

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Суперсимметричная теория неравновесной стохастической системы в приложении к неупорядоченным гетерополимерам

А.И. Олемской

На основе уравнения Ланжевена развита суперсимметричная полевая схема, позволяющая оптимальным образом представить эффекты памяти и неэргодичности неравновесной стохастической системы, обладающей замороженным беспорядком. Эта схема применяется к неупорядоченному гетерополимеру, для которого найден эффективный гамильтониан, сводящийся к свободной энергии в зависимости от композиционного параметра порядка. Здесь вместо уравнения Ланжевена используется эффективное уравнение движения, описывающее чередование мономеров разных сортов при движении вдоль полимерной цепи. Найдены зависимости изотермической и адиабатической восприимчивостей, параметра памяти и необратимого отклика от температуры и интенсивности замороженного беспорядка.

PACS numbers: 05.40.-a, 05.70.Ln, 11.30.Pb, 61.41.+e

Содержание

1. Введение (503).
 2. Суперсимметричное представление неравновесной стохастической системы (506).
 - 2.1. Производящий функционал. 2.2. Использование дуальных полей. 2.3. Сведение суперсимметричного поля к дуальной форме. 2.4. Суперсимметричная корреляционная техника. 2.5. Суперсимметричная теория возмущений. 2.6. Схема самосогласования. 2.7. Эффекты памяти и неэргодичности. 2.8. Исследование уравнений для параметров памяти и неэргодичности. 2.9. Неполная потеря эргодичности.
 3. Эффективный гамильтониан неупорядоченного гетерополимера (522).
 - 3.1. Производящий функционал. 3.2. Конфигурационные корреляторы. 3.3. Свободная энергия. 3.4. Длинноволновый предел. 3.5. Учет эффектов неэргодичности. 3.6. Учет флуктуаций. 3.7. Суперсимметричный гамильтониан.
 4. Суперсимметричная теория неупорядоченного гетерополимера (527).
 - 4.1. Эффективное уравнение движения. 4.2. Суперсимметричная теория. 4.3. Корреляционная техника. 4.4. Учет эффектов памяти и неэргодичности.
 5. Заключение (534).
 6. Приложения (523).
 - 6.1. Приложение А. 6.2. Приложение Б. 6.3. Приложение В.
- Список литературы (537).

1. Введение

Традиционно предмет физики сводится к объектам неживой природы: элементарным частицам, ядрам, атомам, небольшим молекулам и кластерам, газам и плазме, конденсированным средам, астрономическим объектам и т.д. (обзор современного "физического минимума" см. в [1]). Кардинальное изменение ситуации произошло в последние годы, когда законы статистической физики были приложены к объяснению поведения *сложных систем (complex systems)* [2, 3]. Такие системы характеризуются фрактальными свойствами, аномальными явлениями переноса, замедленной релаксацией, неаддитивными свойствами, эффектами самоорганизации и т.д. [4–6]. Теория сложных систем позволяет представить социальные явления типа эволюции общества и возникновения войн [7], экономические процессы [8–10], особенности движения транспортных потоков и сыпучих сред [11–13], а также многое другое [14–31].

Основы теории сложных систем были заложены в пионерских работах [14, 15], открывших новый объект исследования — *мягкие конденсированные среды*. Такие среды представляют неравновесные термодинамические системы, проявляющие эффекты памяти и неэргодичности, обусловленные замороженным беспорядком в распределении потенциала межчастичного взаимодействия и поля, сопряженного параметру порядка. Наиболее популярными примерами указанных систем являются спиновые стекла [16–18], модель Хопфилда, описывающая ассоциативную память [19–21], и др. [22]. Отдельное место в этом ряду занимают неупорядоченные гетерополимеры, практический интерес к которым обусловлен уникальным сочетанием механических, термических, химических и других свойств [23–28]. Данный объект

А.И. Олемской. Сумский государственный университет
40007 г. Сумы, ул. Римского-Корсакова 2, Украина
Тел. (0542) 33-55-13
E-mail: olemskoi@ssu.sumy.ua

Статья поступила 15 декабря 2000 г.

выделяется еще и тем обстоятельством, что на его примере было впервые осознано, что статистическая физика полимеров представляет основу для описания сложных систем [29–31]. В отличие от теории таких систем, зачастую носящей феноменологический характер, в теории полимеров использовался микроскопический подход, заложенный И.М. Лифшицем [32].

Как известно, данный подход основывается на использовании двух больших параметров. Во-первых, в полимерной цепи энергия ковалентной связи намного превышает характерную величину межчастичного взаимодействия. Это позволяет рассматривать такую цепь как нитевидную структуру, фиксированную продольными ковалентными связями. Иными словами, полимерная цепь обладает линейной памятью, отвечающей замороженному беспорядку в спиновых стеклах. Другим большим параметром является полное число мономерных звеньев N : так, в синтетических полимерах $N \sim 10^4 - 10^5$, в макромолекулах ДНК $N \sim 10^5 - 10^7$. Следовательно, можно использовать термодинамический предел $N \rightarrow \infty$, позволяющий рассматривать полимерную цепь на основе стандартных методов статистической физики [33].

С изменением внешних условий полимерные системы могут испытывать два основных типа превращений — микрофазное расслоение, приводящее к образованию доменной структуры с мезоскопическим периодом, и переход в замороженное состояние, который фиксирует конформацию (геометрическую форму) макромолекулы [26, 27]. Первое из этих превращений присуще *блочным сополимерам* А-В, представляющим последовательное чередование различных блоков, каждый из которых составлен из однотипных мономеров (например, ... ААВВААВВ...). Второй тип превращений, представляющий пример стеклования, реализуется в *неупорядоченных гетерополимерах*, образованных стохастической последовательностью мономеров разных сортов. При этом даже незначительное изменение последовательности чередования мономеров (или параметров взаимодействия) может приводить к существенной перестройке основного состояния гетерополимера. Рассмотрим каждое из указанных превращений по отдельности.

Термодинамическое состояние блок-сополимера А-В определяется параметром состава $0 \leq f \leq 1$, задающим долю мономеров А, и термодинамическим параметром χN , где N — индекс полимеризации, χ — параметр Флори–Хаггинса, характеризующий различие во взаимодействии мономеров разных сортов по отношению к температуре. Первая теория микрофазного расслоения была построена Флори [35], однако использованное там макроскопическое приближение не позволило учесть мезоскопический характер распределения фазы. Его описание достигается в предельных случаях *сильной и слабой сегрегации* (в первом учитывается наличие резких границ, разделяющих домены, во втором ими пренебрегают). Самосогласованная микроскопическая теория микрофазного расслоения [34] показывает, что в пределе слабой сегрегации при $f = 0,5$ реализуется непрерывный фазовый переход из "наиболее упорядоченной" ламелярной мезоструктуры в неупорядоченное состояние. С отклонением от состава $f = 0,5$ наблюдается цепь превращений первого рода: ламелярная мезоструктура трансформируется в нитевидную гексагональную, которая переходит в ОЦК решетку, составленную из сферо-

идальных выделений другого состава; могут наблюдаться и более сложные структуры [26]. Характерно, что период этих мезоструктур имеет порядок размера блока и не зависит от температуры.

Существенная особенность микрофазного расслоения состоит в том, что благодаря наличию пространственно периодической структуры флуктуации существенным образом изменяют термодинамическую картину фазового перехода [36]. Действительно, в пространственно однородных системах флуктуационная поправка обусловлена боголюбовской особенностью \mathbf{k}^{-2} в начале координат $\mathbf{k} = 0$ волнового пространства. После интегрирования по объему d -мерного \mathbf{k} -пространства эта поправка приобретает порядок k_0^{d-2} , где k_0 — характерное волновое число. Поэтому в однородных системах, где $k_0 \rightarrow 0$, флуктуации параметра порядка дают существенный вклад только при $d < 2$. Существенно иная ситуация наблюдается при наличии пространственно периодической структуры, характеризуемой волновым вектором \mathbf{k}_0 . Здесь особенность $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^{-2}$ проявляется не в одной точке, а на поверхности сферы $|\mathbf{k}| = k_0$. Это приводит к сингулярной положительной добавке к коэффициенту, стоящему перед квадратичным слагаемым разложения Ландау, в связи с чем переход второго рода трансформируется в первый. В блочных сополимерах указанная особенность существенно изменяет фазовую диаграмму, в частности, вблизи состава $f = 0,5$ появляется широкое "окно", где ламелярная фаза может переходить непосредственно в неупорядоченную [37]. Весьма своеобразная ситуация реализуется в *неупорядоченных блок-сополимерах*, которые проявляют свойства, присущие как регулярным блок-сополимерам, так и неупорядоченным гетерополимерам (см. ниже). Исследование таких систем [38] на основе метода трансформации матрицы, позволяющего учесть наличие ближних корреляций, показало, что на фазовой диаграмме появляются двухфазные области, а характерный период приобретает зависимость от внешних условий, присущую неупорядоченным системам.

Как указывалось выше, неупорядоченному гетерополимеру присуще явление стеклования (замерзания), при котором реализуется состояние с фиксированной конфигурацией цепи и заданной композиционной последовательностью чередования мономеров. Наиболее популярный пример стеклования представляет сворачивание белков, которое состоит в способности макромолекулы найти трехмерную конформацию и композиционную последовательность, отвечающие данным внешним условиям. Уникальность данного явления проявляется в *парадоксе Левинтала*, который состоит в том, что полимерной цепи, состоящей из $N \gg 1$ мономеров, за конечное время удается найти нужную конформацию из набора, включающего экспоненциально большое число состояний $\exp(\alpha N)$, $\alpha \sim 1$. Впервые такого рода проблема возникла при исследовании спиновых стекол, которые отличаются от неупорядоченных гетерополимеров только тем обстоятельством, что в них замороженный беспорядок возникает в результате закалки неупорядоченного состояния, тогда как в полимерах он фиксируется композиционной последовательностью мономеров, возникающей при синтезе макромолекулы. Использование аналогии спиновых стекол и неупорядоченных гетерополимеров позволило найти температуру стеклования гетерополимера, представленного "многоч-

буквенной последовательностью" [39], а также исследовать совместную картину стеклования и микрофазного расслоения, которое может предшествовать замерзанию [40]. Оказывается, что учет перекрытия между различными репликами уменьшает температуру стеклования [41].

Понимание основных особенностей процесса стеклования может быть достигнуто [28] в рамках простейшего метода случайных энергий. Он основывается на том обстоятельстве, что энергетический спектр неупорядоченной системы состоит из дискретной и непрерывной составляющих, последняя из которых дает основной вклад в термодинамические характеристики [29], а отвечающие ей энергии распределены практически независимым образом [42, 43]. Для выяснения сути метода учтем, что число микросостояний, в которых может находиться $N \gg 1$ частиц, составляет $\mathcal{M} \sim \exp(\alpha N) \rightarrow \infty, \alpha \sim 1$. Зададим вероятность реализации микросостояния с энергией E простейшим распределением Гаусса

$$P(E) \propto \exp\left(-\frac{E^2}{2N\mathcal{E}^2}\right),$$

где \mathcal{E} — ширина разброса энергии. Плотность состояний $\mathcal{N}(E) = \mathcal{M}P(E)$ принимает астрономически большие значения вблизи точки $E = 0$ и быстро падает в области $E < 0$. Нижняя граница непрерывного спектра E_b определяется условием $\mathcal{N}(E) \sim 1$, согласно которому $E_b \approx \approx -\mathcal{E}N$. Таким образом, ширина области, дающей определяющий вклад в термодинамические характеристики, пропорциональна числу частиц N . С другой стороны, ширина дискретного спектра, задаваемая разбросом энергий, составляет величину $\sim \mathcal{E}N^{1/2}$, отношение которой к значению $E_b \propto N$ является исчезающе малым в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Именно это позволяет пренебречь вкладом дискретных состояний, хотя они определяют состояние стекла. В свою очередь независимость в распределении энергий микросостояний E позволяет при усреднении свободной энергии положить

$$\bar{F} \equiv -T \overline{\ln Z} \approx -T \ln \bar{Z}.$$

Иными словами, в рамках приближения случайных энергий усреднение свободной энергии переносится на статистическую сумму:

$$\bar{Z} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \mathcal{N}(E) dE \approx \mathcal{M}P(E_s) \exp\left(-\frac{E_s}{T}\right). \quad (1.1)$$

Здесь во втором равенстве учтено, что подынтегральное выражение имеет максимум в седловой точке $E_s = -(\mathcal{E}^2/T)N$. Очевидно, непрерывный спектр вносит основной вклад при условии $E_s \geq E_b$, согласно которому температура замерзания $T_f \approx \mathcal{E}$. При $T < T_f$, когда $E_s \leq E_b$, основной вклад в статистическую сумму дает дискретный спектр и приближение случайных энергий становится неприменимым. Однако поскольку в стеклообразном состоянии все микроскопические состояния, кроме нескольких, выморожены, то зависимость от температуры пропадает и термодинамические величины принимают значения, отвечающие точке замерзания T_f .

Разумеется, такая ситуация не является следствием приближения случайных энергий, а представляет признак неупорядоченных систем. Это связано с появлением

иерархии термодинамических величин при нарушении эргодичности, обусловленной вкладом дискретного спектра. Она состоит в разделении термодинамических параметров на микроскопические и макроскопические значения: первые отвечают непрерывному спектру, распределение по энергиям E которого задается термическим беспорядком (температурой), второй — дискретной составляющей, характер которой фиксируется замороженным беспорядком. В результате микроскопические величины определяются температурой, а макроскопические — интенсивностью замороженного беспорядка [44].

Как видно из приведенного, при рассмотрении неупорядоченных систем основная трудность обусловлена необходимостью проводить усреднение логарифмической функции. Для ее преодоления Эдвардс и Андерсон [14] предложили использовать предел

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n}. \quad (1.2)$$

Наличие степени Z^n показывает, что вместо одной термодинамической системы со статистической суммой Z следует брать $n \rightarrow 0$ систем, тождественных исходной (реплик). Недавно метод реплик получил дальнейшее продолжение в связи с развитием теории неаддитивных систем [6]. Оказалось, что поведение таких систем может быть понято только при ненулевом значении параметра неаддитивности n . При этом пространство состояний приобретает фрактальный характер, что приводит к его разделению на изолированные кластеры, отвечающие различным репликам.

Результаты, полученные методом реплик, были воспроизведены исходя из уравнения Ланжевена для "мягкой" спиновой модели [45]. На ее основе получена самосогласованная система динамических уравнений для функции отклика и структурного фактора, "удлиненных" за счет добавки параметров неэргодичности и памяти.

Как и для всех систем с замороженным беспорядком, описание неупорядоченных гетерополимеров требует усреднения по соответствующему распределению (композиционному беспорядку). Выше мы видели, что использование метода случайных энергий предполагает независимость в распределении микросостояний, которая в действительности отсутствует. С другой стороны, метод реплик основывается на математическом трюке и требует проведения громоздких выкладок, которым не всегда отвечает определенное физическое содержание. Не представляет также перспективы использование динамических уравнений, поскольку наличие ковалентной связи, приводящей к формированию полимерной цепи, существенно усложняет эти уравнения [25]. Таким образом, становится актуальной задача построения микроскопической теории неупорядоченных гетерополимеров, которая позволяет последовательным образом представить эффекты памяти и неэргодичности. Мы предлагаем в качестве такой схемы использовать теорию суперсимметричного поля [46–48]. Она приводит к системе уравнений, которая самосогласованным образом описывает поведение неравновесной термодинамической системы, обладающей памятью и неэргодичностью [49].

Будучи вариантом полевой схемы, наш подход основывается на методе производящего функционала, предложенном Мартином, Сиггия и Роузом [50] (см. также

[51, 52]). Формальной основой для введения суперсимметричного поля является нильпотентная величина, представляющая собой квадратный корень из 0. В этом смысле суперполе подобно комплексному полю, в котором вместо антикоммутирующей нильпотентной величины (грассмановой переменной) используется мнимая единица, равная корню из -1 . По определению суперсимметричное поле объединяет коммутирующие бозонные и антикоммутирующие фермионные компоненты в единую математическую конструкцию, представляющую вектор в суперсимметричном пространстве. Такие поля были введены впервые в квантовой теории поля [53–55], а затем предложены для исследования стохастических систем [56, 57]. На их основе развита самосогласованная микроскопическая теория спинового стекла [44], обобщенная затем для описания неравновесной термодинамической системы [58]. В рамках модели Шеррингтона–Киркпатрика показано, что суперсимметричная схема тождественна репличному подходу [59]. Применительно к полимерам суперсимметричное поле было введено в работе [60], однако дальнейшего развития предложенные там методы не получили. Более того, не может быть использована и суперсимметричная схема, развитая в теории спинового стекла, поскольку наличие ковалентной связи настолько усложняет уравнение движения полимерной цепи [25], что оно не может быть положено в основу метода производящего функционала.

Несмотря на значительное продвижение к настоящему времени в суперсимметричной теории неравновесных термодинамических систем остался открытым ряд принципиальных вопросов. Прежде всего, оказывается, что возможно неединственное представление суперсимметричного поля — как в смысле физической интерпретации его компонент, так и их числа. В связи с этим представляется неединственным также разложение по компонентам суперсимметричного коррелятора, в результате чего возникает необходимость выбора оптимального базиса, компоненты которого давали бы структурный фактор и функцию Грина. Конечная задача состоит в выработке простейшей суперсимметричной схемы, которая позволяет самосогласованным образом описывать эффекты памяти и неэргодичности в зависимости от интенсивностей термического и замороженного беспорядков. Решению этой задачи посвящен раздел 2, наиболее формализованные части которого отнесены в приложение.

В разделе 3 на основе гамильтониана Эдвардса найдено выражение для свободной энергии гетерофазного полимера, которое играет роль эффективного лагранжиана суперсимметричной теории поля. Это выражение позволяет учесть как межрепличное перекрытие, так и флуктуационные эффекты.

Как уже указывалось, основная трудность в построении полевой схемы гетерофазного полимера состоит в том, что исходное уравнение движения имеет настолько сложный вид, что оно не может быть использовано для определения генерирующего функционала. Поэтому изложение раздела 4 начинается с построения эффективного уравнения движения неупорядоченного гетерополимера, которое отражает стохастическое чередование мономеров разных сортов при движении вдоль полимерной цепи. Это позволяет использовать корреляционную технику, развитую в разделе 2, для самосогласованного

описания эффектов памяти и неэргодичности неупорядоченного гетерополимера в зависимости от его состава, термического и замороженного беспорядков.

Завершается изложение кратким обсуждением результатов в разделе 5.

2. Суперсимметричное представление неравновесной стохастической системы

Как указывалось в предыдущем разделе, введение суперполя, являющегося комбинацией обычных и граcсмановых компонент, представляет столь же естественное расширение базиса, как переход от вещественных полей к комплексным. Здесь мы покажем, что суперсимметричный подход позволяет дать полное описание произвольной (в том числе и неравновесной) стохастической системы с замороженным беспорядком [49, 58]. Это достигается за счет разложения коррелятора суперполя по замкнутому базису, коэффициенты которого сводятся к наблюдаемым величинам — структурному фактору $S(\omega)$ и запаздывающей/опережающей гриневским функциям $G_{\mp}(\omega)$, где ω — частота. Появление памяти и неэргодичности приводит к добавкам $S(0) \propto q$, $G_{\mp}(0) \equiv \Delta$, отвечающим гидродинамическому пределу $\omega = 0$. В результате суперсимметричная схема самосогласования позволяет получить уравнения для параметров памяти q и неэргодичности Δ .

При построении суперсимметричной теории следует иметь в виду важное обстоятельство — суперполе, как и всякое калибровочное поле, может оказаться приводимым (подобно тому как четырехкомпонентное электромагнитное поле может распадаться на векторную и скалярную составляющие). Действительно, оказывается [52], что условие калибровочной инвариантности приводит к разбиению суперполя на киральные составляющие, размерности которых вдвое меньше размерности исходного суперполя. Для рассматриваемого случая неупорядоченного гетерополимера будет показано, что в пределе слабой сегрегации условие сохранения энтропии, накладываемое на исходное четырехкомпонентное суперполе, приводит к выделению неприводимой составляющей, имеющей вид двухкомпонентного (*дуально*) бозевского поля. При этом первая составляющая имеет смысл параметра порядка, а вторая представляет сопряженное поле или амплитуду его флуктуаций.

При вычислении наблюдаемых величин важную роль играет оптимальный выбор базиса, по которому проводится разложение суперкоррелятора. Так, в работе [44] использовался трехкомпонентный базис, составляющие которого G_0 , G_1 , S дают опережающую $G_+ \equiv G_0 + G_1$ и запаздывающую $G_- \equiv G_0 - G_1$ функции Грина, а также структурный фактор S . Добавление четвертой компоненты в [61] обусловлено тем обстоятельством, что здесь суперсимметричное поле содержит не амплитуду флуктуаций сопряженного поля, статический коррелятор которой сводится к нулю, а само поле. Поскольку его коррелятор $S_- \neq 0$, то базис разложения суперкоррелятора должен содержать величины S , G_+ , G_- , S_- и, следовательно, быть четырехкомпонентным. Еще большее расширение базиса (до шести компонент) имеет место, если учитывать не только диссипативный режим поведения, но и реактивный [58]. При этом включаются в рассмотрение эффекты самоорганизации, приводящие к нарушению условия сохранения энтропии [62]. Однако

здесь мы не будем касаться подобных синергетических эффектов, ограничивая рассмотрение однородными термодинамическими системами, для которых корреляторы грассмановых компонент суперполя сводятся к функциям Грина G_{\pm} . Поскольку при включении в суперполе флуктуаций их коррелятор $S_{-} \equiv 0$, а параметры неэргодичности и памяти содержатся в G_{\pm} , S , то ясно, что для описания неравновесной стохастической системы достаточно базиса с размерностью, равной 3. Именно такой случай рассматривался в [44], однако используемый там базис не является оптимальным, поскольку дает не наблюдаемые функции Грина G_{\pm} , а их компоненты $G_{0,1} = (G_{+} \pm G_{-})/2$.

Настоящий раздел посвящен построению суперсимметричной схемы, позволяющей наиболее рациональным образом представить эффекты памяти и неэргодичности для неравновесной стохастической системы [49]. В разделе 2.1 изложена полевая схема, основанная на методе производящего функционала. Исходя из уравнения Ланжевена с белым шумом найден лагранжиан системы и получены уравнения движения, описывающие кинетику фазового перехода. В разделе 2.2 представлена простейшая суперполевая схема, основанная на использовании двухкомпонентных дуальных полей: в разделе 2.2.1 рассмотрен случай, когда второй компонентой является амплитуда флуктуаций, а в разделе 2.2.2 — сопряженное поле. Раздел 2.2.3 посвящен исследованию связи этих представлений, найдены операторы, обеспечивающие переход между ними. В разделе 2.3 представлена схема, позволяющая свести исходные четырехкомпонентные суперполя к двухкомпонентной форме, которая, однако, не совпадает с киральным суперполем. В разделе 2.4 приведено разложение суперкоррелятора по базисным операторам, коэффициенты которого сводятся к наблюдаемым величинам G_{\pm} , S . Показано, что сведение четырехкомпонентного суперполя к двухкомпонентному соответствует уменьшению размера супербазиса, по которому раскладывается суперкоррелятор. Это становится возможным благодаря использованию тождества Уорда, приводящего к равенству корреляторов грассмановых полей и соответствующих функций Грина. Раздел 2.5 содержит изложение суперсимметричной теории возмущений, в рамках которой получены компоненты Σ_{\pm} , Σ разложения собственно-энергетической суперфункции. Для их определения используются ϕ^4 - и ϕ^3 -модели теории возмущений по ангармонизму (разделы 2.5.1, 2.5.2 соответственно). Однако в отличие от [44] при определении фурье-образа компоненты $\Sigma_{-}(\omega)$, содержащей свертки, мы основываемся не на использовании затравочных функций, а на флуктуационно-диссипационной теореме, которая позволяет найти точное выражение для $\Sigma_{-}(\omega)$. В разделе 2.6 сначала (раздел 2.6.1) представлена самосогласованная схема, позволяющая построить эффективный лагранжиан, который учитывает как самодействие, так и эффекты прямого и эффективного взаимодействий (последнее обусловлено замороженным беспорядком). В разделе 2.6.2 на основе этого лагранжиана получено суперсимметричное уравнение Дайсона. Раздел 2.7 посвящен определению уравнений для параметров неэргодичности и памяти, их анализ проводится в последующем разделе 2.8. Найдены зависимости от температуры и интенсивности замороженного беспорядка для микро- и макроскопической восприимчивостей и соответствующих параметров

памяти и неэргодичности. И наконец, раздел 2.9 посвящен анализу поведения системы, находящейся в нестационарном состоянии.

2.1. Производящий функционал

Представим поведение стохастической системы пространственно-временной зависимостью $x(\mathbf{r}, t)$ амплитуды гидродинамической моды, среднее значение которой сводится к параметру порядка [33]. Для описания этой зависимости будем исходить из уравнения Ланжевена [63]

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) - D \nabla^2 x = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x} + \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

Здесь точка означает временную производную, $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{r}$, D — коэффициент диффузии, γ — кинетический коэффициент, $V(x)$ — эффективный потенциал (свободная энергия Ландау), $\zeta(\mathbf{r}, t)$ — стохастическая добавка, определенная условиями белого шума

$$\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle_0 = 0, \quad \langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{0}, 0) \rangle_0 = \gamma T \delta(\mathbf{r}) \delta(t), \quad (2.2)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle_0$ означают усреднение по гауссову распределению величины ζ , T — температура термостата, задающая интенсивность шума. В последнем равенстве (2.2) часто используется нормировка, вдвое превышающая принятую. Это приводит к стандартным формам соотношения Онзагера и уравнения Фоккера–Планка, в которых не возникает множитель $1/2$ перед диффузионным слагаемым, однако во временной зависимости $(dx)^2 = D dt$ появляется коэффициент 2, а под экспонентой распределения $P_0\{\zeta\}$ стохастической переменной ζ возникает дополнительный множитель $1/2$ (см. [64]). Поскольку последующие выкладки основываются на гауссовой форме распределения $P_0\{\zeta\}$, то мы предпочли нормировку (2.2), приводящую к гауссиану (2.5).

Далее удобно ввести единицы измерения $t_s \equiv (\gamma T)^2/D^3$, $r_s \equiv \gamma T/D$, $V_s \equiv D^3/(\gamma^3 T^2)$, $\zeta_s \equiv D^3/(\gamma T)^2$ для времени t , координаты \mathbf{r} , эффективного потенциала V и стохастической переменной ζ соответственно (при этом подразумевается, что амплитуда гидродинамической моды x изначально отнесена к масштабу x_s). В результате уравнение движения (2.1) принимает канонический вид

$$\dot{x}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\delta V}{\delta x} + \zeta(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

где использована краткая форма записи вариационной производной

$$\frac{\delta V}{\delta x} \equiv \frac{\delta V\{x(\mathbf{r}, t)\}}{\delta x(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} - \nabla^2 x, \\ V\{x\} \equiv \iint [V(x) + \frac{1}{2}(\nabla x)^2] d\mathbf{r}. \quad (2.4)$$

Кроме того в уравнении (2.2) пропадает коэффициент γT , а распределение переменной ζ приобретает стандартную гауссову форму

$$P_0\{\zeta\} \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \int \zeta^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt\right). \quad (2.5)$$

Построение полевой схемы основывается на методе генерирующего функционала [51]

$$Z\{u(\mathbf{r}, t)\} = \int Z\{x\} \exp\left(\int u x \, d\mathbf{r} \, dt\right) D x, \quad (2.6)$$

$$Z\{x(\mathbf{r}, t)\} \equiv \left\langle \prod_{(\mathbf{r}, t)} \delta\left\{\dot{x} + \frac{\delta V}{\delta x} - \zeta\right\} \det\left|\frac{\delta \zeta}{\delta x}\right|_0 \right\rangle, \quad (2.7)$$

варьирование которого по пробному полю $u(\mathbf{r}, t)$ дает корреляторы наблюдаемых величин (см. (2.84)). Очевидно, $Z\{u\}$ представляет функциональное преобразование Лапласа для зависимости $Z\{x\}$, δ -функция в (2.7) учитывает вид уравнения (2.3), а детерминант определяет переход от непрерывного интегрирования по ζ к x .

2.2. Использование дуальных полей

Для дальнейшего развития полевой схемы необходимо установить тип связи между стохастическими переменными ζ и x . Согласно разделу 2.3 для термодинамических систем, в которых состояние термостата не зависит от x , указанная связь характеризуется постоянным значением якобиана $\det|\delta \zeta / \delta x| = 1$ в выражении (2.7). Ниже мы покажем, что в этом случае термодинамическая система представляется двухкомпонентными коммутирующими полями, содержащими нильпотентную величину $\vartheta \equiv \sqrt{0}$. Уместно назвать такие поля дуальными.

2.2.1. Амплитуда флуктуаций как компонента дуального поля. Будем исходить из функционального представления

$$\delta\{x(\mathbf{r}, t)\} = \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left(-\int p x \, d\mathbf{r} \, dt\right) D p, \quad (2.8)$$

где введено поле $p(\mathbf{r}, t)$, физический смысл которого будет установлен ниже. После усреднения по распределению (2.5) функционал (2.7) сводится к стандартному виду

$$Z\{x(\mathbf{r}, t)\} = \int \exp[-S\{x(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t)\}] D p. \quad (2.9)$$

Здесь действие $S = \int L \, d\mathbf{r} \, dt$, измеренное в единицах $S_s = \gamma^2(T/D)^3$, задается лагранжианом евклидовой теории поля

$$L(x, p) = \left(p\dot{x} - \frac{1}{2} p^2\right) + p \frac{\delta V}{\delta x}. \quad (2.10)$$

Для придания лагранжиану (2.10) канонической формы введем дуальное поле

$$\phi_p = x + \vartheta p \quad (2.11)$$

с бозе-компонентами x , p и нильпотентной величиной ϑ , определенной равенствами

$$\vartheta \vartheta' - \vartheta' \vartheta = 0, \quad \int d\vartheta = 0, \quad \int \vartheta \, d\vartheta = 1. \quad (2.12)$$

Как показано в приложении А, в представлении (2.11) выражение, стоящее в первых скобках лагранжиана (2.10), принимает вид

$$\kappa = \frac{1}{2} \int \phi D \phi \, d\vartheta, \quad (2.13)$$

присущий кинетической энергии в полевой схеме Дирака [51]. Эрмитов оператор D определяется соотношением

$$D_p = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left(1 - 2\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.14)$$

и удовлетворяет условиям (6.6). С другой стороны, условия нильпотентности (2.12) позволяют записать последнее слагаемое равенства (2.10) в стандартной форме (см. приложение А)

$$\pi = \int V(\phi) \, d\vartheta. \quad (2.15)$$

В результате лагранжиан (2.10) принимает канонический вид¹

$$L \equiv \kappa + \pi = \int \lambda \, d\vartheta, \quad \lambda(\phi) \equiv \frac{1}{2} \phi D \phi + V(\phi). \quad (2.16)$$

Как показано в приложении А, выражения (2.10), (2.16) инвариантны относительно преобразования $\exp(\varepsilon D)$, задаваемого генератором (2.14). При этом параметр $\varepsilon \rightarrow 0$ является чисто мнимым, а поля $x(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$ комплексные.

При инфинитезимальном приращении $\delta\phi$ поля ϕ действие

$$s\{\phi(\zeta)\} = \int \lambda(\phi(\zeta)) \, d\zeta, \quad \zeta \equiv \{\mathbf{r}, t, \vartheta\}, \quad (2.17)$$

приобретает добавку $\delta s = 0$, если выполняется уравнение Эйлера

$$D \frac{\delta \lambda}{\delta(D\phi)} + \frac{\delta \lambda}{\delta \phi} = 0. \quad (2.18)$$

Подставляя сюда выражение (2.16), находим уравнение движения

$$D\phi + \frac{\delta V}{\delta \phi} = 0, \quad (2.19)$$

определяющее наиболее вероятное значение

$$\phi_p^{(\max)} = \eta + \vartheta \varphi, \quad \eta \equiv x^{(\max)}, \quad \varphi \equiv p^{(\max)}, \quad (2.20)$$

дуального поля (2.11). Проектируя уравнение (2.19) на реальную и нильпотентную оси, получаем систему

$$\dot{\eta} = -\frac{\delta V}{\delta \eta} + \varphi, \quad (2.21)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta^2 V}{\delta \eta^2} \varphi, \quad (2.22)$$

определяющую кинетику изменения наиболее вероятных значений $x^{(\max)} \equiv \eta$, $p^{(\max)} \equiv \varphi$. Сравнение выражения (2.21) с уравнением Ланжевена (2.3) показывает, что поле духов $p(\mathbf{r}, t)$, введенное в интегральном представлении (2.8), сводится к амплитуде флуктуаций $\zeta(\mathbf{r}, t)$ силы, сопряженной амплитуде гидродинамической моды, а

¹ Здесь и далее мы опускаем индексы (в данном случае p), если полученные соотношения не зависят от выбора компонент поля.

величина $\varphi \equiv p^{(\max)} \equiv \zeta^{(\max)}$ задает ее наиболее вероятное значение. Хотя последнее может отличаться от среднего значения, будем называть величину $\eta \equiv x^{(\max)}$ *параметром порядка*.

Уравнения (2.21), (2.22), соответствующие минимуму лагранжиана (2.10), определяют наиболее вероятную реализацию $P\{\eta(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}, t)\}$ функции распределения

$$P\{x(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}, t)\} = Z^{-1} \exp\left(-\int L(x, p) \, d\mathbf{r} \, dt\right) \quad (2.23)$$

исходных флуктуирующих полей. Здесь статистическая сумма $Z \equiv Z\{u = 0\}$ сводится к генерирующему функционалу $Z\{u\}$, заданному равенством (2.6). Очевидно, функция распределения $P\{\eta(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}, t)\}$ наиболее вероятных полей $\eta \equiv x^{(\max)}$, $\varphi \equiv p^{(\max)}$ отвечает классическому приближению квантовой теории поля, которой соответствует плотность вероятности (2.23) (см. [51]).

2.2.2. Сопряженное поле как компонента дуального поля. Покажем, что выражение (2.11) не является единственно возможным дуальным полем, позволяющим построить самосогласованную полевую схему. С этой целью введем поле $f(\mathbf{r}, t)$, определенное соотношением

$$\dot{x} = f + p. \quad (2.24)$$

Тогда лагранжиан (2.10) принимает вид

$$L(x, f) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - f^2) - \frac{\delta V}{\delta x} f + \frac{\delta V}{\delta x} \dot{x}. \quad (2.25)$$

Последнее слагаемое может быть опущено, поскольку оно представляет полную производную $dV\{x\}/dt$, которая отвечает равновесной статистической сумме

$$Z_0 = \int \exp\left(-\frac{\Delta V\{\eta_i, \eta_f\}}{T}\right) D\eta_i D\eta_f, \quad \Delta V\{\eta_i, \eta_f\} \equiv V\{\eta_i\} - V\{\eta_f\} > 0, \quad (2.26)$$

не зависящей от промежуточных состояний. Здесь мы вернулись к размерной величине потенциала V , где $\eta_i(\mathbf{r}) \equiv x(\mathbf{r}, t_i)$, $\eta_f(\mathbf{r}) \equiv x(\mathbf{r}, t_f)$ — начальное и конечное поле параметра порядка, задаваемые соответствующими распределениями амплитуды гидродинамической моды. Подставляя лагранжиан (2.25) в уравнение Эйлера (2.18), получаем уравнения движения

$$\ddot{\eta} = -\frac{\delta^2 V}{\delta^2 \eta} f, \quad (2.27)$$

$$f = -\frac{\delta V}{\delta \eta}, \quad (2.28)$$

эквивалентные системе (2.21), (2.22). Действительно, дифференцирование по времени уравнения (2.21) с учетом равенства (2.22) и соотношения

$$\dot{\eta} = f + \varphi, \quad (2.29)$$

следующего из (2.24), немедленно приводит к (2.27). Что касается равенства (2.28), то оно сводится к определению силы $f(\mathbf{r})$, сопряженной параметру порядка $\eta(\mathbf{r}, t)$. Поскольку флуктуации не сказываются на макроскопическом потенциале $V(\mathbf{r})$, то их учет не изменяет уравнение (2.28), а следовательно, и сопряженную силу f , которая явным образом не зависит от времени t . Именно это обстоятельство является причиной совпадения вида

соотношений (2.24), (2.29) для случайных и наиболее вероятных полей.

Следуя определению (2.11), введем дуальное поле [61]

$$\phi_f = x - \vartheta f, \quad (2.30)$$

бозе-компоненты которого представляют амплитуду гидродинамической моды x и сопряженную силу f , взятую с обратным знаком. Согласно приложению А замена второй компоненты p в (2.11) на $-f$ в (2.30) сохраняет дуальную форму лагранжиана (2.16) и условия (6.6). Однако генератор соответствующей группы симметрии принимает вид

$$D_f = -\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vartheta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right), \quad (2.31)$$

который в отличие от (2.14) содержит временную производную второго, а не первого порядка.

2.2.3. Связь между различными дуальными представлениями. Докажем идентичность полевых схем, основывающихся на использовании полей (2.11) и (2.30). С этой целью введем операторы преобразования $\tau_{\pm} = \exp(\pm \vartheta \partial_t)$, $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, действие которых на поля ϕ_p , ϕ_f выражается следующими соотношениями:

$$\tau_{\pm} \phi_{\mp p}(t) = \phi_{\mp f}(t), \quad \tau_{\pm} \phi_{\pm f}(t) = \phi_{\pm p}(t). \quad (2.32)$$

Таким образом, операторы τ_{\pm} преобразуют дуальные представления (2.11), (2.30) друг в друга, если для оператора τ_{\pm} и поля $\phi_{\mp p}$ взять разные знаки, а для τ_{\pm} и $\phi_{\pm f}$ одинаковые. С другой стороны, проводя разложение в ряд по степеням ϑ , с учетом (2.12), (2.24) получаем

$$\phi_{\mp p}(t \pm \vartheta) = \phi_{\mp f}(t), \quad \phi_{\pm f}(t \pm \vartheta) = \phi_{\pm p}(t). \quad (2.33)$$

Сравнение выражений (2.32), (2.33) показывает, что операторы τ_{\pm} сдвигают физическое время t на величину нильпотентной координаты $\pm \vartheta$, если амплитуда флуктуаций p имеет обратный знак, а знак силы f совпадает со знаком индекса оператора τ_{\pm} :

$$\tau_{\pm} \phi_{\mp p}(t) = \phi_{\mp p}(t \pm \vartheta), \quad \tau_{\pm} \phi_{\pm f}(t) = \phi_{\pm f}(t \pm \vartheta). \quad (2.34)$$

Приведенные равенства могут быть выражены также в рамках матричного представления, определенного соотношениями (6.7), (6.9) и (6.10) в приложении А. Преобразованиям дуальных полей $\tau_+ \phi_f = \phi_p$, $\tau_- \phi_p = \phi_f$ отвечают соотношения между генераторами (2.14), (2.31):

$$D_f = \tau_- D_p \tau_+, \quad D_p = \tau_+ D_f \tau_-. \quad (2.35)$$

Легко убедиться, что условие $\dot{f} \equiv 0$ приводит к инвариантности ядра λ в определении лагранжиана (2.16).

2.3. Сведение суперсимметричного поля к дуальной форме

Подход, изложенный в предыдущем разделе, основывался на простейшем предположении, согласно которому в равенстве (2.7) якобиан $\det|\delta\zeta/\delta x| = 1$. В общем случае для произвольной матрицы $|A|$ имеем

$$\det|A| = \int \exp(\bar{\psi} A \psi) \, d^2\psi, \quad d^2\psi = d\psi \, d\bar{\psi}, \quad (2.36)$$

где $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$ — грассманово сопряженные антикоммутирующие поля, подчиняющиеся условиям (ср. с (2.12))

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi + \psi\bar{\psi} &= 0, & \int d\psi &= 0, & \int \psi d\psi &= 1, \\ \int d\bar{\psi} &= 0, & \int \bar{\psi} d\bar{\psi} &= 1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

С физической точки зрения появление новых степеней свободы ψ , $\bar{\psi}$ обусловлено включением обратной связи, приводящей к зависимости состояния термостата от параметра порядка. Такая ситуация присуща самоорганизующимся системам [62]. В результате лагранжиан (2.10), дополненный грассмановыми полями ψ , $\bar{\psi}$, принимает вид

$$\mathcal{L}(x, p, \psi, \bar{\psi}) = \left(p\dot{x} - \frac{p^2}{2} + \frac{\delta V}{\delta x} p \right) - \bar{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} \right) \psi. \quad (2.38)$$

Вводя четырехкомпонентное суперполе

$$\Phi_p = x + \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta + \bar{\theta}\theta p, \quad (2.39)$$

аналогично предыдущему разделу получаем суперсимметричный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \int A d^2\theta, \quad d^2\theta \equiv d\theta d\bar{\theta}, \quad (2.40)$$

$$A(\Phi_p) \equiv \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}_p \Phi_p) (\mathcal{D}_p \Phi_p) + V(\Phi_p),$$

где θ , $\bar{\theta}$ — грассманово сопряженные координаты, определенные равенствами типа (2.37)

$$\begin{aligned} \bar{\theta}\theta + \theta\bar{\theta} &= 0, & \int d\theta &= 0, & \int \theta d\theta &= 1, \\ \int d\bar{\theta} &= 0, & \int \bar{\theta} d\bar{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ниже будет установлена связь грассмановых координат θ , $\bar{\theta}$ с ранее использованной нильпотентной величиной ϑ , определенной условиями (2.12). В сравнении с равенством (2.16), где ядро λ имело первую степень генератора (2.14), в лагранжиан (2.38) входит пара операторов

$$\mathcal{D}_p = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - 2\theta \frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{\mathcal{D}}_p = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2.42)$$

не удовлетворяющих условиям грассманова сопряжения. Соответствующее суперсимметричное уравнение Эйлера имеет вид

$$-\frac{1}{2} [\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}] \Phi + \frac{\delta V}{\delta \Phi} = 0, \quad (2.43)$$

где квадратные скобки означают коммутатор. Проектируя (2.43) на оси $1, \bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}\theta$, получаем уравнения движения

$$\dot{\eta} - \nabla^2 \eta = -\frac{\partial V}{\partial \eta} + \varphi, \quad (2.44)$$

$$\dot{\phi} + \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \varphi - \frac{\partial^3 V}{\partial \eta^3} \bar{\psi}\psi, \quad (2.45)$$

$$\dot{\psi} - \nabla^2 \psi = -\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \psi, \quad (2.46)$$

$$-\dot{\bar{\psi}} - \nabla^2 \bar{\psi} = -\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \bar{\psi}, \quad (2.47)$$

определяющие наиболее вероятные реализации полей $\eta \equiv x^{(\max)}$, $\varphi \equiv p^{(\max)}$, $\psi^{(\max)}$, $\bar{\psi}^{(\max)}$ (для двух последних индексы (max) для краткости опускаем). При $\psi = \bar{\psi} = 0$ найденные уравнения сводятся к соответствующим равенствам (2.21), (2.22) для дуальных полей. Комбинируя пару уравнений (2.46), (2.47), получаем закон сохранения $\bar{S} + \nabla \mathbf{j} = 0$ для величин

$$S = \bar{\psi}\psi, \quad \mathbf{j} = (\nabla \bar{\psi})\psi - \bar{\psi}(\nabla \psi). \quad (2.48)$$

В случае неоднородных термодинамических систем величина S играет роль плотности межфазных границ, а \mathbf{j} — соответствующий поток [58]. Таким образом, в теории полимеров четырехкомпонентное поле соответствует пределу сильной сегрегации, использованному в [65]. Для самоорганизующихся систем величина S представляет энтропию, а \mathbf{j} — поток вероятности [49]. При переходе к термодинамическим системам, где энтропия сохраняется, грассмановы поля $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t) = \text{const}$ можно опустить, и четырехкомпонентное суперсимметричное поле (2.39) сводится к двухкомпонентной дуальной форме (2.11).

Для выполнения указанной редукции запишем кинетическую энергию суперлагранжиана (2.40) в виде

$$-\frac{1}{4} \Phi_\varphi [\bar{\mathcal{D}}_\varphi, \mathcal{D}_\varphi] \Phi_\varphi,$$

где с точностью до замены $p \rightarrow \varphi$ величины Φ_φ , \mathcal{D}_φ определяются равенствами (2.39), (2.42), а коммутатор имеет вид

$$-\frac{1}{2} [\bar{\mathcal{D}}_\varphi, \mathcal{D}_\varphi] = -\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \bar{\theta}} + \left(1 - 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.49)$$

Очевидно, это выражение сводится к дуальной форме (2.14), если положить $\vartheta \equiv \bar{\theta}\theta$. При этом антикоммутирующие грассмановы переменные θ , $\bar{\theta}$ трансформируются в самосопряженную коммутирующую величину ϑ .

Подобно разделам 2.2.1, 2.2.2 можно показать, что использование связи (2.24) позволяет перейти от амплитуды флуктуаций p к сопряженной силе f . При этом первая скобка в лагранжиане (2.38) принимает форму (2.25), а вместо системы (2.44)–(2.47) получаем уравнение (ср. с (2.27))

$$\dot{\eta} = -\frac{\delta^2 V}{\delta \eta^2} f - \frac{\delta^3 V}{\delta \eta^3} \bar{\psi}\psi, \quad (2.50)$$

дополненное определением (2.28) и уравнениями (2.46), (2.47) для грассмановых полей $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$. По аналогии с рассмотренным выше случаем дуальных полей уравнение движения (2.50) может быть найдено дифференцированием по времени равенства (2.44), если учесть формулы (2.29), (2.45). Соответствующий лагранжиан $\mathcal{L}(x, f, \psi, \bar{\psi})$ принимает суперсимметричную форму (ср. с выражением (2.40))

$$\mathcal{L} = \int A d^2\theta, \quad A(\Phi_f) \equiv -\frac{1}{2} \Phi_f \bar{\mathcal{D}}_f \mathcal{D}_f \Phi_f + V(\Phi_f), \quad (2.51)$$

если ввести суперполе (ср. с определением (2.30))

$$\Phi_f = x + \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta - \bar{\theta}\theta f; \quad (2.52)$$

$$\bar{\Phi}_f = \Phi_p - \bar{\theta}\theta\bar{\Phi}_f = T_- \Phi_p,$$

$$T_{\pm} \equiv \exp(\pm\bar{\theta}\theta\partial_t), \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}.$$

Грассманово сопряженные операторы $\mathcal{D}_f, \bar{\mathcal{D}}_f$ имеют вид (ср. с (2.42))

$$\mathcal{D}_f = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \theta \frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{\mathcal{D}}_f = \frac{\partial}{\partial\theta} - \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.53)$$

Легко показать, что суперполя (2.39), (2.52) трансформируются друг в друга подобно равенствам (2.32)–(2.34), если операторы перехода $\tau_{\pm} = \exp(\pm\vartheta\partial_t)$ заменить на $T_{\pm} \equiv \exp(\pm\bar{\theta}\theta\partial_t)$. С другой стороны, по аналогии с (2.35) пары сопряженных супероператоров (2.42), (2.53) связаны преобразованием

$$\mathcal{D}_f = T_- \mathcal{D}_\varphi T_+, \quad \bar{\mathcal{D}}_f = T_- \bar{\mathcal{D}}_\varphi T_+. \quad (2.54)$$

Согласно (2.53) для произведения операторов в ядре суперсимметричного лагранжиана (2.51) имеем (ср. с (2.49))

$$-\bar{\mathcal{D}}_f \mathcal{D}_f = -\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \bar{\theta}\theta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \left(\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.55)$$

Это выражение сводится к оператору (2.31), если принять $\bar{\theta}\theta \equiv \vartheta$ и учесть, что $\bar{\theta}(\partial/\partial\bar{\theta}) = \theta(\partial/\partial\theta)$.

Таким образом, четырехкомпонентные грассмановы поля (2.39), (2.52) сводятся к двухкомпонентным формам (2.11), (2.30). Соответственно суперсимметричные генераторы (2.42), (2.53) переходят в выражения (2.14), (2.31).

Указанная редукция суперполей может быть получена исходя из калибровочных условий

$$\mathcal{D}\Phi = 0, \quad \bar{\mathcal{D}}\bar{\Phi} = 0. \quad (2.56)$$

Действительно, в соответствии с определениями (2.39), (2.42), (2.52), (2.53) равенства (2.56) дают связь

$$\bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta - 2\bar{\theta}\theta f = 0, \quad (2.57)$$

которая, с учетом тождества $\vartheta \equiv \bar{\theta}\theta$, сводит суперсимметричное поле (2.52) к форме (2.30) с обратным знаком перед f .

Несмотря на одинаковое число компонент, введенные выше дуальные поля (2.11), (2.30) имеют физический смысл, отличный от грассманово сопряженной пары киральных полей (6.26), являющихся результатом суперсимметричной калибровочной инвариантности (см. приложение Б). Основное отличие состоит в том, что дуальные поля ϕ_p, ϕ_f состоят из пар бозе-компонент x, p и x, f , тогда как киральные суперполя ϕ_+, ϕ_- являются комбинациями бозе-компоненты x и фермиевских компонент $\psi, \bar{\psi}$. Это различие обусловлено тем, что при выделении киральных суперполей условие суперсимметричной калибровочной инвариантности (6.24) накладывается не на исходное суперсимметричное поле Φ , удовлетворяющее равенствам (2.56), а на компоненты Φ_{\pm} , которые получаются из Φ под действием операторов $T_{\pm} = \exp(\pm\bar{\theta}\theta\partial_t)$ (см. равенство (6.18)).

Для визуального представления разницы между дуальными полями (2.11), (2.30) и киральным (6.26) рассмотрим суперсимметричное поле (2.52) как вектор в четырехмерном пространстве с осями $\theta^0 = \bar{\theta}^0 \equiv 1, \bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}\theta \equiv \vartheta$. Тогда калибровка (2.56) сводит поле (2.52) к вектору (2.30), расположенному в плоскости, образованной осями $1, \vartheta$. Соответственно калибровка (6.24) приводит к разбиению полного суперсимметричного пространства на два ортогональных подпространства, первое из которых образовано осями $1, \theta$ и содержит вектор ϕ_- , а второе — осями $1, \bar{\theta}$ и содержит вектор ϕ_+ . Так как эти подпространства являются грассманово сопряженными ($\phi_- = \phi_+$), достаточно использовать одно из них, рассматривая либо вектор ϕ_- , либо ϕ_+ (см. приложение Б). Такая программа была реализована в работе [66], где ранее использованное дуальное поле (2.30) получено проектированием киральных векторов ϕ_{\pm} на плоскость, образованную осями $1, \vartheta$. Отсюда следует, что наш подход, основанный на использовании дуальных полей (2.11), (2.30), и теория [66] являются эквивалентными. Суперсимметричный метод [67] основывается на введении несопряженных киральных полей $\phi_x = x + \bar{\theta}\psi, \phi_p = p - i\bar{\psi}\theta$ (ср. с (6.26)), которые в качестве бозевской компоненты используют как амплитуду гидродинамической моды x , так и амплитуду флуктуаций p .

Согласно изложенному операторы T_{\pm} , сдвигающие время t на грассманову величину $\pm\bar{\theta}\theta$, преобразуют друг в друга суперсимметричные поля (2.39), (2.52) и отвечающие им генераторы (2.42), (2.53). Характерно, что только последние из этих генераторов являются грассманово сопряженными. Такая симметрия обусловлена тем, что лишь при использовании сопряженной силы f соответствующее уравнение движения (2.50) инвариантно относительно обращения времени, тогда как уравнения (2.44), (2.45), содержащие амплитуду флуктуаций φ , неинвариантны. Однако кроме отвечающего $\varphi \equiv p^{(\max)}$ суперполя $\Phi_p \equiv \Phi_+$, появляющегося под действием оператора T_+ на Φ_f , оператор T_- , сдвигающий время в противоположную сторону, генерирует еще одно суперполе Φ_- . В соответствии с равенствами (6.22), (2.24) поля $\Phi_{\pm} \equiv \Phi_p(\pm t)$ отвечают обратным направлениям времени.

Легко видеть, что действие операторов T_{\pm} оставляет инвариантными уравнения (2.46), (2.47) для грассманово сопряженных компонент $\psi(\mathbf{r}, t), \bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$. Для нарушения такой инвариантности введем операторы

$$\tilde{T}_{\pm} = \exp[\varepsilon(\delta_{\pm}\bar{\theta}\psi + \delta_{\mp}\bar{\psi}\theta)], \quad (2.58)$$

где параметр $\varepsilon \rightarrow 0$; $\delta_+ = 1, \delta_- = 0$ для положительного направления времени и $\delta_+ = 0, \delta_- = 1$ в обратном случае. Уравнение Эйлера (2.43) для преобразованного суперполя $\tilde{\Phi}_{\pm} \equiv \tilde{T}_{\pm}\Phi_p$ сводится к компонентам

$$\dot{\eta} - \nabla^2 \eta = -\frac{\partial V}{\partial \eta} + \varphi - \varepsilon \bar{\psi}\psi, \quad (2.59)$$

$$\dot{\varphi} + \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \varphi - \frac{\partial^3 V}{\partial \eta^3} \bar{\psi}\psi + \varepsilon \bar{\psi}\dot{\psi}, \quad (2.60)$$

$$\dot{\psi} - \nabla^2 \psi = -\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \psi - \varepsilon \left\{ \delta_- \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} \right) \eta + \delta_+ \left[(\dot{\eta} - \varphi) + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \eta \right] \right\} \psi, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}} + \nabla^2 \bar{\psi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \bar{\psi} - \varepsilon \left\{ \delta_+ \left(\frac{\dot{\bar{\psi}}}{\bar{\psi}} \right) \eta - \right. \\ \left. - \delta_- \left[(\dot{\eta} - \varphi) + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \eta \right] \right\} \bar{\psi}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

где удержаны слагаемые первого порядка по ε . В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ эти уравнения переходят в (2.44)–(2.47). Комбинируя равенства (2.61), (2.62) с $\varepsilon \neq 0$, для энтропии (2.48) получаем

$$\dot{S} + \nabla \mathbf{j} = \mp \varepsilon F S, \quad F \equiv -\frac{\partial V}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \eta, \quad (2.63)$$

где верхний знак соответствует положительному направлению времени, нижний — отрицательному. Для замкнутой системы ($\nabla \mathbf{j} = 0$) энтропия S не должна спадать, и положительная стрела времени реализуется только при отрицательных значениях эффективной силы $F \equiv -\partial V/\partial \eta + 2(\partial^2 V/\partial \eta^2)\eta$. Поскольку для рассматриваемой системы данная сила является внутренней, то это означает, что соответствующая сила $F_{\text{ext}} \equiv -F$ (противо)действия термостата будет положительной.

Таким образом, положительное направление времени реализуется, если эффективный потенциал $V(\eta)$ нарастает с величиной параметра порядка и является выпуклым. Вблизи положения равновесия, где $\partial V/\partial \eta = 0$, $\eta \ll 1$ и $F \simeq 2(\partial^2 V/\partial \eta^2)\eta$, такая ситуация требует неустойчивости системы ($\partial^2 V/\partial \eta^2 < 0$). В вырожденном случае $\partial V/\partial \eta = 0$, $\partial^2 V/\partial \eta^2 = 0$ эффективная сила $F = 0$, и при выводе уравнения типа (2.63) следует учитывать слагаемые более высокого порядка по ε .

2.4. Суперсимметричная корреляционная техника

Изложенная суперполевая схема позволяет провести самосогласованное рассмотрение эффектов памяти и потери эргодичности с помощью корреляторов суперполей (2.39), (2.52). Далее будет показано, что наиболее простой случай отвечает использованию двухкомпонентного поля (2.11).

Задача состоит в определении суперсимметричного коррелятора

$$C(z, z') = \langle \Phi(z) \Phi(z') \rangle, \quad z \equiv \{\mathbf{r}, t, \bar{\theta}, \theta\}, \quad (2.64)$$

представляющего среднее по распределению (2.23). Найдем сначала затравочный суперкоррелятор $C^{(0)}(z, z')$, отвечающий гармоническому потенциалу $V_0 = (1/2)\Phi^2$. В этом случае суперсимметричное уравнение движения (2.43) дает

$$L_{\mathbf{k}\omega}(\theta) C_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}(\theta, \theta') = \delta(\theta, \theta'), \quad L \equiv 1 - \frac{1}{2} [\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}], \quad (2.65)$$

где введена грассманова δ -функция

$$\delta(\theta, \theta') = (\bar{\theta} - \bar{\theta}')(\theta - \theta') \quad (2.66)$$

и проведено пространственно-временное фурье-преобразование (ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор). В общем виде решение уравнения (2.65) записывается следующим образом:

$$C^{(0)}(\theta, \theta') = \frac{1 + (1/2)[\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}]}{1 - (1/4)[\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}]^2} \delta(\theta, \theta'), \quad (2.67)$$

где для краткости опущены индексы ω, \mathbf{k} . С учетом определений (2.42), (2.66) и равенства $[\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}]^2 = -4\omega^2$, следующего из (6.11), затравочный суперкоррелятор, отвечающий суперполю (2.39), принимает вид

$$C_\varphi^{(0)}(\theta, \theta') = \frac{1 + (1 - i\omega)(\bar{\theta} - \bar{\theta}')\theta - (1 + i\omega)(\bar{\theta} - \bar{\theta}')\theta'}{1 + \omega^2}. \quad (2.68)$$

Согласно (2.54) при переходе к суперполю (2.52) числитель приобретает слагаемое $i\omega(\bar{\theta}\theta - \bar{\theta}'\theta')$.

Учитывая грассманову структуру выражения (2.68), далее удобно ввести базисные векторы

$$\begin{aligned} T(\theta, \theta') = 1, \quad B_0(\theta, \theta') = \bar{\theta}\theta, \quad B_1(\theta, \theta') = \bar{\theta}'\theta', \\ F_0(\theta, \theta') = -\bar{\theta}'\theta, \quad F_1(\theta, \theta') = -\bar{\theta}\theta'. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Определим функциональное произведение произвольных векторов $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ равенством

$$X(\theta, \theta') = \int Y(\theta, \theta'') Z(\theta'', \theta') d^2\theta''. \quad (2.70)$$

Тогда базисные компоненты (2.69) подчиняются таблице умножения (табл. 1).

Таблица 1

$\begin{matrix} r \\ l \end{matrix}$	\mathbf{T}	\mathbf{B}_0	\mathbf{B}_1	\mathbf{F}_0	\mathbf{F}_1
\mathbf{T}	0	\mathbf{T}	0	0	0
\mathbf{B}_0	0	\mathbf{B}_0	0	0	0
\mathbf{B}_1	\mathbf{T}	0	\mathbf{B}_1	0	0
\mathbf{F}_0	0	0	0	\mathbf{F}_0	0
\mathbf{F}_1	0	0	0	0	\mathbf{F}_1

Таким образом, векторы $\mathbf{T}, \mathbf{B}_{0,1}, \mathbf{F}_{0,1}$ образуют замкнутый базис, по которому удобно разложить основные суперкорреляторы. Согласно (6.33), (6.36), (2.69) эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned} C_\varphi = S\mathbf{T} + G_+(\mathbf{B}_0 + \mathbf{F}_0) + G_-(\mathbf{B}_1 + \mathbf{F}_1), \\ C_f = S\mathbf{T} + m_+\mathbf{B}_0 + m_-\mathbf{B}_1 + G_+\mathbf{F}_0 + G_-\mathbf{F}_1. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Здесь в согласии с тождеством Уорда (6.32), где используется первый из генераторов (6.31), пропадает слагаемое, пропорциональное $\bar{\theta}\theta\bar{\theta}'\theta'$. С формальной точки зрения выражения (2.71) подобны разложению вектора по декартовым координатам с тем отличием, что суперсимметричные компоненты (2.69) не ортогональны.

Подставляя формулы суперполей (2.39), (2.52) в определение (2.64), для коэффициентов разложений (2.71) получаем (ср. с (6.34), (6.37))

$$\begin{aligned} S = \langle |x|^2 \rangle, \quad m_+ = \langle x^* \rangle f_{\text{ext}}, \quad m_- = \langle x \rangle f_{\text{ext}}^*, \quad f_{\text{ext}} \equiv -f, \\ G_+ = \langle p x^* \rangle = \langle \bar{\psi} \psi^* \rangle, \quad G_- = \langle x p^* \rangle = \langle \bar{\psi}^* \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Отсюда видно, что величина S представляет автокоррелятор амплитуды гидродинамической моды x ; величины m_\mp , удовлетворяющие условию $m_+^* = m_-$, сводятся к стандартному определению $\eta \equiv \langle x \rangle$ параметра порядка, отвечающего внешней силе $f_{\text{ext}} \equiv -f$. Запоздывающая и опережающая функции Грина G_\mp дают отклик ампли-

туды гидродинамической моды x на амплитуду флуктуаций p , и наоборот (кроме того, согласно тождеству Уорда функции G_{\pm} определяют коррелятор грассмановых полей $\bar{\psi}, \psi$). Сравнение равенств (2.68), (2.71) приводит к затравочным корреляторам

$$S^{(0)} = m_{\pm}^{(0)} = (1 + \omega^2)^{-1}, \quad G_{\pm}^{(0)} = (1 \pm i\omega)^{-1}. \quad (2.73)$$

Как известно [68], фурье-образы $G_{\mp}(\omega)$ запаздывающей и опережающей функций Грина являются аналитическими в верхней и нижней полуплоскостях комплексной частоты ω с разрезом вдоль реальной оси ω' ; вдоль самой оси ω' имеется скачок $G_{-}(\omega') - G_{+}(\omega') = = 4i \operatorname{Im} G_{-}(\omega')$.

Это приводит к соотношениям (6.35), (6.38), выражающим флуктуационно-диссипационную теорему:

$$G_{\pm}(\omega) = m_{\pm}(\omega) \mp i\omega S(\omega), \quad S(\omega') = \frac{2}{\omega'} \operatorname{Im} G_{-}(\omega'), \quad (2.74)$$

где частота ω' является чисто вещественной. Интегрируя последнее выражение (2.74), с учетом спектрального представления

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} C(\omega')}{\omega' - \omega} \frac{d\omega'}{\pi} \quad (2.75)$$

находим

$$S(t = 0) = G_{\pm}(\omega = 0) \equiv \chi, \quad (2.76)$$

где последнее равенство является определением восприимчивости χ .

Разложения (2.71) позволяют рассматривать суперкоррелятор (2.64) как вектор в пространстве, образованном прямым произведением суперполей (2.39) или (2.52). Согласно (2.71) при использовании представления (2.39) происходит попарное объединение базисных векторов:

$$\mathbf{B}_0 + \mathbf{F}_0 \equiv \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_1 + \mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{B}. \quad (2.77)$$

Оно позволяет сократить их число до набора $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{T}$, который подчиняется таблице умножения (табл. 2; ср. с

Таблица 2

$\begin{matrix} r \\ l \end{matrix}$	\mathbf{T}	\mathbf{A}	\mathbf{B}
\mathbf{T}	0	\mathbf{T}	0
\mathbf{A}	0	\mathbf{A}	0
\mathbf{B}	\mathbf{T}	0	\mathbf{B}

табл. 1). В результате первое из разложений (2.71) принимает простейший вид

$$\mathbf{C}_{\varphi} = G_{+}\mathbf{A} + G_{-}\mathbf{B} + S\mathbf{T}. \quad (2.78)$$

Характерно, что оно содержит только опережающую и запаздывающую функции Грина G_{\pm} и структурный фактор S .

Нетрудно видеть, что данное разложение может быть получено, если изначально использовать дуальное поле (2.11). Действительно, сравнение уравнений движения (2.19), (2.43) показывает, что при этом коммутатор $-(1/2)[\bar{D}, D]$ в выражении (2.67) переходит в генератор (2.14). Тогда, учитывая определение нильпотентной

δ -функции $\delta(\vartheta - \vartheta') = \vartheta + \vartheta'$, вместо (2.68) получаем

$$C^{(0)}(\vartheta, \vartheta') = \frac{1 + (1 - i\omega)\vartheta + (1 + i\omega)\vartheta'}{1 + \omega^2}. \quad (2.79)$$

Легко видеть, что определения (ср. с (2.69))

$$T(\vartheta, \vartheta') = 1, \quad A(\vartheta, \vartheta') = \vartheta, \quad B(\vartheta, \vartheta') = \vartheta' \quad (2.80)$$

приводят к разложению (2.78). Таким образом, использование двухкомпонентного поля (2.11) дает те же результаты, что и суперполе (2.39). В частности, определения

$$\int C(\vartheta, \vartheta'') C^{-1}(\vartheta'', \vartheta') d^2\vartheta'' = \delta(\vartheta, \vartheta'),$$

$$\delta(\vartheta - \vartheta') = \vartheta + \vartheta',$$

$$\mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (2.81)$$

дают выражение для обращенного суперсимметричного коррелятора (2.78):

$$\mathbf{C}^{-1} = G_{+}^{-1}\mathbf{A} + G_{-}^{-1}\mathbf{B} - G_{+}^{-1}S G_{-}^{-1}\mathbf{T}. \quad (2.82)$$

Отметим в заключение, что согласно определениям (2.77), (2.69) при $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \equiv 0$ выполняется условие $\theta = \theta'$, и разложение (2.78) сводится к обычной (не грассмановой) величине: $C(\theta, \theta) = C(\vartheta, \vartheta) = S$. Отсюда немедленно следуют важные равенства

$$\int C(z, z) dz = \int S(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt d^2\theta = 0, \quad (2.83)$$

$$\int C(\zeta, \zeta) d\zeta = \int S(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt d\vartheta = 0,$$

где обозначено $z \equiv \{\mathbf{r}, t, \bar{\theta}, \theta\}$, $\zeta \equiv \{\mathbf{r}, t, \vartheta\}$. Далее будет показано, что условия (2.83) означают нулевой вклад кольцевых диаграмм теории возмущений, что отвечает репличному пределу $n \rightarrow 0$ [59].

2.5. Суперсимметричная теория возмущений

Будем исходить из определения

$$C(\zeta, \zeta') = \left. \frac{\delta^2 Z\{u(\zeta)\}}{\delta u(\zeta)\delta u(\zeta')} \right|_{u=0}, \quad (2.84)$$

где генерирующий функционал (2.6) удобно представить в виде среднего

$$Z\{u\} = \left\langle \exp\left(\int \phi u d\zeta\right) \right\rangle \quad (2.85)$$

по распределению (ср. с (2.23))

$$P\{\phi\} = Z^{-1} \exp(-S\{\phi\}), \quad S\{\phi\} = \int \lambda(\phi) d\zeta, \quad (2.86)$$

задаваемому лагранжианом λ в (2.16). В нулевом (гармоническом) приближении действие имеет вид квадратичной формы

$$S_0 = \frac{1}{2} \int \phi L \phi d\zeta, \quad L \equiv 1 + D, \quad (2.87)$$

где генератор D определяется равенством (2.14). Соответствующее распределение представляет суперсимметричный гауссиан (ср. с (2.5))

$$P_0\{\phi\} = \left(\frac{\det |L|}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int \phi L \phi d\zeta\right\}. \quad (2.88)$$

Отсюда для затравочного суперкоррелятора получаем выражение

$$C^{(0)}(\zeta, \zeta') = L^{-1} \delta(\zeta, \zeta'), \quad \delta(\vartheta, \vartheta') \equiv \vartheta + \vartheta', \quad (2.89)$$

сводящееся к (2.67), если в согласии с (2.87), (2.14) заменить $-(1/2)[\overline{D}, D]$ на D . Линейный оператор $L \equiv (C^{(0)})^{-1}$, разложенный по базису (2.80), с учетом (2.82) записывается в виде

$$L = L_+ A + L_- B + L T, \\ L_{\pm} = 1 \pm i\omega, \quad L = -1. \quad (2.90)$$

Для выхода за рамки нулевого приближения выделим в экспоненте распределения (2.86) слагаемое $S_1\{\phi\}$, обусловленное самодействием (ангармонизмом), и проведем разложение в степенной ряд. Тогда определение (2.84) дает

$$C(\zeta, \zeta') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle \phi(\zeta) (S_1\{\phi\})^n \phi(\zeta') \rangle_0, \quad (2.91)$$

где в отличие от (2.85) усреднение берется по затравочному распределению (2.88). Далее в соответствии с теоремой Вика следует провести расщепление выражения (2.91), которое в n -м порядке теории возмущений дает

$$C^{(n)}(\zeta, \zeta') = \iint C^{(0)}(\zeta, \zeta_1) \Sigma^{(n)}(\zeta_1, \zeta_2) C^{(0)}(\zeta_2, \zeta') d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (2.92)$$

Здесь введена суперсимметричная собственнно-энергетическая функция n -го порядка $\Sigma^{(n)}(\zeta_1, \zeta_2)$, подлежащая определению. Результат существенным образом зависит от формы потенциала самодействия. Рассмотрим наиболее популярные модели.

2.5.1. ϕ^4 -модель. Здесь потенциал самодействия имеет вид

$$V_1(\zeta) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\zeta), \quad \zeta \equiv \{\mathbf{r}, t, \vartheta\}, \quad (2.93)$$

где константа ангармонизма $\lambda > 0$. В двух первых порядках разложение (2.91) дает

$$C^{(1)}(\zeta, \zeta') = -\frac{\lambda}{4!} \int \langle \phi(\zeta) (\phi(\zeta_1))^4 \phi(\zeta') \rangle_0 d\zeta_1, \quad (2.94)$$

$$C^{(2)}(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2!} \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \times \\ \times \iint \langle \phi(\zeta) (\phi(\zeta_1))^4 (\phi(\zeta_2))^4 \phi(\zeta') \rangle_0 d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (2.95)$$

В выражении (2.94) число возможных спариваний, возникающих при расщеплении, равно 12, и формула (2.94)

принимает вид

$$C^{(1)}(\zeta, \zeta') = -\frac{\lambda}{2} \int C^{(0)}(\zeta, \zeta_1) C^{(0)}(\zeta_1, \zeta_1) C^{(0)}(\zeta_1, \zeta') d\zeta_1 \equiv 0, \quad (2.96)$$

где учтены равенства (2.64), (2.83). Во втором порядке число спариваний составляет 192, и использование теоремы Вика в выражении (2.95) приводит к результату

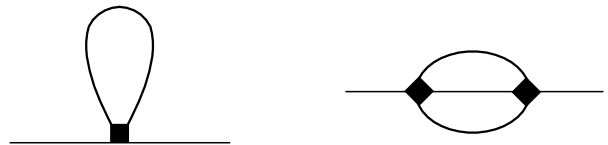
$$C^{(2)}(\zeta, \zeta') = \frac{\lambda^2}{6} \iint C^{(0)}(\zeta, \zeta_1) (C^{(0)}(\zeta_1, \zeta_2))^3 C^{(0)}(\zeta_2, \zeta') d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (2.97)$$

Согласно определению (2.92) выражения (2.96), (2.97) дают суперсимметричную собственнно-энергетическую функцию

$$\Sigma(\zeta, \zeta') = \frac{\lambda^2}{6} (C(\zeta, \zeta'))^3. \quad (2.98)$$

Здесь в духе обычной диаграммной идеологии мы перешли к точным суперсимметричным корреляторам.

В диаграммном представлении выражения (2.94), (2.95) принимают вид



Согласно определению (2.83) кольцевая диаграмма обращается в нуль, а вторая дает слагаемое (2.98).

Подобно разложению (2.78) удобно представить суперсимметричную собственнно-энергетическую функцию в виде

$$\Sigma = \Sigma_+ A + \Sigma_- B + \Sigma T. \quad (2.99)$$

При определении коэффициентов Σ_{\pm} , Σ следует учитывать, что правила умножения в выражении (2.98) отличаются от приведенных в табл. 2. Это обусловлено тем, что в равенстве (2.98) должно использоваться не функциональное, а обычное произведение дуальных полей [59]. Соответствующая таблица умножения имеет вид

Таблица 3

	$T(\vartheta, \vartheta')$	$A(\vartheta, \vartheta')$	$B(\vartheta, \vartheta')$
$T(\vartheta, \vartheta')$	$T(\vartheta, \vartheta')$	$A(\vartheta, \vartheta')$	$B(\vartheta, \vartheta')$
$A(\vartheta, \vartheta')$	$A(\vartheta, \vartheta')$	0	0
$B(\vartheta, \vartheta')$	$B(\vartheta, \vartheta')$	0	0

В результате для компонент разложения (2.99) получаем

$$\Sigma(t) = \frac{\lambda^2}{6} S^3(t), \quad (2.100)$$

$$\Sigma_{\pm}(t) = \frac{\lambda^2}{2} S^2(t) G_{\pm}(t). \quad (2.101)$$

В дальнейшем нам потребуется частотное представление, в котором формулы (2.100), (2.101) принимают вид

$$\Sigma(\omega) = \frac{\lambda^2}{6} \int S(\omega - \omega_1 - \omega_2) S(\omega_1) S(\omega_2) \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2}, \quad (2.102)$$

$$\Sigma_{\pm}(\omega) = \frac{\lambda^2}{2} \int G_{\pm}(\omega - \omega_1 - \omega_2) S(\omega_1) S(\omega_2) \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2}. \quad (2.103)$$

Очевидное неудобство этих выражений состоит в наличии сверток. Эту трудность можно обойти, используя флуктуационно-диссипационную теорему

$$\Sigma(t=0) = \Sigma_{\pm}(\omega=0), \quad (2.104)$$

имеющую вид (2.76). Тогда выражения (2.100), (2.76) дают

$$\Sigma_{\pm}(\omega=0) = \frac{\lambda^2}{6} \chi^3. \quad (2.105)$$

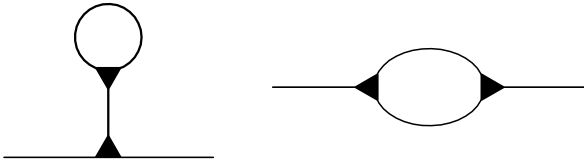
2.5.2. ϕ^3 -модель. В теории полимеров важную роль играет кубический ангармонизм, задаваемый потенциалом

$$V_1(\zeta) = \frac{\mu}{3!} \phi^3(\zeta), \quad \zeta = \{\mathbf{r}, t, \vartheta\}, \quad (2.106)$$

величина которого определяется параметром μ [27]. Первый не исчезающий вклад в суперсимметричный коррелятор (2.92) имеет вид

$$C^{(2)}(\zeta', \zeta') = \frac{1}{2!} \left(-\frac{\mu}{3!}\right)^2 \times \\ \times \iint \langle \phi(\zeta) (\phi(\zeta_1))^3 (\phi(\zeta_2))^3 \phi(\zeta') \rangle_0 d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (2.107)$$

При выполнении расщепления удобно исходить из вида диаграмм второго порядка



Первая из них содержит кольцо и в соответствии с правилом (2.83) дает нулевой вклад, вторая сводится к виду

$$\frac{\mu^2}{2} \iint C^{(0)}(\zeta, \zeta_1) (C^{(0)}(\zeta_1, \zeta_2))^2 C^{(0)}(\zeta_2, \zeta') d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (2.108)$$

В результате определение (2.92) приводит к выражению

$$\Sigma(\zeta, \zeta') = \frac{\mu^2}{2} (C(\zeta, \zeta'))^2, \quad (2.109)$$

где затравочные суперсимметричные корреляторы заменены точными. Используя табл. 3, для коэффициентов разложения (2.99) получаем

$$\Sigma(t) = \frac{\mu^2}{2} S^2(t), \quad (2.110)$$

$$\Sigma_{\pm}(t) = \mu^2 S(t) G_{\pm}(t). \quad (2.111)$$

Совместно с выражениями (2.100), (2.101) полученные формулы определяют суперсимметричную собственно-энергетическую функцию. Подобно (2.105) в ω -представлении получаем

$$\Sigma_{\pm}(\omega=0) = \Sigma(t=0) \equiv \frac{\mu^2}{2} \chi^2. \quad (2.112)$$

Приведем в заключение полные выражения для коэффициентов разложения собственно-энергетической функции (2.99):

$$\Sigma(t) = \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} S(t) \right) S^2(t), \quad (2.113)$$

$$\Sigma_{\pm}(t) = \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} S(t) \right) S(t) G_{\pm}(t), \quad (2.114)$$

$$\Sigma_{\pm}(\omega=0) = \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} \chi \right) \chi^2. \quad (2.115)$$

2.6. Схема самосогласования

Дальнейшая задача состоит в нахождении системы уравнений, которая самосогласованным образом описывает поведение основных корреляторов S , G_{\pm} . В рамках теории среднего поля решение этой задачи достигается за счет того, что из эффективного гамильтониана, учитывающего замороженный беспорядок в разбросе значений межчастичного потенциала и сопряженного поля, выделяется квадратичная составляющая, отвечающая линейному приближению суперсимметричной теории поля (раздел 2.6.1). Непосредственная процедура нахождения самосогласованной системы уравнений основывается на суперсимметричном уравнении Дайсона (раздел 2.6.2).

2.6.1. Эффективный суперсимметричный лагранжиан. В узельном представлении суперсимметричное действие имеет вид

$$S = S_0 + S_1 + S_{\text{int}}; \quad (2.116)$$

$$S_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_l \int \phi_l(t, \vartheta) [1 + D(\vartheta)] \phi_l(t, \vartheta) dt d\vartheta, \quad (2.117)$$

$$S_1 \equiv \sum_l \int V_1(\phi_l(t, \vartheta)) dt d\vartheta, \quad (2.118)$$

$$S_{\text{int}} \equiv \iint \mathcal{V}_{\text{int}} dt dt' d\vartheta d\vartheta'; \quad (2.119)$$

$$\mathcal{V}_{\text{int}} = V_{\text{int}} \{ \phi_l(t, \vartheta), \phi_l(t', \vartheta'), \phi_m(t, \vartheta), \phi_m(t', \vartheta') \} \delta(t - t'), \\ V_{\text{int}} \equiv V + W.$$

Здесь индексы l , m означают номера узлов, а в собственно-энергетической части (2.118) выделено ядро $V_1(\phi_l)$, которое учитывает эффекты самодействия и определяется равенствами (2.93), (2.106). Последнее слагаемое S_{int} включает реальное двухчастичное взаимодействие V и эффективное взаимодействие W , представляющее замороженный беспорядок. В случае притяжения для первого имеем [69]

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{lm} v_{lm} \phi_m(t, \vartheta) \phi_l(t', \vartheta') \phi_l(t', \vartheta') \phi_m(t, \vartheta) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{lm} v_{lm} \phi_l(t, \vartheta) \phi_l(t', \vartheta') \phi_m(t, \vartheta) \phi_m(t', \vartheta'). \quad (2.120)$$

В приближении среднего поля

$$V \simeq -\frac{v}{2} C(t, \vartheta; t, \vartheta) \sum_I \phi_I(t', \vartheta') \phi_I(t', \vartheta') - \\ -\frac{v}{2} C(t, \vartheta; t', \vartheta') \sum_I \phi_I(t, \vartheta) \phi_I(t', \vartheta'). \quad (2.121)$$

Здесь и далее $v \equiv \sum_m v_{1m} > 0$ — константа притяжения, $C(t, \vartheta; t', \vartheta') \equiv \langle \phi_m(t, \vartheta) \phi_m(t', \vartheta') \rangle$ — суперсимметричный коррелятор, записанный в узельном представлении. В рамках модели Шеррингтона–Киркпатрика замороженный беспорядок в разбросе значений интеграла межузельного перекрытия сводится к эффективному притяжению [44]

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{lm} w_{lm} \phi_l(t, \vartheta) \phi_l(t', \vartheta') \phi_m(t, \vartheta) \phi_m(t', \vartheta'). \quad (2.122)$$

Отсюда подобно (2.121) следует

$$W \simeq -\frac{w}{2} C(t, \vartheta; t', \vartheta') \sum_I \phi_I(t, \vartheta) \phi_I(t', \vartheta'), \\ w \equiv \sum_m w_{1m} > 0. \quad (2.123)$$

Таким образом, если реальное взаимодействие (2.121) содержит диагональные и недиагональные суперкорреляторы, то замороженный беспорядок приводит только к недиагональной составляющей (2.123). В рамках репличного подхода указанная суперсимметричная структура отвечает межрепличному перекрытию, ответственному за спин-стекольное поведение [16].

При определении действия неравновесной системы следует иметь в виду, что кроме вклада (2.119), приводящего к эффективному потенциалу взаимодействия (2.122), возможен замороженный беспорядок в разбросе значений силы, сопряженной параметру порядка. Это приводит к дополнительному вкладу в суперсимметричное действие [44]

$$\Delta S_0 = \frac{h^2}{2} \sum_I \int \phi_{I\omega}(\vartheta) \delta(\omega) \phi_{I\omega}(\vartheta) d\omega d\vartheta, \quad (2.124)$$

где ω — частота, а интенсивность замороженного беспорядка определяется выражением

$$h^2 \equiv \frac{\overline{(f_l - \bar{f})^2} - (\Delta\varphi)^2}{(\Delta\varphi)^2}. \quad (2.125)$$

Здесь черта означает усреднение по объему, f_l — величина силы в узле l , $(\Delta\varphi)^2 \equiv \varphi_{\omega=0}^2$ — среднеквадратичная флуктуация этой силы.

Окончательное выражение для суперсимметричного действия в узельно-частотном представлении принимает вид

$$S = \sum_I \int \lambda_{I\omega}(\vartheta) \frac{d\omega}{2\pi} d\vartheta + \sum_I \int \lambda_{I\omega}(\vartheta, \vartheta') \frac{d\omega}{2\pi} d\vartheta d\vartheta', \quad (2.126)$$

где диагональный и недиагональный лагранжианы выражаются равенствами

$$\lambda(\vartheta) \equiv \frac{1}{2} \phi(\vartheta) \{ [1 + D(\vartheta)] + 2\pi h^2 \delta(\omega) - vS \} \phi(\vartheta) + V_1(\phi(\vartheta)), \quad (2.127)$$

$$\lambda(\vartheta, \vartheta') \equiv -\frac{1}{2} (v + w) \phi(\vartheta) C(\vartheta, \vartheta') \phi(\vartheta'), \quad (2.128)$$

в которых индексы l, ω для краткости опущены, а генератор D дается выражением (2.14).

В случае неупорядоченного гетерополимера потенциалы взаимодействия сохраняют вид (2.120), (2.122), однако индексы l, m приобретают смысл волновых векторов. Для перехода к волновому представлению в выражениях (2.126)–(2.128) достаточно произвести замену индексов на волновые векторы \mathbf{l}, \mathbf{m} , а в выражениях (2.121), (2.123), (2.127), (2.128) заменить константы v, w потенциалами $v \equiv \sum_{\mathbf{m}} v_{1\mathbf{m}}, w \equiv \sum_{\mathbf{m}} w_{1\mathbf{m}}$.

2.6.2. Суперсимметричное уравнение Дайсона. Суперсимметричному эффективному лагранжиану (2.126)–(2.128) отвечает уравнение Дайсона

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{L} - \mathbf{\Sigma} - (v + w)\mathbf{C}. \quad (2.129)$$

Входящие сюда суперкорреляторы представляются разложениями (2.78), (2.99) и (2.90) по суперсимметричному базису (2.80). При этом в согласии с (2.127), (2.128) коэффициент L в разложении (2.90) принимает вид

$$L = L_0 + vS, \quad L_0 = -(1 + 2\pi h^2 \delta(\omega)). \quad (2.130)$$

Раскладывая суперуравнение (2.129) по осям (2.80), находим компоненты уравнения Дайсона в частотном представлении:

$$S = \frac{(\Sigma - L_0)G_+ G_-}{1 - wG_+ G_-}, \quad (2.131)$$

$$G_{\pm}^{-1} + (v + w)G_{\pm} = L_{\pm} - \Sigma_{\pm}. \quad (2.132)$$

Здесь учтено равенство (2.82). Совместно с (2.113)–(2.115) эти уравнения образуют замкнутую систему, определяющую самосогласованное поведение неравновесной стохастической системы.

2.7. Эффекты памяти и неэргодичности

Следуя Эдвардсу и Андерсону [14], введем параметр памяти

$$q = \langle x(t = \infty)x(t = 0) \rangle. \quad (2.133)$$

Его учет приводит к удлинению структурного фактора, взятого во временном представлении:

$$S(t) = q + S_0(t), \quad (2.134)$$

где компонента $S_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Подобным образом при потере эргодичности происходит удлинение запаздывающей функции Грина, записанной в частотном представлении:

$$G_-(\omega) = \Delta + G_{-0}(\omega). \quad (2.135)$$

Параметр неэргодичности (необратимый отклик)

$$\Delta = \chi_0 - \chi \quad (2.136)$$

определяется разницей между адиабатической восприимчивостью Кубо $\chi_0 \equiv G_-(\omega = 0)$ и термодинамической

(изотермической) величиной $\chi \equiv G_{-0}(\omega \rightarrow 0)$. Если первая определяется стандартной формулой $\chi_0 = \delta\eta/(\delta f_{\text{ext}})$, где $\eta \equiv \langle x \rangle$ — параметр порядка, $f_{\text{ext}} \equiv -f$ — внешняя сила, то определение последней требует использования корреляционной техники, изложенной в разделе 2.4.

С этой целью подставим удлиненные корреляторы (2.134), (2.135) в выражения (2.113), (2.114). Тогда перенормированные компоненты собственно-энергетической функции принимают вид

$$\Sigma(t) = \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} q \right) q^2 + \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} q \right) q S_0(t) + \Sigma_0(t), \quad (2.137)$$

$$\Sigma_0(t) \equiv \frac{1}{2} (\mu^2 + \lambda^2 q) S_0^2(t) + \frac{\lambda^2}{6} S_0^3(t);$$

$$\Sigma_{\pm}(t) = \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} q \right) q [A + G_{\pm 0}(t)] + \Sigma_{\pm 0}(t), \quad (2.138)$$

$$\Sigma_{\pm 0}(t) \equiv (\mu^2 + \lambda^2 q) S_0(t) G_{\pm 0}(t) + \frac{\lambda^2}{2} S_0^2(t) G_{\pm 0}(t).$$

Полученные выражения записаны таким образом, что нелинейные относительно корреляторов S_0 , $G_{\pm 0}$ слагаемые собраны в выражениях Σ_0 , $\Sigma_{\pm 0}$, а слагаемые, записанные первыми, в отсутствие памяти ($q = 0$) пропадают. Кроме того, опущены слагаемые, содержащие $S_0 A \simeq 0$.

Подставляя фурье-образы выражений (2.134), (2.137) в уравнение Дайсона (2.131), с учетом (2.130) получаем в ω -представлении

$$q_0 \left[1 - w\chi_0^2 - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} q_0 \right) q_0 \chi_0^2 \right] = h^2 \chi_0^2, \quad (2.139)$$

$$S_0 = \frac{(1 + \Sigma_0) G_+ G_-}{1 - [w + (\mu^2 + \lambda^2 q/2) q] G_+ G_-}. \quad (2.140)$$

Первое из этих равенств соответствует обусловленному наличием памяти δ -образному вкладу при частоте $\omega = 0$ (на это указывает индекс 0), второе отвечает частотам $\omega \neq 0$. В пределе $\omega \rightarrow 0$ характерное произведение $G_+ G_- \rightarrow \chi^2$, и полюс структурного фактора (2.140) определяет точку потери эргодичности:

$$w + \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} q_0 \right) q_0 = \chi_0^{-2}. \quad (2.141)$$

Переходя к ω -представлению в (2.138), из (2.132) получаем уравнение для запаздывающей функции Грина

$$G_-^{-1} + \left[(v + w) + \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} q \right) q \right] G_- + \Sigma_{-0} - (1 - i\omega) = 0. \quad (2.142)$$

С учетом (2.115) отсюда для определения термодинамической восприимчивости $\chi \equiv G_{-}(\omega \rightarrow 0)$ следует

равенство

$$1 - \chi + (v + w)\chi^2 + \frac{\mu^2}{2} \chi [(\chi + q)^2 - q^2] + \frac{\lambda^2}{6} \chi [(\chi + q)^3 - q^3] = 0. \quad (2.143)$$

Параметр памяти q_0 определяется уравнением

$$\left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{\lambda^2}{3} q_0 \right) q_0^2 = h^2, \quad (2.144)$$

следующим из выражений (2.139), (2.141).

2.8. Исследование уравнений

для параметров памяти и неэргодичности

Система уравнений (2.139), (2.143), (2.141), (2.136), (2.144) позволяет провести полное описание неэргодической системы с замороженным беспорядком. Два первых из указанных равенств являются уравнениями Шеррингтона – Киркпатрика для адиабатической χ_0 и изотермической χ восприимчивостей и соответствующих параметров памяти q_0 , q [16]. Уравнение (2.141) задает точку потери эргодичности T_0 , (2.136) — параметр неэргодичности A , а (2.144) — параметр памяти q_0 , обусловленный замороженным беспорядком h . Как уже указывалось, в неэргодическом состоянии необходимо различать макроскопические q_0 , χ_0 и микроскопические q , χ величины (первые соответствуют частоте $\omega = 0$, вторые — пределу $\omega \rightarrow 0$). Особенность такой иерархии состоит в том, что макроскопические величины зависят от амплитуды замороженного беспорядка h , а микроскопические — от температуры T . В связи с этим при определении макроскопических параметров q_0 , χ_0 в неэргодическом состоянии следует фиксировать температуру T значением $T_0(h)$ на кривой потери эргодичности, а для микроскопических величин q , χ должна приниматься равной соответствующему значению $h_0(T)$ амплитуда замороженного беспорядка h .

Таким образом, в эргодическом состоянии, где макроскопические значения совпадают с микроскопическими, система уравнений (2.139), (2.143) оказывается достаточной для определения параметра памяти $q \equiv q_0$ и восприимчивости $\chi \equiv \chi_0$, а добавление равенства (2.141) определяет температуру потери эргодичности $T_0(h)$. При переходе в неэргодическое состояние макроскопические величины q_0 , χ_0 сохраняют значения $q_0(h_0)$, $\chi_0(T_0)$, присущие точке потери эргодичности, а для нахождения микроскопических q , χ остается единственное уравнение (2.143). Его следует дополнить уравнением типа (2.139)

$$q \left[1 - w\chi_0^2 - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} q \right) q \chi_0^2 \right] = h^2 \chi_0^2, \quad (2.145)$$

где параметр памяти q приобретает микроскопический характер. В соответствии с идеей о бесконечной иерархии времен релаксации [45] это уравнение отвечает микроскопическому уровню иерархии, ближайшему к макроскопическому.

В приведенных уравнениях величина h , параметры ангармонизма λ , μ и взаимодействия v , w , а также обратное значение восприимчивости χ^{-1} измерены в единицах температуры T . Перейдем теперь к физиче-

² При определении обеих восприимчивостей χ_0 и χ можно использовать единую функцию отклика $G_{-}(\omega)$, полагая, что величины $\chi_0 \equiv G_{-}(\omega = 0)$ и $\chi \equiv G_{-}(\omega \rightarrow 0)$ отвечают равновесным (макроскопическим) и неравновесным (микроскопическим) состояниям соответственно. Тогда в уравнениях (2.76), (2.113)–(2.115), где корреляторам необходимо приписать индекс 0, следует понимать не точное равенство $\omega = 0$, а предел $\omega \rightarrow 0$ [22].

ским масштабам измерения величин T, h, v, w, χ, q :

$$\begin{aligned} T_s &= \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{\mu^4}{\lambda^3}, & h_s &= \frac{3}{2} \frac{\mu^3}{\lambda^2}, & v_s = w_s &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-1/2} \lambda, \\ \chi_s &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-1/2} \frac{\lambda}{\mu^2}, & q_s &= \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{\lambda^2} \equiv u. \end{aligned} \quad (2.146)$$

В результате основные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} (1 - uT\chi) + (v + w)T\chi^2 + \frac{\chi}{2T} [(T\chi + q)^2 - q^2] + \\ + \frac{\chi}{4T} [(T\chi + q)^3 - q^3] = 0, \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$wT + \frac{q}{2} \left(1 + \frac{q}{2}\right) + \frac{h^2}{q} = \chi_0^{-2}, \quad (2.148)$$

$$wT + \frac{q_0}{2} \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) + \frac{h^2}{q_0} = \chi_0^{-2}, \quad (2.149)$$

$$wT_0 + q_0 \left(1 + \frac{3}{4} q_0\right) = \chi_0^{-2}, \quad (2.150)$$

$$(1 + q_0)q_0^2 = 2h^2, \quad (2.151)$$

$$\Delta = uT(\chi_0 - \chi). \quad (2.152)$$

Характер поведения системы задается параметром u из последнего равенства (2.146). Этот параметр определяет отношение нелинейных членов третьего и четвертого порядков: в случае $u \ll 1$ основной вклад дает биквадратное слагаемое (2.93), а при $u \gg 1$ — кубический ангармонизм (2.106). Первый случай отвечает сильному замороженному беспорядку $h \gg h_s$, второй — слабому ($h \ll h_s$).

Зависимость макроскопического параметра памяти q_0 от амплитуды замороженного беспорядка h опреде-

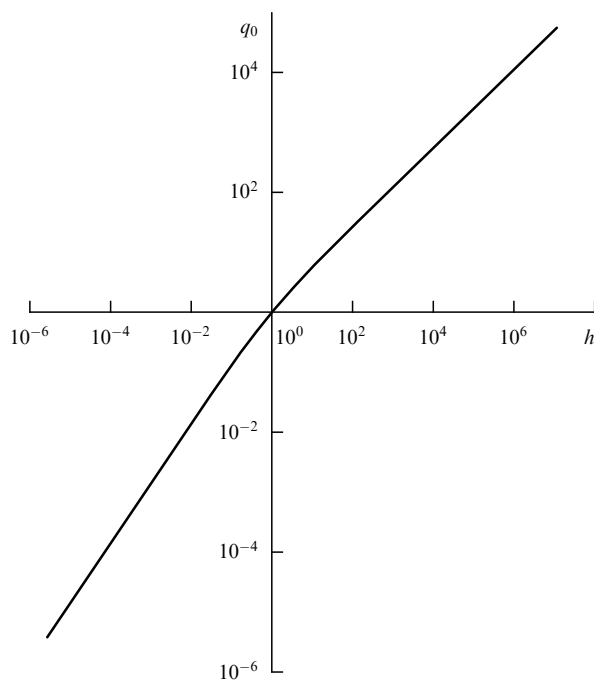


Рис. 1. Зависимость макроскопического параметра памяти q_0 от интенсивности замороженного беспорядка h .

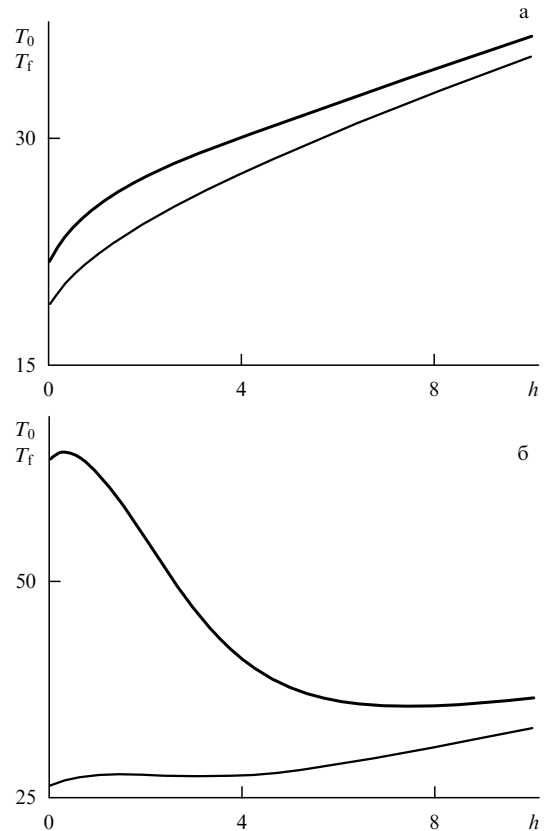


Рис. 2. Зависимость температуры потери эргодичности T_0 (жирные линии) и температуры стеклования T_g (тонкие линии) от интенсивности замороженного беспорядка h ($u = 0,5, v = 0$) при различных значениях эффективного параметра взаимодействия w : $w = 0,5$ (а), $w = 0,2$ (б).

ляется уравнением (2.151). Как видно из рис. 1, линейный участок

$$q_0 = 2^{1/2} \frac{h}{\mu}, \quad u \gg 1, \quad (2.153)$$

реализуемый в пределе $h \ll h_s$, при $h \gg h_s$ трансформируется в степенную зависимость

$$q_0 = 3^{1/3} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{2/3}, \quad u \ll 1. \quad (2.154)$$

Здесь, как и в последующих равенствах (2.155)–(2.157), (2.159)–(2.163), мы используем размерные величины. Совместное решение уравнений (2.147), (2.149), (2.150), где $\chi = \chi_0, q = q_0$, дает температуру $T_0(h)$ потери эргодичности при заданном разбросе поля h . Вид соответствующей фазовой диаграммы, которая при различных значениях параметров взаимодействия w, v определяет область возможных термодинамических состояний на плоскости $h - T$, показан на рис. 2. В отсутствие замороженного беспорядка h в разбросе сопряженного поля значение температуры $T_{00} \equiv T_0(h = 0)$:

$$\begin{aligned} T_{00} &= w \left\{ \left(1 + \frac{v}{2w} + \frac{1}{12} \frac{\lambda^2}{w^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(1 + \frac{v}{2w} + \frac{1}{12} \frac{\lambda^2}{w^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{w^2} \right]^{1/2} \right\}^2, \end{aligned} \quad (2.155)$$

монотонно нарастает с увеличением интенсивности межчастичного взаимодействия v , его дисперсии w , кубического μ и биквадратного λ ангармонизмов. При больших значениях амплитуды замороженного беспорядка h , когда $q_0^2 \gg q_0 \gg wT_0$, изотермическая восприимчивость χ_0 в (2.150) мала, и из уравнений (2.147)–(2.150) следует $\chi_0 \approx 2/(uT_0)$. Тогда в пределе $\mu^2 \gg \lambda^2$ получаем

$$T_0 \approx 2^{5/4} \mu \left(\frac{h}{\mu}\right)^{1/2}, \quad \left(\frac{w}{\mu}\right)^2 \mu \ll h \ll \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \mu, \quad (2.156)$$

а при $\lambda^2 \gg \mu^2$

$$T_0 \approx 2^{1/2} 3^{1/3} \lambda \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{2/3}, \quad h \gg \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \mu, \quad \left(\frac{w}{\lambda}\right)^{3/2} \lambda. \quad (2.157)$$

Как и следовало ожидать, увеличение замороженного беспорядка приводит к бесконечному расширению неэргодической области. Однако в области значений параметра эффективного взаимодействия $w < 0,5$, а также для параметра взаимодействия $v > 1$ зависимость $T_0(h)$ приобретает немонотонный вид (см. рис. 2 и 3).

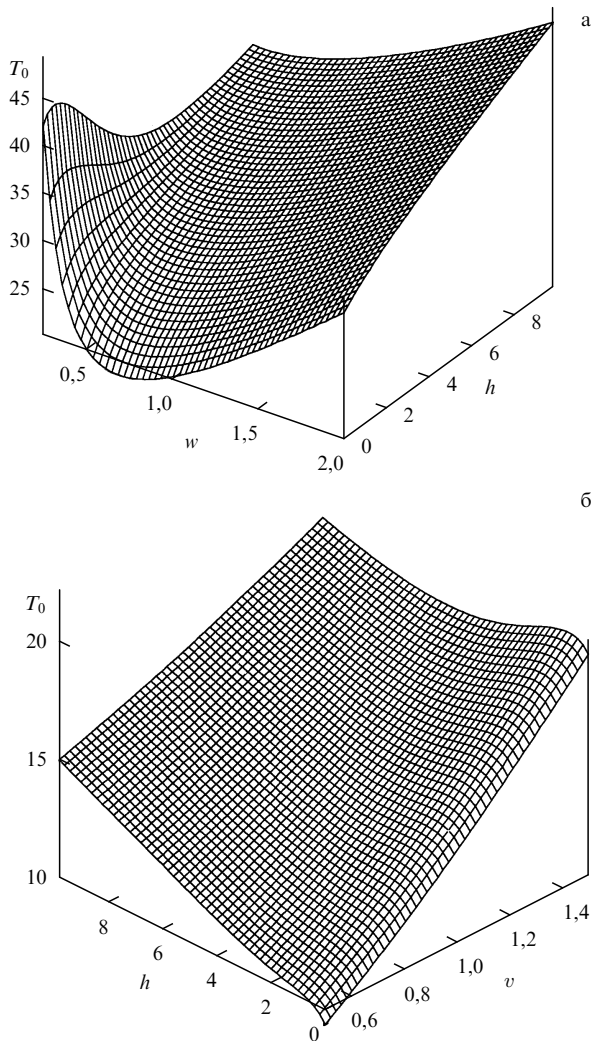


Рис. 3. Зависимость температуры потери эргодичности T_0 от интенсивности замороженного беспорядка h и: (а) параметра эффективного взаимодействия w при $u = 0,5, v = 0$; (б) параметра прямого взаимодействия v при $u = 1, w = 0,5$.

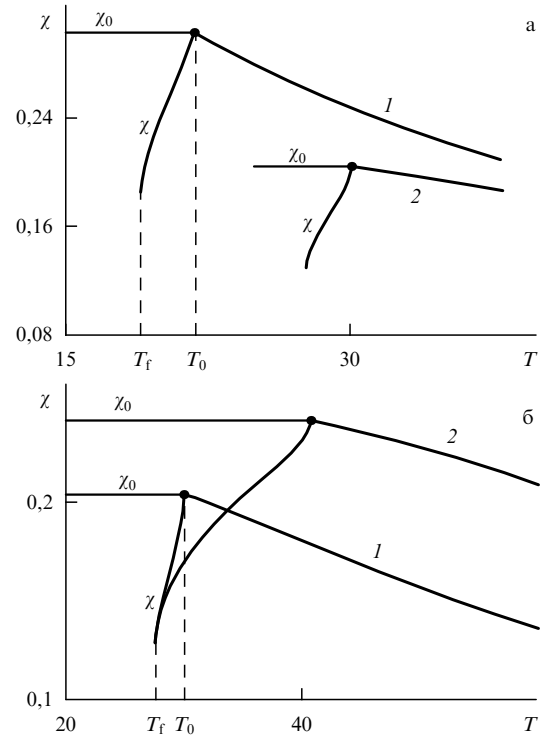


Рис. 4. Температурная зависимость термодинамической χ и адиабатической χ_0 восприимчивостей: (а) при $w = 0,5, u = 0,5, v = 0$ и различных интенсивностях замороженного беспорядка h (кривые 1, 2 соответствуют $h = 0; 4$); (б) при $h = 4, u = 0,5, v = 0$ и различных значениях эффективного параметра взаимодействия (кривые 1, 2 соответствуют $w = 0,5; 0,2$).

Решение уравнений (2.147)–(2.150) приводит к температурным зависимостям восприимчивостей χ, χ_0 , показанным на рис. 4. В неэргодической области $T < T_0$ микроскопическая восприимчивость χ оказывается отличной от нуля только при температурах выше точки замерзания T_f . Ее значение определяется условием $\partial\chi/\partial T = \infty$, которое совместно с (2.147) приводит к уравнению

$$(v + w)T_f + T_f\chi + q + \frac{3}{4}(T_f\chi + q)^2 = \chi^{-2}, \quad (2.158)$$

где значения $\chi = \chi(T), q = q(T) \equiv q_0(h_0(T))$ взяты при $T = T_f$. Из рисунка 4 видно, что всегда $T_f < T_0$. При $h = 0$ в пределе $\mu^2, \lambda^2 \ll w^2$ получаем

$$T_f \approx 4(v + w) \left[1 + \frac{\mu^2 + (2/3)\lambda^2}{4(v + w)^2} \right]. \quad (2.159)$$

Влияние параметров w, v, u на температурную зависимость восприимчивости $\chi(T)$ показано на рис. 5. Оказывается, что рост дисперсии w в разбросе межчастичного взаимодействия приводит к уменьшению значения χ , которое сопровождается увеличением характерных температур T_{00}, T_f (рис. 5а). Такое же поведение наблюдается при увеличении параметра взаимодействия v (рис. 5б), а рост параметра u оказывает обратное влияние (рис. 5в).

Рассмотрим наконец параметры неэргодичности I и памяти q , значения которых определяются системой уравнений (2.147)–(2.152). Соответствующие температурные зависимости представлены на рис. 6. При темпе-

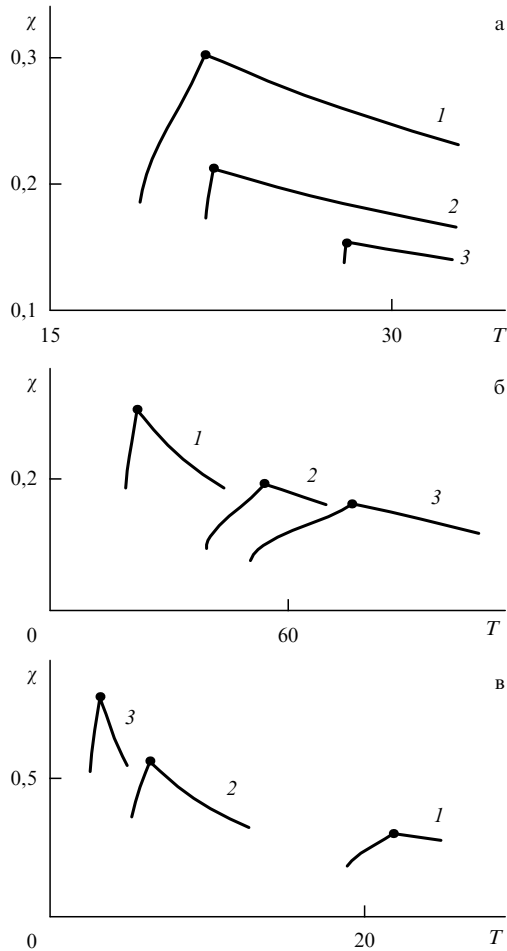


Рис. 5. Сдвиг температурных зависимостей термодинамической восприимчивости $\chi(T)$ при $h = 0$, обусловленный изменением: (а) параметра эффективного взаимодействия w при $u = 0,5$, $v = 0$ (кривые 1, 2, 3 соответствуют $w = 0,5; 1; 1,5$); (б) параметра прямого взаимодействия v при $u = 0,5$, $w = 0,5$ (кривые 1, 2, 3 соответствуют $v = 0; 1; 1,5$); (в) отношения ангармонизмов u при $w = 0,5$, $v = 0$ (кривые 1, 2, 3 соответствуют $u = 0,5; 1; 1,5$).

ратурах ниже точки замерзания, где $\chi \equiv 0$, а адиабатическая восприимчивость χ_0 постоянна, реализуется линейная зависимость параметра неэргодичности (2.152) от температуры. Появление конечного значения термодинамической восприимчивости χ выше точки замерзания T_f приводит к скачкообразному уменьшению значения Δ . С дальнейшим увеличением температуры необратимый отклик монотонно спадает, принимая нулевое значение в точке T_0 (рис. 6а). При увеличении температуры микроскопический параметр памяти $q \equiv q_0(h_0(T))$ монотонно спадает, принимая минимальное значение в точке потери эргодичности T_0 . Выше этой температуры величина $q_0(T)$ возрастает (рис. 6б). Как и следовало ожидать, замороженный беспорядок расширяет температурную область неэргодичности. Подобно картине фазовых переходов можно полагать, что микроскопический параметр памяти q выше точки T_0 отвечает мягкой моде, которая трансформируется в моду восстановления эргодичности ниже температуры T_0 . При этом роль параметра порядка играет параметр неэргодичности Δ .

Аналитические выражения для зависимостей $\Delta(T)$, $q(T)$ могут быть получены только вблизи кривой потери эргодичности $T_0(h)$. При $h = 0$, когда $T_0 = T_{00}$, из урав-

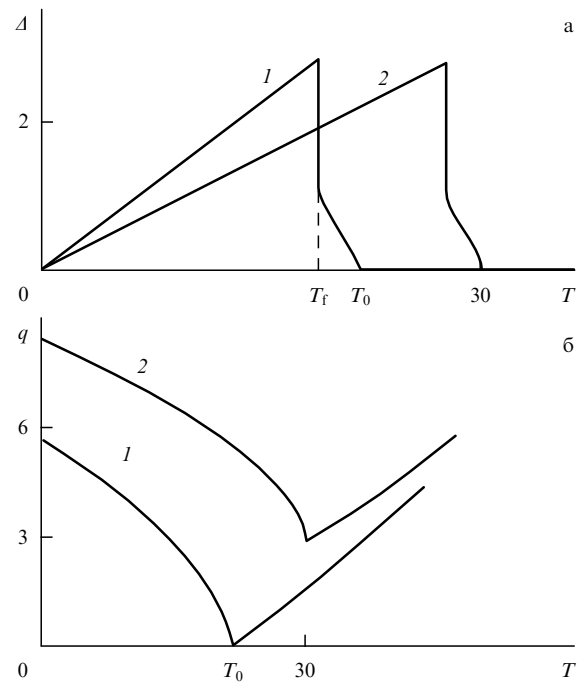


Рис. 6. Температурная зависимость: (а) параметра неэргодичности Δ ; (б) микроскопического параметра памяти q ($u = w = 0,5$, $v = 0$; кривые 1, 2 соответствуют $h = 0$; 4).

нений (2.147), где

$$|T_{00} - T| \ll T_{00}, \quad \chi \approx \chi_{00} - \frac{\Delta}{uT_{00}}, \quad \Delta \ll u\chi_{00}T_{00},$$

в первом порядке по величинам $\varepsilon \equiv T/T_{00} - 1$, $(u\chi_{00}T_{00})^{-1}\Delta$ имеем

$$\Delta = -A_0\varepsilon, \quad A_0 \equiv \frac{T_{00}}{w} \left(\frac{w}{\mu}\right)^2 \times \\ \times \frac{1 - \lambda^2/(6w^2)}{1 + [\lambda^2/(2\mu^2) + vw/\mu^2](T_{00}/w)^{1/2}}, \quad \varepsilon < 0; \quad (2.160)$$

$$q = Q\varepsilon, \quad Q \equiv \frac{4}{3} \frac{T_{00}}{w} \left(\frac{\lambda w}{\mu^2}\right)^2 \frac{1 - \lambda^2/(12w^2)}{1 + (\lambda^2/(2\mu^2))(T_{00}/w)^{1/2}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.161)$$

где учтено равенство (2.155). В случае $h \neq 0$ при изменении температуры получаем

$$\Delta = -A\varepsilon, \\ A \equiv \frac{2}{\lambda^2\chi_0^2} \frac{1 - (w/2)\chi_0^2T_0 - (\lambda^2/12)\chi_0^4T_0^2}{v/(\lambda^2\chi_0) + \mu^2/\lambda^2 + q_0 + (1/2)\chi_0T_0}, \quad \varepsilon < 0. \quad (2.162)$$

Соответственно при фиксированной температуре в линейном приближении по $q - q_0 \ll q_0$ находим

$$\Delta = B(q - q_0), \quad B^{-1} \equiv 1 + \frac{v}{\lambda^2\chi_0} \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} + q_0 + \frac{1}{2}\chi_0T_0\right)^{-1}. \quad (2.163)$$

2.9. Неполная потеря эргодичности

Выше мы рассмотрели стационарное состояние неэргодической системы, достижение которого требует, как

известно [16], астрономически больших времен. Поэтому реальная неэргодическая система всегда нестационарна, и следует рассмотреть кинетическое (точнее говоря, динамическое) поведение. Его исследование неоднократно проводилось применительно к спиновым стеклам [45, 70, 71] и броуновской частице в случайном потенциале [72, 73] (см. также обзор [74]). При этом основными объектами рассмотрения являются двух-временные корреляторы, представляющие функцию памяти $C(t, t')$ и отклик $R(t, t')$ (в последнем случае время измерения t должно быть не меньше времени ожидания t').

Существенная особенность неравновесных систем состоит в наличии двух характерных временных режимов — стационарного и режима замедленной релаксации (старения). Первый из них отвечает рассмотренному выше случаю и реализуется в пределе бесконечного времени ожидания $t' \rightarrow \infty$. При этом происходит полная потеря эргодичности, определяемая необратимым откликом (2.152), где адиабатическая χ_0 и изотермическая χ восприимчивости задаются равенствами

$$\chi_0 \equiv \lim_{t-t' \rightarrow \infty} \chi(t, t'), \quad \chi \equiv \lim_{t-t' \rightarrow \infty} \lim_{t' \rightarrow \infty} \chi(t, t'),$$

$$\chi(t, t') \equiv \int_{t'}^t R(t, \tau) d\tau. \quad (2.164)$$

Кроме того, система приобретает память, характеризуемую динамическим параметром Эдвардса – Андерсона

$$q \equiv \lim_{t-t' \rightarrow \infty} \lim_{t' \rightarrow \infty} C(t, t'). \quad (2.165)$$

Согласно [45] это обусловлено появлением иерархии бесконечно высоких барьеров, разделяющих фазовое пространство на изолированные области. Поэтому эволюция системы сводится к обычному процессу релаксации в этих областях, где сохраняется свойство одно-родности времени, а для микроскопической (термодинамической) составляющей восприимчивости χ , определенной при заданной температуре T , выполняется флуктуационно-диссипационная теорема. Однако при уменьшении t' до конечных значений становятся конечными высоты указанных барьеров и оказывается существенной не только разность $t - t'$, но и отношение $\lambda \equiv t'/t$. При выполнении условия $t - t' \ll t' < \infty$ ситуация сводится к предыдущему случаю $t' \rightarrow \infty$: поведение системы является стационарным и определяется корреляторами $C_{st}(t - t')$, $R_{st}(t - t')$, подчиняющимися флуктуационно-диссипационной теореме. Именно такой ситуации отвечает проведенное выше рассмотрение.

С ростом времени наблюдения t до значений, обеспечивающих выполнение условия $t - t' \sim t'$, начинается преодоление барьеров, определяющее процесс старения. Согласно [70, 71] это выражается в том, что основные корреляторы

$$C(t, t') = C_{st}(t - t') + C_{ag}\left(\frac{t'}{t}\right),$$

$$R(t, t') = R_{st}(t - t') + t^{-1}R_{ag}\left(\frac{t'}{t}\right) \quad (2.166)$$

приобретают аномальные добавки $C_{ag}(t'/t)$, $t^{-1}R_{ag}(t'/t)$, для которых флуктуационно-диссипационное соотноше-

ние принимает вид³

$$TR_{ag}(\lambda) = X(C_{ag}(\lambda)) \frac{dC_{ag}(\lambda)}{d\lambda}, \quad \lambda \equiv \frac{t'}{t} < 1, \quad (2.167)$$

где множитель $X < 1$ определяет степень отклонения от обычного поведения. Как указывалось выше, такое поведение реализуется в пределе $t' \rightarrow \infty$, где $X \rightarrow 1$, и интегрирование равенства (2.167) от λ до 1 дает $T\chi_{ag}(\lambda) = C_{ag}(1) - C_{ag}(\lambda)$. Поскольку такое же соотношение имеет место для стационарных составляющих, то полные корреляторы связаны равенством $T\chi(t, \lambda t) = C(t, t) - C(t, \lambda t)$, из которого в пределах $t \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 1$ следует связь

$$T\chi = q(0) - q, \quad (2.168)$$

где $\chi \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t, \lambda t)$ — термодинамическая (изотермическая) восприимчивость, $q \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 1} \lim_{t \rightarrow \infty} C(t, \lambda t)$ — параметр Эдвардса – Андерсона (ср. с определениями (2.164), (2.165)), $q(0) \equiv C(t, t)$ — начальное значение параметра памяти.

При выполнении условия $t - t' \sim t'$, обеспечивающего слабую потерю эргодичности, имеем $X < 1$, и соотношение (2.167) приводит к определениям (2.152), (2.164) в предположении, что в пределе $t' \rightarrow \infty$, взятом после $t - t' \rightarrow \infty$, выполняется равенство (см. [75])

$$x(q) = -\frac{d\chi(\lambda)}{dq(\lambda)}, \quad \chi(\lambda) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t, \lambda t),$$

$$q(\lambda) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} C_{ag}(t, \lambda t), \quad (2.169)$$

где параметр перекрытия $q(\lambda) < q$. Действительно, в этом случае интегрирование выражения (2.167) дает $\chi_{ag}(\lambda) = \chi(\lambda) - \chi(1)$, где уменьшаемое отвечает полной функции отклика, вычитаемое — ее стационарной составляющей. Это выражение принимает вид (2.164), если принять определение [22] $\Delta \equiv -T \lim_{\lambda \rightarrow 1} \chi_{ag}(\lambda)$ и учесть, что макроскопическое слагаемое $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t, t) \equiv \chi_0$ сводится к адиабатической восприимчивости Кубо. С другой стороны, подстановка выражения (2.169) в соотношение (2.167), взятое в пределе $t \rightarrow \infty$, приводит к нетривиальной связи между полной восприимчивостью и ее нестационарной составляющей

$$R_{ag}(\lambda) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dR(t, \lambda t)}{d\lambda}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t, \lambda t) = -\chi_{ag}(\lambda). \quad (2.170)$$

Подобно связи между фурье-образами функции отклика R и релаксационной функции χ в стационарных системах последнее из этих равенств представляет дисперсионное соотношение

$$R(t, t') = -\int_{t'}^t R_{ag}\left(\frac{t''}{t}\right) \frac{dt''}{t}. \quad (2.171)$$

В отличие от указанного аналога, где фигурируют не отношения времен, а разности частот, это равенство связывает полную и нестационарную функции отклика, появляющиеся вместо составляющих комплексной восприимчивости.

³ Отметим, что обычно [70–75] здесь фигурируют полные корреляторы, а не их нестационарные составляющие.

Укажем наконец на следующее из (2.169) выражение для функции распределения по областям фазового пространства, разделенным барьерами [16, 18],

$$P(q) \equiv \frac{dx}{dq} = -T \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d^2 \chi(\lambda)}{dq^2(\lambda)}. \quad (2.172)$$

Отсюда видно, что для определения $P(q)$ необходимо знать асимптотические зависимости восприимчивости $\chi(\lambda) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t, \lambda t)$ и параметра перекрытия $q(\lambda) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} C_{ag}(t, \lambda t)$, которые определяют поведение самоподобной системы [76–79].

3. Эффективный гамильтониан неупорядоченного гетерополимера

Неупорядоченный гетерополимер представляет статистический ансамбль мономеров разных сортов, которые случайным образом связаны в цепочки, принимающие различные геометрические конфигурации. В результате распределение мономеров обладает как композиционным беспорядком в чередовании различных мономеров вдоль цепи (который, очевидно, заморожен), так и термическим беспорядком, связанным с перебором конфигураций [80]. Наша задача состоит в определении эффективного гамильтониана, который представляет зависимость свободной энергии от параметра порядка, определяющего пространственное распределение мономеров разных сортов. В рамках метода производящего функционала такая задача была решена сначала для блок-сополимера, в котором отсутствует замороженный беспорядок [34, 37]. Для перехода к неупорядоченному полимеру следует провести дополнительное усреднение по замороженному беспорядку. Это достигается либо на основе метода трансфер-матрицы [27, 38], либо с использованием метода реплик [41, 81]. Согласно [27, 38] замороженный беспорядок несущественно изменяет свободную энергию регулярного блок-сополимера (см. [34]), тогда как в рамках репличного подхода было показано [41, 81], что перекрытие реплик приводит к появлению отрицательного слагаемого. Разумеется, столь существенное отличие в виде свободной энергии приводит к противоположным выводам о фазовой диаграмме неупорядоченного полимера: согласно [81] флуктуации подавляют не только эффект микрофазного расслоения, но и стеклование, которые обнаружены в [27, 38].

Таким образом, необходимо определить вид эффективного гамильтониана неупорядоченного гетерополимера. В этом разделе будет показано, что указанные выше подходы являются не исключающими, а дополняют друг друга [47].

3.1. Производящий функционал

Будем исходить из выражения

$$Z\{\psi(\mathbf{r})\} = \int \exp\left(C_2 \chi \int m^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) \times \overline{\langle \delta(\rho(\mathbf{r}) - 1) \delta(\psi(\mathbf{r}) - m(\mathbf{r})) \rangle} Dm(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

вид которого учитывает условие несжимаемости для плотности ρ и определение параметра порядка m [38]. Здесь $C_2 \equiv 4f(1-f)$, f — объемная доля одного из компонентов сополимера; χ — параметр Флори–Хаг-

гинса; черта отвечает усреднению по композиционному беспорядку $\{\sigma_n\}$ в чередовании сегментов разных сортов; угловые скобки означают усреднение по конформациям $\{\mathbf{r}(n)\}$, отвечающим гамильтониану гауссовой цепи [25]

$$\langle \dots \rangle \equiv \int \dots \exp\{-H_0[\mathbf{r}(n)]\} D\mathbf{r}(n), \\ H_0\{\mathbf{r}(n)\} \equiv \frac{3}{2b^2} \sum_n [\mathbf{r}(n+1) - \mathbf{r}(n)]^2, \quad (3.2)$$

b — длина сегмента. Плотность $\rho = \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$ и параметр порядка $m = \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$ представляют средние значения микроскопических величин

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(n)), \\ \psi(\mathbf{r}) = 2^{-1} C_2^{-1/2} \sum_n \sigma_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(n)), \quad (3.3)$$

где суммирование производится вдоль цепи. Представляя δ -функции в виде континуальных интегралов по полям J_ρ, J_m , приводим выражение (3.1) к виду преобразования Лапласа

$$Z\{m(\mathbf{r})\} = \int \exp\left(\int J_m(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) Z\{J_m(\mathbf{r})\} DJ_m(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

для статистической суммы системы, находящейся под действием поля $J_m(\mathbf{r})$:

$$Z\{J_m(\mathbf{r})\} = \int \exp\left(C_2 \chi \int m^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) Dm(\mathbf{r}) \times \\ \times \int \exp(-F'\{J_\rho, J_m\}) DJ_\rho, \quad (3.5)$$

$$F'\{J_\rho, J_m\} \equiv \\ \equiv -\ln \left\langle \exp \left[- \int (J_\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) + J_m(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \right] \right\rangle - \int J_\rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.6)$$

Далее удобно перейти к полям

$$h_\rho(\mathbf{r}) = J_\rho(\mathbf{r}) - V^{-1} \int J_\rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ h_m(\mathbf{r}) = J_m(\mathbf{r}) - V^{-1} \int J_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.7)$$

отсчитанным относительно значений, усредненных по объему. Соответствующие фурье-образы

$$h(\mathbf{k}) = N^{-1/2} \int h(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.8)$$

определяются волновым вектором \mathbf{k} и удовлетворяют условиям

$$h_\rho(\mathbf{k} = 0) = h_m(\mathbf{k} = 0) = 0. \quad (3.9)$$

Подстановка полей (3.7) в свободную энергию (3.6) приводит ее к виду

$$F'\{h_\rho, h_m\} = -\ln \left\langle \exp \left[-N^{-1/2} \sum_{n\mathbf{k}} \left(\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}(n)) h_\rho(\mathbf{k}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2^{-1} C_2^{-1/2} \sigma_n \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}(n)) h_m(\mathbf{k}) \right) \right] \right\rangle, \quad (3.10)$$

где учтены равенства (3.3), (3.8), $\langle \sigma_n \rangle = 0$ и принято, что элементарный объем $V/N = 1$.

Раскладывая выражение (3.10) по моментам случайных величин

$$\varepsilon_\rho \equiv N^{-1/2} \sum_{n\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}(n)) h_\rho(\mathbf{k}), \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_m \equiv 2^{-1} (C_2 N)^{-1/2} \sum_{n\mathbf{k}} \sigma_n \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}(n)) h_m(\mathbf{k}),$$

с точностью до слагаемых четвертого порядка получаем кумулянтный ряд

$$F' \{h_\rho, h_m\} \simeq -\frac{1}{2!} \overline{\langle \varepsilon_\rho^2 \rangle} - \frac{1}{2!} \overline{\langle \varepsilon_m^2 \rangle} + \frac{1}{3!} \overline{\langle \varepsilon_m^3 \rangle} + \frac{1}{2!} \overline{\langle \varepsilon_\rho \varepsilon_m^2 \rangle} - \frac{1}{4!} \left[\overline{\langle \varepsilon_m^4 \rangle} - 3 \overline{\langle \varepsilon_m^2 \rangle^2} \right]. \quad (3.12)$$

С учетом определений (3.11) удобно ввести обозначения

$$\overline{\langle \varepsilon_\rho^2 \rangle} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \overline{S_\rho^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} h_\rho(\mathbf{k}_1) h_\rho(\mathbf{k}_2), \quad (3.13)$$

$$\overline{\langle \varepsilon_m^2 \rangle} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} h_m(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2), \quad (3.14)$$

$$\overline{\langle \varepsilon_m^3 \rangle} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} h_m(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2) h_m(\mathbf{k}_3), \quad (3.15)$$

$$\overline{\langle \varepsilon_\rho \varepsilon_m^2 \rangle} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \overline{S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} h_\rho(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2) h_m(\mathbf{k}_3), \quad (3.16)$$

$$\overline{\langle \varepsilon_m^4 \rangle} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \overline{S_m^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} h_m(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2) h_m(\mathbf{k}_3) h_m(\mathbf{k}_4), \quad (3.17)$$

$$\overline{\langle \varepsilon_m^2 \rangle^2} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) S_m^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} \times h_m(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2) h_m(\mathbf{k}_3) h_m(\mathbf{k}_4). \quad (3.18)$$

Здесь в силу однородности системы корреляторы $S^{(i)}$ отличны от нуля при условии, что сумма волновых векторов, входящих в их аргументы, дает нуль:

$$S^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = S^{(2)}(\mathbf{k}_1) \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{0}}, \quad S^{(2)}(\mathbf{k}_1) \equiv S^{(2)}(\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_1); \quad (3.19)$$

$$S^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = S^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta_{\mathbf{k}_3, \mathbf{0}}, \quad (3.20)$$

$$S^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv S^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_{12});$$

$$S^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = S^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta_{\mathbf{k}_4, \mathbf{0}}, \quad (3.21)$$

$$S^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \equiv S^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, -\mathbf{k}_{13}),$$

где введены обозначения

$$\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k}_{13} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad \dots$$

3.2. Конфигурационные корреляторы

Рассмотрим явные выражения для корреляторов

$$S_\rho^{(2)}(\mathbf{k}_1) = N^{-1} \sum_{n_1, n_2} \left\langle \exp(i\mathbf{k}_1[\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]) \right\rangle, \quad (3.22)$$

$$S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1) = (4C_2 N)^{-1} \sum_{n_1, n_2} (\sigma_{n_1} \sigma_{n_2}) \left\langle \exp(i\mathbf{k}_1[\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]) \right\rangle, \quad (3.23)$$

$$S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = (4C_2)^{-1} N^{-3/2} \sum_{n_1, n_2, n_3} (\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} + \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} + \sigma_{n_3} \sigma_{n_1}) \times \left\langle \exp(i\mathbf{k}_1[\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]) \exp(i\mathbf{k}_{12}[\mathbf{r}(n_3) - \mathbf{r}(n_2)]) \right\rangle, \quad (3.24)$$

$$S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = (4C_2 N)^{-3/2} \sum_{n_1, n_2, n_3} (\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3}) \times \left\langle \exp(i\mathbf{k}_1[\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]) \exp(i\mathbf{k}_{12}[\mathbf{r}(n_3) - \mathbf{r}(n_2)]) \right\rangle, \quad (3.25)$$

$$S_m^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = (4C_2 N)^{-2} \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} (\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} \sigma_{n_4}) \times \left\langle \exp(i\mathbf{k}_1[\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]) \exp(i\mathbf{k}_{12}[\mathbf{r}(n_3) - \mathbf{r}(n_2)]) \times \exp(i\mathbf{k}_{13}[\mathbf{r}(n_4) - \mathbf{r}(n_3)]) \right\rangle, \quad (3.26)$$

$$S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1) S_m^{(2)}(\mathbf{k}_3) = (4C_2 N)^{-2} \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} (\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} \sigma_{n_4}) \times \left\langle \exp(i\mathbf{k}_1[\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]) \right\rangle \left\langle \exp(i\mathbf{k}_3[\mathbf{r}(n_4) - \mathbf{r}(n_3)]) \right\rangle. \quad (3.27)$$

Здесь произведена перегруппировка подэкспоненциальных слагаемых, учитывающая наличие δ -образных множителей в определениях (3.19)–(3.21). Конфигурационные средние сводятся к парным корреляторам

$$\left\langle \exp(i\mathbf{k}[\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]) \right\rangle = \exp\left(-\frac{b^2 \mathbf{k}^2}{6} |n_2 - n_1|\right), \quad (3.28)$$

выражение для которых получается, если разложить экспоненту в левой части и учесть, что ненулевой вклад дают только четные степени среднеквадратичной разности [25]

$$\left\langle [\mathbf{r}(n_2) - \mathbf{r}(n_1)]^2 \right\rangle = \frac{b^2}{3} |n_2 - n_1|. \quad (3.29)$$

Использование теоремы Вика в выражениях (3.22)–(3.26) приводит полные корреляторы (3.13)–(3.18) к виду

$$\overline{S_\rho^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} = N^{-1} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \sum_{n_1, n_2} \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_2 - n_1|), \quad (3.30)$$

$$\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} = (4C_2 N)^{-1} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \sum_{n_1, n_2} \overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2}} \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_2 - n_1|), \quad (3.31)$$

$$\overline{S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} = (4C_2)^{-1} N^{-3/2} \delta_{\mathbf{k}_{13}, \mathbf{0}} \sum_{n_1, n_2, n_3} (\overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2}} + \overline{\sigma_{n_2} \sigma_{n_3}} + \overline{\sigma_{n_3} \sigma_{n_1}}) \times \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_2 - n_1|) \exp(-\mathbf{q}_{12}^2 |n_3 - n_2|), \quad (3.32)$$

$$\overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} = (4C_2 N)^{-3/2} \delta_{\mathbf{k}_{13}, \mathbf{0}} \sum_{n_1, n_2, n_3} \overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3}} \times \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_2 - n_1|) \exp(-\mathbf{q}_{12}^2 |n_3 - n_2|), \quad (3.33)$$

$$\overline{S_m^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} = (4C_2 N)^{-2} \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} \sigma_{n_4}} \times \left[\delta_{\mathbf{k}_{14}, \mathbf{0}} \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_2 - n_1|) \exp(-\mathbf{q}_{12}^2 |n_3 - n_2|) \times \exp(-\mathbf{q}_{13}^2 |n_4 - n_3|) + \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}} \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_2 - n_1|) \exp(-\mathbf{q}_3^2 |n_4 - n_3|) \right], \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
& 3 \overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) S_m^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} = \\
& = (4C_2 N)^{-2} \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} \sigma_{n_4}} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}} \times \\
& \times \left(\exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_2 - n_1|) \exp(-\mathbf{q}_3^2 |n_4 - n_3|) + \right. \\
& + \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_4 - n_1|) \exp(-\mathbf{q}_3^2 |n_3 - n_2|) + \\
& \left. + \exp(-\mathbf{q}_1^2 |n_3 - n_1|) \exp(-\mathbf{q}_3^2 |n_4 - n_2|) \right), \quad (3.35)
\end{aligned}$$

где введен безразмерный волновой вектор $\mathbf{q} = a \mathbf{k}$, $a \equiv 6^{-1/2} b$. При расщеплении тройных корреляторов (3.24), (3.25) на парные и одинарные учтено, что последние отличны от нуля только при нулевом волновом векторе, так что в согласии с (3.7), (3.8) вклад такого разложения в выражения (3.15), (3.16) пропадает.

Композиционные корреляторы определяются равенствами [38]

$$\overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2}} = C_2 \exp(-l^{-1} |n_2 - n_1|), \quad (3.36)$$

$$\overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3}} = 2C_2 C_3 \exp(-l^{-1} |n_2 - n_1|) \exp(-l^{-1} |n_3 - n_2|), \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} \sigma_{n_4}} &= C_2^2 \exp(-l^{-1} |n_2 - n_1|) \exp(-l^{-1} |n_4 - n_3|) + \\
& + 4C_2 C_3^2 \exp(-l^{-1} |n_2 - n_1|) \exp(-l^{-1} |n_3 - n_2|) \times \\
& \times \exp(-l^{-1} |n_4 - n_3|), \quad (3.38)
\end{aligned}$$

где l — корреляционная длина, $C_2 = 4f(1-f)$, $C_3 = 1 - 2f$. Заменяя в равенствах (3.30)–(3.35) суммирование по узлам полимерной цепи $\{n_i\}$ интегрированием по полному числу сегментов $N \gg 1$, получаем

$$\overline{S_\rho^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} = N g(N \mathbf{q}_1^2) \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}}, \quad (3.39)$$

$$\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} = \frac{N}{4} g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)) \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}}, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
\overline{S_{mp}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} &= \\
& = - \left(\frac{N}{16} \right)^{1/2} \left\{ \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)) - g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_{12}^2))}{\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_{12}^2} + \right. \\
& + \left[\frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)) - g(N \mathbf{q}_1^2)}{(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2) - \mathbf{q}_{12}^2} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_{12}^2)) - g(N \mathbf{q}_1^2)}{(l^{-1} + \mathbf{q}_{12}^2) - \mathbf{q}_1^2} \right] \right\} \delta_{\mathbf{k}_{13}, \mathbf{0}}, \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} &= - \frac{3}{4} \left(\frac{N}{C_2} \right)^{1/2} \times \\
& \times C_3 \left[\frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)) - g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_{12}^2))}{\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_{12}^2} \right] \delta_{\mathbf{k}_{13}, \mathbf{0}}, \quad (3.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S_m^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} &= \\
& = \frac{3}{4} \left\{ \left[\frac{g(N \mathbf{q}_{12}^2)}{[\mathbf{q}_{12}^2 - (l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)] [\mathbf{q}_{12}^2 - (l^{-1} + \mathbf{q}_{13}^2)]} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_{13}^2)^{-1} \left(\frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2) - \mathbf{q}_{12}^2} - \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_{13}^2))}{(l^{-1} + \mathbf{q}_{13}^2) - \mathbf{q}_{12}^2} \right) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \frac{C_3^2}{C_2} \left(\frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_{12}^2)(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_{13}^2)} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_{12}^2))}{(\mathbf{q}_{12}^2 - \mathbf{q}_1^2)(\mathbf{q}_{12}^2 - \mathbf{q}_{13}^2)} + \right. \\
& \left. + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_{13}^2))}{(\mathbf{q}_{13}^2 - \mathbf{q}_1^2)(\mathbf{q}_{13}^2 - \mathbf{q}_1^2)} \right) \delta_{\mathbf{k}_{14}, \mathbf{0}} + \\
& + \frac{3}{4} \left\{ \frac{1}{(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2)} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_3^2)} + \right. \\
& + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2))}{(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2)(\mathbf{q}_3^2 - \mathbf{q}_1^2)} + 4 \frac{C_3^2}{C_2} \left(\frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{\mathbf{q}_1^2(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_3^2)} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{g(Nl^{-1})}{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_3^2} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2))}{\mathbf{q}_3^2(\mathbf{q}_3^2 - \mathbf{q}_1^2)} \right) \right\} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}}, \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) S_m^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2)} + \right. \\
& + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2)(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_3^2)} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2))}{(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2)(\mathbf{q}_3^2 - \mathbf{q}_1^2)} + \\
& + \frac{g(N(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_3^2))}{(l^{-1} - \mathbf{q}_3^2)(l^{-1} - \mathbf{q}_3^2)} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{(l^{-1} - \mathbf{q}_3^2)(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_3^2)} + \\
& + \frac{g(N(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_3^2))}{(l^{-1} - \mathbf{q}_1^2)(l^{-1} - \mathbf{q}_3^2)} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2))}{(l^{-1} - \mathbf{q}_1^2)(\mathbf{q}_3^2 - \mathbf{q}_1^2)} + \\
& + 4 \frac{C_3^2}{C_2} \left(\frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{\mathbf{q}_1^2(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_3^2)} + \frac{g(Nl^{-1})}{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_3^2} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2))}{\mathbf{q}_3^2(\mathbf{q}_3^2 - \mathbf{q}_1^2)} + \right. \\
& + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_3^2))}{\mathbf{q}_3^2 \mathbf{q}_3^2} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2))}{\mathbf{q}_3^2(\mathbf{q}_3^2 - \mathbf{q}_1^2)} + \\
& \left. \left. + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_3^2))}{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_3^2} + \frac{g(N(l^{-1} + \mathbf{q}_3^2))}{\mathbf{q}_1^2(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_3^2)} \right) \right\} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}}. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Здесь введена функция Дебая

$$g(x) = 2x^{-2} [\exp(-x) - 1 + x], \quad (3.45)$$

имеющая асимптотики $g(x) \simeq 2/x$ при $x \gg 1$ и $g(x) \simeq 1 - x/3$ при $x \ll 1$.

3.3. Свободная энергия

Статистическая сумма (3.5) определяется зависимостью $F' \{h_\rho, h_m\}$ свободной энергии (3.6) от полей (3.7). Основной вклад в интегралы по J_ρ, J_m в равенствах (3.4), (3.5) вносит окрестность седловой точки, положение которой задается условиями

$$\frac{\delta F'}{\delta h_\rho(-\mathbf{k})} = 0, \quad \frac{\delta F'}{\delta h_m(-\mathbf{k})} = m(\mathbf{k}). \quad (3.46)$$

С учетом (3.12), (3.13)–(3.18) первое из них дает стационарное поле

$$\begin{aligned}
h_\rho(\mathbf{k}_1) &= \frac{1}{2} \left(\overline{S_\rho^{(2)}(\mathbf{k}_1)} \right)^{-1} \times \\
& \times \sum_{\mathbf{k}_2} \overline{S_{mp}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} h_m(\mathbf{k}_2) h_m(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3.12), (3.13)–(3.18), находим свободную энергию в виде ряда по степеням поля h_m :

$$F'\{h_m\} = \frac{1}{2!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \gamma^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) h_m(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2) + \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) h_m(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2) h_m(\mathbf{k}_3) + \frac{1}{4!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) h_m(\mathbf{k}_1) h_m(\mathbf{k}_2) h_m(\mathbf{k}_3) h_m(\mathbf{k}_4), \quad (3.48)$$

где коэффициенты даются выражениями

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &\equiv -\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}, \\ \gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &\equiv \overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}, \\ \gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &\equiv -\overline{S_m^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} + \\ &+ 3 \left[\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) S_m^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} + \left(\overline{S_\rho^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)} \right)^{-1} \times \right. \\ &\left. \times \overline{S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} \overline{S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_2)} \right] \delta_{\mathbf{k}_{14}, \mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Соответствующая зависимость от параметра порядка

$$F\{m\} = \frac{1}{2!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Gamma^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) m(\mathbf{k}_1) m(\mathbf{k}_2) + \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \Gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) m(\mathbf{k}_1) m(\mathbf{k}_2) m(\mathbf{k}_3) + \frac{1}{4!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \Gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) m(\mathbf{k}_1) m(\mathbf{k}_2) m(\mathbf{k}_3) m(\mathbf{k}_4) \quad (3.50)$$

определяет термодинамический потенциал

$$F\{m\} = F'\{h_m\} - \int h_m(\mathbf{r}) m(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.51)$$

который представляет собой преобразование Лежандра, отвечающее лапласовскому образу (3.4). Соответственно сопряженное поле имеет вид (ср. с (3.46))

$$h_m(\mathbf{k}) = -\frac{\delta F}{\delta m(-\mathbf{k})}. \quad (3.52)$$

Для определения коэффициентов разложения (3.50) следует подставить получающуюся из него и определения (3.52) зависимость $h_m\{m\}$ в обратный функционал $m\{h_m\}$, который задается вторым равенством (3.46) после подстановки в него разложения (3.48). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях m , в соответствии с [34] получаем

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= -(\gamma^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2))^{-1}, \\ \Gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \left(\prod_{i=1}^3 \gamma^{(2)}(\mathbf{k}_i, -\mathbf{k}_i) \right)^{-1}, \\ \Gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \left[\gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) - \right. \\ &- 3 \sum_{\mathbf{k}} \gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) (\gamma^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}))^{-1} \gamma^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \left. \right] \times \\ &\times \left(\prod_{i=1}^4 \gamma^{(2)}(\mathbf{k}_i, -\mathbf{k}_i) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Использование равенств (3.50), (3.53), (3.49) для эффективного гамильтониана

$$\mathcal{H} = F\{m\} - C_2 \chi \sum_{\mathbf{k}} |m(\mathbf{k})|^2 \quad (3.54)$$

дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}} |m(\mathbf{k})|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') |m(\mathbf{k})|^2 |m(\mathbf{k}')|^2 - \\ &- \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3} |\Gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)| m(\mathbf{k}_1) m(\mathbf{k}_2) m(\mathbf{k}_3) + \\ &+ \frac{1}{4!} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} \Gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) m(\mathbf{k}_1) m(\mathbf{k}_2) m(\mathbf{k}_3) m(\mathbf{k}_4), \end{aligned} \quad (3.55)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{k}} &= \left(2\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k})} \right)^{-1} - C_2 \chi, \\ W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \frac{1}{4} \overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) S_m^{(2)}(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')} \left(\prod_{i=1}^4 \overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_i, -\mathbf{k}_i)} \right)^{-1}, \\ |\Gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)| &= \overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} \left(\prod_{i=1}^3 \overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_i, -\mathbf{k}_i)} \right)^{-1}, \\ \Gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \left\{ -\overline{S_m^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} + \right. \\ &+ 3 \left[\sum_{\mathbf{k}} \left(\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{k})} \right)^{-1} \overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k})} \overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} + \right. \\ &+ \left. \left. \left(\overline{S_\rho^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)} \right)^{-1} \overline{S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)} \overline{S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_2)} \right] \right\} \times \\ &\times \left(\prod_{i=1}^4 \overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_i, -\mathbf{k}_i)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

3.4. Длинноволновый предел

Приведенные выше выражения (3.39)–(3.44) применимы при произвольных значениях волновых векторов \mathbf{k} и числа сегментов N . На практике, как правило, наибольший вклад дает длинноволновая область $\mathbf{k} \rightarrow 0$ и значения $N \gg 1$. Здесь равенства (3.39)–(3.44) принимают более простой вид

$$\overline{S_\rho^{(2)}(\mathbf{k})} = \frac{2}{\mathbf{q}^2}, \quad (3.57)$$

$$\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k})} = 2^{-1} (l^{-1} + \mathbf{q}^2)^{-1}, \quad (3.58)$$

$$\overline{S_{m\rho}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} = N^{-1/2} \frac{l}{2} (l + 2\mathbf{q}_1^{-2}), \quad (3.59)$$

$$\overline{S_m^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)} = \frac{3}{2} (NC_2)^{-1/2} C_3 l^2, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \overline{S_m^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} &= \frac{3}{2} \frac{l^2}{N} \left(\mathbf{q}_{12}^{-2} + 4l \frac{C_3^2}{C_2} \right) \delta_{\mathbf{k}_{14}, \mathbf{0}} + \\ &+ \frac{3}{4} l^2 \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\overline{S_m^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) S_m^{(2)}(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)} = l^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{N(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_3^2)} \right) \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}}. \quad (3.62)$$

Подстановка этих выражений в равенства (3.56) дает

$$\tau_{\mathbf{k}} = (l^{-1} - C_2\chi) + \mathbf{q}^2, \\ W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = l^{-2} \left(1 + \frac{4}{N(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2)} \right), \quad (3.63)$$

$$|\Gamma^{(3)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)| = \mu \equiv 12l^{-1}(NC_2)^{-1/2}C_3,$$

$$\Gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{24}{Nl} \left(1 + 5 \frac{C_3^2}{C_2} \right) - \\ - 12l^{-2} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}}.$$

В результате гамильтониан (3.54) принимает вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}} |m(\mathbf{k})|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} w_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} |m(\mathbf{k}_1)|^2 |m(\mathbf{k}_2)|^2 + \int v(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.64)$$

$$\tau_{\mathbf{k}} \equiv \tau + (a\mathbf{k})^2, \quad \tau \equiv l^{-1} - C_2\chi, \quad (3.65)$$

$$w_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \equiv l^{-2} \left[(1 - \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}) + \frac{4}{Na^2(\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2)} \right], \quad (3.66)$$

$$v = -\frac{\mu}{3!} m^3 + \frac{\lambda}{4!} m^4, \quad \mu \equiv 12C_3C_2^{-1/2}l^{-1}, \quad (3.67)$$

$$\lambda \equiv 24 \left(1 + \frac{5C_3^2}{C_2} \right) l^{-1}.$$

Отметим, что если в исходном выражении (3.1) пренебречь δ -функцией, учитывающей условие несжимаемости $\rho = 1$, то коэффициент $\Gamma^{(4)}$ в разложении (3.55) принимает вид

$$\Gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{24}{Nl} \left(5 \frac{C_3^2}{C_2} - \frac{1}{lq_{12}^2} \right) - \\ - 12l^{-2} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{12}, \mathbf{0}} \delta_{\mathbf{k}_{34}, \mathbf{0}},$$

и в длинноволновом пределе $\Gamma^{(4)} \rightarrow -\infty$. Это означает, что пренебрежение условием несжимаемости приводит, как и следовало ожидать, к неустойчивости системы при больших значениях параметра порядка.

3.5. Учет эффектов неэргодичности

Использованный метод основывается на формулах (3.36)–(3.38), позволяющих выразить корреляторы замороженного беспорядка с помощью метода трансфер-матрицы [38]. Более распространен метод реплик, в рамках которого поле h_m и параметр порядка m приобретают репличный индекс α , по которому в гамильтониане (3.64) следует провести суммирование от 1 до $n \rightarrow 0$ [16]. Удерживая в разложении (3.12) только квадратичное слагаемое по полю $h_m \Rightarrow h_\alpha$, стационарное значение которого определяется вторым равенством (3.46), получаем

$$F\{m_\alpha\} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left(\overline{S_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{k})} \right)^{-1} |m_\alpha(\mathbf{k})|^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \alpha \neq \beta}} \left(\overline{S_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})} \right)^{-1} m_\alpha(\mathbf{k}) m_\beta(-\mathbf{k}). \quad (3.68)$$

Здесь первое слагаемое, отвечающее совпадающим репликам $\alpha = \beta$, дает в пределе $n \rightarrow 0$ квадратичный вклад в разложение (3.50), второй член описывает перекрытие реплик $\alpha \neq \beta$. Исследование систем с заморожен-

ным беспорядком на примере спиновых стекол показало, что их пространство состояний обладает иерархической структурой, которая характеризуется случайным перекрытием реплик [82]. Следовательно, параметр перекрытия

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \equiv \left(\overline{S_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})} \right)^{-1}$$

во втором слагаемом выражения (3.68) представляет случайную величину, по которой следует провести усреднение.

Будем использовать простейшее распределение

$$\mathcal{P}\{I_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\} \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \\ \alpha \neq \beta}} \sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{-1} I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1) I_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}_2) \right], \quad (3.69)$$

характеризуемое параметром дисперсии $\sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$. Тогда усреднение статистической суммы $Z \equiv \exp(-F)$ приводит к появлению в среднем значении свободной энергии (3.68) слагаемого

$$-\frac{1}{8} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \\ \alpha \neq \beta}} \sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} m_\alpha(\mathbf{k}_1) m_\beta(-\mathbf{k}_1) m_\alpha(-\mathbf{k}_2) m_\beta(\mathbf{k}_2). \quad (3.70)$$

Добавляя к нему и вычитая диагональный член $\alpha = \beta$, находим репличную форму гамильтониана (3.64)

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \tau_{\mathbf{k}} |m_\alpha(\mathbf{k})|^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \left(w_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} + \frac{1}{4} \sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \right) |m_\alpha(\mathbf{k}_1)|^2 |m_\alpha(\mathbf{k}_2)|^2 + \\ + \sum_{\alpha} \int v(m_\alpha) d\mathbf{r} - \\ - \frac{1}{8} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \\ \alpha \neq \beta}} \sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} m_\alpha(\mathbf{k}_1) m_\beta(-\mathbf{k}_1) m_\alpha(-\mathbf{k}_2) m_\beta(\mathbf{k}_2). \quad (3.71)$$

Эффективный гамильтониан (3.71), обобщающий выражения, использованные в [27, 34, 38, 41, 81], представляет основной результат настоящего раздела. Принципиально важную роль играет здесь межрепличное слагаемое, отрицательный знак которого является причиной потери эргодичности системы [16]. Согласно [41] параметр дисперсии $\sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$ имеет тот же вид, что и второе слагаемое потенциала (3.66):

$$\sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} = 4l^{-2} \frac{\sigma^2}{Na^2(\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2)}. \quad (3.72)$$

Другая особенность состоит в виде потенциала $w_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}$, который, в отличие от использованного в работах [27, 38], содержит первое слагаемое в квадратных скобках равенства (3.66). Это связано с наличием множителя $\delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3, \mathbf{0}}$ во втором слагаемом выражения (3.61), который учитывает условие $\mathbf{k}_{14} = 0$ в определении (3.21) при $\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_{34} = 0$.

3.6. Учет флуктуаций

Характерная особенность гамильтониана (3.71) состоит в различных репличных структурах четных слагаемых.

Это проявляется в том, что первое из них, будучи диагональным, приводит к перенормировке величины $\tau_{\mathbf{k}}$, тогда как недиагональный член отвечает за эффекты памяти и неэргодичности. Для проведения указанной перенормировки (см. [37, 81]) следует, используя приближение среднего поля, заменить один из множителей $|m_{\alpha}(\mathbf{k})|^2$ средним значением

$$G_{\mathbf{k}} = [r + c(q - q_0)^2]^{-1}, \quad q \equiv ak, \quad (3.73)$$

представляющим функцию Грина. Для определения параметров r , c , q_0 подставим равенство (3.73) в уравнение Дайсона

$$G_{\mathbf{k}}^{-1} = \tau_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} G_{\mathbf{k}'}, \quad u_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \equiv w_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \frac{1}{4} \sigma_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (3.74)$$

отвечающее двум первым слагаемым гамильтониана (3.71). Тогда в предположении зависимости $u_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = (u^2/N)(la)^{-2}(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2)^{-1}$, где u — константа, находим

$$c = 2, \quad q_0^{-1} = \pi^{1/2} \frac{2}{u} l(2r)^{1/4}, \quad r = \tau + \frac{3u^2}{4\pi} \frac{l^{-2}}{\sqrt{2r}}. \quad (3.75)$$

Согласно последнему из этих равенств при любых значениях $-\infty < \tau < \infty$ параметр r всегда положителен. В результате перенормированный репличный гамильтониан (3.71) принимает окончательный вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} G_{\mathbf{k}}^{-1} |m_{\alpha}(\mathbf{k})|^2 + \sum_{\alpha} \int v(m_{\alpha}(\mathbf{r})) d\mathbf{r} - \frac{1}{8} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \\ \alpha\beta}} \sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} m_{\alpha}(\mathbf{k}_1) m_{\beta}(-\mathbf{k}_1) m_{\alpha}(-\mathbf{k}_2) m_{\beta}(\mathbf{k}_2). \quad (3.76)$$

3.7. Суперсимметричный гамильтониан

Как было выяснено в предыдущем разделе, метод реплик оказывается эквивалентным суперсимметричному подходу, основанному на использовании поля (ср. с (2.39))

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\theta) = m(\mathbf{k}) + \bar{\psi}(\mathbf{k})\theta + \bar{\theta}\psi(\mathbf{k}) + \bar{\theta}\theta\varphi(\mathbf{k}). \quad (3.77)$$

Здесь θ , $\bar{\theta}$ — грассманово сопряженные координаты, величина $\bar{\psi}(-\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})$ определяет плотность межфазных границ, $\varphi(\mathbf{k})$ — амплитуда флуктуаций. Переход от репличного гамильтониана (3.76) к суперсимметричному осуществляется заменой параметра порядка $m_{\alpha}(\mathbf{k})$ на суперполе $\Phi_{\mathbf{k}}(\theta)$. Кроме того, от суммы по репликам α следует перейти к интегралу по суперкоординате θ . В результате получаем

$$\mathcal{H} = \int \mathcal{H}(\theta, \theta') d^2\theta d^2\theta'; \quad (3.78)$$

$$d^2\theta \equiv d\theta d\bar{\theta},$$

$$\mathcal{H}(\theta, \theta') = H(\theta)\delta(\theta - \theta') + H(\theta, \theta'),$$

$$\delta(\theta, \theta') \equiv (\bar{\theta} - \bar{\theta}')(\theta - \theta'),$$

$$H(\theta) = \sum_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}}^{-1} |\Phi_{\mathbf{k}}(\theta)|^2 + \int v(\Phi(\mathbf{r}, \theta)) d\mathbf{r},$$

$$H(\theta, \theta') = -\frac{1}{8} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \sigma_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \Phi_{\mathbf{k}_1}(\theta) \Phi_{-\mathbf{k}_1}(\theta') \Phi_{-\mathbf{k}_2}(\theta) \Phi_{\mathbf{k}_2}(\theta').$$

Рассмотрение, проведенное в предыдущем разделе, показывает, что использование суперсимметричного подхода во многом предпочтительнее, чем репличная процедура, основанная на выражении (3.76). Поэтому в следующем разделе при описании термодинамических свойств неупорядоченного гетерополимера мы будем основываться на использовании суперсимметричного гамильтониана (3.78).

4. Суперсимметричная теория неупорядоченного гетерополимера

Как уже упоминалось, неупорядоченный гетерополимер представляет собой цепочку последовательно соединенных мономеров разных сортов, обозначаемую иногда как многобуквенная последовательность. С понижением температуры такая система либо испытывает микрофазное расслоение типа наблюдаемого в биомолекулах протеина (см. [27, 31, 80] и ссылки там), либо переходит в замороженное состояние (испытывает стеклование) [39]. Настоящий раздел посвящен описанию последнего из этих явлений на основе суперсимметричного подхода, развитого в разделе 2. Он основывается на стохастическом уравнении движения, которое в приложении к полимеру приобретает настолько сложный вид, что динамический подход становится неэффективным. Таким образом, первая наша задача состоит в нахождении эффективного уравнения движения, которое позволяет представить особенности строения гетерополимера, обладающего термическим и замороженным беспорядками.

4.1. Эффективное уравнение движения

Рассмотрим сначала простейший случай гомополимера, представляющего собой гауссову цепь, для которой плотность вероятности найти вектор \mathbf{R} , соединяющий начало цепи с N -м узлом, задается функцией $\Psi(\mathbf{R}, N)$. Она удовлетворяет уравнению Шрёдингера с мнимым временем $-iN$ [25]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial N} = \left[D \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} - U(\mathbf{R}, N) \right] \Psi, \quad (4.1)$$

где число мономеров $N \gg 1$, $D \equiv b^2/6$ — эффективный коэффициент диффузии, задаваемый длиной куновского сегмента b , $U(\mathbf{R}, N)$ — внешнее поле. В пределе $N \rightarrow \infty$ решение уравнения (4.1) может быть представлено в виде

$$\Psi(\mathbf{R}, N) = \int \exp \left[-\frac{S_{\mathbf{R}N}\{\mathbf{r}(n)\}}{2D} \right] D\mathbf{r}(n), \quad (4.2)$$

где функциональное интегрирование проводится по зависимости $\mathbf{r}(n)$ координаты мономера от его номера в цепи; действие

$$S_{\mathbf{R}N}\{\mathbf{r}(n)\} \equiv S(\mathbf{R}, N) = \int_0^N L_0(\mathbf{r}(n)) dn, \quad (4.3)$$

соответствующее концам цепи в точках $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{r}(N) = \mathbf{R}$, определяется лагранжианом евклидовой теории поля [51]

$$L_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}(n)}{dn} \right)^2 + 2DU(\mathbf{r}, n). \quad (4.4)$$

Здесь первое слагаемое, полученное в континуальном приближении $\mathbf{r}(n+1) - \mathbf{r}(n) \rightarrow d\mathbf{r}(n)/dn$, играет роль кинетической энергии и отражает наличие ковалентной связи между мономерами цепи [25]. Подстановка распределения (4.2) в уравнение (4.1) дает уравнение вида Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial N} = D \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{R}^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{R}} \right)^2 + 2DU. \quad (4.5)$$

Вводя обобщенный импульс $\mathbf{p} \equiv \partial S / \partial \mathbf{R}$ и полную производную $d\mathbf{p}/dN \equiv \partial \mathbf{p} / \partial N + (\mathbf{p} \partial / \partial \mathbf{R}) \mathbf{p}$, сводим нелинейное уравнение (4.5) к уравнению Бюргерса

$$\frac{d\mathbf{p}}{dN} = D \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{R}^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \right). \quad (4.6)$$

Равенства (4.1)–(4.6) являются основой теории направленных полимеров, кинетической теории огрубления поверхности и т.д. (см. [5]).

Уравнение Шрёдингера (4.1) переходит в уравнение Фоккера – Планка [63]

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \left(D \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{F} \right) P, \quad (4.7)$$

если ввести вероятность

$$P(\mathbf{R}, N) = \Psi(\mathbf{R}, N) \exp \left\{ -\frac{V(\mathbf{R})}{2D} \right\}. \quad (4.8)$$

Ее зависимость от \mathbf{R} определяется эффективным потенциалом

$$V \equiv - \int \mathbf{F} d\mathbf{R}. \quad (4.9)$$

Сила \mathbf{F} в уравнении (4.7) связана с исходным потенциалом U следующим образом:

$$U = \frac{1}{4D} \mathbf{F}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{R}}. \quad (4.10)$$

Согласно теории стохастических систем [63] уравнению Фоккера – Планка (4.7) отвечает уравнение Ланжевена

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial N} = \mathbf{F}(\mathbf{R}, N) + \zeta(N), \quad (4.11)$$

определяющее стохастическую зависимость $\mathbf{R} = \mathbf{R}(N)$. Здесь ланжевенский источник ζ фиксирован условиями белого шума

$$\langle \zeta(N) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(N) \zeta(N') \rangle = 2D \delta(N - N'), \quad (4.12)$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению (4.8).

Для перехода от рассмотренного случая гомополимера к основному объекту нашего исследования — неупорядоченному гетерополимеру А-В — необходимо учесть, что здесь стохастичность проявляется не только в пространственном расположении мономеров, но и в чередовании сегментов разных сортов А, В вдоль цепи. Формально это отражается сопоставлением каждому узлу n изинговской переменной $\theta(n)$, которая принимает значение $\theta(n) = 1$, если n -й мономер относится к сорту А

и $\theta(n) = -1$ в ином случае. С ростом номера узла n переменная $\theta(n)$ изменяется подобно переориентации спинов в глауберовой динамике [83]. Для эффективного спина $\sigma(n) \equiv \theta(n) - \overline{\theta(n)}$, отсчитанного от среднего значения $\overline{\theta(n)}$, метод трансфер-матрицы приводит к коррелятору [38]

$$\overline{\sigma(n)\sigma(n')} = C_2 \exp \left(-\frac{|n - n'|}{l} \right), \quad (4.13)$$

$$C_2 \equiv 4f(1-f), \quad f \equiv \frac{1}{2}(1 + \overline{\theta(n)}),$$

где черта означает усреднение по композиционному (замороженному) беспорядку, l — корреляционная длина, f — доля мономеров типа А.

Нетрудно убедиться, что псевдоспиновая стохастическая переменная $\sigma(n)$, коррелятор которой имеет экспоненциальный вид (4.13), подчиняется уравнению Орнштейна – Уленбека

$$\frac{d\sigma}{dn} = -\frac{\sigma}{l} + s(n), \quad (4.14)$$

где стохастический источник $s(n)$ представляется в виде белого шума:

$$\overline{s(n)} = 0, \quad \overline{s(n)s(n')} = \frac{2C_2}{l} \delta(n - n'). \quad (4.15)$$

Согласно (4.14) связь между микроскопической величиной $\sigma(n)$ и стохастической переменной $s(n)$ имеет вид преобразования Лапласа

$$\sigma(n) = \int_0^n \exp \left(-\frac{n-m}{l} \right) s(m) dm. \quad (4.16)$$

Условия (4.15) выполняются, если белому шуму $s(n)$ отвечает гауссовское распределение

$$P\{s(n)\} = \left(\frac{4\pi C_2}{l} \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{l}{4C_2} \int_0^N s^2(n) dn \right\} \quad (4.17)$$

с интенсивностью замороженного беспорядка $4C_2 l^{-1}$. Тогда параметр порядка, нормированный на единицу, определяется локальным средним

$$\eta(\mathbf{r}, n) \equiv (4C_2)^{-1/2} \overline{\sigma(n) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(n))}. \quad (4.18)$$

Здесь и далее объем мономера принимается равным единице.

Найдем эффективное уравнение движения для поля (4.18). По сравнению с соответствующим равенством (4.11) левая часть искомого уравнения должна содержать вклад $-D(\partial^2 \eta / \partial \mathbf{r}^2)$, учитывающий наличие неоднородности (см. [84]). Переходя к фурье-образу

$$\eta_{\mathbf{k}}(n) = N^{-1/2} \int \eta(\mathbf{r}, n) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.19)$$

для которого эта неоднородность принимает вид $Dk^2 \eta_{\mathbf{k}}$, находим (ср. с (2.1))

$$\frac{\partial \eta_{\mathbf{k}}}{\partial n} + (ak)^2 \eta_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{\mathbf{k}}^*} + \zeta_{\mathbf{k}}. \quad (4.20)$$

Здесь, как и ранее, для эффективного времени n использован континуальный предел $n \gg 1$; характерный масш-

таб мономера задается перенормированной длиной куновского сегмента $a \equiv D^{1/2} = 6^{-1/2}b$; сила $f_k = -\partial\mathcal{H}/\partial\eta_k^*$ (ср. с (4.9)) определяется эффективным гамильтонианом \mathcal{H} . Подобно (4.12) белый шум фиксируется условиями

$$\langle \zeta_k \rangle = 0, \quad \langle \zeta_k^*(n)\zeta_{k'}(n') \rangle = \delta_{kk'}\delta(n-n'), \quad (4.21)$$

где угловые скобки означают усреднение по термическому беспорядку.

Согласно разделу 3 эффективный гамильтониан неупорядоченного гетерополимера записывается в виде

$$\mathcal{H} = \sum_k r_k |\eta_k|^2 - \frac{1}{2} \sum_{kk'} w_{kk'} |\eta_k|^2 |\eta_{k'}|^2 + \int v(\mathbf{r}) \mathbf{dr}; \quad (4.22)$$

$$r_k \equiv r + 2D(k - k_0)^2, \quad r = \tau + \frac{3}{4\pi} l^{-2} (2r)^{-1/2},$$

$$\tau \equiv l^{-1} - C_2\chi, \quad k_0^{-1} \equiv 2(\pi D)^{1/2} l (2r)^{1/4};$$

$$w_{kk'} \equiv 4\sigma^2 l^{-2} (ND)^{-1} (\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2)^{-1}; \quad (4.23)$$

$$v \equiv -\frac{\mu}{3!} \eta^3 + \frac{\lambda}{4!} \eta^4, \quad \mu \equiv 12C_3 C_2^{-1/2} l^{-1},$$

$$\lambda \equiv 24 \left(1 + \frac{5C_3^2}{C_2} \right) l^{-1}, \quad C_2 \equiv 4f(1-f), \quad C_3 \equiv |1-2f|.$$

Его характерная особенность состоит в перенормировке затравочного параметра Ландау τ в эффективное значение r . Эта перенормировка обусловлена влиянием флуктуаций и проявляется только при конечных значениях волнового числа k_0 . Как видно из рис. 7, представляющего зависимость $r(\tau)$, при значениях корреляционной длины $l \gg 1$ в области $\tau > 0$ имеем $r \simeq \tau$, а при $\tau < 0$ $r \simeq 0$. С уменьшением величины l зависимость $r(\tau)$ становится более пологой и характеризуется асимптотиками $r \sim \tau^{-2}$ при $\tau < 0$ и $r \sim \tau$ при $\tau \gg 1$. Принципиально важная особенность указанной перенормировки состоит в том, что при всех значениях $-\infty < \tau < +\infty$ имеем $r > 0$. Это означает, что флуктуации трансформируют фазовый переход второго рода в первый [36, 37].

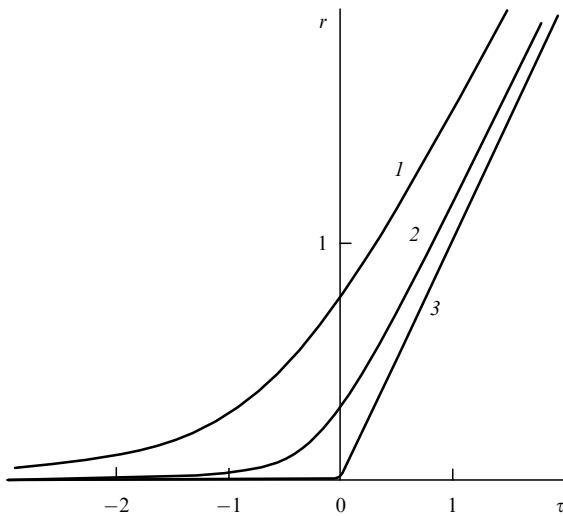


Рис. 7. Зависимость перенормированного параметра r от затравочного значения τ при различных значениях корреляционной длины l (кривые 1, 2, 3 соответствуют $l = 0,5; 1; 10$).

4.2. Суперсимметричная теория

Следуя разделу 2, будем исходить из генерирующего функционала

$$Z\{\eta_k\} = \left\langle \delta \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial n} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_k^*} - \zeta_k \right) \det \left| \frac{\delta \zeta_k}{\delta \eta_k} \right| \right\rangle, \quad (4.24)$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta_k^*} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k^*} + 2a^2(k - k_0)^2 \eta_k,$$

где угловые скобки означают усреднение по шуму $\zeta_k(n)$, δ -функция учитывает вид эффективного уравнения движения (4.20), детерминант задает якобиан перехода от переменной ζ_k к η_k . Запишем δ -функцию в виде функционального интеграла Лапласа по полю $\varphi_k(n)$, которое согласно разделу 2 представляет амплитуду флуктуаций сопряженного поля. Для придания выражению (4.24) экспоненциальной формы представим детерминант с помощью грассманово сопряженных полей $\psi_k(n), \bar{\psi}_k(n)$ (см. (2.36)). Проводя в (4.24) усреднение по $\zeta_k(n)$ с помощью гауссова распределения, определенного моментами (4.21), получаем

$$Z\{\eta\} = \int P\{\eta, \varphi; \psi, \bar{\psi}\} d\varphi d^2\psi,$$

$$P\{\eta, \varphi; \psi, \bar{\psi}\} = \exp(-S\{\eta, \varphi; \psi, \bar{\psi}\}), \quad S = \int_0^N \mathcal{L} dn, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{L} = \int \left[\left(\varphi \dot{\eta} - \bar{\psi} \dot{\psi} - \frac{\varphi^2}{2} \right) + (\mathcal{H}'\{\eta\}\varphi - \bar{\psi} \mathcal{H}''\{\eta\}\psi) \right] \mathbf{dr}.$$

Здесь точка означает производную по эффективному времени n , штрих — функциональную производную по полю (4.18).

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что лагранжиан, отвечающий последнему равенству (4.25), принимает канонический вид

$$\mathcal{L} = \int A(\Phi) d^2\theta,$$

$$A \equiv \sum_k \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}\Phi_k^*)(\mathcal{D}\Phi_k) + \mathcal{H}\{\Phi_k\}, \quad d^2\theta \equiv d\theta d\bar{\theta}; \quad (4.26)$$

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} - 2\theta \frac{\partial}{\partial n}, \quad \bar{\mathcal{D}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}},$$

при введении четырехкомпонентного суперполя (ср. с (2.39))

$$\Phi = \eta + \bar{\psi}\theta + \bar{\theta}\psi + \bar{\theta}\theta\varphi, \quad (4.27)$$

где грассмановы координаты $\theta, \bar{\theta}$ удовлетворяют условиям (2.41). Функционал $\mathcal{H}\{\Phi\}$ имеет вид (4.22), где параметр порядка η_k заменяется на суперполе Φ_k , а слагаемое $(\delta\mathcal{H}/\delta\eta_k^*)\dot{\eta}_k + \text{с.с.}$, определяющее полную производную $d\mathcal{H}\{\eta_k(n)\}/dn$, может быть опущено. Согласно разделу 2 комбинация $\bar{\psi}\psi$ отвечает плотности межфазных границ, и, таким образом, использование четырехкомпонентного суперполя (4.27) отвечает пределу сильной сегрегации, далее мы ограничимся более простым случаем слабой сегрегации, в котором предполагается отсутствие каких-либо границ. Согласно разделу 2.2 в этом случае четырехкомпонентное суперполе (4.27) сводится к двухкомпонентной (дуальной) форме

$$\phi = \eta + \vartheta\varphi, \quad (4.28)$$

где введена самосопряженная нильпотентная величина $\vartheta \equiv \bar{\theta}\theta$. Соответственно лагранжиан (4.26) принимает простой вид

$$L = \frac{1}{2} \int A(\phi) d\vartheta, \quad (4.29)$$

$$A \equiv \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}^* D \phi_{\mathbf{k}} + \mathcal{H}\{\phi_{\mathbf{k}}\},$$

$$D = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left(1 - 2\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) \frac{\partial}{\partial n}.$$

Уравнение движения для нильпотентного поля (4.28) имеет вид

$$D \phi_{\mathbf{k}} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi_{\mathbf{k}}^*}. \quad (4.30)$$

В компонентной форме оно приводит к уравнениям движения для параметра порядка $\eta(n)$ и амплитуды наиболее вероятной флуктуации $\varphi(n)$.

4.3. Корреляционная техника

Введем суперкоррелятор типа (2.64)

$$C_{\mathbf{k}}(n, \vartheta; n', \vartheta') \equiv \langle \phi_{\mathbf{k}}^*(n, \vartheta) \phi_{\mathbf{k}}(n', \vartheta') \rangle. \quad (4.31)$$

Умножая уравнение движения (4.30) на $\phi_{\mathbf{k}}^*$ и усредняя результат, для затравочного коррелятора, отвечающего параметрам $v = w = 0$ в (4.22), получаем (ср. с (2.79))

$$C_{\mathbf{v}\mathbf{k}}^{(0)}(\vartheta, \vartheta') = \frac{1 + (r_{\mathbf{k}} - iv)\vartheta + (r_{\mathbf{k}} + iv)\vartheta'}{r_{\mathbf{k}}^2 + v^2}. \quad (4.32)$$

Здесь использовано "частотное" фурье-преобразование

$$C_{\mathbf{v}} = \int_0^N C(n) \exp(ivn) dn. \quad (4.33)$$

Как было выяснено в разделе 2.4, грасманова структура суперкоррелятора позволяет разложить его по базисным супервекторам (2.80), функциональное произведение которых подчиняется табл. 2. Согласно (2.78) это разложение имеет вид

$$\mathbf{C} = G_- \mathbf{A} + G_+ \mathbf{B} + S \mathbf{T}. \quad (4.34)$$

Здесь и ниже индексы \mathbf{k} , ν для краткости опущены. Коэффициенты разложения (4.34)

$$G_- = \langle \eta \varphi^* \rangle, \quad G_+ = \langle \eta^* \varphi \rangle, \quad S = \langle |\eta|^2 \rangle \quad (4.35)$$

представляют запаздывающую и опережающую функции Грина и структурный фактор. Для затравочного коррелятора $\mathbf{C}^{(0)}$ они принимают вид

$$G_{\pm}^{(0)} = (r \pm iv)^{-1}, \quad S^{(0)} = G_+^{(0)} G_-^{(0)} = (r^2 + v^2)^{-1}. \quad (4.36)$$

Самосогласованное поведение системы определяется уравнением Дайсона (2.129), которое в случае гетерополимера принимает вид

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{(0)})^{-1} - w \mathbf{C} - \Sigma. \quad (4.37)$$

Здесь $w = 2\sigma^2 (ND)^{-1} (lk_0)^{-2}$ — характерное значение потенциала эффективного взаимодействия, отвечающее

волновым векторам $\mathbf{k} = \mathbf{k}' \equiv \mathbf{k}_0$ (ср. с (3.72)), Σ — собственно-энергетическая функция, для которой используется разложение (2.99). С учетом (4.36) компоненты уравнения Дайсона (4.37) записываются в виде (ср. с (2.131), (2.132))

$$G_{\pm}^{-1} + w G_{\pm} = (r \pm iv) - \Sigma_{\pm}, \quad (4.38)$$

$$S = (1 + 2\pi C_2 l^{-1} \delta(v) + \Sigma) G_+ G_- (1 - w G_+ G_-)^{-1}. \quad (4.39)$$

Здесь слагаемое, содержащее δ -функцию, обусловлено наличием замороженного беспорядка. Для замыкания системы (4.38), (4.39) следует выразить компоненты собственно-энергетической функции Σ_{\pm} , Σ через компоненты суперкоррелятора G_{\pm} , S . Суперсимметричная теория возмущений, изложенная в разделе 2.5, приводит к выражению

$$\Sigma(z, z') = \frac{\mu^2}{2} \delta(z, z') \int C(z, z'') C(z'', z'') dz'' + \frac{\mu^2}{2} (C(z, z'))^2 + \frac{\lambda^2}{6} (C(z, z'))^3, \quad (4.40)$$

где $z \equiv \{\mathbf{r}, n, \vartheta\}$, $\delta(z) = \vartheta \delta(\mathbf{r}) \delta(n)$ и умножение суперкорреляторов следует понимать не в функциональном, а в обычном смысле (см. табл. 3). В результате (4.40) дает

$$\Sigma_{\pm}(n) = \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} S(n)\right) S(n) G_{\pm}(n), \quad (4.41)$$

$$\Sigma(n) = \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} S(n)\right) S^2(n). \quad (4.42)$$

Отметим, что здесь использовано пространственно-временное представление, тогда как уравнения Дайсона (4.38), (4.39) записаны в частотно-волновом.

4.4. Учет эффектов памяти и неэргодичности

Следуя Эдвардсу и Андерсону [14], введем параметр композиционной памяти $q \equiv \langle \eta(n=N) \eta(n=0) \rangle$, величина которого определяет корреляцию в чередовании мономеров вдоль полимерной цепи. Кроме того, определим параметр неэргодичности $\Delta \equiv g_0 - g$, задаваемый разницей адиабатической $g_0 \equiv G_-(v=0)$ и изотермической $g \equiv G_-(v \rightarrow 0)$ восприимчивостей. Согласно разделу 2 при этом основные корреляторы приобретают удлиненную форму:

$$G_{\pm}(v) = \Delta + G_{\pm 0}(v), \quad S(n) = q + S_0(n), \quad (4.43)$$

где индекс 0 обозначает слагаемые, соответствующие эргодической системе без памяти. Подставляя компоненты (4.43) в (4.41), (4.42), получаем

$$\Sigma_{\pm}(n) = \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} q\right) q (\Delta + G_{\pm 0}(n)) + \Sigma_{\pm 0}(n), \quad (4.44)$$

$$\Sigma_{\pm 0}(n) \equiv (\mu^2 + \lambda^2 q) S_0(n) G_{\pm 0}(n) + \frac{\lambda^2}{2} S_0^2(n) G_{\pm 0}(n);$$

$$\Sigma(n) = \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} q\right) q^2 + \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} q\right) q S_0(n) + \Sigma_0(n), \quad (4.45)$$

$$\Sigma_0(n) \equiv \frac{1}{2} (\mu^2 + \lambda^2 q) S_0^2(n) + \frac{\lambda^2}{6} S_0^3(n).$$

Здесь первыми выписаны слагаемые, исчезающие в отсутствие памяти; нелинейные по корреляторам $G_{\pm 0}$,

S_0 вклады собраны в слагаемых $\Sigma_{\pm 0}$, Σ_0 и опущено произведение $S_0 A \approx 0$. Для перехода от временного представления компонент собственно-энергетической функции (4.44), (4.45) к частотному представлению, использованному в уравнении Дайсона, применим флуктуационно-диссипационную теорему (2.76), (2.104):

$$S_0(n \rightarrow 0) = G_{\pm 0}(v \rightarrow 0) \equiv g, \quad (4.46)$$

$$\Sigma_{\pm 0}(v \rightarrow 0) = \Sigma_0(n \rightarrow 0) \equiv \frac{1}{2}(\mu^2 + \lambda^2 q)g^2 + \frac{\lambda^2}{6}g^3, \quad (4.47)$$

где в последнем соотношении учтено (4.45).

Подставляя фурье-образы компонент (4.43)–(4.45) в уравнение Дайсона (4.39), получаем

$$q_0 \left[1 - wg^2 - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{3} q_0 \right) q_0 g^2 \right] = C_2 l^{-1} g^2, \quad (4.48)$$

$$S_0 = \frac{(1 + \Sigma_0)G_+ G_-}{1 - [w + (\mu^2 + \lambda^2 q/2)q]G_+ G_-}. \quad (4.49)$$

Первое из этих уравнений соответствует δ -образным вкладам и отражает эффекты памяти, второе определено при частоте $v \neq 0$. В пределе $v \rightarrow 0$ характерное произведение $G_+ G_- \rightarrow g^2$, и полюс структурного фактора (4.49)

$$w + \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{2} q_0 \right) q_0 = g_0^{-2}, \quad g_0 \equiv G_-(v=0), \quad (4.50)$$

определяет точку потери эргодичности. Подставляя в уравнение Дайсона (4.38) соответствующие компоненты (4.44), (4.47) для собственно-энергетической части и учитывая определение $g \equiv G_-(v \rightarrow 0)$, получаем уравнение, связывающее микроскопические значения восприимчивости и параметра памяти:

$$1 - rg + wg^2 + \frac{\mu^2}{2} g[(g+q)^2 - q^2] + \frac{\lambda^2}{6} g[(g+q)^3 - q^3] = 0. \quad (4.51)$$

Система уравнений (4.48)–(4.51) описывает термодинамическое поведение неупорядоченного гетерополимера вблизи точки потери эргодичности. Как и в теории спиновых стекол [16], выражения (4.48), (4.51) представляют уравнения Шеррингтона – Киркпатрика, а условие (4.50) определяет точку де Альмейды – Таулесса. Согласно разделу 2.8 при анализе указанных уравнений следует различать макро- и микроскопические значения q_0 , q параметра памяти и восприимчивостей g_0 , g . Такая иерархия отражает то обстоятельство, что микроскопические характеристики, отвечающие пределу $v \rightarrow 0$, являются обычными термодинамическими параметрами и зависят от температуры (параметра Флори – Хаггинса χ). В отличие от них макро-микро-величины q_0 , g_0 соответствуют $v = 0$ и зависят от параметра замороженного беспорядка l . В неэргодической области макро-микро-величины принимают значения, отвечающие точке потери эргодичности.

При анализе поведения указанных величин наиболее простой представляется зависимость макро-микро-параметра памяти q_0 от замороженного беспорядка. Она задается кубическим уравнением, следующим из

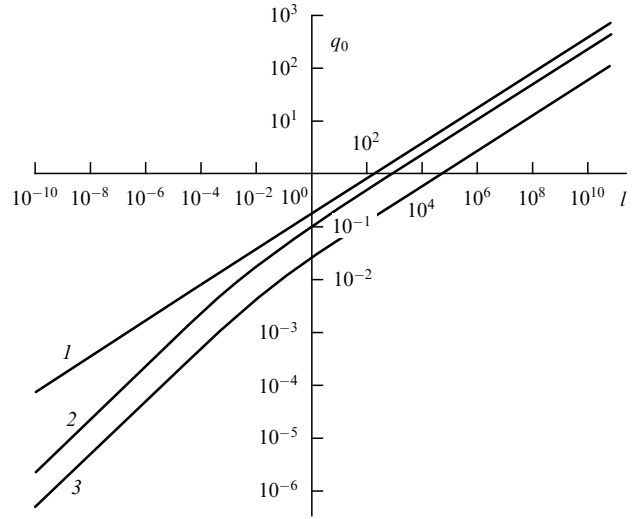


Рис. 8. Зависимость макро-микро-параметра памяти q_0 от значения корреляционной длины l (кривые 1, 2, 3 отвечают составам $f = 0,5; 0,3; 0,1$).

равенств (4.48), (4.50),

$$\left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{\lambda^2 q_0}{3} \right) q_0^2 = C_2 l^{-1}. \quad (4.52)$$

Характерный вид зависимости макро-микро-параметра от интенсивности замороженного беспорядка приведен на рис. 8. При одинаковых содержаниях мономеров А, В ($f = 0,5$) первое слагаемое в (4.52) пропадает и получаем $q_0 \propto l^{1/3}$. В случае разбавленного сополимера ($f \ll 1$, $C_2 \ll C_3$) имеем $q_0 \propto f l^{1/2}$.

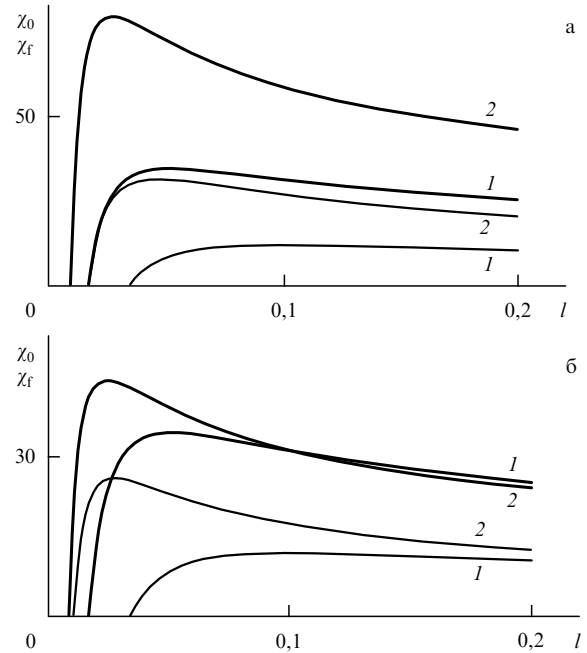


Рис. 9. Зависимость характерных значений параметра Флори – Хаггинса в точке потери эргодичности χ_0 (жирные линии) и в точке замерзания χ_f (тонкие линии) от корреляционной длины l : (а) при $\sigma = 0$ и различных значениях состава f (кривые 1, 2 отвечают $f = 0,5; 0,3$); (б) при $f = 0,5$ и различных значениях параметра межрешеточного перекрытия σ (кривые 1, 2 отвечают $\sigma = 0; 1$).

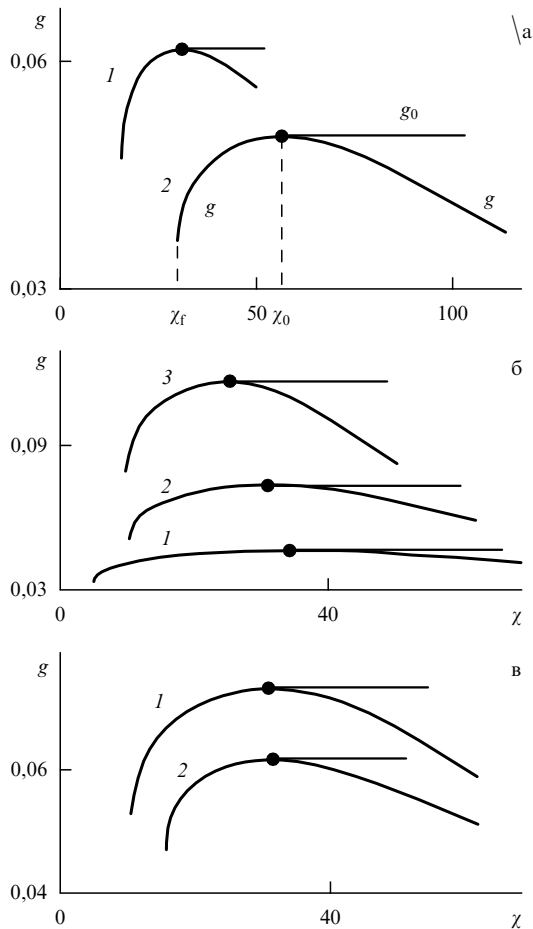


Рис. 10. Зависимость микроскопической g и макроscopicкой g_0 восприимчивостей от параметра Флори–Хаггинса χ : (а) при $\sigma = 0$, $l = 0,1$ и различных значениях состава f (кривые 1, 2 отвечают $f = 0,5$; $0,3$); (б) при $f = 0,5$, $\sigma = 0$ и различных значениях корреляционной длины l (кривые 1, 2, 3 соответствуют $l = 0,05$; $0,1$; $0,2$); (в) при $f = 0,5$, $l = 0,1$ и различных значениях параметра межрешеточного перекрытия σ (кривые 1, 2 отвечают $\sigma = 0$; 1).

Совместное решение уравнений (4.48), (4.50), (4.51) дает точку потери эргодичности χ_0 , положение которой в зависимости от корреляционной длины l приведено на рис. 9 (жирные линии). Характерно, что ненулевое значение параметра χ_0 появляется при значении l , превышающем критическое, и с дальнейшим ростом l достигается максимальное значение χ_0 , а затем наблюдается монотонное спадание. При умеренных значениях корреляционной длины l ширина эргодической области, лежащей под зависимостью $\chi_0(l)$, с ростом l уменьшается. Условие $dg/d\chi = -\infty$ совместно с равенствами (4.48), (4.50) приводит к уравнению

$$w + \mu^2(g_f + q) + \frac{\lambda^2}{2}(g_f + q)^2 = g_f^{-2}, \quad (4.53)$$

определяющему значение χ_f параметра Флори–Хаггинса в точке стеклования; ниже ее микроскопическая восприимчивость g равна нулю (рис. 10). Соответствующая зависимость $\chi_f(l)$ от корреляционной длины приведена на рис. 9 (тонкие линии). Характерно, что кривая $\chi_f(l)$ расположена под кривой потери эргодичности $\chi_0(l)$ и имеет ту же форму. Согласно рис. 9а параметры χ_0 и χ_f

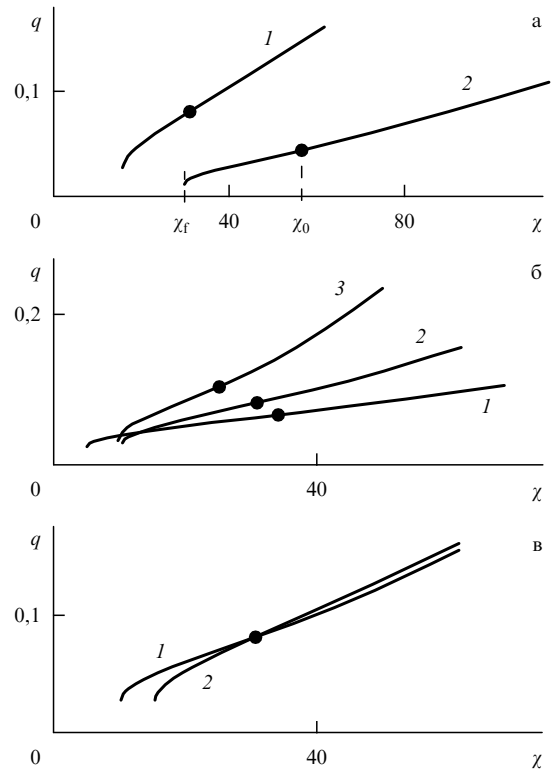


Рис. 11. Зависимость микроскопического параметра памяти q от параметра Флори–Хаггинса χ : (а) при $\sigma = 0$, $l = 0,1$ и различных значениях состава f (кривые 1, 2 отвечают $f = 0,5$; $0,3$); (б) при $f = 0,5$, $\sigma = 0$ и различных значениях корреляционной длины l (кривые 1, 2, 3 отвечают $l = 0,05$; $0,1$; $0,2$); (в) при $f = 0,5$, $l = 0,1$ и различных значениях параметра межрешеточного перекрытия σ (кривые 1, 2 отвечают $\sigma = 0$; 1).

возрастают при удалении от состава $f = 0,5$. Более сложное поведение наблюдается при росте параметра межрешеточного перекрытия σ (рис. 9б): при малых l с увеличением σ наблюдается рост обоих значений χ_0 , χ_f , а при больших величина χ_0 уменьшается.

Рисунок 10 представляет зависимость макроscopicкой g_0 и микроскопической g восприимчивостей от параметра Флори–Хаггинса χ . Ниже точки потери эргодичности χ_0 эти восприимчивости, как и соответствующие значения q_0 , q параметра памяти, совпадают. При $\chi = \chi_f$ зависимость $g(\chi)$ имеет обрыв, ниже которого восприимчивость g принимает нулевое значение, отвечающее замороженному состоянию (см. раздел 2.8). Выше точки потери эргодичности χ_0 имеем постоянное значение g_0 макроscopicкой восприимчивости и монотонно спадающее микроскопическое значение g (при нахождении последнего совместно с (4.51) решается уравнение (4.48), в котором макроscopicкие параметры χ_0 , q_0 должны быть заменены на микроскопические χ , q). Согласно рис. 10а с удалением от состава $f = 0,5$ значения восприимчивостей в точках потери эргодичности и замерзания уменьшаются, а соответствующие величины параметров χ_0 и χ_f возрастают. На рисунке 10б приведены зависимости $g(\chi)$, $g_0(\chi)$ при различных значениях корреляционной длины l , с увеличением которой эргодическая область, как и следовало ожидать, сужается. Согласно рис. 10в с ростом параметра межрешеточного перекрытия σ значения восприимчивостей g и g_0 спадают и, таким образом,

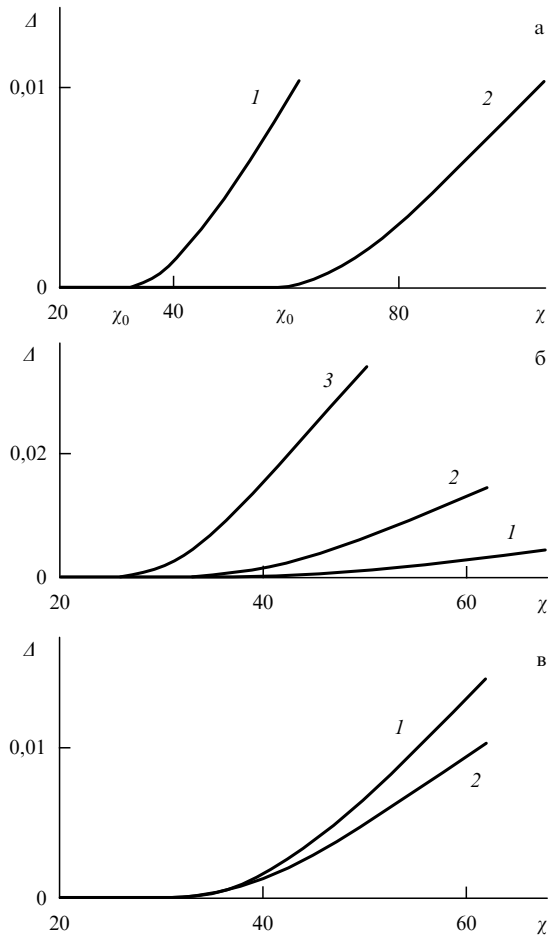


Рис. 12. Зависимость параметра неэргодичности Δ от параметра Флори–Хаггинса χ : (а) при $\sigma = 0$, $l = 0,1$ и различных значениях состава f (кривые 1, 2 отвечают $f = 0,5; 0,3$); (б) при $f = 0,5$, $\sigma = 0$ и различных значениях корреляционной длины l (кривые 1, 2, 3 отвечают $l = 0,05; 0,1; 0,2$); (в) при $f = 0,5$, $l = 0,1$ и различных значениях σ (кривые 1, 2 отвечают $\sigma = 0; 1$).

это перекрытие препятствует стеклованию гетерополимера.

Влияние термодинамического параметра χ на величину микроскопического параметра памяти q представлено на рис. 11. Характерной особенностью является отсутствие памяти ниже χ_f . Ненулевое значение q появляется в точке замерзания χ_f , и с дальнейшим увеличением χ параметр памяти монотонно нарастает. Скачок параметра q при $\chi = \chi_f$ указывает на то, что данный переход относится к первому роду. Очевидно, физической причиной указанного скачка является вклад флуктуаций в термодинамический потенциал гетерополимера. Согласно рис. 11а при удалении от состава $f = 0,5$ зависимость $q(\chi)$ становится более пологой. Увеличение корреляционной длины l , наоборот, увеличивает скорость нарастания параметра памяти (рис. 11б). И наконец, из рис. 11в видно, что влияния параметра межрепличного перекрытия σ выше и ниже точки потери эргодичности оказываются противоположными.

Параметр неэргодичности Δ , приведенный на рис. 12 в зависимости от величины χ , монотонно нарастает с удалением от точки χ_0 . При этом отклонение от состава $f = 0,5$, уменьшение корреляционной длины l и рост межрепличного перекрытия σ приводят к ослаблению эффектов неэргодичности.

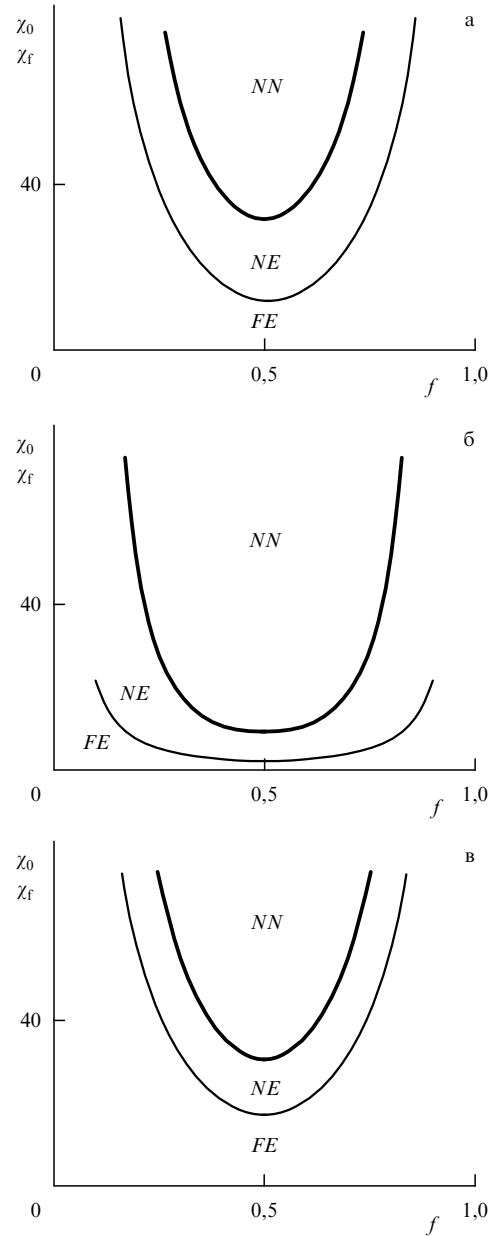


Рис. 13. Фазовая диаграмма неупорядоченного гетерополимера: (а) при $\sigma = 0$, $D = 1$ $l = 0,1$; (б) при $\sigma = 0$, $D = 1$ $l = 5$; (в) при $\sigma = 1$, $D = 1$ $l = 0,1$. Жирные линии отвечают потере эргодичности, тонкие — замерзанию; области FE, NE, NN соответствуют замороженной эргодической, размороженной эргодической и размороженной неэргодической фазам.

На рисунке 13 представлена фазовая диаграмма, определяющая термодинамические состояния неупорядоченного гетерополимера при различных значениях параметра Флори–Хаггинса χ и состава f . Видно, что как в точке стеклования, так и при потере эргодичности зависимости $\chi_f(f)$, $\chi_0(f)$ имеют вогнутый вид. При этом область больших значений χ , прилегающая к составу $f = 0,5$, отвечает неэргодическому незамороженному состоянию, а при уменьшении величин χ и $|f - 0,5|$ система сначала переходит в эргодическое состояние, а затем происходит стеклование. Сравнение рис. 13а и 13б показывает, что увеличение корреляционной длины l приводит к расширению размороженной и неэргодической фаз. Напротив, из рис. 13а и 13в видно,

что перекрытие между репликами приводит к их сужению.

5. Заключение

Суперсимметрия является одной из наиболее красивых и продуктивных концепций современной физики, используемых при описании микромира (для ознакомления можно рекомендовать обзоры, посвященные использованию суперсимметрии в квантовой механике [85, 86], теории неупорядоченных металлов [87] и теории суперструн [88–91]). Следуя идее, высказанной в работе [56] и развитой в [57], ранее мы показали [58], каким образом суперсимметрия может быть использована для описания макроскопического объекта, сводящегося к флуктуирующему полю (при этом имелся в виду фазовый переход, наблюдающийся при потере симметрии). Предлагаемая работа посвящена исследованию стохастических систем, фазовое пространство которых испытывает намного более сильную перестройку, связанную с потерей эргодичности [92]. При этом используется полевая схема, основанная на стандартном методе Мартина–Сиггя–Роуза [50] и на идее объединения стохастических полей в суперсимметричную конструкцию [56] (см. [51]).

Ни в коей мере не претендуя на оригинальность метода, в своем изложении мы преследовали следующую цель: основываясь на физическом примере, представляющем самостоятельный интерес, показать, что использование суперсимметричного поля при описании эффектов неэргодичности является столь же естественным, как введение комплексного поля в теории фазовых переходов. Из раздела 2 видно, что при этом требуется владение более сложным математическим аппаратом, но не более того: принципиальных трудностей здесь не возникает.

К сожалению, этого нельзя сказать по поводу методических трудностей, возникающих как при использовании полевой схемы, так и при построении суперсимметричной теории. Действительно, редкая полевая работа обходится без использования преобразования Хаббарда–Стратоновича или более изощренной процедуры, при которой единица записывается в виде интеграла от δ -функции, которая раскладывается затем в интеграл Фурье по полю духов. В результате возникают фиктивные поля, для которых не только не выясняется физический смысл, но даже не вводятся новые обозначения ("подвешиваются шляпки" и т.п.). Основная цель предлагаемого обзора состоит в том, чтобы уйти от ситуации, когда облака духов закрывают физическую суть⁴. Разумеется, при этом не удается избежать типично полевых приемов типа интегральных представлений (2.8), (2.36) для δ -функции и якобиана перехода от стохастической составляющей сопряженного поля ζ к амплитуде гидродинамической моды x . Однако впоследствии мы устанавливаем физический смысл появляющихся при этом поля духов p и грассмановых полей $\psi, \bar{\psi}$.

⁴ В этой связи нельзя не вспомнить известную фразу Дж. Займана: "На физике-теоретике лежит ответственность за чистоту логических путей построения теории в борьбе с процветающим феноменологическим подходом, с лихорадочным жонглированием физическими понятиями, с иссушающей тавтологией бессодержательных формализмов, с галлюцинациями, порождаемыми нереалистическими гипотезами" [93].

Другая наша задача связана с преодолением технических трудностей, возникающих при построении суперсимметричной схемы. Эти трудности обусловлены тем, что в зависимости от выбора начала отсчета времени возможны два варианта суперсимметричных полей. Кроме того, суперсимметричное поле может иметь как четыре, так и две компоненты, причем в последнем случае оно не обязательно является киральным. Учитывая такое разнообразие, мы провели в разделе 2 подробное рассмотрение, которое устанавливает связь между указанными вариантами. Это позволило найти оптимальный путь построения самосогласованной суперсимметричной схемы, представляющей стохастическую систему.

И наконец, прикладная цель обзора состояла в применении развитой суперсимметричной схемы к нетривиальному объекту, описание которого в рамках других подходов либо не представляется возможным, либо приводит к противоречивым результатам. Неупорядоченный гетерополимер представляет, на наш взгляд, идеальный пример такого объекта. Действительно, если приближение случайных энергий дает лишь качественную картину его поведения (см. раздел 1), то изложение метода реплик в разделе 3 показывает, что его использование может приводить к взаимно исключающим результатам. Поэтому поиск принципиально нового метода описания неупорядоченного гетерополимера является актуальным как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения. Основным препятствием к использованию идеи суперсимметрии является здесь чрезвычайная сложность уравнения движения полимера, которая не позволяет использовать его для построения производящего функционала. Мы обходим эту трудность, используя эффективное уравнение движения, которое описывает случайное чередование мономеров разных сортов при движении вдоль полимерной цепи.

Автор благодарен В.Г. Барьяхтару за поддержку работы, В.А. Бражному за сотрудничество и помощь при оформлении рукописи, С.И. Кучанову за введение в теорию полимеров. Автор также признателен Институту Макса Планка по физике сложных систем (Германия) за оказанное гостеприимство.

6. Приложения

6.1. Приложение А

Выпишем в лагранжиане (2.10) евклидовой теории поля кинетическую κ и потенциальную π энергии:

$$L = \kappa + \pi, \quad (6.1)$$

$$\kappa = \varphi \dot{\eta} - \frac{1}{2} \varphi^2, \quad (6.2)$$

$$\pi = \frac{\partial V}{\partial \eta} \varphi. \quad (6.3)$$

Для придания кинетической энергии (6.2) вида (2.13) следует найти оператор D . В общем случае он представляется в виде

$$D = a + b \frac{\partial}{\partial \vartheta} + c \vartheta + d \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad (6.4)$$

где коэффициенты a, b, c, d являются функциями производной $\partial_t \equiv \partial/\partial t$. Подстановка выражений (2.11), (6.4) в (2.13) с учетом свойств (2.12) приводит к требуемому

выражению (6.2) при значениях

$$a = \partial_t, \quad b = -1, \quad c = 0, \quad d = -2\partial_t. \quad (6.5)$$

В результате оператор (6.4) приобретает форму (2.14). При этом он удовлетворяет равенству

$$D^2 = \partial_t^2. \quad (6.6)$$

Используя определения (2.11), (2.12), (2.14), легко убедиться в эрмитовости оператора D .

Действие инфинитезимального оператора

$$\delta \equiv \exp(\varepsilon D) - 1 \simeq \varepsilon D, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

на величины t и ϑ приводит к добавкам $\delta t = \varepsilon$, $\delta \vartheta = -\varepsilon$, отличающимся только знаком. При рассмотрении соответствующей вариации поля $|\delta\phi_\varphi| = \varepsilon|D_\varphi||\phi_\varphi|$ удобно использовать матричное представление нильпотентного поля (2.11) и оператора D

$$|\phi_\varphi| = \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad |D_\varphi| = \begin{pmatrix} \partial_t & -1 \\ 0 & -\partial_t \end{pmatrix}, \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.7)$$

Отсюда видно, что изменение параметра порядка пропорционально разнице между скоростью изменения его величины и амплитудой флуктуаций, тогда как изменение последней пропорционально ее скорости с обратным знаком.

Для сведения нильпотентной формы (2.15) к виду потенциальной энергии (6.3) проведем в ней разложение термодинамического потенциала по степеням слагаемого $\vartheta\varphi$ в (2.20):

$$\pi = \int \left[V(\eta) + \frac{\delta V}{\delta \eta} \vartheta\varphi \right] d\vartheta. \quad (6.8)$$

Здесь все слагаемые высшего порядка пропадают в силу условия нильпотентности. С учетом свойств (2.12) интегрирование (6.8) приводит к требуемому результату (6.3).

Переход к нильпотентному полю (2.30) осуществляется тривиальным образом, поэтому достаточно указать отличия от рассмотренного случая. Инфинитезимальное преобразование $\delta \simeq \varepsilon D$, где генератор D задается равенством (2.31), дает $\delta t = 0$, $\delta \vartheta = -\varepsilon$. Вариация поля $|\delta\phi_f| = \varepsilon|D_f||\phi_f|$ представляется матрицами

$$|\phi_f| = \begin{pmatrix} \eta \\ -f \end{pmatrix}, \quad |D_f| = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\partial_t^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.9)$$

При этом оператор D_f обладает тем же свойством (6.6). Легко видеть, что лагранжианы (2.10), (2.25) инвариантны относительно преобразований, задаваемых генераторами D_φ , D_f , если инфинитезимальный параметр ε является чисто мнимым, а поля $\eta(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $f(\mathbf{r}, t)$ — комплексными.

Матрицы, обеспечивающие переход от поля (6.9) к полю (6.7) и обратно (см. (2.32), (2.35)), имеют вид

$$|\tau_\pm| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm\partial_t & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Перейдем к рассмотрению четырехкомпонентных суперсимметричных полей (2.39), (2.52). В отличие от (6.6) соответствующие пары операторов (2.42), (2.53) подчиняются условиям

$$\begin{aligned} D^2 = \bar{D}^2 = 0, \quad \{\bar{D}, D\} = -2\partial_t, \quad [\bar{D}, D]^2 = (2\partial_t)^2, \\ \{D_\varphi, D_f\} = \{\bar{D}_\varphi, \bar{D}_f\} = 0, \quad \{\bar{D}_\varphi, D_f\} = -\partial_t, \\ \{\bar{D}_f, D_\varphi\} = -3\partial_t, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где фигурные и квадратные скобки обозначают соответственно антикоммутаторы и коммутаторы. Для операторов $\mathcal{D}^{(\pm)} \equiv \mathcal{D}(\pm t)$, $\bar{\mathcal{D}}^{(\pm)} \equiv \bar{\mathcal{D}}(\pm t)$, соответствующих разным направлениям времени t , обобщенные антикоммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}^{(\pm)}, \mathcal{D}^{(\mp)}\} = \{\bar{\mathcal{D}}^{(\pm)}, \bar{\mathcal{D}}^{(\mp)}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_f^{(\pm)}, \mathcal{D}_f^{(\mp)}\} = 0, \\ \{\bar{\mathcal{D}}^{(\pm)}, \mathcal{D}^{(\pm)}\} = -\{\bar{\mathcal{D}}_\varphi^{(\pm)}, \mathcal{D}_\varphi^{(\mp)}\} = \mp 2\partial_t; \\ \{\mathcal{D}_\varphi^{(\pm)}, \mathcal{D}_f^{(\pm)}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_\varphi^{(\pm)}, \bar{\mathcal{D}}_f^{(\pm)}\} = 0, \quad \{\bar{\mathcal{D}}_\varphi^{(\pm)}, \mathcal{D}_f^{(\pm)}\} = \mp \partial_t, \\ \{\bar{\mathcal{D}}_f^{(\pm)}, \mathcal{D}_\varphi^{(\pm)}\} = \mp 3\partial_t; \\ \{\mathcal{D}_\varphi^{(\pm)}, \mathcal{D}_f^{(\mp)}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_\varphi^{(\pm)}, \bar{\mathcal{D}}_f^{(\mp)}\} = 0, \\ \{\bar{\mathcal{D}}_\varphi^{(\pm)}, \mathcal{D}_f^{(\mp)}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_f^{(\pm)}, \mathcal{D}_\varphi^{(\mp)}\} = \pm \partial_t. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Доказательство соотношений (6.11), (6.12) наиболее просто достигается с помощью матричного представления, подобного (6.7), (6.9):

$$\begin{aligned} |\Phi_\varphi| = \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \\ -\bar{\psi} \\ \varphi \end{pmatrix}, \\ |D_\varphi| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\partial_t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\partial_t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{D}_\varphi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_f| = \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \\ -\bar{\psi} \\ -f \end{pmatrix}, \\ |D_f| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \partial_t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{D}_f| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\partial_t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Матрицы перехода от поля (6.14) к (6.13) имеют вид (ср. с (6.10))

$$|T_\pm| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \pm\partial_t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Действие инфинитезимальных операторов $\delta \simeq \bar{\varepsilon} D$, $\bar{\delta} \simeq \bar{\varepsilon} \bar{D}$ дает

$$\begin{aligned} \delta_\varphi \theta = 0, \quad \delta_\varphi \bar{\theta} = \bar{\varepsilon}, \quad \delta_\varphi t = -2\bar{\varepsilon}\theta, \\ \bar{\delta}_\varphi \theta = \varepsilon, \quad \bar{\delta}_\varphi \bar{\theta} = 0, \quad \bar{\delta}_\varphi t = 0; \\ \delta_f \theta = 0, \quad \delta_f \bar{\theta} = \bar{\varepsilon}, \quad \delta_f t = -\bar{\varepsilon}\theta, \\ \bar{\delta}_f \theta = \varepsilon, \quad \bar{\delta}_f \bar{\theta} = 0, \quad \bar{\delta}_f t = -\bar{\varepsilon}\theta; \\ |\delta\Phi_\varphi| = \bar{\varepsilon}|D_\varphi||\Phi_\varphi|, \quad |\bar{\delta}\Phi_\varphi| = |\bar{D}_\varphi||\Phi_\varphi|\varepsilon; \\ |\delta\Phi_f| = \bar{\varepsilon}|D_f||\Phi_f|, \quad |\bar{\delta}\Phi_f| = |\bar{D}_f||\Phi_f|\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.16)$$

По аналогии с (6.8) для поля (2.39) имеем

$$\int V(\Phi_\varphi) d^2\theta = \frac{\delta V}{\delta\eta} \varphi - \bar{\psi} \frac{\delta^2 V}{\delta\eta^2} \psi. \quad (6.17)$$

При переходе к полю (2.52) вместо φ появляется $-f$.

6.2. Приложение Б

Следуя стандартной полевой схеме [52], проведем разделение четырехкомпонентного суперсимметричного поля (2.52) на пару киральных грассманово сопряженных двухкомпонентных составляющих Φ_\pm . Они получаются из исходного суперполя Φ_f следующим образом:

$$\Phi_\pm = T_\pm \Phi_f; \quad T_\pm \equiv \exp(\pm\delta), \quad \delta \equiv \bar{\theta}\theta\partial_t, \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.18)$$

Соответственно генераторы (2.53) принимают вид

$$\mathcal{D}_\pm = T_\pm \mathcal{D}_f T_\pm, \quad \bar{\mathcal{D}}_\pm = T_\pm \bar{\mathcal{D}}_f T_\mp. \quad (6.19)$$

С учетом грассмановой природы параметра δ в операторе T_\pm перепишем выражение (6.19):

$$\mathcal{D}_\pm = \mathcal{D}_f \pm [\delta, \mathcal{D}_f], \quad \bar{\mathcal{D}}_\pm = \bar{\mathcal{D}}_f \pm [\delta, \bar{\mathcal{D}}_f], \quad (6.20)$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор. В явном виде имеем

$$\mathcal{D}_+ = \frac{\partial}{\partial\theta} - 2\theta\partial_t, \quad \mathcal{D}_- = \frac{\partial}{\partial\theta}; \quad (6.21)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_+ = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \quad \bar{\mathcal{D}}_- = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - 2\bar{\theta}\partial_t.$$

Легко показать, что операторы \mathcal{D}_+ , $\bar{\mathcal{D}}_+$ совпадают с генераторами \mathcal{D}_φ , $\bar{\mathcal{D}}_\varphi$, определенными равенствами (2.42).

Согласно определению (2.52) преобразования (6.18) дают

$$\Phi_\pm = \eta + \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta \pm \bar{\theta}\theta(\dot{\eta} \mp f), \quad (6.22)$$

где точка означает производную по времени. Сравнение равенства (6.22) с определением (2.39) приводит к тождеству $\Phi_\pm \equiv \Phi_\varphi$. Действуя операторами (6.21) на поле (6.22), получаем

$$\mathcal{D}_\pm \Phi_\pm = \psi - \theta(\dot{\eta} + f) + \underline{2\bar{\theta}\theta\dot{\psi}}, \quad (6.23)$$

$$-\bar{\mathcal{D}}_\mp \Phi_\mp = \bar{\psi} + \bar{\theta}(\dot{\eta} - f) - \underline{2\bar{\theta}\theta\dot{\bar{\psi}}},$$

где подчеркнутые слагаемые отвечают верхним индексам.

По определению киральные суперсимметричные поля задаются калибровочными условиями [52]

$$\mathcal{D}_- \Phi_- = 0, \quad \bar{\mathcal{D}}_+ \Phi_+ = 0, \quad (6.24)$$

которые в согласии с (6.21) означают, что Φ_- не зависит от $\bar{\theta}$, а Φ_+ от θ . С другой стороны, согласно (6.23) калибровка (6.24) приводит к условиям

$$\psi - \theta(f + \dot{\eta}) = 0, \quad (6.25)$$

$$\bar{\psi} + \bar{\theta}(\dot{\eta} - f) = 0$$

для полей Φ_- и Φ_+ соответственно. Подставляя (6.25) в (6.22), находим окончательные выражения для кираль-

ных полей

$$\phi_- = \eta + \bar{\psi}\theta, \quad (6.26)$$

$$\phi_+ = \eta + \bar{\theta}\psi.$$

Они дают неприводимое представление суперсимметричных полей (2.39), (2.52) при калибровке (6.24). Компонента $\phi_+(t)$ отвечает положительному направлению времени t , $\phi_-(t)$ — отрицательному [52].

6.3. Приложение В

Рассмотрим свойства инвариантности суперсимметричного действия

$$S = \int [K(\Phi(z)) + V(\Phi(z))] dz, \quad (6.27)$$

$$K(\Phi) = \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}\Phi)(\mathcal{D}\Phi), \quad z \equiv \{\mathbf{r}, t, \theta, \bar{\theta}\},$$

при преобразованиях

$$\delta\Phi = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \mathcal{D}^{(\alpha)} \Phi, \quad \bar{\delta}\Phi = \sum_\alpha \bar{\mathcal{D}}^{(\alpha)} \Phi \varepsilon_\alpha, \quad (6.28)$$

задаваемых суперсимметричными генераторами $\mathcal{D}^{(\alpha)}$, $\bar{\mathcal{D}}^{(\alpha)}$. Эти преобразования представляют собой комбинации производных по времени t и грассмановым координатам $\theta, \bar{\theta}$. Согласно (6.17) потенциальная энергия в (6.27) инвариантна в силу независимости ее ядра от времени t . С точностью до полной производной по времени грассманово сопряженные вириалы кинетической энергии

$$\delta K = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}} \left(\sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \mathcal{D}^{(\alpha)} \Phi \right) (\mathcal{D}\Phi) + \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}\Phi) \mathcal{D} \left(\sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \mathcal{D}^{(\alpha)} \Phi \right), \quad (6.29)$$

$$\bar{\delta} K = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}} \left(\sum_\alpha \bar{\mathcal{D}}^{(\alpha)} \Phi \varepsilon_\alpha \right) (\mathcal{D}\Phi) + \frac{1}{2} (\bar{\mathcal{D}}\Phi) \mathcal{D} \left(\sum_\alpha \bar{\mathcal{D}}^{(\alpha)} \Phi \varepsilon_\alpha \right)$$

записываются в виде

$$\delta K = \frac{1}{2} \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \mathcal{D}^{(\alpha)} [(\bar{\mathcal{D}}\Phi)(\mathcal{D}\Phi)], \quad (6.30)$$

$$\bar{\delta} K = \frac{1}{2} \sum_\alpha \bar{\mathcal{D}}^{(\alpha)} [(\bar{\mathcal{D}}\Phi)(\mathcal{D}\Phi)] \varepsilon_\alpha,$$

если антикоммутаторы $\{\mathcal{D}, \mathcal{D}^{(\alpha)}\}$, $\{\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{(\alpha)}\}$, $\{\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}^{(\alpha)}\}$, $\{\bar{\mathcal{D}}, \bar{\mathcal{D}}^{(\alpha)}\}$ равны нулю или сводятся к производной по времени. Согласно соотношениям (6.11), (6.12) указанные условия выполняются для исходных операторов \mathcal{D} , $\bar{\mathcal{D}}$, для операторов \mathcal{D}_\pm , $\bar{\mathcal{D}}_\pm$, преобразованных согласно соотношениям (6.19), а также для операторов $\mathcal{D}_\pm^{(\pm)}$, $\bar{\mathcal{D}}_\pm^{(\pm)}$, отвечающих противоположным направлениям времени. Будучи комбинациями производных по времени t и грассмановым координатам $\theta, \bar{\theta}$ указанные операторы при подстановке в выражения (6.30) дают нулевую вариацию действия (6.27).

Из указанных выражений нетривиальными свойствами обладают операторы

$$\mathcal{D}_-^{(-)} = \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \bar{\mathcal{D}}_-^{(-)} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + 2\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t} \quad (6.31)$$

и их антикоммутиратор $\{\overline{\mathcal{D}}_-^{(-)}, \mathcal{D}_-^{(-)}\} = 2\partial_t$ (см. (6.12)). Они получают в результате двойного действия преобразования T_- на исходные генераторы $\mathcal{D}_\varphi, \overline{\mathcal{D}}_\varphi$ и отвечают генераторам $\mathcal{D}_-, \overline{\mathcal{D}}_-$ с измененным направлением времени. Это определяет принципиально важную роль генераторов $\mathcal{D}_-^{(-)} \equiv \mathcal{D}_-(-t)$, $\overline{\mathcal{D}}_-^{(-)} \equiv \overline{\mathcal{D}}_-(-t)$, заданных равенствами (6.31).

Выполняя стандартные выкладки, легко показать, что условия $\delta S = 0$, $\overline{\delta S} = 0$ приводят к тождествам Уорда [51]

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{D}_i^{(z)} \Gamma^{(n)}(\{z_i\}) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{D}}_i^{(z)} \Gamma^{(n)}(\{z_i\}) = 0 \quad (6.32)$$

для суперсимметричной n -точечной неприводимой вершины $\Gamma^{(n)}$ типа суперкоррелятора $C(z_2, z_1)$ или собственно-энергетической суперфункции $\Sigma(z_2, z_1)$. При $\mathcal{D}^{(z)} \equiv \partial_t$, $\overline{\mathcal{D}}^{(z)} \equiv \mathcal{D}_-^{(-)}$ условия (6.32) означают, что суперкорреляторы могут зависеть только от разностей $t_2 - t_1$, $\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1$:

$$C_\varphi(z_2, z_1) = S(t_2 - t_1) + (\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1) \times \\ \times [G_+(t_2 - t_1)\theta_2 - G_-(t_2 - t_1)\theta_1], \quad (6.33)$$

где для краткости опущена пространственная зависимость. Согласно определению суперполя (2.39) имеем

$$S(t_2 - t_1) = \langle \eta(t_2) \eta(t_1) \rangle, \\ G_+(t_2 - t_1) = \langle \varphi(t_2) \eta(t_1) \rangle \vartheta(t_1 - t_2) = \\ = \langle \overline{\psi}(t_2) \psi(t_1) \rangle \vartheta(t_1 - t_2), \quad (6.34) \\ G_-(t_2 - t_1) = \langle \eta(t_2) \varphi(t_1) \rangle \vartheta(t_2 - t_1) = \\ = \langle \overline{\psi}(t_1) \psi(t_2) \rangle \vartheta(t_2 - t_1),$$

где $\vartheta(t) = 1$ при $t > 0$ и $\vartheta(t) = 0$ при $t < 0$. В соответствии с условием причинности опережающая функция Грина $G_+(t_2 - t_1)$, стоящая перед $\overline{\theta}_1\theta_2$, исчезает при $t_1 < t_2$; с другой стороны, запаздывающая функция $G_-(t_2 - t_1)$, отвечающая множителю $\overline{\theta}_2\theta_1$, исчезает при $t_1 > t_2$. Условие симметрии $C(z_1, z_2) = C(z_2, z_1)$ приводит к соотношениям $S(t_2 - t_1) = S(t_1 - t_2)$, $G_-(t_2 - t_1) = G_+(t_1 - t_2)$. Подстановка оператора $\mathcal{D}_-^{(-)}$ в тождество Уорда (6.32) дает уравнение

$$2\dot{S}(t) = G_+(t) - G_-(t), \quad (6.35)$$

сводящееся к флуктуационно-диссипационной теореме, взятой во временном представлении. Разумеется, сказанное относится не только к суперкоррелятору, но и к собственно-энергетической суперфункции, компонентам $\Sigma(t_2 - t_1)$, $\Sigma_\pm(t_2 - t_1)$ которой отвечают $S(t_2 - t_1)$, $G_\pm(t_2 - t_1)$.

Суперсимметричная природа соотношений (6.34) проявляется в том, что они связывают корреляторы бозевских компонент η, φ и фермиевских $\psi, \overline{\psi}$. Используя выше тождества Уорда (6.32) позволили получить эти соотношения как тривиальное следствие определения суперсимметричного поля (2.39). Однако указанные равенства могут быть получены и элементарным путем. Действительно, согласно определениям (2.23), (2.38) ферми-коррелятор $\langle \overline{\psi}\psi \rangle$ равен $(\delta^2 V / \delta\eta^2)^{-1}$. С

другой стороны, используя определение восприимчивости и равенства (2.24), (2.28), для бозе-коррелятора имеем $\langle \eta\varphi \rangle = \langle \delta\eta / \delta\varphi \rangle = \langle (\delta\varphi / \delta\eta)^{-1} \rangle = (\delta^2 V / \delta\eta^2)^{-1}$, что дает требуемый результат.

Очевидно, для перехода к корреляторам двухкомпонентного нильпотентного поля (2.11) необходимо заменить множители $(\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1)\theta_2$, $(\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1)\theta_1$ в (6.33) на нильпотентные координаты $\vartheta_2, -\vartheta_1$ и опустить слагаемое $\overline{\vartheta}_2\vartheta_1$.

Суперсимметричный коррелятор

$$C_f(z_2, z_1) = T_-(z_2)T_-(z_1)C_\varphi(z_2, z_1),$$

соответствующий суперполям (2.30), (2.52), имеет вид

$$C_f(z_2, z_1) = S + \overline{\theta}_2\theta_2 m_+ + \overline{\theta}_1\theta_1 m_- - \overline{\theta}_2\theta_1 G_- - \overline{\theta}_1\theta_2 G_+, \quad (6.36)$$

где опущены аргументы $t_2 - t_1$ в множителях S, m_\pm, G_\pm и с учетом выражения (2.24) введены функции (ср. с (6.34))

$$m_+(t) = \langle \eta(-t) \rangle \vartheta(-t) f_{\text{ext}}, \\ m_-(t) = \langle \eta(t) \rangle \vartheta(t) f_{\text{ext}}, \quad f_{\text{ext}} \equiv -f, \quad (6.37)$$

дающие связь между средним параметром порядка $\langle \eta(t) \rangle$ и внешней силой $f_{\text{ext}} \equiv -f$ (имеется в виду, что последняя включается в момент времени $t = 0$ и сохраняет свое значение). Корреляторы (6.37) связаны с функциями Грина равенством

$$G_\pm(t) = m_\pm(t) \pm \dot{S}(t) \quad (6.38)$$

и подчиняются условию симметрии $m_+(-t) = m_-(t)$.

Список литературы

1. Гинзбург В Л *УФН* **169** 419 (1999)
2. Weisbuch G *Complex System Dynamics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1991)
3. *Self-organization of Complex Structures: from Individual to Collective Dynamics* (Ed. F Schweitzer) (Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 1997)
4. Bouchaud J-P, Georges A *Phys. Rep.* **195** 127 (1990)
5. Halpin-Healy T, Zhang Y *Phys. Rep.* **254** 215 (1995)
6. Tsallis C, in *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications* (Lecture Notes in Physics, Vol. 560, Eds S Abe, Y Okamoto) (New York: Springer, 2001)
7. De Oliveira S M, de Oliveira P M C, Stauffer D *Evolution, Money, War, and Computers* (Teubner-Texte zur Physik, Bd. 34) (Stuttgart: Teubner, 1999)
8. Anderson P W, Arrow K J, Pines D (Eds) *The Economy as an Evolving Complex System* (Redwood City, Calif.: Addison-Wesley Publ. Co., 1988)
9. Arthur W B, Durlauf S N, Lane D (Eds) *The Economy as an Evolving Complex System II* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1997)
10. Kertész J, Kondor I *Econophysics: an Emerging Science* (Dordrecht: Kluwer, 1998)
11. Chowdhury D, Santen L, Schadschneider A *Phys. Rep.* **329** 199 (2000)
12. *Traffic and Granular Flow* (Eds D F Wolf, M Schreckenberg, A Bachem) (Singapore: World Scientific, 1996)
13. *Traffic and Granular Flow '97* (Eds M Schreckenberg, D E Wolf) (New York: Springer, 1998)
14. Edwards S F, Anderson P W *J. Phys. F* **5** 965 (1975)
15. Sherrington D, Kirkpatrick S *Phys. Rev. Lett.* **35** 1792 (1975); *Phys. Rev. B* **17** 4384 (1978)
16. Mezard M, Parisi G, Virasoro M A *Spin Glass Theory and Beyond* (Singapore: World Scientific, 1987)
17. Binder K, Young A P *Rev. Mod. Phys.* **58** 801 (1986)

18. Доценко В С *УФН* **163** (6) 1 (1993)
19. Hopfield J J *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **79** 2554 (1982)
20. *Models of Neural Networks. I* (Eds E Domany, J L van Hemmen, K Schulten) (Berlin: Springer-Verlag, 1991); *Models of Neural Networks. II* (Berlin: Springer-Verlag, 1994); *Models of Neural Networks. III* (Berlin: Springer-Verlag, 1995)
21. Coolen A C C, cond-mat/0006010; cond-mat/0006011
22. Olemskoi A I *Theory of Structure Transformations in Non-equilibrium Condensed Matter* (Commack, N.Y.: Nova Science, 1999)
23. Флори П *Статистическая механика цепных молекул* (М.: Мир, 1971)
24. Де Жен П *Идеи скейлинга в физике полимеров* (М.: Мир, 1982)
25. Doi M, Edwards S F *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford: Clarendon Press, 1986)
26. Binder K *Adv. Polym. Sci.* **112** 181 (1994)
27. Sfatos C D, Shakhnovich E I *Phys. Rep.* **288** 77 (1997)
28. Гросберг А Ю *УФН* **167** 129 (1997)
29. Лифшиц И М, Гросберг А Ю, Хохлов А Р *УФН* **127** 353 (1979)
30. Гросберг А Ю, Хохлов А Р *Статистическая физика макромолекул* (М.: Наука, 1989)
31. *Protein Folding* (Ed. T E Creighton) (New York: W.H. Freeman and Co., 1992)
32. Лифшиц И М *ЖЭТФ* **55** 2408 (1968)
33. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Наука, 1976)
34. Leibler L *Macromolecules* **13** 1602 (1980)
35. Flory P J *Principles of Polymer Chemistry* (Ithaca: Cornell Univ. Press, 1953)
36. Бразовский С А *ЖЭТФ* **68** 175 (1975)
37. Fredrickson G H, Helfand E *J. Chem. Phys.* **87** 697 (1987)
38. Fredrickson G H, Milner S T, Leibler L *Macromolecules* **25** 6341 (1992)
39. Pande V S, Grosberg A Yu, Tanaka T *Phys. Rev. E* **51** 3381 (1995)
40. Sfatos C D, Gutin A M, Shakhnovich E I *Phys. Rev. E* **48** 465 (1993)
41. Shakhnovich E I, Gutin A M *J. Phys. (Paris)* **50** 1843 (1989)
42. Derrida B *Phys. Rev. Lett.* **45** 79 (1980)
43. Derrida B, Gardner E J *Phys. C* **19** 2253 (1986)
44. Гинзбург С Л *ЖЭТФ* **85** 2171 (1983)
45. Sompolinsky H, Zippelius A *Phys. Rev. Lett.* **47** 359 (1981); *Phys. Rev. B* **25** 6860 (1982)
46. Olemskoi A I *Physica A* **270** 444 (1999)
47. Олемской А И, Бражный В А *Укр. физ. журн.* **44** 892 (1999)
48. Олемской А И, Бражный В А *ФТТ* **43** 369 (2001)
49. Olemskoi A I, Brazhnyi V A *Physica A* **273** 368 (1999)
50. Martin P C, Siggia E D, Rose H A *Phys. Rev. A* **8** 423 (1973)
51. Zinn-Justin J *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* 2nd ed. (Oxford: Clarendon Press, 1993)
52. Ахиезер А И, Пелетминский С В *Поля и фундаментальные взаимодействия* (Киев: Наукова думка, 1986)
53. Гольфанд Ю А, Лихтман Е П *Письма в ЖЭТФ* **13** 452 (1971)
54. Волков Д В, Акулов А П *Письма в ЖЭТФ* **16** 621 (1972)
55. Wess J, Zumino B *Nucl. Phys. B* **70** 39 (1974)
56. Parisi G, Sourlas N *Phys. Rev. Lett.* **43** 744 (1979)
57. Фейгельман М В, Цвеллик А М *ЖЭТФ* **83** 1430 (1982)
58. Олемской А И, Коплык И В *УФН* **165** 1105 (1995)
59. Kurchan J J *Phys. I (Paris)* **2** 1333 (1992)
60. Vilgis T A *J. Phys. A* **24** 5321 (1991)
61. Olemskoi A I, Kopylk I V, Brazhnyi V A *J. Phys. Studies* **1** 324 (1997)
62. Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1980)
63. Risken H *The Fokker-Planck Equation* (Berlin: Springer-Verlag, 1989)
64. Олемской А И *УФН* **168** 287 (1998)
65. Stepanov S, Dobrynin A F, Vilgis T A, Binder K *J. Phys. I (Paris)* **6** 837 (1996)
66. Franz S, Hertz J *Phys. Rev. Lett.* **74** 2114 (1995)
67. Кац Е И, Лебедев В В *Динамика жидких кристаллов* (М.: Наука, 1988)
68. Зубарев Д Н *Неравновесная статистическая термодинамика* (М.: Наука, 1971)
69. Mattuck R D *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem* (London: McGraw-Hill Publ. Co., 1967)
70. Gugliandolo L F, Kurchan J *Phys. Rev. Lett.* **71** 173 (1993); *Philos. Mag. B* **71** 501 (1995)
71. Franz S, Mézard M *Physica A* **210** 48 (1994)
72. Kinzelbach H, Horner H *J. Phys. I (Paris)* **3** 1329, 1901 (1993)
73. Horner H Z. *Phys. B* **100** 243 (1996)
74. Bouchaud J-P et al, in *Spin Glasses and Random Fields* (Ed. A P Young) (Singapore: World Scientific, 1998)
75. Gugliandolo L F, Kurchan J, Peliti L *Phys. Rev. E* **55** 3898 (1997)
76. Olemskoi A I, in *Physics Reviews Vol. 18 Pt. 1* (Ed. I M Khalatnikov) (London: Gordon & Breach, 1996) p. 1
77. Olemskoi A I, Kiselev A D *Phys. Lett. A* **247** 221 (1998)
78. Олемской А И *Письма в ЖЭТФ* **69** 391 (1999)
79. Олемской А И *Письма в ЖЭТФ* **71** 412 (2000)
80. Wolynes P G, in *Spin Glass Ideas in Biology* (Ed. D Stein) (Singapore: World Scientific, 1991)
81. Dobrynin A V, Erukhimovich I Ya *J. Phys. I (Paris)* **5** 365 (1995)
82. Rammal R, Toulouse G, Virasoro M A *Rev. Mod. Phys.* **58** 765 (1986)
83. Glauber R J *J. Math. Phys.* **4** 294 (1963)
84. Olemskoi A I, Klepikov V F *Phys. Rep.* **338** 571 (2000)
85. Генденштейн Л Э, Криве И В *УФН* **146** 553 (1985)
86. Соопер F, Khare A, Sukhatme U *Phys. Rep.* **251** 267 (1995)
87. Efetov K B *Adv. Phys.* **32** 53 (1983)
88. Барбашов Б М, Нестеренко В В *УФН* **150** 489 (1986)
89. Казаков Д И *УФН* **150** 561 (1986)
90. Грин М *УФН* **150** 577 (1986)
91. Энтони С *УФН* **150** 579 (1986)
92. Palmer R G *Adv. Phys.* **31** 669 (1982)
93. Займан Дж *Модели беспорядка* (М.: Мир, 1982) с. 10

Supersymmetric field theory of a non-equilibrium stochastic system as applied to random heteropolymers

A.I. Olemskoi

Sumy State University

ul. Rimskii-Korsakov 2, 40007 Sumy, Ukraine

Tel. (7-0542) 33-55 13

E-mail: olemskoi@ssu.sumy.ua

A supersymmetric field scheme is derived based on the Langevin equation which enables memory and non-ergodicity effects in a non-equilibrium stochastic system with quenched disorder to be described in an optimal manner. This scheme is applied to a random heteropolymer, whose effective Hamiltonian is found to be simply the free energy as a function of the compositional order parameter. Instead of the Langevin equation, an effective equation of motion is used to describe the way different monomers alternate as they move along a polymer chain. The isothermal and adiabatic susceptibilities, memory parameter, and irreversible response to temperature are determined as functions of the temperature and of the amount of quenched disorder.

PACS numbers: **05.40.** – a, **05.70.Ln**, **11.30.Pb**, **61.41.** + e
Bibliography — 93 references

Received 15 December 2000