{c}\right)^2 \rho + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\mu}{3} \rho^3. \quad (18)$$

Записывая для Φ и ρ уравнения Эйлера–Лагранжа с использованием L , найдем

$$(\nabla\Phi)^2 = N_{20}^2 + c^2 \left(\frac{\alpha}{\rho^2} - \mu\rho^2\right), \quad (19)$$

$$\nabla(\rho\nabla\Phi) = 0. \quad (20)$$

Систему (19), (20) можно рассматривать как уравнения геометрической оптики предельно коротких солитонов. Из их вывода ясно, что условием справедливости такого подхода является малость изменения амплитуды солитона $\sim \rho$ на протяжении его длительности. Уравнение (19) можно назвать уравнением солитонного эйконала. Оно определяет скорость v распространения волнового фронта солитона в направлении своей нормали в каждой точке. Действительно, дифференцируя уравнение распространения солитонного фронта $\rho(t - \Phi/c) = \text{const}$ в пренебрежении изменением "медленной" переменной ρ , получим $dt = d\Phi/c = |\nabla\Phi| ds/c$, где ds — перемещение фронта солитона в направлении нормали. Отсюда $v = ds/dt = c/|\nabla\Phi|$. В принципе далее здесь уместны построения типа Гюйгенса [14], с помощью которых можно проследить динамику всех участков солитонного фронта в последующие моменты времени. Такая поэтапная процедура соответствует численному решению системы (19), (20).

В одномерном случае, когда ρ и Φ зависят от z , система (19), (20) легко интегрируется: $\rho = \tau_p^{-1} = \text{const}$, $\Phi = cz/v$. Медленная функция ρ здесь имеет смысл

обратной длительности солитона, через которую выражается его групповая скорость:

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\left(\frac{N_{20}}{c}\right)^2 + \alpha\tau_p^2 - \frac{\mu}{\tau_p^2}}. \quad (21)$$

Волновые фронты такого солитона являются плоскостями, перпендикулярными оси z . Профиль электрического поля ПКИ при этом, согласно (17), имеет вид

$$E = \frac{\hbar}{2d_1} \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\hbar}{d_1\tau_p} \text{sech}\left(\frac{t-z/v}{\tau_p}\right). \quad (22)$$

Заметим, что соотношения (21), (22) определяют точное решение уравнения (10) при $\Delta = \partial^2/\partial z^2$, $\gamma = 0$, $\beta = 3\mu/2$ в виде одномерного предельно короткого солитона (т.е. солитона без высокочастотного заполнения), которое можно получить также с помощью анзаца

$$\dot{\theta} = \frac{2}{\tau_p} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (23)$$

где, как и в (12), точка над θ обозначает производную по $t - z/v$. Отличие анзацев (12) и (23) друг от друга обусловлено тем, что "площади" θ_∞ автосолитона и солитона в консервативной среде разные.

Из (17), (7) и (9) находим соответствующие законы изменения инверсий населенностей обеих компонент:

$$W_1 = W_{1\infty} \left[1 - 2 \text{sech}^2\left(\frac{t-z/v}{\tau_p}\right) \right],$$

$$W_2 = W_{2\infty} \left[1 - \frac{2}{(\omega_2\tau_p)^2} \text{sech}^2\left(\frac{t-z/v}{\tau_p}\right) \right]. \quad (24)$$

Отсюда следует, что обе компоненты после прохождения импульса, в отличие от случая среды с потерями, восстанавливают свое исходное состояние. При этом центру солитонного профиля (22) соответствует изменение знака инверсии у 1-компоненты и незначительное (см. (2)) изменение состояния 2-компоненты в согласии с рассуждениями, проведенными в разделе 2 (рис. 4).

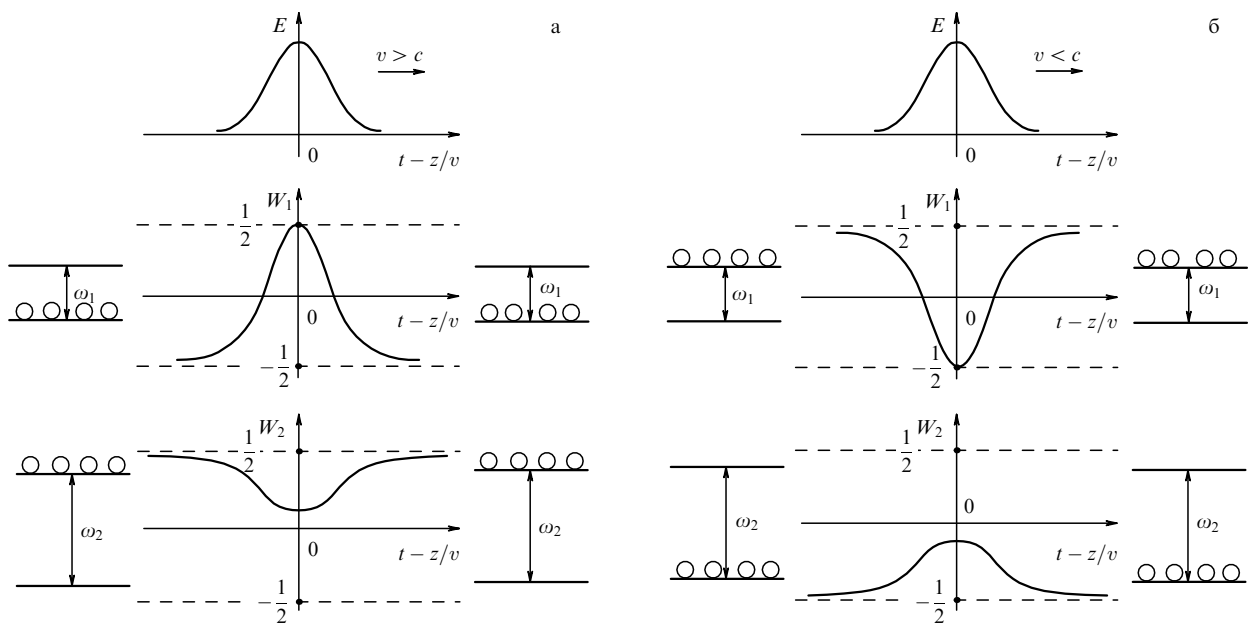


Рис. 4. Устойчивые бегущие профили электрического поля предельно короткого солитона и соответствующих инверсий 1- и 2-компонент в среде без потерь: (а) поглощающе-усиливающая среда: $v > c$; (б) усиливающе-поглощающая среда: $v < c$.

Кроме того решение (22) обладает свободным параметром, в качестве которого выбрана длительность τ_p солитона. Значением свободного параметра определяется скорость и амплитуда сигнала. В этом состоит еще одно важное отличие солитона в консервативной среде от автосолитона.

Исследуем вопрос об устойчивости солитона (22). Для этого заметим, что систему уравнений (19), (20) можно записать соответственно в виде интеграла Бернулли и уравнения непрерывности для стационарного, безвихревого течения идеальной жидкости:

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}, \quad \nabla(\rho V) = 0, \quad (25)$$

где "скорость" V определяется как $V = \nabla\Phi/c$, а связь "давления" p с "плотностью" ρ выражается уравнением

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2} + \mu\rho^2. \quad (26)$$

Отсюда очевидным образом записывается условие устойчивости солитона (22) как критерий устойчивого течения идеальной жидкости типа (25), (26): $dp/d\rho > 0$. Совершив замену $\rho = \tau_p^{-1}$ в выражении для $dp/d\rho$, получим

$$\alpha\tau_p^2 + \mu\tau_p^{-2} > 0. \quad (27)$$

Наглядная интерпретация условия (27) состоит в следующем. Из (21) следует, что при выполнении (27) скорость v является монотонно возрастающей функцией параметра τ_p^{-1} (амплитуды солитона (см. также (22))). Поэтому участки солитонного фронта с большей амплитудой, соответствующие центру поперечного сечения ПКИ, опережают при распространении периферийные участки, где амплитуда меньше. Если же условие (27) не выполняется, приходим к прямо противоположной картине, приводящей в конечном итоге к самофокусировке солитона. Условие, при котором скорость солитона $v > c$ (см. (21)), запишем в виде

$$\alpha\tau_p^2 + \mu\tau_p^{-2} < \frac{1 - N_{20}^2}{c^2}. \quad (28)$$

Элементарный анализ (28) показывает, что $v > c$, если либо $\alpha < 0$ (инвертирована 1-компонента), либо $\mu < 0$ (инвертирована 2-компонента). Как видно из (27), при инверсной населенности обеих компонент ($\alpha < 0$ и $\mu < 0$) солитон (22) неустойчив. Для возможного наблюдения сверхсветового солитона его длительность должна одновременно удовлетворять условиям (27) и (28).

Рассмотрим детальнее случай $\alpha > 0$, $\mu < 0$ ($W_{1\infty} = -1/2$, $W_{2\infty} = 1/2$, $N_{20} < 1$). Из (27), (28) и (11) находим, что значение длительности τ_p устойчивого сверхсветового солитона должно принадлежать интервалу (рис. 5)

$$\tau_m < \tau_p < \tau_c, \quad (29)$$

где

$$\tau_m = \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{2}{q}}, \quad \tau_c = \frac{\sqrt{2}}{\omega_2} \left(1 - \sqrt{1 - q^2}\right)^{-1/2}, \quad (30)$$

$$q^2 = 4 \frac{n_1 \omega_1}{n_2 \omega_2} < 1.$$

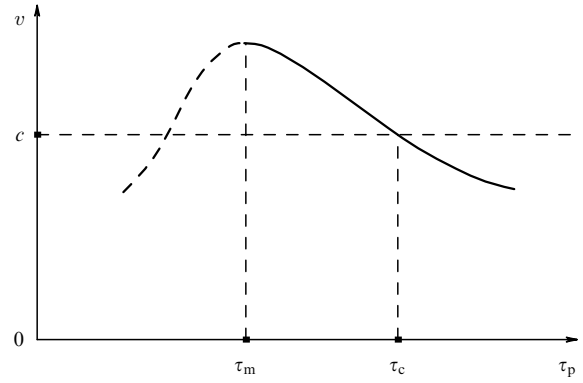


Рис. 5. Зависимость скорости v устойчивого предельно короткого солитона в двухкомпонентной поглощающе-усиливающей среде без потерь от его длительности τ_p : в интервале значений $\tau_m < \tau_p < \tau_c$ имеем $v > c$.

Для того, чтобы условие $(\omega_2 \tau_p)^2 \gg 1$ удовлетворялось на краях интервала (29), необходимо потребовать $q \ll 1$. Тогда τ_c приближенно запишется в виде $\tau_c = 2/(\omega_2 q)$. Заметим, что при максимально допустимом значении $q = 1$ ширина интервала (29) обращается в нуль и быстро увеличивается с уменьшением q . То есть чем меньше q , тем больше шансов удовлетворить (29). Как видно из (21), τ_m соответствует длительности солитона, при которой его скорость максимальна

$$v_{\max} = c [1 - \eta(1 - q)]^{-1/2}. \quad (31)$$

Если принять во внимание, что $q \ll 1$, то $v_{\max} = c/N_{20}$. Данное значение практически совпадает со скоростью автосолитона в неравновесной среде в присутствии потерь (см. (1)). Этот вывод справедлив, только если параметр η существенно меньше единицы. Если же $\eta \rightarrow 1$, то $N_{20} \rightarrow 0$ и $v_{\max} \rightarrow c/\sqrt{q}$, а не к бесконечности, как следует из выражения $v_{\max} \approx c/N_{20}$. Аналогичная ситуация имеет место и в случае сверхсветового автосолитона в диссипативной среде (см. раздел 4). Так как параметр q теоретически может быть сколь угодно малым, формального ограничения сверху на скорость солитона не существует. При $\eta(1 - q) > 1$ значение v_{\max} становится мнимым и формирование солитона соответствующей длительности τ_p становится невозможным.

Обязательное условие $q < 1$, при котором $v > c$, совместно с условием устойчивости солитона $\tau_p > \tau_m$ можно записать как

$$\frac{4\omega_1}{\omega_2} < \frac{n_2}{n_1} < (\omega_1 \tau_p)(\omega_2 \tau_p)^3. \quad (32)$$

Взяв, например, $\omega_1 \tau_p = 0,1$, $\omega_2 \tau_p = 10$ (см. (2)), получим $\omega_1/\omega_2 = 0,01$ и, как видно из (32), $0,04 < n_2/n_1 < 100$. Положив $n_2 = 4n_1$, найдем $q = 0,1$, $\omega_2 \tau_m \approx 4,5$, $\omega_2 \tau_c \approx 20$. При этом $c < v < v_{\max}$. Полагая $\eta = 0,2$, получим $v_{\max} \approx 1,1c$. Если же $\eta = 1$, то $v_{\max} \approx 3,2c$. Напомним, что v_{\max} достигается при $\tau_p = \tau_m$. Таким образом, наибольшие значения скоростей солитона возможны при $\eta \rightarrow 1$ ($N_{20} \rightarrow 0$). В таких случаях солитон способен распространяться со скоростями, в несколько раз превышающими скорость света. Если же среда не является столь плотной и $\eta \ll 1$, то v превышает c всего на несколько процентов.

Анализ, аналогичный проведенному выше, показывает, что в противоположном случае (инвертирована 1-компонента: $\alpha < 0$, $\mu > 0$) условия (2), (27) и (28) несовместны. Поэтому здесь возможно устойчивое распространение лишь досветовых солитонов (рис. 4б). Заметим также, что в сугубо однокомпонентных двухуровневых средах условия (2), (27) и (28) также противоречат друг другу. Действительно, если $\mu = 0$ ($N_{20} = 1$), из (27) и (28) получаем два противоположных условия: $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$ соответственно. Это означает, что сверхсветовой ($\alpha < 0$) солитон уравнения синус-Гордона неустойчив в инвертированной двухуровневой среде (см. (10) при $\gamma = \beta = \mu = 0$). Сказанное согласуется с ранее проведенными исследованиями монохроматических солитонов огибающей в двухуровневой резонансной среде [1]. В отсутствие же 1-компоненты ($\alpha = 0$) при $\mu > 0$ (2-компонента в основном состоянии) условия (27) и (28) не противоречат друг другу, однако (28) несовместимо с (2). В этом случае $c/N_{20} < v < c$ [11]. Если же 2-компонента инвертирована ($\mu < 0$) при $\alpha = 0$, солитон неустойчив, так как не выполняется условие (27).

Наличие свободного параметра τ_p в решении (21), (22) подчеркивает зависимость характеристик сформировавшегося в среде солитона от параметров импульса на входе в данную среду.

В общем случае аналитическое исследование вопроса о связи между параметрами входных сигналов и формирующихся из них солитонов представляется непростым. Не в последнюю очередь это связано с неинтегрируемостью уравнения (10). Заметим, однако, что в силу (1) каждое слагаемое в правой части (10) при $\gamma = 0$ более высокого порядка малости по параметрам $\varepsilon \sim (\omega_1 \tau_p)^2 \sim (\omega_2 \tau_p)^{-2} \ll 1$ в сравнении со слагаемыми в левой части. Поэтому здесь можно использовать приближение однонаправленного распространения вдоль оси z со скоростью, близкой к c/N_{20} [25]. Для этого введем локальное время $\tau = t - N_{20}z/c$ и "медленную координату" $\zeta = \varepsilon z$. Переходя к этим новым независимым переменным, получим $\partial/\partial t = \partial/\partial \tau$, $\partial/\partial z = -(N_{20}/c)\partial/\partial \tau + \varepsilon\partial/\partial \zeta$. Отсюда, пренебрегая ε^2 , найдем $\partial^2/\partial z^2 \approx (N_{20}/c)^2 \partial^2/\partial \tau^2 - 2\varepsilon(N_{20}/c)\partial^2/\partial \tau \partial \zeta$. Возвращаясь к переменной z , из (10) при $\gamma = 0$, $\beta = 3\mu/2$ ($d_1 = d_2$) приходим к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} + a \sin \theta - \frac{3}{2} b \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - b \frac{\partial^4 \theta}{\partial \tau^4} = \frac{c}{2N_{20}} \Delta_{\perp} \theta, \quad (33)$$

где $a = c\alpha/(2N_{20})$, $b = c\mu/(2N_{20})$, Δ_{\perp} — поперечный лапласиан.

Заметим, что (33) можно получить из плотности лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - a(1 - \cos \theta) - \frac{b}{8} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right)^4 + \\ & + \frac{b}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} \right)^2 - \frac{c}{4N_{20}} (\nabla_{\perp} \theta)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя сюда пробное решение (17) с учетом медленности функции ρ , найдем усредненный лагранжиан

$$L \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} \, d\tau = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{a}{\rho} - \frac{b}{3} \rho^3 - \frac{c}{2N_{20}} \rho (\nabla_{\perp} \theta)^2. \quad (35)$$

Соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа примут вид

$$\frac{\mathbf{V}_{\perp}^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} + \int \frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_{\perp}(\rho \mathbf{V}_{\perp}) = 0, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \phi &= \left(\frac{c}{N_{20}} \right) \Phi, \quad \mathbf{V}_{\perp} = \nabla_{\perp} \phi, \\ dp/d\rho &= \left(\frac{2c}{N_{20}} \right) \left(\frac{a}{\rho^2} + b\rho^2 \right). \end{aligned}$$

Система (36) представляет собой динамические уравнения для потенциального течения идеальной жидкости, роль времени в которых играет координата z , а потенциал поля скоростей \mathbf{V}_{\perp} пропорционален солитонному эйконалу. Первое уравнение имеет смысл интеграла Коши для "нестационарного" течения, второе — уравнения непрерывности. Связь между "давлением" ρ и "плотностью" ρ с точностью до постоянного множителя совпадает с (26). Поэтому критерий устойчивости солитона уравнения (33) не отличается от (27). Используя, например, анзац (23), легко видеть, что односолитонные решения уравнения (33) при $\Delta_{\perp} \theta = 0$ в лабораторной системе отсчета имеет вид (22), а зависимость его скорости от τ_p определяется выражением

$$\frac{1}{v} = \frac{N_{20}}{c} + a\tau_p^2 - \frac{b}{\tau_p^2}. \quad (37)$$

Это соотношение может быть получено из (21) разложением последнего в ряд по малому параметру $(c/N_{20})^2(\alpha\tau_p^2 - \mu/\tau_p^2)$, что соответствует близости скорости солитона v к значению c/N_{20} . Заметим, что солитоны уравнения (33) при $\Delta_{\perp} \theta = 0$ в буквальном смысле соответствуют своему названию, т.е. обладают свойством упругого взаимодействия с себе подобными, так как данное уравнение интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [26]. Недостаток (33) в сравнении с (10) заключается в том, что в его рамках не может быть рассмотрено встречное взаимодействие импульсов. Имеет смысл задаться аналитическими исследованиями вопроса о том, какие профили входных сигналов способны породить в рассматриваемой здесь среде сверхсветовые солитоны. Проиллюстрируем вышесказанное для случая, когда входной сигнал разбивается в поглощающе-усиливающей среде на два солитона. Двухсолитонное решение (33) имеет вид [26]

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{\hbar}{2d} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \\ &= \frac{2\hbar}{d} \frac{\partial}{\partial t} \arctan \left[\frac{\exp S_1 + \exp S_2}{1 - (\tau_{p1} - \tau_{p2})^2 (\tau_{p1} + \tau_{p2})^{-2} \exp(S_1 + S_2)} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где $S_j = [t - (z/v_j) + t_j]/\tau_{pj}$, $1/v_j = N_{20}/c + a\tau_{pj}^2 - b/\tau_{pj}^2$ ($j = 1, 2$), τ_{p1} и τ_{p2} — свободные параметры, зависящие от профиля входного сигнала $E(0, t)$, t_j — постоянные, определяющие временной интервал $\Delta t_{12} = |t_2 - t_1|$ между локальными максимумами профиля импульса $E(0, t)$, подаваемого на вход ($z = 0$) среды (рис. 6). Очевидно, τ_{pj} и v_j соответственно имеют смысл длительности и скорости j -го солитона при большом разнесении солитонов друг от друга. Полагая в (38) $z = 0$, получаем класс

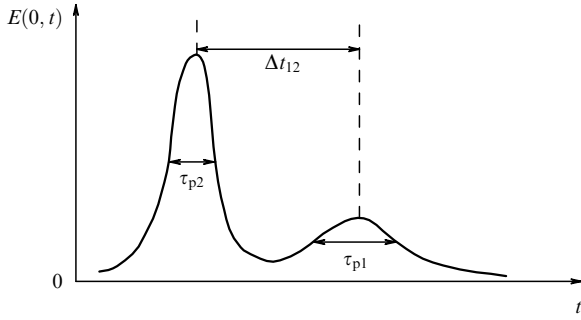


Рис. 6. Входной импульс $E(0, t)$, соответствующий двухсолитонному решению уравнения (33). Если τ_{p1} и τ_{p2} удовлетворяют (29), оба образовавшихся солитона являются сверхсветовыми. Для устойчивости данного решения должны выполняться условия $\tau_{p1}, \tau_{p2} \ll \Delta t_{12}$.

начальных профилей, порождающих два различных солитона в среде. Если форма профиля $E(0, t)$ такова, что оба параметра τ_{pj} удовлетворяют (29), то и скорости обоих образовавшихся солитонов являются сверхсветовыми. При этом быстрее распространяется тот солитон, для которого параметр τ_p меньше. Если же, например, τ_{p1} удовлетворяет (29), а $\tau_{p2} > \tau_c, \tau_m$, то скорость первого солитона превышает c , в то время как второй солитон является досветовым. Пусть теперь $\tau_{p2} < \tau_c, \tau_m$, а τ_{p1} по-прежнему удовлетворяет (29). В этом случае по крайней мере один из солитонов (для которого $\tau_{p2} < \tau_m$) окажется неустойчивым. Ситуация здесь существенным образом зависит от соотношения между скоростями развития неустойчивости и разбиения входного сигнала на отдельные солитоны. В любом случае образование солитонов из исходного сигнала требует времени. Поэтому неочевидно, что с момента его подачи на вход неравновесной среды до приема на выходе пройдет времени меньше, чем L/c , где L — длина образца среды в направлении распространения солитона. Здесь требуются дополнительные исследования. Очевидно, наилучшим вариантом остается подача на вход сигнала, близкого по форме к (22) с длительностью τ_p , удовлетворяющей (29). Тогда, согласно проведенным выше исследованиям, скорость солитона в квазинеравновесной среде превысит скорость света в вакууме. Здесь важно добавить, что вышеприведенные рассуждения относительно устойчивости двухсолитонного решения уравнения (33) справедливы при $\Delta t_{12} \gg \tau_{p1}, \tau_{p2}$. Дело в том, что критерий (27) получен из условия малого шевеления точного решения (22) (см. (17)). Для того, чтобы говорить об устойчивости (34), необходимо процедуру усредненного лагранжиана провести для малого шевеления данного двухсолитонного решения, что наталкивается на трудности математического характера. Однако если в начальном профиле $\Delta t_{12} = |t_2 - t_1| \gg \tau_{p1}, \tau_{p2}$, а пик меньшей амплитуды следует за более высоким пиком (см. рис. 6), то выводы относительно устойчивости односолитонных решений, полученные выше, будут справедливы и для решения (34). Если же во входном профиле $E(0, t)$ меньший пик опережает более высокий, то в среде по мере распространения импульса оба пика вначале будут сближаться, что приведет к нарушению условия об их относительной удаленности друг от друга, и выводы об устойчивости двухсолитонного решения, полученные на основе при-

менения критерия (27) отдельно для τ_{p1} и τ_{p2} должны вызвать сомнения. Понятно, что в случае многосолитонных решений сложности математического характера при анализе на устойчивость многократно возрастают.

Несколько иной выглядит ситуация для бризерных решений уравнения (33), которые могут быть получены из (38), если параметры τ_{p1} и τ_{p2} положить комплексносопряженными друг другу. Взяв $\tau_{p1,2} = \tau_p / (1 \pm i\omega\tau_p)$, $t_1 = t_2 = 0$, найдем из (38)

$$E = \frac{\hbar}{2d_1} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2\hbar}{d_1} \frac{\partial}{\partial t} \arctan \left\{ \frac{1}{\omega\tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v_{ph}} \right) \right] \right\}, \quad (39)$$

где v и v_{ph} — групповая и фазовая скорости бризера соответственно, следующим образом выражающиеся через его частоту ω и длительность τ_p :

$$\frac{1}{v} = \frac{N_{20}}{c} + \frac{a}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} + b(3\omega^2 - \tau_p^{-2}), \quad (40)$$

$$\frac{1}{v_{ph}} = \frac{N_{ph}}{c} = \frac{N_{20}}{c} - \frac{a}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} + b(\omega^2 - 3\tau_p^{-2}). \quad (41)$$

Здесь введен фазовый показатель преломления N_{ph} . Из (39) видно, что площадь бризера $\theta_\infty = 0$. Тогда, как следует из (7) и (9), после прохождения бризера среда возвращается в исходное состояние. При $\omega\tau_p < 1$ решение (39) описывает бризер типа предельно короткого импульса, вмещающего внутри себя порядка одного периода электромагнитных колебаний. Если же $\omega\tau_p \gg 1$, то, как видно из (39)–(41), бризер переходит в солитон огибающей

$$E = \frac{2\hbar}{d_1\tau_p} \operatorname{sech} \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v_{ph}} \right) \right], \quad (42)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{N_{20}}{c} + \frac{a}{\omega^2} + 3b\omega^2, \quad \frac{1}{v_{ph}} = \frac{N_{ph}}{c} = \frac{N_{20}}{c} - \frac{a}{\omega^2} + b\omega^2. \quad (43)$$

Данное решение можно получить, применив непосредственно к (33) приближение медленно меняющейся огибающей (ММО). В соответствии с этим представим поле импульса в виде

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z, \mathbf{r}_\perp, \tau) \exp [i(\omega\tau - qz)] + \text{c.c.}, \quad (44)$$

где $\mathcal{E}(z, \mathbf{r}_\perp, \tau)$ — медленно меняющаяся огибающая, ω — частота заполнения импульса, q — волновое число в сопутствующей системе отсчета, связанное с волновым числом k в лабораторной системе выражением $k = q + \omega N_{20}/c$. Согласно приближению ММО

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \right| \ll \omega |\mathcal{E}|, \quad \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right| \ll q |\mathcal{E}|. \quad (45)$$

Используя многократное интегрирование по частям, получим

$$\theta = \frac{2d_1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' = \\ = \frac{2d_1}{\hbar} \left(\frac{\mathcal{E}}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} + \frac{i}{\omega^3} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \tau^2} + \dots \right) + \text{c.c.} \quad (46)$$

Роль характерного временного масштаба импульса здесь играет обратная частота ω^{-1} . Тогда справедливо нерезонансное условие (2). Так как спектральная ширина $\delta\omega$ импульса огибающей много меньше ω , то в его спектре, согласно (42), нет резонансных фурье-компонент. Поэтому возбуждение обеих компонент среды полем импульса незначительно. Следовательно, $\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$. Подставляя также (44) в (33) и используя (45), (46), приходим к нелинейному уравнению Шрёдингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial T^2} - \frac{\omega}{c} N_2 |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = \frac{c}{2N_{20}\omega} \Delta_{\perp} \mathcal{E}, \quad (47)$$

где $T = \tau - (a/\omega^2 + 3b\omega^2)z$, $k_2 \equiv \partial^2 k / \partial \omega^2 = 2(3b\omega - a/\omega^3)$ — параметр групповой дисперсии, $N_2 = -(1/4)(c/\omega) \times (d_1/\hbar)^2 k_2$ — нелинейный показатель преломления среды, определяемый из выражения

$$N_{\text{ph}} = N + N_2 |\mathcal{E}|^2, \quad (48)$$

N — линейная часть фазового показателя преломления (48) (см. (1)). Как видно, здесь автоматически выполняется условие возможности формирования солитонов огибающей $k_2 N_2 < 0$ [27]. Односолитонное решение (47) при $\Delta_{\perp} \mathcal{E} = 0$ с учетом (44) в точности совпадает с (42), (43). Таким образом, солитон огибающей НУШ (47) является предельным случаем бризера уравнения (33) при $\omega\tau_p \gg 1$. Ранее подобный вывод для других уравнений был сделан в [27, 28]. Солитоны НУШ устойчивы по отношению к самофокусировке, если $N_2 < 0$ (дефокусирующая среда) [29]. К тому же выводу приводит метод усредненного лагранжиана, примененный к НУШ [12]. Тогда, используя явное выражение для N_2 , запишем

$$\frac{a}{\omega^4} - 3b < 0. \quad (49)$$

В общем случае фазовая скорость бризера определяется выражением (41). С ростом амплитуды E_m поля импульса увеличивается скорость индуцированных переходов. Вследствие этого уменьшается длительность солитонов и бризеров. Таким образом, амплитуда является монотонно возрастающей функцией величины $\rho = \tau_p^{-1}$. Выражения (22), (39) и (42) подтверждают данное общее свойство солитоноподобных решений.

Разложим (41) в ряд Тейлора по величине ρ^2 :

$$\frac{1}{v_{\text{ph}}} = \frac{1}{v_{\text{ph}}(0)} + n_{2\rho} \rho^2 + \dots,$$

где $1/v_{\text{ph}}(0) = N_{20}/c - a/\omega^2 + g\omega^2$ — выражение, совпадающее с таковым для солитона огибающей (см. (43)), $n_{2\rho} \equiv [\partial(1/v_{\text{ph}})/\partial \rho^2]_{\rho=0} = a/\omega^4 - 3g \sim N_2$. Согласно выводу о монотонном возрастании $E_m(\rho)$, величины $n_{2\rho}$ и N_2 имеют один и тот же знак. Тогда условие солитона огибающей $N_2 < 0$ можно записать также в виде $n_{2\rho} < 0$, что совпадает с (49).

Для обобщения (49) на случай бризеров с произвольными значениями $\omega\tau_p$ воспользуемся следующими рассуждениями. Если показатель преломления $N_{\text{ph}} \equiv c/v_{\text{ph}}$ возрастает с увеличением E_m (или ρ), то сердцевина бризера в его поперечном сечении, где E_m максимальна, распространяется медленнее, чем его периферийные участки. Это приводит к самофокусировке бризера.

Если же N_{ph} уменьшается с ростом ρ , то бризер устойчив относительно поперечных возмущений. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial \rho^2} \left(\frac{1}{v_{\text{ph}}} \right) < 0. \quad (50)$$

Отсюда и из (41) находим условие устойчивости бризера (39)

$$\frac{a}{(\omega^2 + \tau_p^{-2})^2} - 3b < 0, \quad (51)$$

которое переходит в (49) при $(\omega\tau_p)^2 \gg 1$. Выполнение критерия (51) совместно с условиями

$$\frac{a}{\omega^2 + \tau_p^{-2}} + b(3\omega^2 - \tau_p^{-2}) < \frac{1 - N_{20}}{c} \quad (52)$$

(см. (40)) и

$$\omega_1^2 \ll \omega^2 + \tau_p^{-2} \ll \omega_2^2 \quad (53)$$

определяет возможность устойчивого распространения в нашей двухкомпонентной среде сверхсветовых бризеров, предельным случаем которых (при $\omega\tau_p \gg 1$) являются нерезонансные солитоны огибающей. Условие (53) является естественным обобщением (2), а также условия $\omega_1^2 \ll \tau_p^{-2} \ll \omega_2^2$, использованного в случае импульсов без высокочастотного заполнения.

Анализ (51)–(53) показывает, что существование устойчивых сверхсветовых бризеров возможно в УПС и УС. В первом случае ($W_{1\infty} = 1/2$, $W_{2\infty} = -1/2$ или $a < 0$, $b > 0$) бризер абсолютно устойчив, так как при $a < 0$ и $b > 0$ неравенство (51) удовлетворяется автоматически. Если принять во внимание (53), то из (52) легко находится условие того, что $v > c$:

$$\omega^2 + \tau_p^{-2} < \frac{3\omega_c^4}{\omega_2^2} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \omega_1 \omega_2, \quad (54)$$

где частотный параметр ω_c определяется выражением

$$\omega_c^4 = \frac{n_1}{2n_2} \omega_1 \omega_2^3. \quad (55)$$

Так как согласно (53) $\omega^2 + \tau_p^{-2} \gg \omega_1^2$, то $n_1/n_2 \gg \omega_1/\omega_2$. Последнему неравенству легко удовлетворить, например, при $n_1 = n_2$. Из (54) при $\omega\tau_p \gg 1$ находим условие того, что групповая скорость солитона огибающей $v > c$: $\omega_1 \ll \omega \ll \sqrt{3}\omega_c^2/\omega_2$.

В случае УС ($W_{1\infty} = W_{2\infty} = 1/2$ или $a < 0$, $b < 0$) область устойчивости бризера (39), как видно из (51) и (53), определяется двойным неравенством

$$\omega_1^2 \ll \omega^2 + \tau_p^{-2} < \omega_c^2. \quad (56)$$

При этом групповая скорость бризера, выражаемая с помощью (40), всегда превышает скорость света в вакууме. Условие $\omega_c^2 \gg \omega_1^2$, необходимое для формирования бризера в двухкомпонентной нерезонансной среде, перепишем в виде (см. (55)) $3n_2/n_1 \ll (\omega_2/\omega_1)^3$. Данному неравенству легко удовлетворить, например, при $n_2 \simeq n_1$, так как $\omega_2 \gg \omega_1$. Заметим, что при наличии только второй компоненты ($n_1 = 0$) устойчивых бризеров и нерезонансных солитонов, огибающих в усиливающей среде, не существует. Для последних условие (56) можно записать в виде $\omega_1^2 \ll \omega^2 < \omega_2^2$.

Вопрос о переносе информации электромагнитными солитонами в консервативных средах, как и в случае диссипативных сред, заслуживает отдельного рассмотрения. В неравновесной среде с потерями, как отмечалось в предыдущем пункте, сверхсветовые солитоны, в формировании которых потери играют принципиальную роль (автосолитоны), не переносят информации о входных импульсных данных, так как соответствующие решения не содержат свободных параметров. В консервативной же среде решения солитонного типа содержат свободные параметры (длительность τ_p в случае солитонов без высокочастотного заполнения, ω и τ_p — для бризеров), значения которых зависят от профиля входного импульса. Поэтому, казалось бы, есть основания говорить о том, что сверхсветовые предельно короткие солитоны в неравновесной среде без потерь несут с собой информацию о профилях входных импульсов, из которых данные солитоны образуются.

Однако более детальный анализ показывает, что это не так. Рассмотрим отдельно на примере ПКИ (22) механизмы их распространения в поглощающей ($v < c$) и усиливающей ($v > c$) средах. В первом случае передний фронт подаваемого в среду импульса "выедается" поглощающими атомами (рис. 7а). В результате происходит формирование переднего участка импульсного профиля, а атомы начинают переходить в возбужденное состояние. Фотоны среднего участка импульса поглощаются в меньшей степени, чем передние фотоны, так как на их пути встречается уже меньшее число атомов, оставшихся в основном состоянии (рис. 4б). Задние фотоны импульса, не испытывая заметного сопротивления среды, начинают "поджимать" впереди идущие фотоны (в результате чего происходит самосжатие импульса и увеличение его пиковой интенсивности по сравнению с интенсивностью входного сигнала) и вызывать индуцированное излучение возбужденных атомов. По мере перехода атомов в основное состояние вероятность индуцированного излучения уменьшается, и, таким образом, происходит формирование гладкой хвостовой части солитона. Здесь важным является то обстоятельство, что передний и задний фронты формируются самим импульсом в результате поглощения и дальнейшего переизлучения его энергии. Чем больше амплитуда входного сигнала, тем интенсивнее идут процессы поглощения-переизлучения, тем, в результате, круче края формирующегося в среде солитона. Таким образом, в поглощающей среде ($v < c$) сформировавшиеся солитоны переносят информацию о профилях входных импульсов.

Иная ситуация в неравновесной среде. Рассмотрим вначале случай, когда на вход неравновесной среды подается импульс, близкий к прямоугольному (рис. 7б). В спектре переднего фронта данного импульса преобладают высокие частоты, удовлетворяющие условиям $\omega \gg \omega_1, \omega_2$. Поэтому здесь для обеих компонент среды имеем решения вида (7). Тогда волновое уравнение для этой части входного импульса совпадает с уравнением синус-Гордона ($\gamma = 0, d_1 = d_2 = d$)

$$\Delta\theta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \alpha_{12} \sin \theta, \tag{57}$$

где $\alpha_{12} = -(16\pi d^2 / \hbar c^2)(\omega_1 n_1 W_{1\infty} + \omega_2 n_2 W_{2\infty})$. В случае ПУС ($W_{1\infty} < 0, W_{2\infty} > 0$) и $n_1 \approx n_2$ в силу того, что $\omega_1 \ll \omega_2$, имеем $\alpha_{12} < 0$.

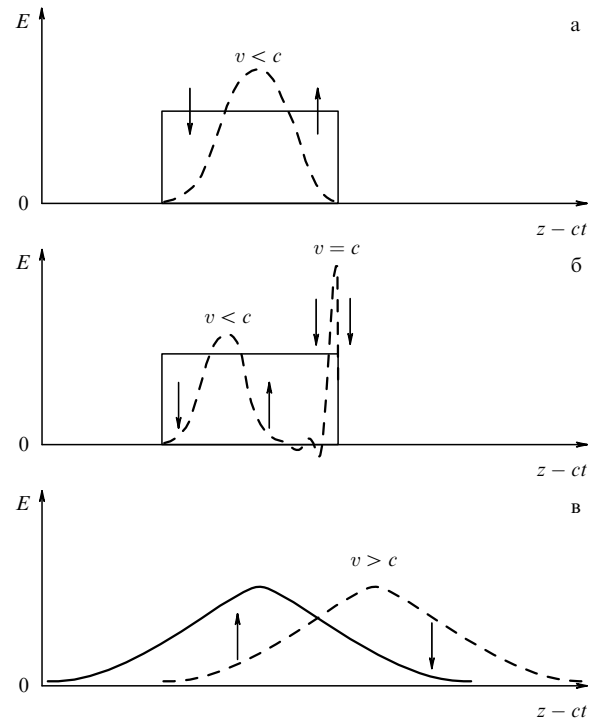


Рис. 7. Механизмы формирования солитонов в равновесной (а) и неравновесной (б, в) средах. В случае (а) из исходного прямоугольного импульса (сплошной профиль) формируется досветовой предельно короткий солитон (штриховая линия), переносящий информацию о параметрах входного импульса. Поданный на неравновесную среду импульс прямоугольной формы (случай б) не порождает в ней сверхсветовые солитоны. Вместо них формируется усиливающийся передний фронт, скорость которого равна c (предвестник) и следующие за ним один или несколько досветовых солитонов (штриховая линия), переносящих информацию о профиле входного импульса. Случай (в) соответствует сверхсветовым солитонам в неравновесной среде. Для их формирования и устойчивого распространения необходимо наличие в исходном профиле спадающего переднего фронта, заданного на всем протяжении среды. Поэтому информация здесь не переносится. Стрелки "вверх" ("вниз") соответствуют процессу поглощения (излучения) энергии импульса.

Для исследования решения (57) в данном случае введем, следуя [10], автомодельную переменную $\xi = z^2 - c^2 t^2$, после чего (57) при $\Delta = \partial^2 / \partial z^2$ и $\alpha_{12} < 0$ примет вид [10]

$$\xi \theta'' + \theta' = -\frac{|\alpha_{12}|}{4} \sin \theta, \tag{58}$$

где "штрих" над θ обозначает производную по переменной ξ .

Численный расчет [30] показывает, что убывающим на интервале $[-\infty, +\infty]$ решением (58) для E является знакопеременная функция переменной ξ с общей площадью, равной π (π -импульс). Эта функция отлична от нуля главным образом вблизи $\xi = 0$ (что позволяет нам записать $\xi = (z + ct)(z - ct) \approx 2z(z - ct)$), возрастая в процессе распространения вдоль оси z по амплитуде с одновременным самосжатием. Данное обстоятельство позволяет провести приближенное аналитическое исследование решения уравнения (58). Учитывая, что вблизи $\xi = 0$, т.е. вблизи максимума E , функция θ является гладкой, пренебрежем в левой части (58) первым слагаемым. После интегрирования получившегося уравнения

найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \exp \left[-\frac{|\alpha_{12}|}{2} z(z-ct) \right], \\ E &= \frac{\hbar|\alpha_{12}|}{4d} z \operatorname{sech} \left[\frac{|\alpha_{12}|}{2} z(z-ct) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя (59) в (7), получим

$$W_{1,2} = W_{1,2\infty} \tanh \left[\frac{|\alpha_{12}|}{2} z(z-ct) \right]. \quad (60)$$

Из (59) видно, что амплитуда и обратная ширина распространяющегося в ПУС со скоростью c π -импульса растут пропорционально z [10]. Как следует из (60), усиливающийся π -импульс переводит 2-компоненту в основное состояние ($W_{2\infty} > 0$) и одновременно возбуждает 1-компоненту ($W_{1\infty} < 0$).

Вдали от $\xi = 0$ уравнение (58) можно линеаризовать, записав $\theta = \pi + Y$, $|Y| \ll 1$. Тогда

$$\xi Y'' + Y' - \left(\frac{|\alpha_{12}|}{4} \right) Y = 0. \quad (61)$$

Решение последнего уравнения выражается через функции Бесселя нулевого (для Y) и первого (для E) порядков:

$$\begin{aligned} Y &\sim J_0 \left(\sqrt{|\alpha_{12}|(c^2 t^2 - z^2)} \right), \\ E &\sim z \frac{J_1 \left(\sqrt{|\alpha_{12}|(c^2 t^2 - z^2)} \right)}{\sqrt{|\alpha_{12}|(c^2 t^2 - z^2)}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Выражения (62) справедливы при $ct > |z|$ (осциллирующий хвост π -импульса, см. рис. 7б). Если же $|z| > ct$, получаем решение (61) в виде функции Макдональда, которое для E в асимптотике $|\alpha_{12}|\xi \gg 1$ имеет вид

$$E \sim z \left[|\alpha_{12}|(z^2 - c^2 t^2) \right]^{-3/4} \exp \left\{ -\sqrt{|\alpha_{12}|(z^2 - c^2 t^2)} \right\}. \quad (63)$$

Согласно (60) и (63) передний фронт π -импульса по мере распространения становится все круче, оставляя за собой слабые квазипериодические пульсации напряженности электрического поля, сопровождаемые малыми колебаниями инверсий населенностей в окрестностях $W_1 = -W_{1\infty} = 1/2$ и $W_2 = -W_{2\infty} = -1/2$ (см. (62) и (7) при $\theta = \pi + Y$).

Таким образом, за π -импульсом образуется усиливающе-поглощающая среда (для которой $\alpha_{12} > 0$), способная в нашем случае формировать сверхсветовые солитоны. Поэтому из остальной части прямоугольного входного импульса образуются досветовые солитоны, механизм формирования которых рассмотрен выше. Информация о профиле входного импульса в данном случае переносится через неравновесную среду распространяющимся со скоростью света π -импульсом, играющим роль предвестника, и следующими за ним солитонами. Задний фронт входного прямоугольного импульса, так же как и передний, содержит в своем спектре частоты $\omega \ll \omega_1, \omega_2$. Однако мощность соответствующих фурье-компонент недостаточна для возбуждения атомов 2-компоненты и формирования таким образом задним фронтом 2π -солитона уравнения (57), где $\alpha_{12} > 0$

(так как $W_{1\infty} > 0$, $W_{2\infty} < 0$). По этой же причине передний и задний фронты прямоугольного импульса, подаваемого в поглощающую среду, неспособны каждый в отдельности породить солитоны.

Механизм сверхсветового распространения импульса в неравновесной среде достаточно подробно и наглядно описан в [1]. Идущий впереди сердцевины импульса его спадающий участок вызывает индуцированное излучение возбужденных атомов (2-переходов), переводя часть их в основное состояние. В результате на месте прежнего спадающего участка образуется новая сердцевина (рис. 7в). В месте ее локального расположения излучившие атомы находятся в основном состоянии (рис. 4а). Прежняя сердцевина поглощается 1-компонентой и частью перешедших в основное состояние 2-переходами. В результате на месте прежней сердцевины образуется задний экспоненциально спадающий хвост. Таким образом, в результате локального усиления за счет неравновесности среды, профиль импульса распространяется быстрее, чем сами фотоны. В [5, 31] данный механизм сверхсветового распространения назван переформированием (reshaping).

Заметим, что энергия импульса в этом случае не переносится от точки к точке, как это имело место в поглощающей среде, а забирается у инвертированной среды экспоненциально спадающим участком, идущим далеко впереди сердцевины. Слишком пологое спадание переднего участка ($\tau_p > \tau_c$) приводит к медленности протекания индуцированных процессов. В результате скорость процесса переформирования профиля может оказаться меньше c . Укручение же переднего участка ($\tau_p < \tau_c$) приводит к увеличению амплитуды профиля и, как следствие, к убыстрению индуцированных процессов излучения-перепоглощения. В результате скорость распространения профиля импульса может превысить скорость света. Отсечение каким-либо образом части впереди идущего участка импульса приводит к постепенному укручению передней части его профиля (т.е. к его деформации) [1]. Данное укручение способствует уширению спектра импульса в сторону высоких частот $\omega \gg \omega_1, \omega_2$. В этом случае скорость передней части импульса приблизится к c . Задняя часть импульса, скорость которой $v > c$, нагоняет передний фронт, что приводит к сильному сжатию импульса и его пиковому усилению. Впоследствии такой импульс преобразуется в рассмотренный выше π -импульс, распространяющийся в неограниченной среде в режиме усиления с групповой скоростью $v = c$.

Таким образом, для существования устойчивого распространения сверхсветовых предельно коротких солитонов, бризеров и солитонов огибающей в неравновесной среде необходимо с самого начала задать их гладкие экспоненциально локализованные профили при $0 < z < +\infty$. Поэтому информация о входных параметрах импульсов вида (22), (39) или (42), для которых $v > c$, известна на всем протяжении среды еще до начала их распространения.

В результате, нет оснований говорить о сверхсветовом переносе информации в неравновесных средах с помощью электромагнитных солитонов, как и нет оснований подвергать сомнению фундаментальный принцип причинности.

Рассмотренные здесь солитоны огибающей являются нерезонансными по отношению к квантовым переходам

обеих компонент. Поэтому их несущие частоты лежат далеко от полос поглощения (усиления) (см. рис. 2). Случай УС (рис. 2г) аналогичен в этом смысле ситуации, рассмотренной в работе [32]. Авторы [32] наблюдали в неравновесных атомарных парах цезия сверхсветовой импульс, возбуждаемый двумя волнами непрерывной рамановской накачки с частотами ω_1 и ω_2 соответственно. При этом частота ω сверхсветового импульса лежала в промежутке между ω_1 и ω_2 , а его частота Раби была значительно меньше величины отстройки $\omega_2 - \omega_1$. Последним обстоятельством исключалось наличие в импульсе фурье-компонент, находящихся в резонансе с волнами накачки.

С точки зрения квантовых переходов была реализована λ -схема в трехуровневой системе с двумя близко расположенными нижними уровнями и удаленным третьим уровнем. Неравновесность создавалась преимущественной начальной заселенностью среднего уровня. В этом случае формально ситуация выглядит так, как показано на рис. 2г, где роли собственных частот ω_1 и ω_2 выполняют частоты волн накачки. Так как несущая частота сверхсветового импульса лежит вне линий резонансного рамановского усиления, авторы работы [32] делают вывод о том, что в данном случае механизм его распространения невозможно объяснить описанным выше в настоящей работе и серии более ранних работ [1, 3, 5, 31] процессом переформирования.

Вместо переформирования предлагается механизм, связанный с волновой природой света: интерференцией различных фурье-компонент волнового пакета в среде с аномальной дисперсией.

По этому поводу следует заметить, что аномальная дисперсия в нерезонансной области между двумя линиями резонансного усиления является таковой исключительно благодаря неравновесности среды (см. раздел 2 настоящей работы). Неравновесность, в свою очередь, означает наличие в среде определенного запаса энергии. Индуцированное высвобождение данной энергии в месте нахождения переднего участка импульса и ее возврат хвостовой частью обеспечивают сверхсветовое распространение максимума волнового пакета.

Таким образом, на наш взгляд, как в резонансном, так и в нерезонансном случае превышение групповой скоростью импульса скорости света в вакууме связано с механизмом переформирования. Отличие лишь в том, что в резонансном случае в процессе динамики из неравновесной среды высвобождается большое количество запасенной энергии и, как следствие, значительно изменяются населенности квантовых уровней; в нерезонансном же случае деформация начальных населенностей мала из-за слабости взаимодействия поля со средой.

Таким образом, в процессе переформирования участвует лишь малая часть запасенной в среде энергии. В любом случае электрическое поле импульса порождает дипольные моменты у атомов (переводит их в суперпозиционные квантовые состояния), что, в свою очередь, согласно второму уравнению (3), влечет за собой изменение инверсии населенностей. Поэтому, скорее всего за сверхсветовое распространение импульса, наблюдавшееся в работе [32], ответственен все-таки механизм переформирования.

Так как для солитонов огибающей $\theta \ll 1$, то $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$. Тогда из (7), (9), (39) и (42) получаем

$$\begin{aligned} W_1 &= W_{1\infty} \left[1 - \left(\frac{2}{\omega\tau_p} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right) \right], \\ W_2 &= W_{2\infty} \left[1 - \left(\frac{2}{\omega\tau_p\omega_2\tau_p} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{t-z/v}{\tau_p} \right) \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Отсюда, а также из условия $(\omega_2\tau_p)^2 \gg 1$ следует, что при распространении в среде нерезонансных солитонов огибающей ($\omega\tau_p \gg 1$), в том числе и сверхсветовых, населенности действительно изменяются незначительно.

Устойчивость солитонов по отношению к дисперсионному расплыванию, обеспечивается исключительно нелинейностью. Инверсии населенностей, являясь энергетическими характеристиками среды, нелинейным образом зависят от поля импульса. Поэтому их изменение (сильное или слабое) обусловлено нелинейностью. Таким образом, устойчивое распространение волнового пакета в дисперсионной области частот, нелинейность, изменение инверсии населенностей и механизм переформирования (при $v > c$) очень тесно связаны между собой.

В заключение настоящего раздела отметим, что двухкомпонентность рассмотренной нами модели имеет решающее значение. Во всех разобранных выше случаях одна из компонент среды обеспечивает сверхсветовое распространение импульса, роль же другой при этом сводится к его стабилизации, обеспечивающей устойчивость процесса.

6. Заключение

На основе предложенной в настоящей работе модели двухкомпонентной среды удается проследить качественные отличия в сверхсветовых распространениях солитонов в диссипативных и консервативных неравновесных (квазинеравновесных) средах.

Рассмотренные здесь солитоны в средах с потерями и без потерь лишь условно можно назвать устойчивыми, так как неустойчивы сами среды, в которых данные солитоны распространяются. Время жизни T_R переходов видимого диапазона (2-переходов) в возбужденном состоянии составляет по порядку величины $\sim 10^{-8}$ с, что значительно меньше соответствующего времени для инфракрасного диапазона, захватывающего 1-переходы. Поэтому создать рассмотренные здесь условия, при которых $v > c$, с точки зрения эксперимента весьма непросто. Время распространения $\tau_{\text{групп}}$ солитона в квазинеравновесной среде должно удовлетворять условию $\tau_{\text{групп}} \sim L/c \ll T_R$. Взяв $T_R \sim 10^{-8}$ с, найдем $L < 1$ м. Полагая также $\omega_1 \sim 10^{13}$ с $^{-1}$, $\omega_2 \sim 10^{15}$ с $^{-1}$, найдем, что условиям (2) можно удовлетворить при $\tau_p \sim 10^{-14}$ с.

Вместе с электромагнитным импульсом в сверхсветовом распространении участвует поляризация $P = 2(d_1n_1U_1 + d_2n_2U_2)$ неравновесной среды, что должно сопровождаться сверхсветовым излучением Вавилова–Черенкова [1, 33, 34]. С динамической поляризацией связаны элементарные возбуждения среды (квазичастицы), называемые поляритонами. Следовательно, можно говорить о том, что выражение (40) определяет групповую скорость поляритонов с энергией $\hbar\omega$ и временем жизни τ_p в состоянии с данной энергией. Действительно, конечность длительности импульса τ_p приводит к уширению его спектра или спектра элементарных возбуждений ($\delta\omega \sim \tau_p^{-1}$). Поэтому τ_p можно интерпретировать как время жизни данных возбужде-

ний. Полагая в (40) $\omega = 0$, получаем поляритонный конденсат, центрированный на нулевой частоте с шириной спектра порядка τ_p^{-1} . Последняя обусловлена взаимодействием поляритонов друг с другом в результате нелинейности. В этом случае выражение (40) переходит в (37) и определяет групповую скорость предельно короткого солитона. Поэтому солитон (22) можно рассматривать как сгусток поляритонов, время жизни которых в состоянии с нулевой энергией равно τ_p . Так как в этом случае $\tau_p^{-1} > \omega = 0$, то вообще говоря, поляритоны (как квазичастицы) теряют свою индивидуальность. Межквазичастичное взаимодействие оказывается очень сильным. Иная ситуация имеет место для поляритонов, соответствующих солитонам огибающей (42), для которых $\omega \gg \tau_p^{-1}$. Здесь имеем конденсат поляритонов на частоте ω с малой спектральной шириной, что говорит о слабости взаимодействия между квазичастицами. По этой причине в данном случае индивидуальные характеристики поляритонов выражены достаточно отчетливо.

С другой стороны, сверхсветовые солитоны уравнений (33) и (47) обладают "частицеподобными" свойствами упругого взаимодействия с себе подобными. Поэтому сами эти солитоны, являющиеся сгустками поляритонов, можно рассматривать как квазичастицы (нелинейные возбуждения) в неравновесной среде. Следует, правда, помнить, что солитонами в строгом смысле этого слова (уединенными импульсами, не изменяющими свою форму после взаимодействия друг с другом) являются лишь пространственно одномерные решения уравнения (47), так как при $\Delta_\perp \mathcal{E} \neq 0$ данное уравнение является неинтегрируемым [12, 13, 29]. Что касается уравнения (33), то для него аналогичный вопрос, по видимому, пока не исследован. Легко видеть, однако, что (33) в качестве частных случаев содержит в себе уравнение синус-Гордона для θ ($b = \Delta_\perp \theta = 0$) и модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза для $E \sim \partial\theta/\partial\tau$ ($a = \Delta_\perp \theta = 0$). Известно, что оба названных уравнения неинтегрируемы в пространственно неоднородном случае [13, 29]. Поэтому можно предполагать, что и (33) также неинтегрируемо при $\Delta_\perp \theta \neq 0$ и, следовательно, рассмотренные здесь его решения в виде сверхсветовых импульсов с учетом всех трех измерений не обладают солитонными ("частицеподобными") свойствами упругого взаимодействия с себе подобными.

На основе изложенного можно говорить о сверхсветовых групповых скоростях в системе элементарных и нелинейных возбуждений неравновесной среды, имеющей, так же как и поляритоны, конечное время жизни T_R . Ясно, что приписывать поляритонам время жизни в некотором состоянии, равное τ_p , можно лишь если $\tau_p \ll T_R$. В случае же $\tau_p \sim T_R$ невозможно отделить время жизни поляритонов от времени жизни среды в неравновесном состоянии. Здесь необходимо материальные уравнения (3) дополнить релаксационными слагаемыми, что значительно усложнит исследования.

Дисперсионные соотношения типа Крамерса–Кронига, вводящие асимметрию между прошлым и будущим на микроскопическом уровне [35], выражают собой принцип микропричинности [36, 37]. С другой стороны в основу второго начала термодинамики, как известно, положена необратимость релаксационных процессов, приводящих с течением времени различные объекты в состояние термодинамического равновесия друг с другом. В результате этих процессов энтропия системы

стремится к максимальному значению. Таким образом, "стрела времени" [38] (неравноценность между прошлым и будущим) выделяется на макроскопическом уровне. Причинность, связанную со вторым началом термодинамики, можно назвать макропричинностью [36].

Принятое в настоящей работе рассмотрение относится к "идеальным" [39] средам, для которых $T_R = \infty$. Формально это приводит к тому, что возбужденное состояние атомов становится как бы устойчивым. В этом случае в среде можно отчетливо выделить две подсистемы: возбужденную и термализованную в соответствии со статистикой Больцмана. Столь четкое различие между данными подсистемами означает, что среда находится в состоянии не с максимальной энтропией и поэтому далека от равновесия. Предположение о том, что время жизни такого состояния $T_R = \infty$, некоторым образом вступает в противоречие со вторым началом термодинамики. Данное обстоятельство должно привести к нарушению макропричинности, что, казалось бы, снимает запрет на сверхсветовое распространение сигналов (т.е. информации). Следует, однако, помнить, что в нашем случае сверхсветовые объекты (электромагнитные солитоны) являются протяженными (в макроскопическом смысле), а не точечными. Поэтому нарушение принципа причинности является кажущимся, т.е. происходит вследствие реализации описанного выше механизма переформирования и наблюдается лишь на макроскопическом уровне. Данный кажущийся эффект проявляется при наблюдении за пересечением волновым пакетом границ раздела между равновесной и неравновесной средами: при определенных условиях волновой пакет может появиться на выходе из неравновесной среды раньше, чем максимум исходного импульса подойдет к данной среде [32]. На самом деле из-за механизма переформирования на месте вошедшего в неравновесную среду спадающего переднего участка импульса формируется другой максимум и именно он регистрируется на выходе. Все это время исходный максимум может находиться на подходе к границе раздела. Особенно отчетливо данный эффект проявляется себя при подаче импульсов на неравновесные среды, изготовленные в виде тонких пленок [40]. В однородной же неравновесной среде (без границ раздела) сверхсветовой импульс распространяется практически без изменения формы [1, 39].

"Нарушенная" макропричинность оставляет незыблемым фундаментальный принцип микропричинности, поэтому каждый фотон от атома к атому распространяется со скоростью c . Говорить же о нарушении (конечно же, условно) принципа макропричинности, связанного с динамикой большого числа фотонов и взаимодействующих с ними электродипольных переходов, можно лишь при $\tau_{\text{групп}} < T_R$.

Уравнения (10), (33) и (47) не обладают свойством лоренц-инвариантности (налицо асимметрия между пространственными и временными производными) в силу того, что материальные уравнения (3), (4), в отличие от уравнений Максвелла, являются нерелятивистскими. В данном случае нет необходимости в абсолютно строгом релятивистском подходе, так как характерные значения скоростей электронов в атомах, подверженных взаимодействию с электромагнитными импульсами, много меньше скорости света. Это еще раз подтверждает тот факт, что сверхсветовые солитоны являются в значитель-

ной мере порождением неравновесности среды, а не только релятивистской природы электромагнитного поля. Механизм переформирования и здесь все ставит на свои места.

Если принять, что необратимость физических явлений имеет фундаментальную природу [41], то полного равноправия между временем и пространством, установленного специальной теорией относительности, все-таки не существует [38] из-за наличия "стрелы времени". Вопрос о связи между необратимостью и возможностью существования сверхсветовых групповых скоростей [38], оставляющей неизлечимым фундаментальный принцип микропричинности, видимо, еще ждет своего решения.

Благодарности. Благодарю А.Н. Ораевского, А.И. Маймистова и А.В. Юрова за плодотворные обсуждения затронутых в статье вопросов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект: 00-02-17436) и CRDF (грант 6104).

Список литературы

- Ораевский А Н *УФН* **168** 1311 (1998)
- Андреев А Ю, Киржниц Д А *УФН* **166** 1135 (1996)
- Басов Н Г и др. *ЖЭТФ* **50** 23 (1996)
- Киржниц Д А, Сазонов В Н, в кн. *Эйнштейновский сборник 1973* (под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1974) с. 84
- Chiao R Y, Kozhokin A E, Kurizki G *Phys. Rev. Lett.* **77** 1254 (1996)
- Бладман С А, Рудерман М А, в кн. *Эйнштейновский сборник 1973* (под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1974) с. 190
- Becker P C et al. *Phys. Rev. Lett.* **63** 505 (1989)
- Chernikov S V et al. *Opt. Lett.* **18** 476 (1993)
- Tamura K, Nakazawa M *Opt. Lett.* **21** 68 (1996)
- Беленов Э М и др. *Письма в ЖЭТФ* **47** 442 (1988)
- Беленов Э М, Назаркин А В, Ушаповский В А *ЖЭТФ* **100** 762 (1991)
- Жданов С К, Трубников Б А *Квазигазовые неустойчивые среды* Гл. 6 (М.: Наука, 1991)
- Абловиц М Дж, Сигур Х *Солитоны и метод обратной задачи* Гл. 4 (М.: Мир, 1987)
- Сивухин Д В *Общий курс физики Т. 4 Оптика* (М.: Наука, 1980) с. 45
- Мандельштам Л И *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М.: Наука, 1972)
- Лоудон Р *Квантовая теория света* Гл. 4 (М.: Мир, 1976)
- Козлов С А, Сазонов С В *ЖЭТФ* **111** 404 (1997)
- Маймистов А И *Квант. электрон.* **30** 287 (2000)
- Sazonov S V *J. Phys.: Condens. Matter* **7** 175 (1995)
- Пархоменко А Ю, Сазонов С В *ЖЭТФ* **114** 1595 (1998)
- Васильев В А, Романовский Ю М, Яхно В Г *Автоволновые процессы* Гл. 1 (М.: Наука, 1987)
- Кернер Б С, Осипов В В *Автосолитоны — локализованные сильнонеравновесные области в однородных диссипативных системах* Гл. 1 (М.: Наука, 1991)
- Kosevich A M, Kovalev A S *Solid State Commun.* **12** 763 (1973)
- Anderson D *Phys. Rev. A* **27** 3135 (1983)
- Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн 2-е изд.* (М.: Наука, 1990) с. 161
- Konno K, Kameyama W, Sanuki H *J. Phys. Soc. Jpn.* **37** 171 (1974)
- Ведерко А В и др. *Вестник МГУ, Сер. 3: Физ. Астрон.* **33** 4 (1992)
- Додд Р и др. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (М.: Мир, 1988)
- Львов В С *Нелинейные спиновые волны* Гл. 2 (М.: Наука, 1987)
- Лэм Дж Л, мл. *Введение в теорию солитонов* (М.: Мир, 1983)
- Курицки Г и др. *Опт. и спектр.* **87** 551 (1999)
- Wang L J, Kuzmich A, Dogariu A *Nature* **406** 277 (2000)
- Файнгольд М И, в кн. *Эйнштейновский сборник 1974* (под ред. В Л Гинзбурга, Г И Наана) (М.: Наука, 1976) с. 276
- Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика* Гл. 8 (М.: Наука, 1975)
- Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей 4-е изд.* (М.: Наука, 1984)
- Биланюк О, Сударшан Е, в кн. *Эйнштейновский сборник 1973* (под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1974) с. 112
- Блохинцев Д И *Пространство и время в микромире* Гл. 5 (М.: Наука, 1970)
- Кадомцев Б Б *Динамика и информация* Гл. 5 (М.: Редакция журн. "УФН", 1999)
- Ораевский А Н *Соросовский образовательный журнал* (10) 75 (1999)
- Vlaauboer M et al. *Phys. Rev. A* **57** 4905 (1998)
- Пригожин И *От существующего к возникающему* (М.: Наука, 1985)

Superluminal electromagnetic solitons in nonequilibrium media

S.V. Sazonov

Kaliningrad State Technical University,
Sovetskii prosp. 1, 236000 Kaliningrad, Russian Federation
Fax: (0112) 359125
E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

The possibility of stable faster-than-light propagation of extremely short (no high-frequency content) electromagnetic solitons, breathers, and nonresonant envelope solitons is discussed based on the simplest model of a two-component nonequilibrium medium of two-level quantum transitions with widely differing eigenfrequencies.

PACS numbers: 42.50.Gy, **42.55.-f**, **42.65.-k**, 42.65.Tg

Bibliography — 41 references

Received 13 December 2000, revised 23 February 2001