

## КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

## Научная сессия Отделения общей физики и астрономии Российской академии наук

(25 октября 2000 г.)

25 октября 2000 г. в Институте физических проблем им. П.Л. Капицы РАН состоялась научная сессия Отделения общей физики и астрономии Российской академии наук. На сессии были заслушаны доклады:

1. **Разумова К.А.** (Институт ядерного синтеза, РНЦ "Курчатовский институт", Москва). *Возникновение транспортных барьеров в плазме токамака.*

2. **Марченко А.В.** (Институт общей физики РАН, Москва). *Модель формирования торосов в дрейфующем ледяном покрове.*

Краткие содержания докладов публикуются ниже.

PACS numbers: 52.30.-q, 52.35.-g, 52.55.Fa

### Возникновение транспортных барьеров в плазме токамака

К.А. Разумова

Широко известно, что во всем мире много лет ведутся исследования с целью создания управляемого термоядерного реактора — мощного безопасного источника энергии. Основное направление, уже практически приведшее к техническому проекту реактора, использует плазму с протекающим по ней током, помещенную в тороидальное магнитное поле. Это установки "токамак". Мы не будем здесь говорить о технических достижениях этого направления — температуре плазмы, достигающей 35 кэВ, высоком коэффициенте использования давления магнитного поля и т.д. Мы будем говорить об удивительных свойствах горячей замагниченной плазмы — этой, казалось бы аморфной, подверженной несчетному количеству неустойчивостей, субстанции. На практике она, оказывается, может проявлять стройность, достойную кристалла.

В идеале, помещенная в сильное магнитное поле плазма должна иметь низкие коэффициенты переноса, так как при столкновениях частицы могут смещаться только на величину  $\Delta x = \rho_{\text{Лар}}$ . На самом деле, даже помещенная в сильное магнитное поле плазма остается очень подвижной и подверженной многим неустойчивостям, которые ухудшают удержание энергии и частиц. Оставим в стороне кинетические неустойчивости и рассмотрим крупномасштабные магнитогидродинамиче-

ские (МГД), которые в первую очередь определяют поведение плазмы.

Так как в токамаке вдоль плазменного кольца протекает ток, магнитные силовые линии навиваются на тороидальную ось. Шаг их закручивания характеризуется величиной:

$$q = \frac{B_t r}{B_p R},$$

где  $B_t$  и  $B_p$  напряженность тороидального и полоидального магнитных полей, а  $r$  и  $R$  — соответственно малый и большой радиусы плазменного тора. На некоторых радиусах силовая линия, обернувшись один или более раз вокруг тора, может замкнуться сама на себя. Такие поверхности называются рациональными и характеризуются числом  $m$ , соответствующим количеству обходов до замыкания. Если такая силовая линия еще дополнительно прокрутилась вокруг тороидальной оси, мы можем характеризовать это числом  $n$ . Таким образом,

$$q = \frac{B_t r}{B_p R} = \frac{m}{n}.$$

Энергетически току выгоднее течь вдоль реальной силовой линии, а не вдоль тора, поэтому плазма с током оказывается неустойчивой относительно концентрирования вдоль какого-то пучка рациональных силовых линий. У такого спирального жгута тока образуется свое магнитное поле, которое образует "магнитный остров". Остров может расти, но его нелинейные взаимодействия с остальной плазмой ограничивают этот рост, и остров оказывается конечного размера. Величина острова зависит от изменения закрученности магнитных силовых линий по радиусу так называемого магнитного "шира":

$$S = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}.$$

Чем больше  $S$ , тем меньше остров.

Соседние острова могут примыкать краями друг к другу. Нелинейные взаимодействия на краях могут приводить к дроблению островов и даже к возникновению участков с разрушенными магнитными поверхно-

стями, где силовые линии хаотически перемешиваются. Благодаря очень большим переносам вдоль магнитного поля давление плазмы на внешней и внутренней части острова легко выравнивается, если между островами тоже есть хороший контакт — тепло, и частицы быстро уходят поперек магнитного поля.

Арсенал неустойчивостей в плазме очень велик. На любое воздействие плазма может ответить развитием какой-то неустойчивости, которая изменит ее поперечный транспорт. Но всякая неустойчивость, черпая энергию из неудачного градиента плазменного параметра, приводит к изменению этого градиента и собственной стабилизации. Таким образом, плазма стремится так организовать свой профиль, чтобы быть максимально устойчивой, т.е. иметь минимум внутренней энергии. Мы вправе ожидать, что для различных установок токамак и широкого класса их режимов безразмерные профили давления плазмы будут выглядеть подобными, если найти правильную нормировку для радиуса плазмы. Это демонстрируется на рис. 1 [1].

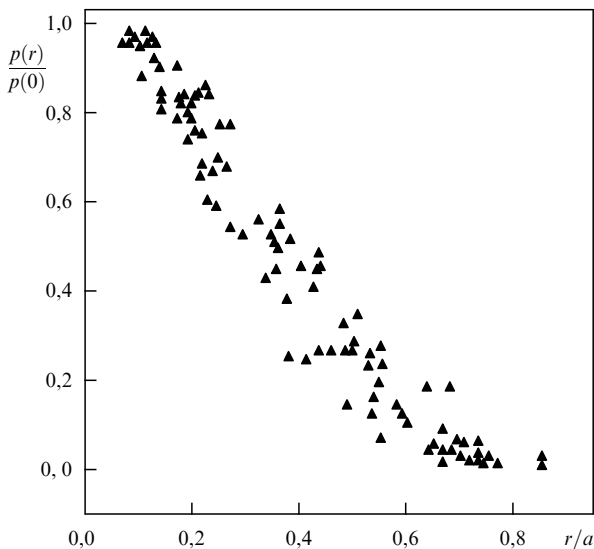


Рис. 1. Зависимость пронормированного давления плазмы от безразмерного радиуса  $\rho = r/a$ , где  $a = (IR/B_0)^{1/2}$  для различных токамаков и широкого спектра их режимов (Т-10, Т-11, TFR, ТМ-3, PLT, PDX, ASDEX).

Оказалось, что текущий радиус надо нормировать на радиус магнитной поверхности с заданным  $q$ . Б.Б. Кадамцев объяснил в свое время это явление, показав, что профиль, близкий к самосогласованному, соответствует минимуму внутренней энергии [2]. Следствием этого явления оказывается то, что коэффициенты переноса зависят не только от локальных характеристик, но и от состояния плазмы в целом.

Идеального профиля, конечно, быть не может, так как на плазму извне всегда оказываются воздействия. Самое сильное из них — граничные условия, которые искажают самосогласованный профиль и, следовательно, увеличивают потоки энергии и частиц на стенку камеры. Если бы удалось создать около края плазмы хотя бы узенький участок с низкими коэффициентами переноса, удалось бы отгородить стенку от плазмы и приблизить ее профиль к оптимальному.

Как ни утопична такая идея, она однажды реализовалась сама собой!

На немецкой установке ASDEX [3] был обнаружен режим с внешним транспортным барьером (локальным минимумом транспортных коэффициентов). Электронная температура —  $T_e$  и концентрация —  $n_e$  имели крутые градиенты на краю плазмы. Такого сорта режим получил название Н-моды. В нем удержание плазмы улучшается, грубо говоря, вдвое. Хотя эмпирически условия образования такого режима изучены всесторонне, хотя он принят как основной режим реактора, до сих пор не вполне ясна физика его возникновения. Почему в узкой зоне вблизи некоторой магнитной поверхности резко улучшается удержание плазмы?

Одна из причин — возникновение быстрого поперечного вращения ( $V_p \approx 1-5 \times 10^6$  см  $s^{-1}$ ) на небольшом участке плазменной периферии. Наиболее вероятная неустойчивость, ответственная за потерю тепла от ионов и самих частиц — это дрейфово-градиентная мода, выбрасывающая плазму относительно длинноволновыми языками. Неоднородное по радиусу вращение замазывает эти языки и препятствует развитию неустойчивости. Эксперимент подтвердил это объяснение. Но откуда берется вращение? И почему улучшается удержание электронов?

Природа сделала еще один подарок исследователям — внутренние транспортные барьеры. Теория предсказывает, что многие МГД неустойчивости могут быть стабилизированы при условии  $S < 0$ , т.е. тогда, когда ток имеет полый профиль. Такая конфигурация может быть создана либо за счет скин-эффекта, либо при генерации неиндукционного тока в нужной зоне плазмы.

Экспериментаторы пошли сначала по первому пути. На фазе роста тока в плазму вкладывалась большая мощность дополнительного нагрева: в плазму под углом к магнитному полю инжектировался поток быстрых нейтральных атомов, которые, перезаряжаясь, приводят к нагреву плазмы. Улучшение удержания было обнаружено [4] (рис. 2), но зона с пониженными коэффициентами переноса оказалась не в области  $S < 0$ , а в зоне нулевого "шира". В плазму при таком методе нагрева

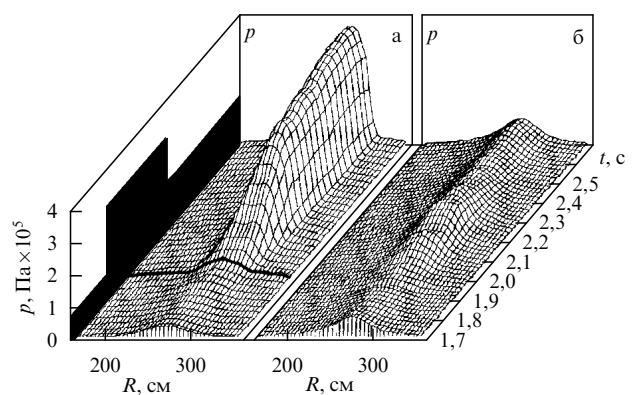


Рис. 2. Американская установка TFTR. Изменения в профиле давления плазмы в процессе формирования внутреннего барьера (левая диаграмма) и обычный режим с близкими исходными параметрами. Черным контуром дан временной ход вложенной в плазму мощности. (а) Разряд с внутренним барьером; (б) разряд без внутреннего барьера.

вводился вращательный момент, и это могло объяснить явление, так же как и при внешнем барьере — Н-моде. Однако вскоре появились эксперименты, в которых использовался нагрев, не вносящий в плазму момента, а внутренний транспортный барьер все же появлялся.

На токамаке Т-10, находящемся в РНЦ "Курчатовский институт", в качестве дополнительного нагрева используется электронный циклотронный резонанс (ЭЦР), который, естественно, греет только электроны. Если вводить ЭЦР волны под углом к магнитному полю, возможна безындукционная генерация тока в заданной сравнительно узкой зоне плазмы. Вращательный момент при этом в плазму не вносится. Зона вкладываемой мощности и генерации тока — 0,3 от полного радиуса плазмы (они могут быть сделаны и более локальными). Таким образом, можно генерировать ток на разных радиусах как в направлении согласном с током плазмы (CoCD), так и в противоположном ему направлении (CounterCD). Это значит, что мы можем изменять по своему усмотрению профиль  $q(r)$  (рис. 3).

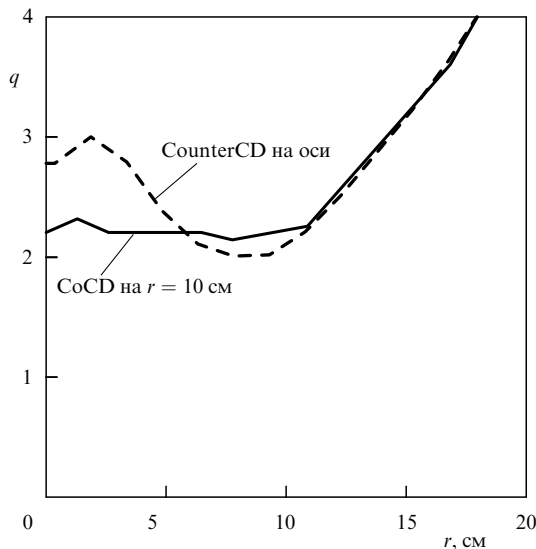


Рис. 3. Расчетные профили  $q(r)$  для измеренных профилей  $T_e(r)$  и  $n_e(r)$  при генерации CounterCD в центре плазмы и CoCD на 1/3 ее радиуса.

Проведенные на Т-10 эксперименты [5] показали, что внутренние барьеры могут быть получены как при отрицательном шире при центральном CounterCD, так и при нецентральной CoCD, причем барьер всегда образуется в области низкого шира и значения  $q$  вблизи рационального. Так как при включении ЭЦР мощности ток генерируется не сразу, а нарастает постепенно из-за процесса скиновых перераспределений, профиль  $q(r)$  тоже изменяется плавно. Когда участок  $dq/dr = 0$  приближается к рациональному значению, уровень МГД неустойчивостей сильно уменьшается и начинает формироваться барьер. Дальнейшее увеличение  $q_0$ , соответствующего нулевой производной, его переход через рациональное значение приводит к новой вспышке МГД активности, затем ее стабилизации около следующей рациональной поверхности и формированию нового барьера (рис. 4).

Если величина  $q_0$  оказывается на грани условия формирования барьера, то улучшение удержания во внутренней зоне и соответствующее перераспределение

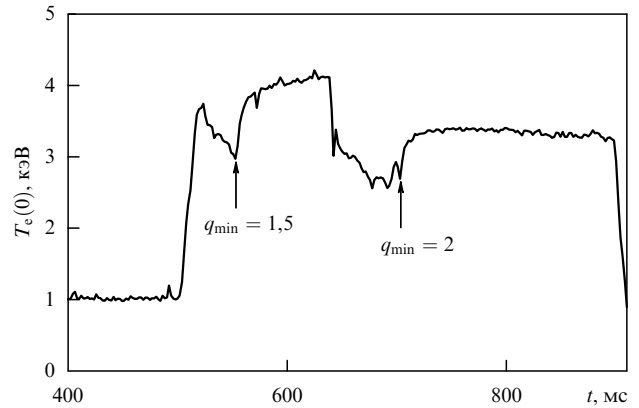


Рис. 4. Последовательное возникновение МГД неустойчивости и образование внутренних барьеров при изменении профиля  $q(r)$  в процессе разряда.

плотности тока может, в результате уменьшения  $q$  внутри барьера, вывести его из необходимого диапазона значений и барьер разрушится. В этом случае наблюдаются периодические улучшения и ухудшения удержания.

Проследим за процессом образования барьера на примере изменения интенсивности рентгеновского излучения (рис. 5). Интересно отметить, что процесс начинается не только с роста электронной температуры в кольце, где формируется барьер, но и с одновременного спада температуры в центральной части плазмы даже тогда, когда вся мощность ЭЦР вкладывается в центр

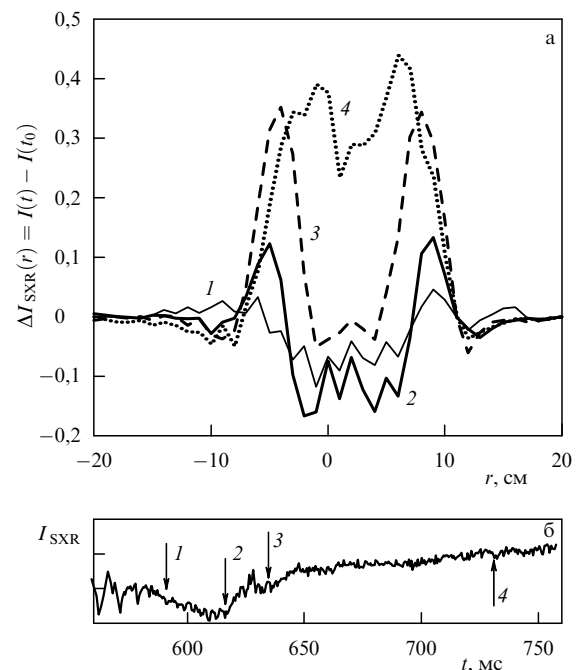


Рис. 5. (а) Распределение в пространстве прироста интенсивности мягкого рентгеновского излучения  $I_{SXR}$ , измеренного по хордам в процессе образования барьера. Из измеряемой интенсивности  $I(t)$  вычитается интенсивность  $I(t_0)$  в момент времени  $t_0 = 570$  мс до начала образования барьера. Восстановление профиля по методу Абеля существенно усиливает эффект. (б) Стрелками показаны моменты времени, для которых приведены профили.

(центральный CounterCD). Только тогда, когда барьер уже полностью сформировался, начинается заполнение теплом центральной части плазмы.

Итак, мы видим, что для образования внутреннего электронного транспортного барьера нужен определенный профиль  $q(r)$  в районе резонансной поверхности. А какую роль играет вращение? Ведь показано, что именно переменное по радиусу вращение плазмы определяет возникновение локальных градиентов концентрации частиц и ионной температуры.

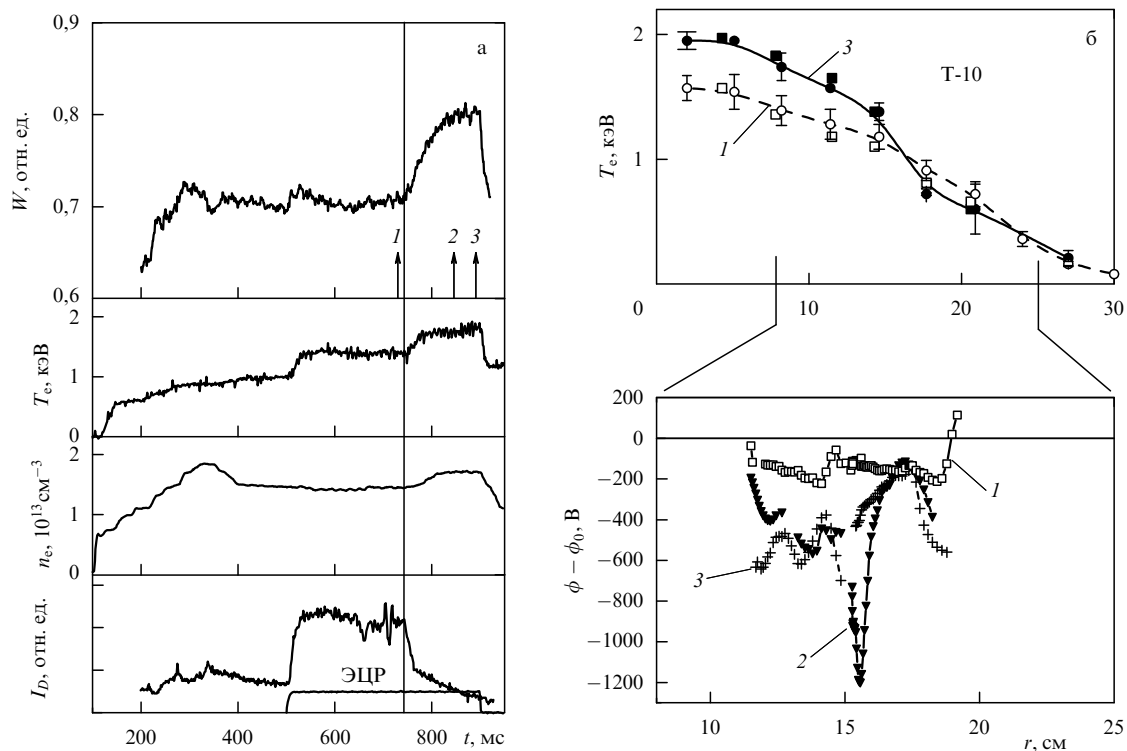
Обратимся опять к экспериментам на токамаке T-10. Благодаря созданной здесь уникальной диагностике, позволяющей в результате зондирования плазмы пучком тяжелых ионов измерять изменения профиля потенциала в плазме, был получен важный результат [5]. При вкладе мощности ЭЦР на половине радиуса плазмы в этой области образовывался барьер на рациональной поверхности  $q = 1$ . Внутри разыгрывались МГД неустойчивости, которые, безусловно, снижали удержание энергии. Тем не менее наблюдался рост электронной температуры (рис. 6). В экспериментах была возможность измерения относительного электрического потенциала плазмы  $\phi - \phi_0$ . Эти измерения показали, что одновременно с ростом  $T_e$  происходит формирование глубокой узкой потенциальной ямы в районе барьера. Это говорит о том, что в районе барьера нарушился баланс амбиполярных потоков электронов и ионов, и кулоновские силы мгновенно обеспечили компенсацию такого разбаланса.

За счет чего нарушен баланс потоков? Увеличился поток ионов? Нет, ионное удержание, как показал эксперимент, выросло в 1,5 раза. Значит, улучшилось удержание электронов. Возникшая потенциальная яма обеспечивает сильное быстро изменяющееся по радиусу электрическое поле, следовательно, возникает шир скорости вращения и, следовательно, происходит улучшение удержания ионной компоненты.

Итак, все начинается с профиля  $q(r)$  и возрастания электронного времени жизни. Какая здесь связь? Теория еще не поработала тут как следует, и вопрос пока открыт. В стационарной фазе процесса яма превращается в ступенчатое снижение потенциала к внутренней стороне тора (см. рис. 6).

На токамаке T-10 было обнаружено еще одно удивительное явление. Одновременно с внутренним барьером возникает еще и внешний барьер, отделенный от внутреннего половиной радиуса токамака!

Картина его образования очень похожа на то, что мы видели внутри: так же образуется потенциальная яма, но здесь преимущественно наблюдалось улучшение удержания частиц, растет градиент концентрации электронов. Придирчивое рассмотрение показало, что двойные и даже тройные барьеры наблюдаются во многих экспериментах на токамаках. Как связаны эти поверхности? Тороидальное зацепление мод? Действительно, в торе ни одна мода не может существовать в чистом виде — одновременно генерируются ее гармоники. В данном случае внутренний барьер формировался на



**Рис. 6.** Формирование внутреннего барьера при вложении мощности ЭЦР на половине радиуса плазмы. (а) Сверху вниз: изменение полного энергосодержания плазмы ( $W$ ), изменение  $T_e$  в зоне внутри барьера ( $r = 17$  см), ход концентрации плазмы, интенсивность свечения линии дейтерия, характеризующей приток в плазму нейтралов; внизу показан временной интервал для включения мощности ЭЦР. (б) Профили электронной температуры и изменения величины потенциала плазмы в процессе образования барьера. Моменты времени 1, 2, 3 соответствуют: 1 — до формирования внутреннего барьера; 2 — в процессе формирования внутреннего барьера; 3 — после формирования внутреннего барьера.

$q = 1$ , а внешний — на  $q = 2$ . Возможно, значительное изменение профиля магнитного острова на одной резонансной поверхности может повлечь за собой аналогичные изменения и на другой. Но тогда придется говорить о том, что  $H$ -мода тоже начинает формироваться с участка заданной величины шира вблизи резонансной поверхности. Однако к признанию этого ученый мир пока не готов, и вопрос остается открытым. Непреложным является то, что плазма способна звенеть, как резонатор.

Итак, внутренние барьеры разрушают связи в плазме, которые (за счет развития турбулентности) определяли самосогласованные профили, и позволяют на локальных участках устанавливать более крутые градиенты параметров. Нелинейность в развитии неустойчивостей в высокотемпературной плазме токамака приводит не к хаотизации и разрушению плазмы, а, наоборот, к построению самоорганизованных структур, способствующих хорошему удержанию частиц и энергии.

Это позволяет в земных условиях, в ограниченных объемах получать температуру плазмы ( $T \leq 4 \times 10^8$  К), в десятки раз превышающую температуру недр Солнца.

## Список литературы

1. Esipchuk Yu V, Razumova K A *Plasma Phys. Contr. Nuclear Fusion Res.* **28** 1273 (1986)
2. Кадомцев Б Б *Физика плазмы* **13** 771 (1987)
3. Wagner F et al. *Phys. Rev. Lett.* **49** 1408 (1982)
4. Sinakovski E J et al. *Phys. Plasmas* **4** 1736 (1997)
5. Razumova K A et al. *Plasma Phys. Contr. Nuclear Fusion* 205 (2000)
6. Razumova K A et al. *27th EPS Conf. on Controlled Fusion and Plasma Phys.* P2039 (2000) p. 205

PACS numbers: 83.10.Dd, 83.80.Nb, 92.10.Rw

## Модель формирования торосов в дрейфующем ледяном покрове

А.В. Марченко

### 1. Введение

Торосы являются характерной особенностью морского ледяного покрова (ЛП). Они образуются при деформациях сжатия и сдвига ЛП, вызываемых влиянием ветра и морских течений на лед. Торосы образуются в открытом океане и вблизи берега и оказывают сильное влияние на ледопроездимость судов в Арктических районах. Торосы, формирующиеся вблизи шельфовых гидротехнических сооружений, оказывают сильное влияние на распределение ледовых нагрузок на сооружения.

Торосы состоят из кусков льда, выдавленных на и под поверхность окружающего ровного ЛП. Высота надводной части торосов может достигать нескольких метров, подводная часть торосов может быть погружена в воду на несколько десятков метров. Достаточно часто торосы вытянуты в определенном горизонтальном направлении [1]. Торосы оказывают существенное влияние на реологические свойства ЛП, внося в них пространственную неоднородность и анизотропию.

Теоретические работы по моделированию процесса образования торосов (торошения) можно условно разделить на два типа. Работы первого типа (см. для примера [2]) разрабатывают методику учета процессов торошения

при крупномасштабном моделировании динамики ледяного покрова. Торошение рассматривается как основной механизм перераспределения ледяного покрова по толщине. Результатом исследований является построение функции плотности перераспределения ледяного покрова по толщине при пластических деформациях. При этом структура и процесс формирования отдельного тороса не изучаются.

Первая модель формирования одиночной гряды торосов разработана в статьях Пармертера и Куна в 1973 г. [3]. В этих работах на основе анализа данных экспериментальных наблюдений была сформулирована гипотеза о существовании предельной высоты тороса, зависящей от толщины льда, из которого образован торос. Согласно этой гипотезе торос растет в высоту и ширину, если его вертикальный размер меньше предельного, и торос растет только в ширину, если его высота достигает предельного значения. Существование предельной высоты тороса связывалось с величиной изгибных нагрузок, способных разрушить край наползающей на торос льдины и возникающих из-за отсутствия баланса силы тяжести и плавучести льда, составляющего край тороса. Используя законы сохранения массы и энергии, Пармертер и Кун оценили напряжения сжатия, необходимые для формирования тороса.

Другой подход к моделированию процесса торошения был разработан в статьях Хопкинса с соавторами [4, 5]. В этих работах торос рассматривается как куча кусков льда заданной формы, взаимодействующих друг с другом по вязкоупругому закону. Движение каждого куска описывается отдельным уравнением. Модель учитывает формирование новых кусков льда при взаимодействии края льдины с торосом. Использование современной вычислительной техники позволило произвести расчет движения большого числа обломков льда, формирующих торос, получить реалистичную картину торошения и подтвердить гипотезу о существовании предельной высоты тороса.

Получить торос в лабораторных условиях удалось только в 1998 г. [6]. Эксперимент был поставлен в ледовом бассейне Технологического университета г. Хельсинки. Толщина искусственно намораживаемого льда не превышала 10 см. Эксперимент показал, что формирование торосов сжатия сопровождается подсовами льдин так, что практически нельзя разделить эти процессы. Лабораторные исследования подтверждают натурные наблюдения в северной части Балтийского моря, согласно которым восторошенный лед в значительной степени состоит из ровных льдин, наложенных друг на друга.

Основная цель данной работы состоит в построении модели торошения, позволяющей рассчитывать формирование торосов в ЛП, состоящем из произвольного числа льдин. Предполагается, что торосы образуются вдоль линий контакта льдин при воздействии на лед ветровых нагрузок. Рассматриваемая схема соответствует структуре морского ЛП, в котором всегда можно выделить области ровного и восторошенного льда. При сжатии часть ровного ЛП разрушается и превращается в торосы, при этом участки ровного льда получают относительные смещения. Будет показано, что периодичность этих смещений объясняет существование автоколебаний при подвижках дрейфующих льдов [7].

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим законы сохранения массы, импульса и энергии для плавающего на поверхности жидкости слоя льда. В одномерном случае дифференциальные уравнения, соответствующие этим законам, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial mv}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial mv}{\partial t} + \frac{\partial mv^2}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} + f, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Ev}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma v}{\partial x} + f v, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $m$  — масса льда, плавающего на участке поверхности океана единичной площади,  $v$  — скорость дрейфа льда,  $\sigma$  — внутренние напряжения во льду,  $E$  — поверхностная плотность энергии льда,  $f$  — сила трения, действующая на лед со стороны атмосферы и океана,  $x$  — горизонтальная координата и  $t$  — время.

Полагается, что концентрация льда на поверхности океана равна единице, и можно написать  $m = \rho_i h(x, t)$ , где  $h(x, t)$  — толщина льда и  $\rho_i \approx 930 \text{ кг м}^{-3}$  — плотность морского льда. Поверхностная плотность энергии ледяного покрова определяется формулой

$$E = K + P + W, \quad (2.2)$$

где  $K = \rho_i h v^2 / 2$  — поверхностная плотность кинетической энергии,  $P$  и  $W$  — поверхностные плотности потенциальной и внутренней энергии.

Поверхностная плотность потенциальной энергии плавающего льда определяется формулой

$$P = \rho_i g \int_{z_-}^{z_+} z \, dz - \rho_w g \int_{z_-}^0 z \, dz \quad (2.3)$$

и представляет разность потенциальной энергии льда, отсчитываемой от уровня невозмущенной поверхности жидкости  $z = 0$ , и потенциальной энергии жидкости, вытесненной льдом,  $\rho_w \approx 1020 \text{ кг м}^{-3}$  — плотность морской воды. Уравнения  $z = z_-(x, t)$  и  $z = z_+(x, t)$  определяют верхнюю и нижнюю поверхности ледяного покрова. Толщина ледяного покрова равна  $h = z_+ - z_-$ .

Далее рассматриваются процессы необратимого сжатия ледяного покрова, сопровождающиеся изменением его толщины и диссипацией механической энергии. При этом изменение внутренней энергии обусловлено диссипацией

$$dW = dD \geq 0. \quad (2.4)$$

Изменение толщины льда при сжатии связано с образованием торосов и подсовами. При торошении образуются горы, состоящие из обломков льда. При подсове происходит наслоение пластин ровного льда друг на друга. Иногда сжатие реализуется в виде комбинации подсовов и торосов.

Процесс увеличения толщины льда сопровождается необратимым ростом его потенциальной энергии

$$dP \geq 0. \quad (2.5)$$

Предположим, что в ровном ледяном покрове имеется область всторосенного льда, ограниченная линиями

$x = x_-(t)$  и  $x = x_+(t)$ . При  $x < x_-$  и  $x > x_+$  толщина льда постоянна и равна  $h_-$  и  $h_+$  соответственно. Интегрируя уравнения (2.1) от  $x = x_-$  до  $x = x_+$ , находим

$$\frac{dU_r}{dt} = [hQ], \quad (2.6)$$

$$\frac{dI_r}{dt} = [\sigma] + \rho_i [hvQ] + F_r, \quad (2.7)$$

$$\frac{dE_r}{dt} = [\sigma v] + [EQ] + A_r, \quad (2.8)$$

где  $U_r$ ,  $I_r$  и  $E_r$  — погонные объем, импульс и энергия льда в области  $x \in (x_-, x_+)$ , и  $[\lambda] = \lambda_+ - \lambda_-$  — для любого символа  $\lambda$  или комбинации символов.

Потоки  $Q_+ \geq 0$  и  $Q_- \leq 0$  определяются формулами

$$Q_{\pm} = \frac{dx_{\pm}}{dt} - v_{\pm}, \quad (2.9)$$

где  $v_+$  и  $v_-$  — скорости дрейфа льда в областях  $x > x_+$  и  $x < x_-$ .

Величины  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  равны напряжениям в ровном ледяном покрове при  $x = x_+$  и  $x = x_-$ ,  $E_+$  и  $E_-$  — поверхностные плотности энергии льда в областях  $x > x_+$  и  $x < x_-$ ,  $F_r$  — равнодействующая сил трения, действующих на поверхность льда при  $x \in (x_-, x_+)$ ,  $A_r$  — мощность силы  $F_r$ .

Система уравнений (2.6)–(2.8) является обобщением соотношений на разрыве [8] для случая, когда на разрыве происходит накопление материала. Подобные соотношения рассматривались в теории распространения газа с примесью дисперсных частиц [9], где необходимость их введения была связана с опрокидыванием волн сжатия. Поверхности, на которых выполнялись рассматриваемые соотношения, назывались пеленой. Физически пелена соответствует области, где нельзя пренебрегать столкновениями частиц примеси. Разрыв типа пелены использовался для описания формирования и дрейфа полос сплоченного льда в дисперсном ледяном покрове [10, 11]. В данном случае на поверхности разрыва также изменяются свойства материала, так как ледяной покров внутри тороса состоит из кусков льда.

## 3. Оценка характерных масштабов проблемы

Сила трения между ледяным покровом и водой обуславливает достаточно низкие скорости дрейфа льда в естественных условиях. Поэтому в качестве характерного масштаба скорости дрейфа можно выбрать величину  $V = 0,1 \text{ м с}^{-1}$  [12].

Характерные временные масштабы при дрейфе льда в рассматриваемом случае связаны с эффектом автоколебаний ледяного покрова. Данные натуральных наблюдений показывают, что при воздействии на лед постоянного ветра, деформация льда реализуется в виде квазипериодических подвижек, связанных с относительным смещением льдин [7]. Период этих движений может достигать нескольких минут [13]. Поэтому в качестве характерного масштаба времени выбирается величина  $T = 1 \text{ мин}$ .

Максимальные напряжения, измеряемые в ледяном покрове в натуральных условиях, имеют порядок  $10^5 \text{ Н м}^{-1}$  [14]. Напряжения порядка  $10^4 \text{ Н м}^{-1}$  соответствуют начальным стадиям процесса торошения. Поэтому в качестве характерного значения напряжений выберем величину  $\Sigma = 10^4 \text{ Н м}^{-1}$ .

Оценим порядок членов, входящих в уравнения (2.6)–(2.8). Силы трения, действующие со стороны воды на киль тороса, оцениваются формулой

$$F_r = \rho_w C_w h_k \delta v^2,$$

где  $C_w \approx 1$  — коэффициент сопротивления плохообтекаемых тел,  $\delta v$  — разность скорости движения льда и воды,  $h_k$  — расстояние наиболее глубоко погруженной в воду точки тороса от нижней поверхности льда. Для оценок положим  $h_k \approx 10$  м и  $\delta v \approx 0,1$  м с<sup>-1</sup>. В результате получаем  $F_r \approx 100$  Н м<sup>-1</sup>.

Оценим величину инерционного члена в уравнении (2.7), полагая, что торос имеет треугольную форму с углами ската боковых граней паруса и кия 30° (рис. 1) [1]. В этом случае погонный объем тороса  $U_r \approx 2h_k^2 = 200$  м<sup>2</sup>. Инерционный член имеет порядок  $\rho_i U_r V T^{-1} \approx 300$  Н м<sup>-1</sup>.

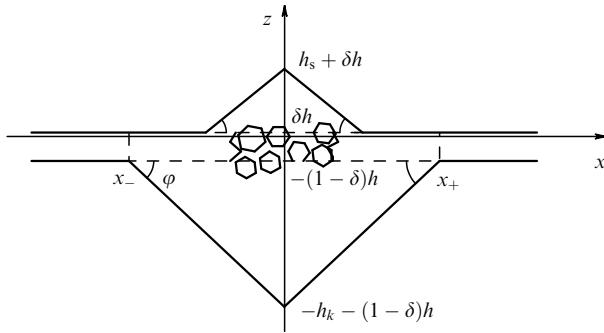


Рис. 1.

Пусть характерная толщина льда  $h = 1$  м. Предпоследний член в правой части уравнения (2.7) имеет порядок  $\rho_i h V^2 \approx 10$  Н м<sup>-1</sup>. Отсюда вытекает оценка  $[\sigma] \ll \Sigma$ . Иными словами, величина скачка напряжений при переходе через треугольный торос много меньше величины самих напряжений. Поэтому при расчете напряжений можно положить

$$[\sigma] = 0. \tag{3.1}$$

Отметим, что эта формула неверна для торосов трапециевидной формы, имеющих достаточно большой объем  $U_r$ . Оценим ширину трапециевидного тороса, при которых инерционный член имеет порядок  $10^5$  Н м<sup>-1</sup> (экстремальные напряжения, возникающие при формировании больших торосов). Положим  $U_r \approx (h_k + h_s)L_r$ , где  $h_s$  — высота паруса, и  $h_k + h_s = 20$  м. Из условия  $\rho_i U_r V T^{-1} \approx 10^4$  Н м<sup>-1</sup>, находим  $L_r \approx 300$  м.

Используя аналогичные оценки, можно показать, что в уравнении энергии (2.8) характерные значения и кинетической энергии тороса, и работы  $A_r$  много меньше остальных членов уравнения. Поэтому далее полагается

$$dE_r = dP_r + dD_r. \tag{3.2}$$

Оценим характерные значения плотностей потенциальной  $P_f$  и кинетической  $K_f$  энергий ровного ледяного покрова. Эти величины определяются формулами

$$2P_f = \delta \rho_i g h^2, \quad 2K_f = \rho_i h v^2, \tag{3.3}$$

где  $v$  — скорость дрейфа и  $h$  — толщина льда. Полагая  $v \approx V$  и  $h \approx 1$  м, находим  $K_f \ll P_f$ . На основании этой оценки далее полагается

$$E_f = P_f. \tag{3.4}$$

#### 4. Гипотезы об автомодельности формы тороса и диссипации

Гипотеза об автомодельности формы тороса состоит в предположении, что изменение формы подводной и надводной частей тороса (паруса и кия тороса) при торшении определяется изменением объема тороса. При этом парус и киль тороса находятся в положении гидростатического равновесия. Отсюда вытекают соотношения

$$dP_r = \frac{dP_r}{dU_r} dU_r, \quad dL_r = \frac{dL_r}{dU_r} dU_r, \tag{4.1}$$

где  $L_r = x_+ - x_-$  — ширина тороса.

Результаты натуральных наблюдений показывают, что достаточно часто форма паруса и кия тороса близка к треугольной или трапециевидной [1]. Для тороса треугольной формы с одинаковым углом ската  $\varphi$  боковых граней паруса и кия, сформированного в ровном ледяном покрове толщины  $h$  (см. рис. 1), гипотеза автомодельности приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} U_r &= hL_r + AL_r^2, \\ 2P_r &= \rho_i g L_r [\delta h^2 + 2L_r(\delta Ah + BL_r)], \\ 2h_k &= L_r \operatorname{tg} \varphi, \quad h_s = \gamma h_k, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $\gamma$  определяются формулами

$$\begin{aligned} 4A &= (1 + 2\gamma^2) \operatorname{tg} \varphi, \\ 24B &= (1 + 2\gamma)(\gamma \operatorname{tg} \varphi)^2, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{\delta}{1 - \delta}}, \quad \delta = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_w}. \end{aligned}$$

Гипотеза автомодельности выполняется при подсове двух льдин (рис. 2). В этом случае имеют место формулы

$$U_r = L_r(h_+ + h_-), \quad 2P_r = \rho_i \delta g L_r (h_+ + h_-)^2. \tag{4.3}$$

При определении диссипативной функции согласно с общими принципами термодинамики положим

$$dD_r = (\sigma_d^+ Q_+ - \sigma_d^- Q_-) dt \geq 0, \tag{4.4}$$

где  $\sigma_d^\pm$  — обобщенные термодинамические силы, определение которых зависит от сценария процесса торшения.

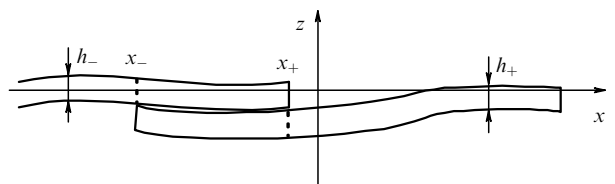


Рис. 2.

Одним из известных сценариев торошения является следующий [1]. Ледяной покров из области  $x > x_+$  надвигается на правую боковую грань паруса тороса. При этом ровная ледяная пластина разламывается на куски, которые скатываются на разные стороны паруса тороса. Край ледяной пластины, входящей в торос из области  $x < x_-$ , обламывается под влиянием веса паруса тороса. Киль тороса формируется вследствие притапливания кусков льда под влиянием веса паруса.

Диссипация энергии обусловлена в основном трением льдины, наползающей на парус тороса, о правую боковую грань паруса. Поэтому полагается, что  $\sigma_d^- = 0$ , и  $\sigma_d^+$  определяется из закона сухого трения формулой

$$\sigma_d^+ = \mu \rho_i g h h_s \operatorname{ctg} \varphi, \quad (4.5)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения. Из формул (4.2) следует, что обобщенная сила  $\sigma_d^+$  является функцией объема тороса.

При подсове диссипация механической энергии происходит из-за трения между пластинами льда. Пусть лед, приходящий из области  $x > x_+$ , оказывается подо льдом, приходящим из области  $x < x_-$  (см. рис. 2). Полагая, что взаимодействие пластин удовлетворяет закону сухого трения, находим

$$dD_r = \mu \rho_i g h_- L_r dL_r, \quad (4.6)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения.

Из уравнений (4.4) и (4.6) вытекает

$$\sigma_d^\pm = \mu \rho_i g h^- x^\pm. \quad (4.7)$$

Из уравнений (4.4) вытекает, что  $dD_r$  является функцией изменения объема  $dU_r$ .

## 5. Напряжение торошения

Рассмотрим несколько простых математических моделей торошения, в которых напряжения, необходимые для торошения льда, находятся из системы уравнений (2.6)–(2.8) как функции объема тороса и толщины льда, из которого формируется торос.

### 5.1. Подсов

Легко видеть, что при подсове выполняются соотношения

$$\frac{dx_\mp}{dt} = v_\pm, \quad Q_+ = -Q_- = -[v]. \quad (5.1)$$

Объем и потенциальная энергия льда в области подсова определяются формулами (4.3). Диссипация механической энергии определяется формулой (4.6). Уравнения (2.6) и (2.8) с учетом формул (3.1), (3.2), (3.4) и (5.1) записываются в виде

$$\frac{dU_r}{dt} = -(h_+ + h_-)[v], \quad (5.2)$$

$$\frac{dP_r}{dt} + \frac{dD_r}{dt} = \sigma_r[v] - (P_r^+ + P_r^-)[v].$$

Отсюда находим выражение для напряжения  $\sigma_r = \sigma_+ = -\sigma_-$

$$\sigma_r = -(h_+ + h_-) \left( \frac{dP_r}{dU_r} + \frac{dD_r}{dU_r} \right) + P_r^+ + P_r^-. \quad (5.3)$$

### 5.2. Торошение льда около неподвижной стенки

Пусть стенка расположена при  $x = 0$ . Левая граница тороса совпадает со стенкой, и правая граница находится в точке  $x = x_+$ . Из автомодельности формы тороса следует

$$dx_+ = \frac{dU_r}{dU_r} dU_r. \quad (5.4)$$

Учитывая, что поток  $Q_- = 0$ , запишем уравнения (2.6) и (2.8) в виде

$$\frac{dU_r}{dt} = h \left( \frac{dx_+}{dt} - v_+ \right), \quad (5.5)$$

$$\frac{dP_r}{dU_r} \frac{dU_r}{dt} + (\sigma_d^+ - P_r^+) \left( \frac{dx_+}{dt} - v_+ \right) = \sigma_+ v_+.$$

Из уравнений (5.4) и (5.5) находим напряжение  $\sigma_r$ , необходимое для торошения льда вблизи стенки:

$$\sigma_+ = - \left( h \frac{dP_r}{dU_r} + \sigma_d^+ - P_r^+ \right) \left( 1 - h \frac{dx_+}{dU_r} \right)^{-1}. \quad (5.6)$$

Напряжение трения  $\sigma_d^+$  определяется как функция объема тороса толщины ровного льда  $h$  и зависит от сценария строительства тороса. Если торос имеет треугольную форму, то  $\sigma_d^+$  может определяться формулой (4.5).

### 5.3. Формирование треугольного тороса

#### в однородном ледяном покрове

Предположим, что свойства ледяного покрова одинаковы по разные стороны тороса и  $h_+ = h_- = h$ . В этом случае можно предположить, что потоки льда в торос с разных сторон одинаковы:

$$Q_+ = -Q_- = Q. \quad (5.7)$$

Из формулы (5.7) следует, что середина тороса движется со средней скоростью льдин, из которых формируется торос, и выполняется соотношение

$$2Q = \frac{dL_r}{dt} - [v]. \quad (5.8)$$

Уравнения (2.6) и (2.8) с учетом формулы (5.7) записываются в виде

$$\frac{dU_r}{dt} = 2hQ, \quad (5.9)$$

$$\frac{dP_r}{dU_r} \frac{dU_r}{dt} + (\sigma_d^+ + \sigma_d^- - 2P_r) Q = \sigma_r[v].$$

Используя формулу (5.8), находим напряжение торошения

$$\sigma_r = - \left( h \frac{dP_r}{dU_r} + \frac{\sigma_d^+ + \sigma_d^-}{2} - P_r \right) \left( 1 - h \frac{dL_r}{dU_r} \right)^{-1}. \quad (5.10)$$

Если торошение идет по сценарию, описанному в разделе 4, то  $\sigma_d^- = 0$  и  $\sigma_d^+$  определяется формулой (4.5).

## 6. Автоколебания ледяного покрова, вызванные формированием торосов

Рассмотрим задачу о формировании треугольных торосов на границах между тремя льдинами под влиянием ветровых напряжений. Скорость ветра направлена в



сторону берега. Лыдины и торосы пронумерованы так, как показано на рис. 3. Полагается, что лыдина 3 упирается в берег и поэтому неподвижна. Скорости дрейфа лыдин 1 и 2 равны  $v_1$  и  $v_2$ . Предполагается, что между лыдинами в начальный момент времени имеются небольшие торосы.

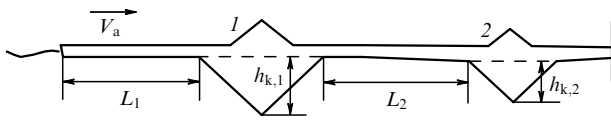


Рис. 3.

Полная система уравнений, описывающая рассматриваемый процесс, имеет вид:

$$\frac{dL_1}{dt} = -Q_1, \quad \frac{dL_2}{dt} = -Q_1 - Q_2, \quad (6.1)$$

$$\rho_i h L_1 \frac{dv_1}{dt} = f_1 + \sigma_{r,1}(U_{r,1}), \quad (6.2)$$

$$\rho_i h L_2 \frac{dv_2}{dt} = f_2 - \sigma_{r,1}(U_{r,1}) + \sigma_{r,2}(U_{r,2}), \quad (6.3)$$

$$\frac{dU_{r,1}}{dt} = 2hQ_1, \quad \frac{dU_{r,2}}{dt} = 2hQ_2. \quad (6.4)$$

Уравнения (6.1) описывают изменение размеров лыдин вследствие расхода льда на строительство торосов. Потоки  $Q_1$  и  $Q_2$  в соответствии с определениями (5.8) имеют вид:

$$2Q_1 = \frac{dL_{r,1}}{dU_{r,1}} \frac{dU_{r,1}}{dt} - v_2 + v_1, \quad (6.5)$$

$$2Q_2 = \frac{dL_{r,2}}{dU_{r,2}} \frac{dU_{r,2}}{dt} + v_2.$$

Уравнения (6.2) и (6.3) представляют баланс импульса лыдин 1 и 2. Зависимости  $\sigma_{r,1}(U_{r,1})$  и  $\sigma_{r,2}(U_{r,2})$  напряжений торования от объема торосов  $U_{r,1}$  и  $U_{r,2}$  определяются формулой (5.10). Напряжения трения ветра и воды о поверхность лыдин 1 и 2 обозначены символами  $f_1$  и  $f_2$  и определяются формулами

$$f_{1,2} = (\rho_a C_a V_a^2 - \rho_w C_w v_{1,2}^2) L_{1,2}, \quad (6.6)$$

где  $\rho_a$  — плотность воздуха,  $C_a$  и  $C_w$  — коэффициенты трения,  $V_a$  — скорость ветра.

Уравнения (6.4) вытекают из уравнения баланса массы льда в форме (5.9). Система шести уравнений (6.1)–(6.4) содержит шесть неизвестных функций времени  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $U_{r,1}$ ,  $U_{r,2}$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  и является замкнутой. Объемы торосов  $U_{r,1}$ ,  $U_{r,2}$  связаны с высотами парусов  $h_{s,1}$ ,  $h_{s,2}$  и килей  $h_{k,1}$ ,  $h_{k,2}$  торосов формулами (4.2).

При проведении численных расчетов полагалось  $h = 1$  м,  $V_a = 15$  м с<sup>-1</sup>,  $C_a = 0,003$  [15],  $C_w = 0,005$  [16],  $\mu = 0,3$  [17]. В начальный момент времени  $t = 0$  полагалось  $L_1(0) = 20$  км,  $h_{k,1}(0) = 0,5$  м,  $h_{k,2}(0) = 0,1$  м,  $v_1(0) = 0,3$  м с<sup>-1</sup>,  $v_2(0) = 0$ . Результаты расчетов представлены на рис. 4 при  $L_2(0) = 500$  м (а, б),  $L_2(0) = 1$  км (в, г) и  $L_2(0) = 3$  км (д, е).

Из начальных условий следует, что в начальный момент времени размеры торосов малы. Маленькие торосы могут выдержать небольшие сжимающие напряжения. Поэтому в рассматриваемой модели они просто обозначают места ослабления ледяного покрова, в окрестности которых формируются торосы.

Видно, что процесс торования продолжается примерно 1,3 ч. За это время размер килей торосов достигает примерно 13 м. Высота паруса этих торосов близка к 4 м. Конечные размеры тороса, образованного на правом краю лыдины 2, несколько больше размеров левого тороса. Движение большой лыдины 1 практически монотонно. Движение лыдины 2 имеет осцилляции, период которых зависит от ее размеров. Периоды осцилляций примерно равны 5 мин, 10 мин и 20 мин соответственно при  $L_2(0) = 500$  м,  $L_2(0) = 1$  км и  $L_2(0) = 3$  км. Эти осцилляции можно назвать автоколебаниями, так как они появляются при стационарной ветровой нагрузке и связаны только с внутренней структурой ледяного покрова, определяющейся размерами лыдин и торосов. Период автоколебаний уменьшается при уменьшении размера лыдин.

Автоколебания возникают вследствие неравномерной диссипации механической энергии на краях лыдины, вызванной формированием торосов. Если в начальный момент времени размеры обоих торосов одинаковы, то движение лыдины 2 не содержит осцилляций. В момент окончания торования размеры торосов близки, независимо от их начальных размеров.

## 7. Заключение

В работе предложен новый подход к моделированию процесса формирования торосов в дрейфующем ледяном покрове, основанный на представлении тороса линией разрыва, уравнений динамики ЛП. Соотношения на линии разрыва вытекают из законов сохранения массы, импульса и энергии. Необходимые для формирования тороса напряжения могут быть получены из соотношений на разрыве как функции объема тороса, если выполнены гипотезы об автомодельности формы тороса и диссипации.

Рассматриваемый подход реализован в плоском случае, когда линия разрыва прямая, и скорости лыдин, формирующих торос, нормальны к линии разрыва. Получены выражения для напряжений при подсове, при формировании тороса около твердой стенки и при сжатии однородного ЛП.

Проведены численные расчеты формирования двух торосов на линиях контакта трех лыдин одинаковой толщины и разной длины. Полагалось, что левый край левой лыдины свободен, правая лыдина неподвижна, и длина средней лыдины меньше длины левой лыдины. Сжатие ЛП вызвано воздействием ветра на поверхность льда. Решение показывает, что после окончания торования оба тороса имеют примерно одинаковые размеры. В процессе торования скорость средней лыдины имеет осцилляции, связанные с неравномерной диссипацией механической энергии в торосах. Период колебаний уменьшается при уменьшении длины средней лыдины. Его расчетные значения изменялись от 5 мин до 20 мин. Автоколебания таких периодов наблюдаются в естественных условиях при подвижках дрейфующих льдов [7].

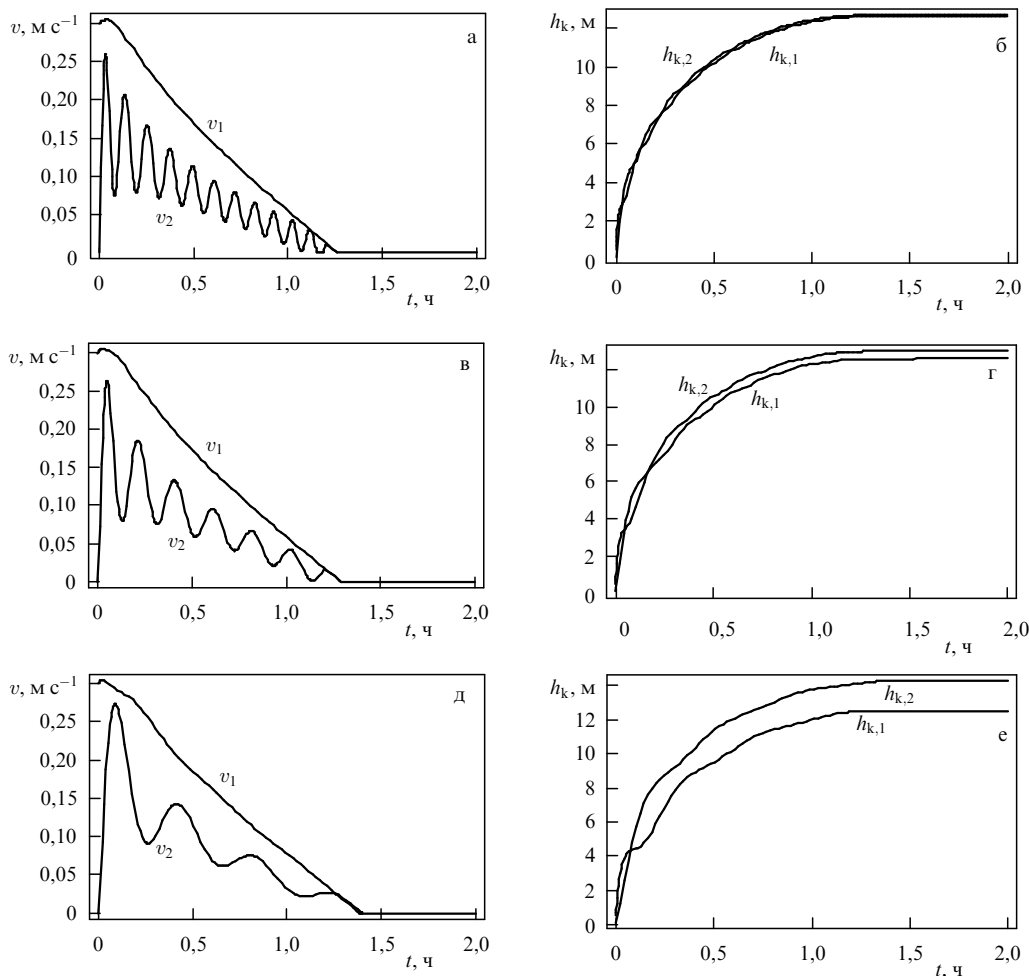


Рис. 4.

Полученные выражения для напряжений торошения могут быть использованы при построении крупномасштабных реологических моделей ЛП климатической направленности, в которых ЛП рассматривается как сплошная среда с пластическими свойствами. Предельные напряжения сжатия, характеризующие пластические свойства ЛП, определяются напряжениями торошения.

Определение частот осциллирующих движений ЛП, сопровождающих торошение вблизи гидротехнических сооружений, важно при расчете последствий воздействия льда на сооружение. В частности, интересно исследовать возможность резонанса между колебаниями льда и собственными колебаниями сооружения. При резонансе повышается вероятность аварийного разрушения сооружения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-01150 и 99-02-17005) и Норвежского научного консульства (проект 128087/730).

### Список литературы

1. Kovacs A, Sodhi S *Cold Region and Technology* (2) 209 (1980)
2. Pritchard R, in *Ice in Surface Waters* (Ed. H T Shen) (Rotterdam: Balkema, 1999) p. 1041
3. Parmeter R R, Coon M D *J. Geophys. Res.* **77** 6565 (1972)
4. Hopkins M A *J. Geophys. Res.* **103** (C10) 21883 (1998)
5. Hopkins M A, Tuhkuri J, Lensu M *J. Geophys. Res.* **104** (C6) 13605 (1999)
6. Tuhkuri J, Lensu M, Saarinen S "Laboratory and field studies of ice ridge formation" *Proc. of the 15th Int. Conf. on Port and Ocean Eng. under Arctic Conditions (POAC'99)* Vol. 3 (Helsinki: HUT, 1999) p. 1118
7. Смирнов В Н *Динамические процессы в морских льдах* (СПб: Гидрометеоздат, 1996)
8. Седов Л И *Механика сплошной среды* Т. I (М.: Наука, 1983)
9. Крайко А Н *ПММ* **43** 500 (1979)
10. Марченко А В *ПММ* **56** 419 (1992)
11. Махштас А П, Марченко А В, в кн. *Закономерности крупномасштабных процессов в Норвежской энергоактивной зоне и прилегающих районах* (СПб: Гидрометеоздат, 1994) с. 150
12. Аппель И Л, Гудкович З М *Численное моделирование и прогноз эволюции ледяного покрова Арктических морей в период таяния* (СПб: Гидрометеоздат, 1992) с. 144
13. Martin S, Drucker R J *Geophys. Res.* **96** (C6) 10567 (1991)
14. Coon M D, Echert D C, Knoke G S, in *Ice in Surface Waters* (Ed. H T Shen) (Rotterdam: Balkema, 1999) p. 1049
15. Andreas E L, in *The Atmospheric Boundary Layer over Polar Marine Surfaces* (CRREL Monograph 96-2) (Philadelphia: American Society for Testing and materials, 1996) p. 38
16. Lepparanta M, in *Physics of Ice Covered Sea* Vol. 1 (Ed. M Lepparanta) (Helsinki: Helsinki University Printing House, 1994) p. 305
17. Mellor M *Mechanical Behavior of Sea Ice* (CRREL Monograph 83-1) (Philadelphia: American Society for Testing and materials, 1983)