

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Киральная эффективная теория сильных взаимодействий

Б.Л. Иоффе

Киральная эффективная теория (КЭТ) описывает процессы сильных взаимодействий при низких энергиях и основывается на точной теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамике (КХД). В обзоре показывается, что КЭТ возникает как следствие спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД — наличия нарушающих киральную симметрию вакуумных конденсатов. Доказывается теорема Голдстоуна и возникновение октета безмассовых голдстоуновских бозонов (π , K , η) в пределе безмассовых u -, d - и s -кварков или триплета безмассовых пионов в пределе $m_u, m_d \rightarrow 0$. Наличие кваркового конденсата в КХД, приводящее к голдстоуновским бозонам в спектре физических состояний, является также причиной существования нарушающих киральную симметрию массивных барионов (в том числе протона и нейтрона). Выводится общее выражение для лагранжиана КЭТ, даются примеры вычисления поправок высшего порядка к древесным диаграммам в КЭТ. Приводится член Весса — Зумино (член порядка r^4 в лагранжиане КЭТ), излагаются низкоэнергетические правила сумм, обсуждаются КХД и КЭТ при конечной температуре. В КЭТ при конечной температуре вычисляется поправка T^2 к кварковому конденсату в КХД, приводятся результаты вычислений температурных поправок высших порядков, указывающие на фазовый переход в КХД при $T \approx 150 - 200$ МэВ. Доказывается смешивание корреляторов токов в порядке T^2 .

PACS numbers: 11.10.Wx, 12.38.-t, 12.39.Fe

Содержание

1. Введение (1273).
 2. Массы легких кварков (1274).
 3. Спонтанное нарушение киральной симметрии и кварковый конденсат (1276).
 4. Теорема Голдстоуна (1277).
 5. Масса нуклона и кварковый конденсат (1279).
 6. Киральная эффективная теория при низких энергиях (1281).
 7. Низкоэнергетические правила сумм в КЭТ (1286).
 8. КХД и КЭТ при конечной температуре (1287).
 9. Заключение (1289).
- Список литературы (1289).

1. Введение

Истинной теорией сильных взаимодействий является квантовая хромодинамика (КХД) — неабелева калибровочная теория взаимодействующих кварков и глюонов. Этот факт в настоящее время общеприят и не вызывает ни малейших сомнений. КХД обладает замечательным свойством асимптотической свободы: бегущая кон-

станта связи теории $\alpha_s(Q^2)$ логарифмически убывает с ростом квадрата передаваемого импульса Q^2 при больших значениях Q^2 : $\alpha_s(Q^2) \propto 1/\ln Q^2$ при $Q^2 \rightarrow \infty$ (или, что эквивалентно, бегущая константа связи α_s убывает на малых расстояниях r : $\alpha_s(r) \propto 1/\ln r$).

Свойство асимптотической свободы КХД позволяет проводить надежные теоретические вычисления процессов при больших передаваемых импульсах (т.е. на малых расстояниях), используя теорию возмущений. Однако это свойство теории приводит к (неограниченному в рамках теории возмущений) возрастанию бегущей константы связи при малых передаваемых импульсах (т.е. на больших расстояниях). Физически такой рост константы связи естествен и, более того, необходим, иначе КХД не была бы теорией сильных взаимодействий. КХД обладает также другим удивительным свойством — свойством конфайнмента: кварки и глюоны не могут покинуть область сильного взаимодействия и наблюдаться как реальные физические объекты. Реальными физическими объектами, наблюдаемыми экспериментально на больших расстояниях, являются адроны — мезоны и барионы.

Два указанных обстоятельства — рост константы взаимодействия и явление конфайнмента, как правило, не дают возможности получать в КХД теоретические предсказания для процессов при малых энергиях и описывать свойства адронов. (Исключениями из этого правила являются доказываемые в КХД низкоэнергетические теоремы и особенно весьма эффективный метод правил сумм КХД. В последнем рассмотрении начинается с области малых расстояний, но в ряде случаев оказывается возможным расширить область примене-

Б.Л. Иоффе. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
Тел. (095) 123-31-93
Факс (095) 127-08-33
E-mail: ioffe@vitep5.itep.ru

Статья поступила 16 марта 2001 г.,
после доработки 24 июля 2001 г.

ния, дойти до достаточно больших расстояний и описать свойства адронов. Другими исключениями являются численные расчеты на решетках.)

Оказалось возможным, однако, построить основанную на КХД эффективную теорию, которая описывает процессы сильного взаимодействия при низких энергиях. Малыми параметрами в этой теории являются импульсы взаимодействующих частиц, точнее, их отношения к характерному масштабу адронных масс $M \approx 0,5 - 1$ ГэВ: $p_i/M \ll 1$. Теория строится как ряд по степеням p/M и является эффективной, т.е. при вычислении членов следующего порядка по p/M в лагранжиане теории необходимо учитывать дополнительные члены, характеризующие новыми параметрами.

Возникновение эффективной теории связано с еще одним специфическим свойством КХД — спонтанным нарушением киральной симметрии. Массы легких u -, d - и s -кварков, входящие в лагранжиан КХД, особенно массы u - и d -кварков, из которых построены обычные (нестранные) адроны, очень малы по сравнению с характерным массовым масштабом: $m_u, m_d < 10$ МэВ. Поскольку в КХД взаимодействие между кварками происходит посредством обмена векторным глюонным полем, в пренебрежении массами легких кварков лагранжиан КХД (точнее, его часть, относящаяся к легким кваркам) является кирально-симметричным, т.е. сохраняются не только векторные, но и аксиальные токи, кварки правой и левой спиральностей не взаимодействуют друг с другом.

Киральная симметрия не реализуется, однако, в спектре наблюдаемых адронов и в их взаимодействиях при низких энергиях. Действительно, в кирально-симметричной теории фермионные состояния должны быть либо безмассовыми, либо вырожденными по четности. Очевидно, что барионы (в частности, нуклон) не обладают такими свойствами. Это означает, что киральная симметрия лагранжиана КХД не реализуется в спектре физических состояний и спонтанно нарушена. Согласно теореме Голдстоуна спонтанное нарушение симметрии ведет к появлению безмассовых частиц в спектре физических состояний — голдстоуновских бозонов.

В КХД голдстоуновские бозоны можно отождествить с триплетом π -мезонов в пределе $m_u, m_d \rightarrow 0$, $m_s \neq 0$ ($SU(2)$ -симметрия) или с октетом псевдоскалярных мезонов (π, K, η) в пределе $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ ($SU(3)$ -симметрия). Локальная $SU(2)_V \times SU(2)_A$ -симметрия сильных взаимодействий (V и A обозначают векторный и аксиальный токи, u - и d -кварки считаются безмассовыми) или $SU(3)_V \times SU(3)_A$ -симметрия (если пренебрегается массой странного кварка m_s) и существование безмассовых голдстоуновских бозонов дают возможность построить эффективную киральную теорию голдстоуновских бозонов и их взаимодействий с барионами, верную при малых импульсах частиц.

В первоначальной версии (до открытия КХД) такой подход назывался теорией частичного сохранения аксиального тока (PCAC). Лагранжиан теории являлся лагранжианом нелинейного взаимодействия пионов между собой и с нуклонами и соответствовал первому члену в разложении по степеням импульсов в современной киральной теории. (Обзор теории PCAC на этой стадии см. в [1].) После создания КХД было доказано, что появление голдстоуновских бозонов является следствием спонтанного нарушения киральной симметрии в

вакууме КХД и тесно связано с существованием нарушающих киральную симметрию вакуумных конденсатов.

Было также установлено, что массы барионов выражаются через те же самые вакуумные конденсаты. Тем самым на основе КХД была найдена внутренняя связь всего рассматриваемого круга явлений. Оказалось возможным сформулировать киральную эффективную теорию (КЭТ) адронов в виде последовательного разложения по степеням импульсов частиц и масс кварков (или масс голдстоуновских бозонов) не только в древесном приближении (как в PCAC), но и с учетом петель. (В английской литературе КЭТ часто называют киральной теорией возмущений — ChPT.)

В настоящем обзоре рассматриваются обоснования, идеи и принципиальные положения КЭТ, а также связь между КЭТ и КХД. Основное внимание уделяется общим свойствам взаимодействия пионов. Для пион-нуклонного взаимодействия приводится лишь общий вид лагранжиана. Изложение конкретных физических эффектов не претендует на систематичность и дается лишь в виде иллюстративных примеров. В действительности, в КЭТ вычислено множество эффектов (в частности, для мезон-барионных взаимодействий, мезонных и барионных форм-факторов и т.д.), представляющих большой интерес для специалистов, но включение их в обзор многократно увеличило бы его объем. Не обсуждается также сравнение с экспериментом, которое могло бы стать предметом отдельного обзора.

2. Массы легких кварков

В дальнейшем u -, d - и s -кварки именуется легкими кварками, а все остальные — тяжелыми кварками. Такое разделение связано с тем, что массы легких кварков малы по сравнению с характеристической массой сильного взаимодействия $M \approx 0,5 - 1,0$ ГэВ m_p . Это есть следствие всей совокупности фактов, в которых утверждается, что симметрией сильного взаимодействия является $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)$. Здесь генераторами группы служат заряды, соответствующие левым ($V - A$) и правым ($V + A$) киральным токам, а $U(1)$ -симметрия соответствует генератору барионного заряда. Эксперимент показывает, что точность $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрии такого же порядка, как точность $SU(3)$ -симметрии: малый параметр, характеризующий нарушение киральной симметрии в сильных взаимодействиях, оценивается как $1/5 - 1/10$.

Приближенная киральная симметрия означает, что равны нулю дивергенции не только векторных токов $\partial_\mu j_\mu^q$, но и аксиальных токов $\partial_\mu j_{\mu 5}^q$, где $q = u, d, s$. (Сделанное утверждение относится к несинглетным по ароматам аксиальным токам. Дивергенция синглетного аксиального тока определяется аномалией и не равна нулю даже для безмассовых кварков. Обсуждение этого вопроса находится вне предмета данного обзора.) Дивергенции несинглетных аксиальных токов в КХД пропорциональны массам кварков. Тем самым наличие киральной симметрии можно объяснить, если массы кварков малы [2, 3]. Однако массы барионов никоим образом нельзя считать малыми: киральная симметрия не реализуется тривиальным образом на спектре масс адронов путем зануления масс всех фермионов. Это означает, что

киральная симметрия спонтанно нарушена на спектре физических состояний.

Согласно теореме Голдстоуна указанное нарушение симметрии приводит к появлению безмассовых частиц — голдстоуновских бозонов. В рассматриваемом случае голдстоуновские бозоны образуют октет безмассовых псевдоскалярных бозонов, если массы легких кварков полагаются равными нулю. Не равные нулю массы легких кварков осуществляют явное нарушение киральной симметрии и дают массы октету псевдоскалярных мезонов. По этой причине октет псевдоскалярных мезонов (часто называемый октетом голдстоуновских бозонов) играет выделенную роль в КХД.

Взаимодействие с тяжелыми кварками отключается в области низких энергий (теорема Appelqvista–Карраzone) [4]. В настоящем обзоре это взаимодействие не учитывается; обсуждается физика сильных взаимодействий при низких энергиях.

Гамильтониан КХД можно представить в виде суммы

$$H = H_0 + H_1, \quad (1)$$

где

$$H_1 = \int d^3x (m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s). \quad (2)$$

Поскольку кварк-глюонное взаимодействие векторное, первое слагаемое в гамильтониане H_0 является $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -инвариантным и единственным источником нарушения $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрии является второе слагаемое H_1 . В интеграле (2) массы кварков m_q , где $q = u, d, s$, не перенормировочно-инвариантны: их значения зависят от точки нормировки (масштаба). Поэтому можно записать

$$m_q(M) = Z_q \left(\frac{M}{\mu} \right) m_q(\mu). \quad (3)$$

Здесь M характеризует масштаб, μ — некоторая фиксированная точка нормировки и $Z_q(M/\mu)$ — перенормировочные факторы.

Если массы легких кварков малы и ими можно пренебречь, то перенормировочные факторы не зависят от ароматов (типа кварков), отношения

$$\frac{m_{q_1}(M)}{m_{q_2}(M)} = \frac{m_{q_1}(\mu)}{m_{q_2}(\mu)} \quad (4)$$

не зависят от масштаба и имеют определенный физический смысл. (Соотношение (4) имеет место, если M больше масс голдстоуновских бозонов m_K : его применимость в области $M \sim m_K$ может вызывать сомнения.)

Для того чтобы найти отношения m_u/m_d и m_s/m_d , рассмотрим аксиальные токи

$$j_{\mu 5}^- = \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 u, \quad (5)$$

$$j_{\mu 5}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d],$$

$$j_{\mu 5}^{s-} = \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 u, \quad j_{\mu 5}^{s0} = \bar{s} \gamma_\mu \gamma_5 d \quad (6)$$

и матричные элементы от них между состояниями π - и K -мезонов

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_{\mu 5}^- | \pi^+ \rangle &= i f_{\pi^+} p_\mu, \\ \langle 0 | j_{\mu 5}^3 | \pi^0 \rangle &= i f_{\pi^0} p_\mu, \\ \langle 0 | j_{\mu 5}^{s-} | K^+ \rangle &= i f_{K^+} p_\mu, \\ \langle 0 | j_{\mu 5}^{s0} | K^0 \rangle &= i f_{K^0} p_\mu, \end{aligned} \quad (7)$$

где p_μ — импульсы π - и K -мезонов.

В пределе точной $SU(3)$ -симметрии все константы в правой части (7) равны: $f_{\pi^+} = f_{\pi^0} = f_{K^+} = f_{K^0}$. Изотопическая $SU(2)$ -симметрия требует равенства $f_{\pi^+} = f_{\pi^0}$, $f_{K^+} = f_{K^0}$. Константы $f_{\pi^+} \equiv f_\pi$ и $f_{K^+} \equiv f_K$ суть константы связи в распадах $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ и $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$. Их экспериментальные значения равны $f_\pi = 131$ МэВ, $f_K = 160$ МэВ. Отношение $f_K/f_\pi = 1,22$ характеризует точность $SU(3)$ -симметрии.

Умножая (7) на p_μ и используя вытекающее из лагранжиана КХД равенство для дивергенции аксиального тока

$$\partial_\mu [\bar{q}_1(x) \gamma_\mu \gamma_5 q_2(x)] = i(m_{q_1} + m_{q_2}) \bar{q}_1(x) \gamma_5 q_2(x), \quad (8)$$

приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} i(m_u + m_d) \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 u | \pi^+ \rangle &= f_{\pi^+} m_{\pi^+}^2, \\ \frac{i}{\sqrt{2}} [(m_u + m_d) \langle 0 | \bar{u} \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_5 d | \pi^0 \rangle + \\ &+ (m_u - m_d) \langle 0 | \bar{u} \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_5 d | \pi^0 \rangle] = f_{\pi^0} m_{\pi^0}^2, \\ i(m_s + m_u) \langle 0 | \bar{s} \gamma_5 u | K^+ \rangle &= f_{K^+} m_{K^+}^2, \\ i(m_s + m_d) \langle 0 | \bar{s} \gamma_5 d | K^0 \rangle &= f_{K^0} m_{K^0}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Пренебрегая электромагнитным (и слабым) взаимодействием и предполагая, что в матричных элементах левой части (9) имеет место изотопическая инвариантность, получаем

$$\langle 0 | \bar{u} \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_5 d | \pi^0 \rangle = 0, \quad (10)$$

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma_5 u | \pi^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \bar{u} \gamma_5 u - \bar{d} \gamma_5 d | \pi^0 \rangle.$$

В этом приближении, как следует из (9), массы π^\pm - и π^0 -мезонов равны, даже если $m_u \neq m_d$. Таким образом, экспериментально наблюдаемая разность масс $\Delta m_\pi = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4,6$ МэВ обусловлена только электромагнитным взаимодействием. Знак разности масс K -мезонов $\Delta m_K = m_{K^+} - m_{K^0} = -4,0$ МэВ противоположен знаку разности масс π -мезонов Δm_π . В КХД или кварковой модели электромагнитные расщепления масс каонов и пионов определяются одними и теми же диаграммами и по крайней мере должны быть того же знака. С учетом (9) это означает, что $m_d > m_u$.

Предполагая $SU(3)$ -инвариантность матричных элементов в (9), после простых алгебраических преобразований из (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{m_u}{m_d} &= \frac{\bar{m}_\pi^2 - (\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2)}{\bar{m}_\pi^2 + (\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2)}, \\ \frac{m_s}{m_d} &= \frac{\bar{m}_{K^0}^2 + \bar{m}_{K^+}^2 - \bar{m}_\pi^2}{\bar{m}_{K^0}^2 - \bar{m}_{K^+}^2 + \bar{m}_\pi^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Черта над символом обозначает, что в соотношения (11) входят не физические массы пионов и каонов, а их значения при выключенном электромагнитном взаимодействии.

Для того чтобы связать \overline{m}_π^2 и \overline{m}_K^2 с их физическими массами, мы снова используем SU(3)-симметрию, в которой фотон является синглетом по U-спину, в то время как π^+ - и K^+ -мезоны представляют собой компоненты U-дублета¹. Поэтому электромагнитные поправки к $m_{\pi^+}^2$ и $m_{K^+}^2$ оказываются равными

$$(\delta m_{\pi^+}^2)_{\text{el}} = (\delta m_{K^+}^2)_{\text{el}}. \quad (12)$$

Можно также показать, что в пределе $m_\pi^2, m_K^2 \rightarrow 0$ электромагнитные поправки к массам π^0 - и K^0 -мезонов обращаются в нуль:

$$(\delta m_{\pi^0}^2)_{\text{el}} = (\delta m_{K^0}^2)_{\text{el}} = 0. \quad (13)$$

Запишем уравнения (12) и (13) в форме соотношения Дашена [6]:

$$(m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2)_{\text{el}} = (m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2)_{\text{el}}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) получаем

$$\overline{m}_\pi^2 = m_{\pi^0}^2, \quad (15)$$

$$\overline{m}_{K^+}^2 - \overline{m}_{K^0}^2 = m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 - (m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2).$$

Подставляя (15) в (11), приходим к соотношениям

$$\frac{m_u}{m_d} = \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2 - (m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2)}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2}, \quad (16)$$

$$\frac{m_s}{m_d} = \frac{m_{K^0}^2 + m_{K^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2}.$$

Численно это дает [7, 8]

$$\frac{m_u}{m_d} = 0,56, \quad \frac{m_s}{m_d} = 20,1. \quad (17)$$

Из (17) следует, что существуют сильное нарушение изотопической инвариантности и большая разница между массами u-, d- и s-кварков, т.е. нарушение SU(3)-симметрии по ароматам кварков. (Более детальный анализ показывает, что соотношения (17) слабо зависят от предположения SU(3)-симметрии соответствующих матричных элементов, использованных при их выводе.) На первый взгляд кажется, что это противоречит хорошо обоснованной изотопической симметрии сильных взаимодействий, так же как и приближенной SU(3)-симметрии. Разгадка противоречия состоит в том, что кварковые массы малы по сравнению с характерным адронным масштабом M : нарушение изотопической симметрии порядка $(m_d - m_u)/M$, а нарушение SU(3)-симметрии порядка m_s/M .

Оценка масс кварков по абсолютной величине может быть получена следующим образом. Предположим, что адроны, содержащие странные кварки и принадлежащие данному унитарному мультиплету, становятся более

тяжелыми только из-за массы s-кварка. Рассматривая расщепление масс в октете барионов, можно найти, что $m_s \approx 150$ МэВ на масштабе порядка 1 ГэВ. Тогда из (17) следует, что

$$m_u = 4,2 \text{ МэВ}, \quad m_d = 7,5 \text{ МэВ}, \quad m_s = 150 \text{ МэВ} \quad (18)$$

при 1 ГэВ.

Можно ожидать, что при значениях масс кварков (18) нарушение изотопической симметрии будет порядка $(m_d - m_u)/M \sim 10^{-2}$, т.е. того же порядка величины, что и поправки, возникающие вследствие электромагнитных взаимодействий. Масштаб нарушения SU(3)-симметрии имеет порядок $m_s/M \approx 1/5$. Большое численное значение отношения m_s/m_d объясняет большое различие масс в октете псевдоскалярных мезонов. Предполагая SU(3)-симметрию для матричных элементов (9), находим

$$\frac{m_{K^+}^2}{m_{\pi^+}^2} = \frac{m_s + m_u}{m_d + m_u} = 13, \quad (19)$$

что согласуется с экспериментом.

Важное следствие соотношений (9) состоит в том, что в КХД квадраты масс частиц из октета псевдоскалярных мезонов пропорциональны массам кварков и обращаются в нуль, когда массы легких кварков m_q стремятся к нулю: в этом пределе псевдоскалярный октет мезонов становится безмассовым.

3. Спонтанное нарушение киральной симметрии и кварковый конденсат

Как уже отмечалось, большое значение масс барионов указывает на то, что в КХД киральная симметрия спонтанно нарушена. Действительно, рассмотрим процесс с участием поляризованного бариона, например рассеяние адрона на продольно-поляризованном протоне при энергии порядка 1 ГэВ. Начальное состояние поляризованного протона можно считать состоянием с некоторыми фиксированными спиральностями кварков. В силу киральной симметрии спиральности должны сохраняться в процессе рассеяния. Однако хорошо известно (как прямое следствие уравнения Дирака для протона), что в таком процессе существует значительная вероятность переворота спина протона. Этот простой факт — существование массы протона — ясно демонстрирует нарушение киральной симметрии в сильных взаимодействиях при низких энергиях².

Во всех известных примерах теорий поля спонтанное нарушение глобальной симметрии проявляется в изменении свойств вакуума — основного состояния гамильтониана теории. Покажем, что то же самое происходит и в КХД. Рассмотрим матричный элемент

$$iq_\mu(m_u + m_d) \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T \{ j_{\mu 5}(x), \bar{u}(0)\gamma_5 d(0) \} | 0 \rangle \quad (20)$$

в пределе безмассовых u- и d-кварков (за исключением общего множителя $m_u + m_d$). Внесем q_μ под интеграл,

² В принципе киральную симметрию можно реализовать так, что все барионные состояния будут вырождены по четности с разницей в массах порядка $m_u + m_d$. Очевидно, что в природе такая возможность не осуществляется.

¹ Описание T-, U-, V-подгрупп SU(3)-группы дано, например, в [5].

проинтегрируем по частям и учтем сохранение аксиального тока. В результате останется только член с одно-временным коммутатором:

$$-(m_u + m_d) \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | \delta(x_0) [j_{05}^-(x), \bar{u}(0)\gamma_5 d(0)] | 0 \rangle = (m_u + m_d) \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle. \quad (21)$$

Перейдем в (20) к пределу $q_\mu \rightarrow 0$ и выполним суммирование по всем промежуточным состояниям. Так как в этом приближении пион считается безмассовым, отличный от нуля вклад дает только промежуточное состояние с одним пионом:

$$q_\mu \langle 0 | j_{\mu 5}^- | \pi^+ \rangle \frac{-1}{q^2} \langle \pi^+ | (m_u + m_d) \bar{u}\gamma_5 d | 0 \rangle = -f_\pi^2 m_\pi^2. \quad (22)$$

Здесь при переходе к правой части использованы соотношения (7) и (9). Подставляя (22) в левую часть (21), имеем

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{m_u + m_d}, \quad (23)$$

где q есть u либо d и учтена SU(2)-инвариантность вакуума КХД. Это уравнение называется соотношением Гелл-Мана – Оакса – Реннера [9].

Уравнение (23) можно получить и другими способами. Предположим, что масса кварка отлична от нуля, но мала. Тогда пион будет массивным и матричный элемент (20) обращается в нуль при $q_\mu \rightarrow 0$. Однако после внесения q_μ под интеграл, кроме члена с одно-временным коммутатором (21), появляется член с дивергенцией аксиального тока. Учет этого члена путем насыщения его однопионными промежуточными состояниями приводит к соотношению (23).

Используя массы кварков из (18), численно находим

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = -(240 \text{ МэВ})^3. \quad (24)$$

Как следует из (23), произведение $(m_u + m_d) \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ ренорм-инвариантно, в то время как величина $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ зависит от масштаба и ее численное значение (24) соответствует нормировке на 1 ГэВ. Величину $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$, называемую кварковым конденсатом, можно записать в виде

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L | 0 \rangle, \quad (25)$$

где q_L и q_R — левые и правые компоненты кварковых полей: $q_L = (1/2)(1 + \gamma_5)q$, $q_R = (1/2)(1 - \gamma_5)q$.

Из выражения (25) видно, что кварковый конденсат нарушает киральную инвариантность и его численное значение (24) имеет порядок характерного адронного масштаба. Нарушение киральной инвариантности является нарушением глобальной симметрии, так как величина $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ не инвариантна относительно глобальных преобразований $q \rightarrow \exp(i\alpha\gamma_5)q$ с постоянным параметром α .

В пертурбативной КХД с безмассовыми кварками кварковый конденсат, конечно, не появится ни в каком порядке теории возмущений. Таким образом, ненулевое и большое значение кваркового конденсата может возникнуть только из-за непертурбативных эффектов. По-

этому непертурбативные флуктуации полей, нарушающие киральную симметрию лагранжиана, действительно существуют и важны для описания КХД. Кварковый конденсат играет в КХД особую роль, так как обладает наименьшей размерностью $d = 3$.

4. Теорема Голдстоуна

В разделе 3 были представлены два аргумента в пользу того, что киральная симметрия, приближенно справедливая в КХД в силу малости масс u -, d - и s -кварков, спонтанно нарушена: существование больших барионных масс и появление кваркового конденсата, нарушающего киральную симметрию. Перейдем теперь к пределу безмассовых u -, d - и s -кварков и покажем, что прямым следствием каждого из этих аргументов будет появление в спектре адронов безмассовых псевдоскалярных бозонов.

Рассмотрим матричный элемент аксиального тока $j_{\mu 5}^+ = \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d$ между нейтронным и протонным состояниями. Общая форма этого матричного элемента такова:

$$\langle p | j_{\mu 5}^+ | n \rangle = \bar{v}_p(p_p) [\gamma_\mu\gamma_5 F_1(q^2) + q_\mu\gamma_5 F_2(q^2)] v_n(p_n), \quad (26)$$

где p_n и p_p — импульсы нейтрона и протона, $q = p_p - p_n$, $v_p(p_p)$ и $v_n(p_n)$ — спиноры протона и нейтрона, $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ обозначают формфакторы. Умножим (26) на q_μ и перейдем к пределу $q^2 \rightarrow 0$, но пусть при этом $q_\mu \neq 0$. После умножения левая часть (26) исчезает из-за сохранения аксиального тока. Используя уравнение Дирака для протона и нейтрона, для правой части получаем

$$\bar{v}_p(p_p) [2mg_A + q^2 F_2(q^2)] \gamma_5 v_n(p_n). \quad (27)$$

Здесь $g_A = F_1(0)$ — константа β -распада нейтрона ($g_A = 1,26$), а m — масса нуклона, которая считается одинаковой для протона и нейтрона.

Единственный способ избежать противоречия с исчезновением левой части (26) состоит в том, чтобы предположить наличие у $F_2(q^2)$ полюса при $q^2 = 0$:

$$F_2(q^2)_{q^2 \rightarrow 0} = -2mg_A \frac{1}{q^2}. \quad (28)$$

Полюс в $F_2(q^2)$ соответствует появлению безмассовой частицы с квантовыми числами пиона. При малых q^2 матричный элемент (26) принимает вид

$$\langle p | j_{\mu 5}^+ | n \rangle = g_A \bar{v}_p(p_p) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \gamma_\nu \gamma_5 v_n(p_n), \quad (29)$$

из которого сохранение аксиального тока очевидно. Второй член в (29) можно описать как взаимодействие аксиального тока с нуклоном через промежуточный пион, когда аксиальный ток рождает виртуальный π^+ -мезон, который затем поглощается нейтроном (рис. 1). Феноменологически низкоэнергетическое пион-нуклонное взаимодействие можно параметризовать лагранжианом

$$L_{\pi NN} = ig_{\pi NN} \bar{v}_N \gamma_5 \tau^a v_N \varphi^a, \quad (30)$$

в котором τ^a — матрицы Паули, а $g_{\pi NN}$ обозначает константу пион-нуклонного взаимодействия ($g_{\pi NN}^2/4\pi \approx 14$).

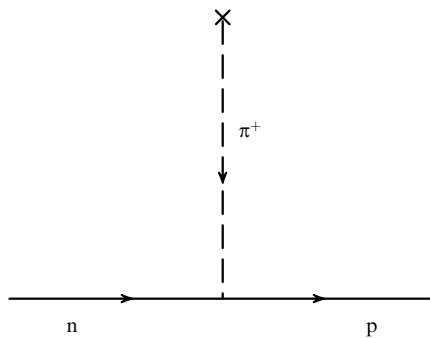


Рис. 1. Диаграмма взаимодействия нуклона с аксиальным током через промежуточный пион. Сплошная линия соответствует нуклону, штриховая — пиону; крестик обозначает взаимодействие с внешним аксиальным током.

Используя (7) и (30), второй член в (26) можно записать как

$$-\sqrt{2} g_{\pi NN} f_{\pi} \bar{v}_p \gamma_5 v_n \frac{q_{\mu}}{q^2}. \quad (31)$$

Сравнение этого выражения с (28) дает соотношение Голдбергера – Треймана [10]:

$$g_{\pi NN} f_{\pi} = \sqrt{2} m_{\pi} g_A. \quad (32)$$

Экспериментально соотношение Голдбергера – Треймана выполняется с 5%-ной точностью, что служит сильным доводом в пользу гипотезы о спонтанном нарушении киральной симметрии. Главное изменение (29), возникающее после учета ненулевой массы пиона, сводится к замене пионного пропагатора $q^2 \rightarrow q^2 - m_{\pi}^2$. Тогда вклад второго члена в (26) исчезает при $q_{\mu} \rightarrow 0$ и становится очень малым для случая β -распада нейтрона.

Поскольку единственным предположением, использованным выше, являлось сохранение аксиального тока, его можно обобщить на любую другую компоненту аксиального тока с изоспином 1 для случая $SU(2)$ -симметрии по ароматам и на любую компоненту аксиального тока из октета, если рассматривается $SU(3)$ -симметрия. В последнем случае мы приходим к заключению, что октет псевдоскалярных мезонов становится безмассовым в пределе безмассовых u -, d и s -кварков.

Безмассовые бозоны, возникающие вследствие спонтанного нарушения симметрии, называются голдстоуновскими бозонами, а теорема, устанавливающая их появление, — теоремой Голдстоуна [11] (см. также [12]). Представленное выше доказательство этой теоремы базировалось на существовании массивных барионов и на отличии от нуля константы β -распада нейтрона. Прежде чем перейти к другому доказательству, основанному на существовании кваркового конденсата в КХД, сформулируем некоторые общие черты теории со спонтанно нарушенной симметрией.

Предположим, что лагранжиан теории инвариантен по отношению к некоторой группе Ли G , т.е. генераторы группы Q_i коммутируют с гамильтонианом H :

$$[Q_i, H] = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (33)$$

Симметрия спонтанно нарушена, если основное состояние не инвариантно относительно группы G и существует

набор генераторов Q_l ($l \leq m$, $1 \leq m \leq n$), таких что

$$Q_l |0\rangle \neq 0. \quad (34)$$

Пусть $|B_l\rangle = Q_l |0\rangle$. Из (33) следует, что

$$H |B_l\rangle = 0, \quad (35)$$

т.е. все состояния $|B_l\rangle$ имеют такую же энергию, как и вакуум, и их можно рассматривать как безмассовые бозоны в состоянии покоя — голдстоуновские бозоны³. Оставшиеся генераторы Q_j ($j = m + 1, \dots, n$) порождают подгруппу $K \subset G$, так как из

$$Q_j |0\rangle = 0 \quad (36)$$

следует, что

$$[Q_j, Q_{j'}] |0\rangle = 0, \quad j, j' = m + 1, \dots, n. \quad (37)$$

В случае КХД группой G будет группа $SU(3)_L \times SU(3)_R$, спонтанно нарушенная до группы $SU(3)_V$, генераторами которой являются векторные заряды. Набор генераторов Q_l формирует октет аксиальных зарядов, а $|B_l\rangle$ — октет псевдоскалярных мезонов. (Если только u - и d -кварки рассматриваются как безмассовые, то сказанное выше будет справедливо для группы $SU(2)_L \times SU(2)_R$.)

Строго говоря, состояния $|B_l\rangle$ имеют бесконечную норму и не могут быть корректно определены. В самом деле,

$$\langle B_l | B_l \rangle = \langle 0 | Q_l Q_l | 0 \rangle = \int d^3x \langle 0 | j_l(x, t) Q_l(t) | 0 \rangle, \quad (38)$$

где $j_l(x)$ — оператор плотности тока, соответствующего генератору Q_l . Выделяя зависимость $j_l(x, t)$ от x и используя то, что вакуум и промежуточные состояния в (38) имеют равный нулю импульс, находим

$$\langle B_l | B_l \rangle = \int d^3x \langle 0 | j_l(0, t) Q_l(t) | 0 \rangle = V \langle | j_l(0, t), Q_l(t) | 0 \rangle. \quad (39)$$

Здесь V — полный объем системы ($V \rightarrow \infty$).

Физически появление бесконечной нормы очевидно: безмассовые голдстоуновские бозоны с нулевым импульсом распределены по всему объему. Метод, при помощи которого можно решить эту проблему, довольно очевиден: нужно приписать бозону небольшую массу. В дальнейшем при рассмотрении коммутаторов проблема обходится: сначала вычисляется коммутатор, что дает δ -функцию, и только потом проводится интегрирование по d^3x .

Продемонстрируем явным образом, как общая теорема работает в КХД. Вернемся к выражению (21), которое при $q_{\mu} = 0$ записывается в виде

$$\langle 0 | [Q_5^-, \bar{u} \gamma_5 d] | 0 \rangle = -\langle 0 | \bar{u} u + \bar{d} d | 0 \rangle, \quad (40)$$

где

$$Q_5^- = \int d^3x j_{05}^-(x) \quad (41)$$

³ Здесь существенно, что Q_l — это генераторы непрерывной группы Ли; теорема не выполняется для генераторов дискретных симметрий.

есть генератор аксиального заряда. Из (40) очевидно, что Q_5^- не аннигилирует вакуум, т.е. относится к набору генераторов из (34). Ясно, что этим свойством обладает любой член октета аксиальных зарядов для SU(3)-симметрии (или любой член изовектора аксиальных зарядов для SU(2)-симметрии).

Применим в нашем случае общее рассуждение Голдстоуна, Салама и Вайнберга [13], рассматривая вакуумный коммутатор в координатном пространстве

$$\langle 0 | [j_{\mu 5}^-(x), \bar{u}(0)\gamma_5 d(0)] | 0 \rangle. \quad (42)$$

Выражение (42) можно записать при помощи представления Челлена – Лемана:

$$\langle 0 | [j_{\mu 5}^-(x), \bar{u}(0)\gamma_5 d(0)] | 0 \rangle = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \int d\kappa^2 \Delta(x, \kappa^2) \rho^-(\kappa^2), \quad (43)$$

в котором $\Delta(x, \kappa^2)$ обозначает причинную функцию Паули – Йордана для скалярной частицы с массой κ :

$$(\partial_\mu^2 + \kappa^2) \Delta(x, \kappa^2) = 0, \quad (44)$$

а $\rho^-(\kappa^2)$ — спектральную функцию, определенную как

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-3} p_\mu \theta(p_0) \rho^-(p^2) = \\ = - \sum_n \delta^4(p - p_n) \langle 0 | j_{\mu 5}^-(0) | n \rangle \langle n | \bar{u}(0)\gamma_5 d(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (45)$$

Из сохранения аксиального тока и (44) следует, что

$$\kappa^2 \rho^-(\kappa^2) = 0, \quad (46)$$

т.е.

$$\rho^-(\kappa^2) = N \delta(\kappa^2). \quad (47)$$

Подставляя (47) в (43), получаем

$$\langle 0 | [j_{\mu 5}^-(x), \bar{u}(0)\gamma_5 d(0)] | 0 \rangle = \frac{\partial}{\partial x_\mu} D(x) N, \quad (48)$$

где $D(x) = \Delta(x, 0)$. Положим $\mu = 0$, $t = 0$ и проинтегрируем (48) по d^3x , используя равенство $\partial D(x)/\partial t|_{t=0} = -\delta^3(x)$.

Сравнение полученного результата с (21) показывает, что коэффициент N пропорционален кварковому конденсату и отличен от нуля. Это означает, что спектр физических состояний содержит безмассовый голдстоуновский бозон, который дает ненулевой вклад в ρ^- . Его квантовые числа такие же, как и у π^+ -мезона. Аналогичное рассмотрение можно привести для остальных членов пионного мультиплетта в случае SU(2)-симметрии и для октета псевдоскалярных мезонов в случае SU(3)-симметрии. Очевидно также, что представленный выше вывод можно повторить для любого оператора, коммутатор которого с аксиальными зарядами имеет ненулевое вакуумное среднее.

Здесь уместно сделать следующее замечание. Теорема Голдстоуна, в которой утверждается, что "если глобальная симметрия спонтанно нарушена, то в спектре физических состояний присутствуют безмассовые состояния", является строгой математической теоремой. Однако в КХД два приведенных выше доказательства не могут рассматриваться как строгие теоремы, в

которых наличие голдстоуновских бозонов вытекает из лагранжиана КХД путем использования первых принципов теории. Действительно, в первом доказательстве существование массивного (и невырожденного по четности) нуклона принималось как экспериментальный факт. Во втором доказательстве использовалось наличие в КХД отличного от нуля кваркового конденсата. Последнее было доказано (см. уравнения (20)–(22)) на основе тождеств Уорда, которые, как было продемонстрировано, являются самосогласованными только в случае существования безмассового пиона. Таким образом, представленные выше доказательства следует рассматривать как убедительную физическую аргументацию, но не как строгую математическую теорему (ср. с [14]).

5. Масса нуклона и кварковый конденсат

Покажем, что два упомянутых выше аргумента в пользу спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД — существование большой барионной массы и появление нарушающего киральную симметрию кваркового конденсата — на самом деле тесно связаны между собой и что барионные массы возникают благодаря наличию кваркового конденсата. Для этого мы используем метод правил сумм КХД, предложенный Шифманом, Вайнштейном и Захаровым [15] в применении к барионам [16]. (Обзор и сборник оригинальных статей см. в [17].)

Основная идея метода состоит в использовании операторного разложения в области импульсов $Q^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$. При анализе адронных вакуумных корреляторов в операторном разложении непертурбативные эффекты сводятся к появлению вакуумных конденсатов, среди которых вакуумные конденсаты наименьшей размерности играют наиболее важную роль. Пертурбативные члены обычно оказываются небольшими и существенно не меняют результатов, особенно в случаях с нарушением киральной симметрии, когда они возникают только как поправки.

Рассмотрим, для определенности, вычисление массы протона [16, 18]. Введем поляризационный оператор

$$P(p) = i \int d^4x \exp(ipx) \langle 0 | T \eta(x), \bar{\eta}(0) | 0 \rangle, \quad (49)$$

в котором $\eta(x)$ — кварковый ток с квантовыми числами протона, а квадрат импульса p^2 выбран пространственноподобным: $p^2 < 0$, $|p^2| \sim 1 \text{ ГэВ}^2$. Форма тока $\eta(x)$, представляющего собой бесцветное произведение трех кварковых полей: $\eta = \varepsilon^{abc} q^a q^b q^c$, где $q = u, d$, будет уточнена ниже (a, b и c — цветовые индексы). Общее выражение для поляризационного оператора имеет вид

$$P(p) = \hat{p} f_1(p) + f_2(p). \quad (50)$$

Первая структура в (50), пропорциональная \hat{p} , сохраняет киральность, в то время как вторая ее нарушает. Для любой из структур $f_i(p^2)$, где $i = 1, 2$, можно написать операторное разложение:

$$f_i(p^2) = \sum_n C_n^{(i)}(p^2) \langle 0 | O_n^{(i)} | 0 \rangle. \quad (51)$$

Здесь $\langle 0 | O_n^{(i)} | 0 \rangle$ — вакуумные средние различных операторов (вакуумные конденсаты), а $C_n^{(i)}$ — коэффициенты, вычисляемые в КХД.

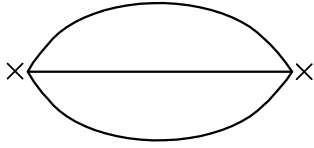


Рис. 2. Голая петлевая диаграмма, характеризующая вклад в сохраняющую киральность функцию $f_1(p^2)$. Сплошная линия соответствует кварковому пропагатору, крестики обозначают взаимодействие с внешними токами.

Для сохраняющей киральность структуры функция $f_1(p^2)$ начинается с единичного оператора размерности $d = 0$, вклад которого дается диаграммой на рис. 2:

$$\hat{p}f_1(p^2) = C_0 \hat{p}p^4 \ln \frac{A_u^2}{-p^2} + \text{полином}, \quad (52)$$

где C_0 — константа, а A_u — ультрафиолетовое обрезание. Операторное разложение для нарушающей киральность структуры $f_2(p^2)$ начинается с оператора размерности $d = 3$, вклад которого представлен диаграммой на рис. 3:

$$f_2(p^2) = C_1 p^2 \langle 0|\bar{q}q|0\rangle \ln \frac{A_u^2}{-p^2} + \text{полином}. \quad (53)$$

Ограничимся временно этими членами первого порядка операторного разложения и пренебрежем членами старших порядков (так же как и пертурбативными поправками).

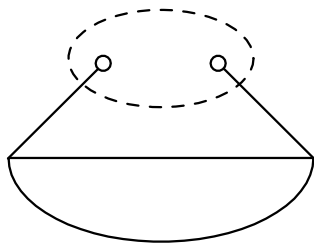


Рис. 3. Диаграмма, соответствующая оператору размерности $d = 3$, нарушающему киральность (кварковый конденсат). Кружки обозначают кварки в фазе конденсата. Остальные обозначения те же, что и на рис. 2.

С другой стороны, поляризационный оператор можно выразить через характеристики физических состояний, используя дисперсионные соотношения

$$f_i(s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im}f_i(s')}{s' + s} ds' + \text{полином}, \quad s = -p^2. \quad (54)$$

Вклад протона в мнимую часть поляризационного оператора $\Pi(p)$ равен

$$\begin{aligned} \text{Im} \Pi(p) &= \pi \langle 0|\eta|p\rangle \langle p|\bar{\eta}|0\rangle \delta(p^2 - m^2) = \\ &= \pi \lambda_N^2 (\hat{p} + m) \delta(p^2 - m^2). \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь

$$\langle 0|\eta|p\rangle = \lambda_N v(p), \quad (56)$$

λ_N — константа, $v(p)$ — спинор протона, а m — масса протона.

Оставаясь в рамках нашего грубого приближения, можно приравнять вычисленные в КХД выражения для поляризационного оператора (52) и (53) его феноменологическому представлению (55). Лучший способ избавиться от неизвестных полиномов состоит в применении к обеим частям полученного равенства преобразования Бореля, определенного как

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{M^2} f(s) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty \\ s/n = M^2 = \text{const}}} \frac{s^{n+1}}{n!} \left(-\frac{d}{ds}\right)^n f(s) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \text{Im} f(s) \exp\left(-\frac{s}{M^2}\right), \end{aligned} \quad (57)$$

если функция $f(s)$ дается дисперсионным соотношением (54). (Иногда соотношение (57) называют преобразованием Лапласа.) Заметим, что

$$\mathcal{B}_{M^2} \frac{1}{s^n} = \frac{1}{(n-1)!(M^2)^{n-1}}. \quad (58)$$

Появление множителя $1/(n-1)!$ в (58) приводит к подавлению борелевским преобразованием членов старшего порядка операторного разложения.

Теперь определим кварковый ток $\eta(x)$. Из (55) ясно, что вклад протона доминирует в некоторой области борелевского параметра $M^2 \sim m^2$ только тогда, когда обе вычисленные в КХД функции f_1 и f_2 будут одного порядка. Это условие вместе с требованием отсутствия производных определяет вид кваркового тока единственным образом (см. [16, 19]):

$$\eta(x) = \varepsilon^{abc} (u^a C \gamma_\mu u^b) \gamma_\mu \gamma_5 d^c, \quad (59)$$

где C обозначает матрицу зарядового сопряжения. Используя явный вид кваркового тока (59), легко определить константы C_0 и C_1 , вычисляя диаграммы, представленные на рис. 2, 3, и после преобразования Бореля получить два равенства (правила сумм), в которых феноменологически учтено только протонное состояние:

$$M^6 = \tilde{\lambda}_N^2 \exp\left(-\frac{m^2}{M^2}\right), \quad (60)$$

$$-2(2\pi)^2 \langle 0|\bar{q}q|0\rangle M^4 = m \tilde{\lambda}_N^2 \exp\left(-\frac{m^2}{M^2}\right), \quad (61)$$

$$\tilde{\lambda}_N^2 = 32\pi^4 \lambda_N^2.$$

Можно показать, что наше грубое приближение справедливо при $M \approx m$. Используя это значение M , делением (60) на (61) получаем простую формулу для массы протона [16]:

$$m = [-2(2\pi)^2 \langle 0|\bar{q}q|0\rangle]^{1/3}. \quad (62)$$

Формула (62) доказывает фундаментальный факт: масса протона возникает из-за спонтанного нарушения киральной симметрии — появления кваркового конденсата. (Численно (62) совпадает с экспериментальной массой протона с точностью, лучшей 5%.)

На самом деле проблема вычисления массы протона исследовалась более детально: учитывались члены старших порядков операторного разложения, возбужденные состояния в феноменологической части правил сумм, проверялась стабильность относительно вариации боре-

левской массы. Вычисленные аналогичным образом массы гиперонов, изобар и некоторых других резонансов находятся в хорошем согласии с экспериментом [20–22]. Мы не будем углубляться в эти результаты. Подведем основной итог: причиной возникновения масс барионов является спонтанное нарушение киральной инвариантности — существование кваркового конденсата в КХД. Таким образом, три явления — массы барионов, кварковый конденсат и существование голдстоуновских бозонов — оказываются тесно связанными между собой.

6. Киральная эффективная теория при низких энергиях

Удалось сформулировать основанную на КХД киральную эффективную теорию, которая учитывает факт появления голдстоуновских бозонов и их свойства. Полученная теория оказывается эффективной низкоэнергетической теорией, т.е. она самосогласована, но только в терминах разложения по степеням импульсов или (в координатном пространстве) по производным полей. Лагранжиан теории представляется в виде ряда, члены которого упорядочены по возрастанию их степени импульсов. Теория нарушается в области импульсов, соответствующих достаточно большим значениям характерных параметров $|\mathbf{p}_i|/M$, где \mathbf{p}_i — пространственные импульсы голдстоуновских бозонов, участвующих в рассматриваемом процессе, а M — характерный масштаб сильных взаимодействий. (Поскольку импульс голдстоуновского бозона \mathbf{p}_i зависит от системы отсчета, в каждом конкретном случае при выборе наиболее удобной системы отсчета необходимо проявлять некоторую осторожность.)

В основе теории лежит тот факт, что в пределе безмассовых (или достаточно малых) масс кварков спектр голдстоуновских бозонов отделен щелью от спектра остальных адронов. Следует подчеркнуть, что киральная эффективная теория, применимая в области $|\mathbf{p}_i|/M \ll 1$, является не моделью, а самосогласованной теорией. Такую теорию можно сформулировать для случая $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрии, в которой квазиголдстоуновскими частицами являются пионы. Тогда можно ожидать, что точность теории будет того же порядка, что и теории изоспина, т.е. несколько процентов. Если теория формулируется для случая $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -симметрии, то квазиголдстоуновскими бозонами является октет псевдоскалярных бозонов π, K, η . В этом случае точность теории будет того же порядка, что и нарушение $SU(3)$ -симметрии, т.е. порядка $m_s/M \approx 10-20\%$. Для определенности, в основной части этого раздела мы будем иметь дело со случаем $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -симметрии.

Эвристические аргументы при построении теории следующие. В пределе безмассовых кварка и пиона выражения (7) можно заменить полевым уравнением

$$j_{\mu 5}^i = -\frac{1}{\sqrt{2}} f_{\pi} \partial_{\mu} \varphi_{\pi}^i, \quad (63)$$

$$j_{\mu 5}^i = \frac{1}{2} \bar{q} \gamma_{\mu} \gamma_5 \tau^i q, \quad q = u, d, \quad (64)$$

в котором φ_{π}^i — поле пиона, τ^i — матрицы Паули, $i = 1, 2, 3$ — индекс изоспина. (По сравнению с (7) здесь

изменена нормировка тока $j_{\mu 5}^i$, для того чтобы воспроизводить стандартные коммутационные соотношения алгебры токов.) Для дивергенции (63) имеем

$$\partial_{\mu} j_{\mu 5}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{\pi} m_{\pi}^2 \varphi_{\pi}^i. \quad (65)$$

Выражения (63) и (65) применимы вблизи массовой поверхности пиона. Поскольку пионное состояние отделено щелью от других массивных состояний в канале с квантовыми числами пиона, эти соотношения можно рассматривать как полевые уравнения, справедливые в области низких энергий. (Обычно их называют уравнениями частичного сохранения аксиального тока — PCAC.)

Прямым следствием уравнения (65) является условие самосогласованности Адлера [23]. Рассмотрим амплитуду процесса $A \rightarrow B + \pi$, в котором A и B — произвольные адронные состояния, в пределе, когда импульс p пиона стремится к нулю. Матричный элемент этого процесса можно записать в виде

$$M_i(2\pi)^4 \delta^4(p_A - p - p_B) = \int d^4x \exp(ipx) (\partial_{\mu}^2 + m_{\pi}^2) \langle B | \varphi_{\pi}^i | A \rangle. \quad (66)$$

Подставляя сюда (65), имеем

$$M_i = \frac{i(p^2 - m_{\pi}^2)}{(1/\sqrt{2}) f_{\pi} m_{\pi}^2} p_{\mu} \langle B | j_{\mu 5}^i(0) | A \rangle. \quad (67)$$

Переходя к пределу $p_{\mu} \rightarrow 0$, получаем

$$M(A \rightarrow B\pi)_{p \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (68)$$

что и является условием Адлера. При выводе (68) неявно предполагалось, что матричный элемент $\langle B | j_{\mu 5}^i | A \rangle$ не содержит полюсных членов, возникающих в случае взаимодействия аксиального тока с внешней пионной линией. Вообще говоря, в подобных случаях теорема Адлера неприменима.

Киральная теория базируется на следующих принципах:

- 1) пионное поле преобразуется по некоторому представлению группы $G = SU(2)_L \times SU(2)_R$;
- 2) действие инвариантно по отношению к этим преобразованиям;
- 3) после нарушения группа преобразований уменьшается до $SU(2)$, т.е. до группы преобразований, которые генерируются изовекторным током;
- 4) в низшем порядке теории выполняются полевые уравнения (63) и (65).

Пионное поле представляется в виде унитарной 2×2 -матрицы $U(x)$: $U^{-1} = U^+(x)$, зависящей от $\varphi_{\pi}^i(x)$. На матрицу $U(x)$ накладывается условие $\det U = 1$. Таким образом, число степеней свободы матрицы U совпадает с числом пионных полей $\varphi_{\pi}^i(x)$. Под действием группы G матрица $U(x)$ преобразуется следующим образом:

$$U'(x) = V_L U(x) V_R^+. \quad (69)$$

Здесь V_L и V_R — унитарные матрицы $SU(2)_L$ - и $SU(2)_R$ -преобразований. Соотношение (69) удовлетворяет необходимому требованию: после нарушения симметрии,

когда группа симметрии G уменьшается до $SU(2)$ и $V_L = V_R = V$, правило преобразования сводится к

$$U' = V U(x) V^{-1}, \quad (70)$$

т.е. к преобразованиям, генерируемым векторным током.

Можно показать, что общая форма записи эффективного лагранжиана в низшем порядке, когда остаются только члены порядка p^2 и пренебрегается нарушением симметрии вследствие пионной массы, такова [24–27]:

$$L_{\text{eff}} = k \text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger), \quad (71)$$

где k — некоторая константа.

Сохраняющиеся векторный и аксиальный токи (нетермовские токи) находятся путем применения к (71) преобразований (69), которые имеют вид

$$V_L = V_R = 1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\tau} \quad (72)$$

в случае векторного тока и

$$V_L = V_R^\dagger = 1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\tau} \quad (73)$$

в случае аксиального тока. Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — инфинитезимальный изовектор. Отсюда получаем, что

$$j_\mu^i = ik \text{Tr} (\tau_i [\partial_\mu U, U^\dagger]), \quad (74)$$

$$j_{\mu 5}^i = ik \text{Tr} (\tau_i \{\partial_\mu U, U^\dagger\}).$$

В терминах пионных полей $\varphi_\pi^i(x)$ матрица $U(x)$ допускает различные реализации. Все они эквивалентны и приводят к одним и тем же физическим следствиям [28, 29]. Математически это связано с тем, что реализации отличаются друг от друга унитарным (нелинейным) преобразованием (69). Одна из удобных реализаций такова:

$$U(x) = \exp (i\alpha \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\varphi}_\pi(x)), \quad (75)$$

где α — константа. Подстановка (75) в (71) и разложение до четвертой степени пионных полей дает

$$L_{\text{eff}} = 2k\alpha^2 (\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}_\pi)^2 + \frac{2}{3} k\alpha^4 [(\boldsymbol{\varphi}_\pi \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}_\pi)^2 - \boldsymbol{\varphi}_\pi^2 (\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}_\pi)^2] + \dots \quad (76)$$

Требование того, чтобы первый кинетический член в (76) имел стандартный вид, приводит к равенству

$$k\alpha^2 = \frac{1}{4}. \quad (77)$$

Подставляя (75) в (74) в первом неисчезающем порядке по пионному полю и учитывая (77), находим, что

$$j_\mu^i = \varepsilon_{ikl} \varphi_\pi^k \frac{\partial \varphi_\pi^l}{\partial x_\mu}, \quad (78)$$

$$j_{\mu 5}^i = -2\sqrt{k} \frac{\partial \varphi_\pi^i}{\partial x_\mu}.$$

Первое из (78) — равенство для векторного тока; это стандартная формула для изовекторного тока пионов. Сравнение второго из (78) равенства с (63) фиксирует константу k и вследствие (77) константу α :

$$k = \frac{1}{8} f_\pi^2, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2}}{f_\pi}. \quad (79)$$

В итоге эффективный лагранжиан (71), так же как и унитарная матрица $U(x)$, содержит только один параметр — константу пионного распада f_π , которая играет роль константы связи теории. Из размерных соображений очевидно, что разложение по степеням импульсов или по степеням пионных полей является фактически разложением по p^2/f_π^2 и φ^2/f_π^2 . В частности, разложение эффективного лагранжиана (71) записывается как

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}_\pi)^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{f_\pi^2} [(\boldsymbol{\varphi}_\pi \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}_\pi)^2 - \boldsymbol{\varphi}_\pi^2 (\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}_\pi)^2] + \dots \quad (80)$$

Вернемся теперь к нарушающему симметрию члену лагранжиана КЭТ. Этот член пропорционален массовой матрице кварков

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}. \quad (81)$$

В лагранжиане КХД соответствующий член преобразуется под действием $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -преобразований по представлению $1/2, 1/2$. Это утверждение можно перенести на киральную теорию, потребовав, чтобы массовая матрица (81) преобразовалась по правилу

$$\mathcal{M}' = V_R \mathcal{M} V_L^\dagger. \quad (82)$$

Линейный по \mathcal{M} член лагранжиана, имеющий наименьший (нулевой) порядок по импульсам пионов и инвариантный по отношению к $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -преобразованиям, имеет вид

$$L' = \frac{f_\pi^2}{4} \{ B \text{Tr} (\mathcal{M} U^\dagger) + B^* \text{Tr} (\mathcal{M} U) \}, \quad (83)$$

где B — константа, а множитель f_π^2 введен для удобства. Наложим требование T -инвариантности на лагранжиан (83). При T -преобразовании пионное поле меняет знак: $T(\varphi_\pi^i) = -\varphi_\pi^i$, поэтому $TU = U^\dagger$. Следовательно, $B = B^*$ и лагранжиан

$$L' = \frac{f_\pi^2}{4} B \text{Tr} [\mathcal{M} (U + U^\dagger)]. \quad (84)$$

В низшем порядке разложения по пионным полям лагранжиан (84) сводится к

$$L' = \frac{1}{2} B (m_u + m_d) \left[f_\pi^2 - \boldsymbol{\varphi}_\pi^2 + \frac{1}{6 f_\pi^2} (\boldsymbol{\varphi}_\pi^2)^2 \right]. \quad (85)$$

Первый член в квадратных скобках (85) дает сдвиг вакуумной энергии, возникающий из-за нарушения симметрии, а второй член соответствует пионному массовому члену лагранжиана $-(m_\pi^2/2)\boldsymbol{\varphi}_\pi^2$. Это соответствие определяет константу B :

$$B = \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} = -\frac{2}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle, \quad (86)$$

где использовано соотношение Гелл-Мана–Оакса–Реннера (23).

Соотношение (86) можно получить и другим способом. Из лагранжиана КХД следует

$$\frac{\partial}{\partial m_u} \langle 0 | L | 0 \rangle = -\langle 0 | \bar{u} u | 0 \rangle. \quad (87)$$

Дифференцируя (85), получаем

$$\frac{1}{2} B f_\pi^2 = -\langle 0 | \bar{u} u | 0 \rangle, \quad (88)$$

что совпадает с (86).

В качестве простейшего приложения лагранжианов (80) и (85) приведем результат вычисления амплитуды пион-пионного рассеяния в первом порядке по $1/f_\pi^2$ [30]:

$$T = \delta^{ik} \delta^{lm} A(s, t, u) + \delta^{il} \delta^{km} A(t, s, u) + \delta^{im} \delta^{kl} A(u, t, s), \quad (89)$$

$$A(s, t, u) = \frac{2}{f_\pi^2} (s - m_\pi^2), \quad (90)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2. \quad (91)$$

Здесь p_1, p_2 и p_3, p_4 — начальные и конечные импульсы пионов; изоспиновые индексы i, k и l, m относятся к начальным и конечным пионам соответственно. Например, амплитуда рассеяния $\pi^+ \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^0$ равна [30]

$$T = \frac{2}{f_\pi^2} (t - m_\pi^2). \quad (92)$$

Амплитуда рассеяния (92) связана с амплитудой рассеяния $f_{c.m}$ в системе центра масс соотношением

$$f_{c.m} = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{E} T, \quad (93)$$

где E — энергия π^+ -мезона в этой системе.

Вместо (75) часто используется реализация

$$U(x) = \frac{\sqrt{2}}{f_\pi} [\sigma(x) + i\tau \varphi_\pi(x)] \quad (94)$$

с условием

$$\sigma^2 + \varphi^2 = \frac{1}{2} f_\pi^2. \quad (95)$$

Прямым вычислением можно показать, что полученные в этой реализации выражения для эффективных лагранжианов вплоть до φ^4 совпадают с (80) и (85) на пионной массовой поверхности. В старших порядках (φ^6, φ^8 и т.д.) выражения для эффективных лагранжианов в реализациях (75) и (94) различаются даже на массовой поверхности. Однако в соответствии с общими аргументами Коулмена, Весса и Зумино [28] физические амплитуды становятся равными после добавления одночастично-приводимых древесных диаграмм. Так как группа SU(2) изоморфна группе O(3), то реализация (94) эквивалентна такой реализации, в которой вместо 2×2 -матрицы $U(x)$ используется действительный четырехвектор $U_i(x)$, удовлетворяющий условию $U_i U_i^T = 1$, где $i = 1, 2, 3, 4$ [26].

Киральный эффективный лагранжиан (71) представляет собой лидирующий член разложения по пионным импульсам. В общем виде член порядка p^4 , удовлетворяющий киральной и лоренц-инвариантности, а также сохранению четности и G-четности, записывается как

$$L_{2\text{eff}} = l_1 [\text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\mu U^+)]^2 + l_2 \text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\nu U^+) \text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\nu U^+), \quad (96)$$

где l_1 и l_2 — константы. К (96) добавляется член второго порядка по кварковым массам. Если в рассматриваемом процессе пространственные импульсы пионов близки к

нулю ($|\mathbf{p}| \ll m_\pi$), то вклад этого члена будет того же порядка, что и (96), так как $p^2 = m_\pi^2 \sim (m_u + m_d)$. В общем виде его можно представить как [26]

$$L'_{2\text{eff}} = l_4 \text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\mu U^+) \text{Tr} [\chi(U + U^+)] + l_6 \{ \text{Tr} [\chi(U + U^+)] \}^2 + l_7 \{ \text{Tr} [i\chi(U - U^+)] \}^2, \quad (97)$$

$$\chi = 2B\mathcal{M}. \quad (98)$$

Для того чтобы выполнить вычисления в следующем порядке киральной эффективной теории, необходимо (кроме учета вкладов от (96) и (97)) выйти за пределы древесного приближения лагранжианов лидирующего порядка и определить однопетлевые вклады, возникающие от (71) и (84). Можно увидеть, что параметр разложения будет $(1/\pi f_\pi)^2 \sim (1/500 \text{ МэВ})^2$. Этот параметр, как правило, сопровождается малыми численными коэффициентами. Таким образом, n -петлевой вклад подавлен по отношению к лидирующему древесному приближению множителем $[p^2/(\pi f_\pi)^2]^n$.

Петлевые интегралы оказываются расходящимися и должны быть регуляризованы. При этом можно использовать любую схему регуляризации, сохраняющую симметрию теории. Это может быть размерная регуляризация или метод, в котором сначала определяется конечная мнимая часть амплитуд рассеяния, а затем при помощи дисперсионных соотношений восстанавливаются полные амплитуды (такой пример приведен ниже), или же любая другая регуляризация. Вычитательные члены, появляющиеся в петлевых вычислениях (полусные члены при $d \rightarrow 4$ в размерной регуляризации или вычитательные члены в подходе с использованием дисперсионных соотношений), поглощаются константами связи следующего порядка эффективного лагранжиана, аналогичными l_1 и l_2 в (96). Теоретически неопределенные константы l_i находятся путем сравнения с экспериментальными данными.

В результате петлевых вычислений и учета старших членов эффективного лагранжиана константа связи f_π , входящая в (71) и (84), приобретает дополнительные вклады и перестает быть равной физической константе распада пиона, определенной в (84). По этой причине константу связи f_π из (71) и (84) необходимо рассматривать как затравочную (f_π^0): она будет совпадать с физической константой f_π только после учета всех старших поправок.

Аналогичное утверждение касается связи между m_π^2 и $m_u + m_d$ в (86). Если рассматривать константу B как постоянный параметр теории, то соотношение (86) модифицируется членами старших порядков. В частности, в следующем за лидирующим порядке [31]

$$m_\pi^2 = \tilde{m}_\pi^2 \left[1 + c(\mu) \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{16\pi^2 f_\pi^2} \ln \frac{m_\pi^2}{\mu^2} \right], \quad (99)$$

где

$$\tilde{m}_\pi^2 = B(m_u + m_d), \quad (100)$$

μ — точка нормировки, а $c(\mu)$ — перенормированная константа связи, которая зависит от μ и выражается через l_i . (Полная поправка не зависит от μ .)

Появление неаналитического по m_π^2 (или m_q) члена порядка $m_\pi^2 \ln m_\pi^2$ — так называемого "кирального логарифма" — является характерной особенностью киральной теории возмущений. Его возникновение связано с инфракрасными расходимостями соответствующих пет-

левых интегралов. Аналогичный киральный логарифм содержится и в f_π :

$$f_\pi = f_\pi^0 \left[1 + c_1(\mu) \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2} - \frac{m_\pi^2}{8\pi^2 f_\pi^2} \ln \frac{m_\pi^2}{\mu^2} \right]. \quad (101)$$

Приведем два примера петлевых вычислений.

1. Найдем неаналитическую (пропорциональную $\ln m_\pi^2$) поправку к электрическому радиусу пиона [32, 33]. Однопетлевая поправка к пионному формфактору возникает от члена с $\pi\pi$ -взаимодействием в лагранжиане (80) и равна

$$\begin{aligned} & \frac{i}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} \delta^4(q + k_1 - k_2)(k_1 + k_2)_\mu \times \\ & \times \frac{1}{k_1^2 - m_\pi^2} \frac{1}{k_2^2 - m_\pi^2} (p_1 + p_2)(k_1 + k_2). \end{aligned} \quad (102)$$

Здесь p_1 и p_2 — начальный и конечный импульсы пиона, q — переданный импульс ($q^2 < 0$, $p_1 + q = p_2$).

Интеграл (102) вычисляется следующим образом. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & i \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2}{(2\pi)^4} (k_1 + k_2)_\mu (k_1 + k_2)_\nu \times \\ & \times \frac{1}{k_1^2 - m_\pi^2} \frac{1}{k_2^2 - m_\pi^2} \delta^4(q + k_1 - k_2) = \\ & = A(q^2) (\delta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu). \end{aligned} \quad (103)$$

Форма правой части (103) диктуется калибровочной инвариантностью. Вычисляя мнимую часть $A(q^2)$ при $q^2 > 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \text{Im} A(q^2) (\delta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) = \\ & = -\frac{1}{8\pi^2} \int d^4 k (2k - q)_\mu (2k - q)_\nu \delta[(q - k)^2] = \\ & = \frac{1}{48\pi} (\delta_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu). \end{aligned} \quad (104)$$

(В этом приближении можно пренебречь массой пиона.)

Коэффициент $A(q^2)$ определяется дисперсионным соотношением

$$A(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{M^2} \frac{ds}{s - q^2} \text{Im} A(q^2) = \frac{1}{48\pi^2} \ln \frac{M^2}{4m_\pi^2 - q^2}. \quad (105)$$

(Здесь вычитательный член опущен, а M^2 — масштаб ультрафиолетового обрезания.) Подстановка (103) и (104) в (102) дает следующую поправку к $\eta\pi\pi$ -вершине:

$$(p_1 + p_2)_\mu [F(q^2) - 1] = (p_1 + p_2)_\mu \frac{q^2}{48\pi^2 f_\pi^2} \ln \frac{M^2}{4m_\pi^2 - q^2}, \quad (106)$$

где $F(q^2)$ — формфактор пиона. Электрический радиус пиона определяется как

$$r_\pi^2 = 6 \frac{dF(q^2)}{dq^2}, \quad (107)$$

а его неаналитическая по m_π^2 часть оказывается равной

$$r_\pi^2 = -\frac{1}{8\pi^2 f_\pi^2} \ln m_\pi^2. \quad (108)$$

2. Кварковый конденсат также приобретает неаналитическую поправку, пропорциональную $m_\pi^2 \ln m_\pi^2$ [34]. Используя (87) и (85), получаем

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = -\frac{1}{2} f_\pi^2 B \left\langle 0 \left| 1 - \frac{\varphi_i^2}{f_\pi^2} \right| 0 \right\rangle. \quad (109)$$

Вакуумное среднее от φ_i^2 определяется выражением

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \langle 0 | T \varphi_i(x), \varphi_i(0) | 0 \rangle &= \frac{3i}{(2\pi)^4} \lim_{x \rightarrow 0} \int d^4 k \frac{\exp(ikx)}{k^2 - m_\pi^2} = \\ &= A m_\pi^2 + C m_\pi^2 \ln m_\pi^2 + \dots \end{aligned} \quad (110)$$

Для того чтобы найти коэффициент C , продифференцируем (110) по m_π^2 . Тогда

$$\frac{3i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - m_\pi^2)^2} = -\frac{3\pi^2}{(2\pi)^4} \ln \frac{M^2}{m_\pi^2}. \quad (111)$$

Подстановка (111) в (109) при учете (86) дает

$$\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle_0 \left(1 + \frac{3m_\pi^2}{16\pi^2 f_\pi^2} \ln \frac{M^2}{m_\pi^2} + A m_\pi^2 \right). \quad (112)$$

Обобщение на случай трех кварков, когда s -кварк также считается безмассовым, а симметрия лагранжиана есть $SU(3)_L \times SU(3)_R$, проводится непосредственно. Теперь $U(x)$ — это унитарная 3×3 -матрица, лагранжиан в лидирующем порядке совпадает с (71) и (84) с той очевидной разницей, что массовая матрица кварков есть 3×3 -матрица. В формулах для аксиального и векторного токов (64) и (74) τ_i следует заменить на матрицы Гелл-Мана λ_n (где $n = 1, \dots, 8$). Аналогичную замену нужно сделать в экспоненциальной параметризации $U(x)$:

$$U(x) = \exp \left(\frac{\sqrt{2}i}{f_\pi} \sum_n \lambda_n \varphi_n(x) \right), \quad (113)$$

где $\varphi_n(x)$ — октет псевдоскалярных мезонных полей. Поскольку алгебра матриц λ_n отличается от алгебры τ_i (в частности, антикоммутирует λ_n, λ_m не сводится к δ_{nm}), такая простая реализация, как (94), оказывается невозможной.

Лагранжиан (84), нарушающий симметрию в порядке φ_n^2 , т.е. массовый член в лагранжиане псевдоскалярных мезонов, недиагонален по пионным полям: эффективный лагранжиан содержит член, пропорциональный $(m_u - m_d) A \varphi_3 \varphi_8$. Присутствие этого члена в лагранжиане означает, что собственные состояния гамильтониана (состояния $|\pi^0\rangle$ и $|\eta\rangle$) не являются собственными состояниями Q^3 и Q^8 генераторов группы $SU(3)_V$: в η -мезоне есть примесь состояния с изоспином 1 (пион) и наоборот [33, 36].

В общем виде можно написать

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \tilde{m}_\pi^2 \varphi_3^2 + \frac{1}{3} \tilde{m}_\eta^2 \varphi_8^2 + \\ &+ A(m_u - m_d) \varphi_3 \varphi_8 + \text{кинетические члены}. \end{aligned} \quad (114)$$

Физические состояния π - и η -мезонов возникают после диагонализации гамильтониана (114):

$$\begin{aligned} |\pi\rangle &= \cos \theta |\varphi_3\rangle - \sin \theta |\varphi_8\rangle, \\ |\eta\rangle &= \sin \theta |\varphi_3\rangle + \cos \theta |\varphi_8\rangle. \end{aligned} \quad (115)$$

Можно показать [35, 36, 27], что константа A в (114) равна

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d}, \quad (116)$$

а угол смешивания (при малых θ) есть

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{m_\pi^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} \frac{m_u - m_d}{m_u + m_d}. \quad (117)$$

Результат (117) используется при рассмотрении многих задач с нарушением изоспина, например ширины распада $\psi' \rightarrow J/\psi \pi^0$ [37] и амплитуды распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$. Нарушающая изоспин амплитуда $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ была найдена в [38, 39] (при ее выводе использовалось соотношение (117)):

$$T(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) = \frac{\sqrt{3}}{2f_\pi^2} \frac{m_u - m_d}{m_s - (m_u + m_d)/2} \left(s - \frac{4}{3} m_\pi^2 \right), \quad (118)$$

где $s = (p_\eta - p_{\pi^0})^2$.

В случае трех ароматов кварков лагранжиан следующего порядка содержит несколько дополнительных членов по сравнению с (96) и (97) [25, 27]:

$$\begin{aligned} L'_{2\text{eff}} = & l_3 \text{Tr} (\partial_\mu U \partial_\mu U^+ \partial_\nu U \partial_\nu U^+) + \\ & + l_5 \text{Tr} [\partial_\mu U \partial_\mu U^+ \chi(U + U^+)] + \\ & + l_8 \text{Tr} (\chi U \chi U^+ + U \chi^+ U \chi). \end{aligned} \quad (119)$$

Кроме того, в порядке p^4 возникает член, имеющий другую природу и пропорциональный полностью антисимметричному тензору $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$. Как указывалось Вессом и Зумино [40], его появление обусловлено аксиальными тождествами Уорда для несинглетных векторного и аксиального токов. Виттен [41] привел следующий эвристический аргумент в пользу существования этого члена. Лагранжианы в лидирующем и следующем за ним порядке (71), (84), (96), (97) и (119) инвариантны по отношению к дискретным симметриям $U(x) \rightarrow U^+(x)$, $U(\mathbf{x}, t) \rightarrow U(-\mathbf{x}, t)$, что в соответствии с (75) эквивалентно замене $\varphi_i(x) \rightarrow -\varphi_i(x)$.

Для случая пионов указанная операция совпадает с G-четностью, однако для октета псевдоскалярных мезонов это не так. В частности, такая симметрия запрещает процессы $K^+ K^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ и $\eta \pi^0 = \pi^+ \pi^- \pi^0$, которые разрешены в КХД. В КХД симметрия, связанная с заменой знака псевдоскалярного пионного поля, имеет место, только если одновременно с ней выполняется пространственное отражение, т.е. $\varphi_i(-\mathbf{x}, t) \rightarrow -\varphi_i(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, к киральному лагранжиану можно добавить член, инвариантный по отношению к последнему преобразованию, но нарушающий $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ и $\varphi_i(x) \rightarrow -\varphi_i(x)$ по отдельности. Очевидно, что этот член пропорционален $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$.

Общая форма инвариантного члена, добавленного к уравнению движения, определяется однозначно:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} f_\pi^2 (-\partial_\mu^2 U^+ + U^+ \partial_\mu^2 U \cdot U^+) + \\ & + \lambda \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \{ U^+ \partial_\mu U \cdot U^+ \partial_\nu U \cdot U^+ \partial_\lambda U \cdot U^+ \partial_\sigma U \} = 0, \end{aligned} \quad (120)$$

где λ — константа. Уравнение (120) неинвариантно по отношению к замене $U^+ \rightarrow U$ и $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ по отдельности,

однако сохраняет четность. В то же время уравнение (120) не может быть выведено из локального лагранжиана в четырехмерном пространстве-времени, так как след второго члена в левой части (120) равен нулю. Виттен [41] показал, что формально лагранжиан можно представить как интеграл по некоторому пятимерному многообразию с локальной плотностью лагранжиана. Интеграл по этому многообразию можно свести к интегралу по границе, которая в точности есть четырехмерное пространство-время.

Вклад в лагранжиан в первом неисчезающем порядке по пионным полям (так называемый член Весса–Зумино) равен [40–42]

$$L_{WZ}(U) = \frac{n}{15\pi^2 f_\pi^2} \int d^4x \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \text{Tr} (\Phi \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \partial_\lambda \Phi \partial_\sigma \Phi), \quad (121)$$

$$\Phi = \sum \lambda_m \varphi_m.$$

Коэффициент n в (121) равен целому числу [41]. Это утверждение следует из свойств отображения четырехмерного пространства-времени в многообразии $SU(3)$, осуществляемое полем U . Из (121) ясно, что $L_{WZ} = 0$ в случае двух ароматов: единственным антисимметричным тензором по индексам ароматов будет ε^{ikl} , и при помощи пионных полей невозможно сконструировать выражение, антисимметричное по координатам.

Для определения коэффициента n полезно рассмотреть взаимодействие с электромагнитным током. В этом случае к лагранжиану Весса–Зумино добавляются члены, которые совместно со (121) приводят к калибровочно-инвариантному лагранжиану [41]

$$\begin{aligned} L_{WZ}(U, A_\mu) = & L_{WZ}(U) - en \int d^4x A_\mu J_\mu + \\ & + \frac{i}{24\pi^2} e^2 n \int d^4x \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} (\partial_\mu A_\nu) A_\lambda \times \\ & \times \text{Tr} [e_q^2 (\partial_\sigma U) U^+ e_q^2 U^+ (\partial_\sigma U) + e_q U e_q U^+ (\partial_\sigma U) U^+]. \end{aligned} \quad (122)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_\mu = & \frac{1}{48\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \text{Tr} [e_q (\partial_\nu U \cdot U^+) (\partial_\lambda U \cdot U^+) (\partial_\sigma U \cdot U^+) + \\ & + e_q (U^+ \partial_\nu U) (U^+ \partial_\lambda U) (U^+ \partial_\sigma U)], \end{aligned} \quad (123)$$

$e_q = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ — зарядовая матрица кварков, а e — заряд протона. Амплитуда распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ может быть получена из последнего члена в (122):

$$T(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{ne^2}{48\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}. \quad (124)$$

Вместе с тем амплитуду этого распада определяется аномалией в КХД. Запишем выражение для аномалии [43–45]:

$$\partial_\mu j_{\mu 5}^3 = \frac{\alpha}{2\pi} N_c (e_u^2 - e_d^2) F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\alpha}{12\pi} N_c \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}, \quad (125)$$

в котором N_c — число цветов, а e_u и e_d — заряды u - и d -кварков. Используя условия PCAC (65), для амплитуды распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ получаем

$$T(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{e^2}{48\sqrt{2}\pi^2 f_\pi} N_c \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}. \quad (126)$$

Выражения (124) и (126) совпадают, только если $n = N_c$ [41].

Второй член в правой части (122) определяет другой физически интересный объект — вершину $\gamma\pi^+\pi^-\pi^0$ -взаимодействия:

$$\Gamma(\gamma\pi^+\pi^-\pi^0) = -\frac{i}{3} \frac{en}{\sqrt{2}\pi^2 f_\pi^3} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} A_\mu \partial_\nu \pi^+ \partial_\lambda \pi^- \partial_\sigma \pi^0. \quad (127)$$

Если $n = N_c$, то результат (127) опять согласуется с вычислениями в КХД, основанными на VAA -аномалии, либо с феноменологическим подходом, в котором аномалия постулируется [46–48].

Киральная эффективная теория справедлива и для пион-барионного взаимодействия в низкоэнергетической области, где получено много результатов. Мы ограничимся только выражением для эффективного пион-нуклонного взаимодействия в лидирующем порядке (см. [1]; члены старших порядков рассмотрены в обзорах [49, 50]):

$$L_{\pi N} = -\frac{g_A}{\sqrt{2}f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \tau \partial_\mu \phi \psi_N - \frac{1}{2f_\pi^2} \bar{\psi}_N \gamma_\mu \tau [\phi \partial_\mu \phi] \psi_N, \quad (128)$$

где ψ_N — нуклонные спиноры, а g_A — аксиальная константа β -распада нейтрона ($g_A = 1,26$). Первый член в (128) представляет собой обычное пион-нуклонное взаимодействие с псевдовекторной связью, второй член соответствует контактному $\pi\pi NN$ -взаимодействию. Используя соотношение Голдбергера–Треймана [32], легко показать, что в первом порядке по пионному полю выражение (128) совпадает со стандартной формой лагранжиана πN -взаимодействия.

7. Низкоэнергетические правила сумм в КЭТ

При помощи КЭТ можно получить важные правила сумм, которые, конечно, справедливы и в КХД. Наиболее интересное и проверенное экспериментально правило сумм относится к разности поляризационных операторов векторного и аксиального токов. Обозначим

$$P_{\mu\nu}^U(q) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T \{ U_\mu(x), U_\nu^+(0) \} | 0 \rangle = (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu}) P_U^{(1)}(q^2) + q_\mu q_\nu P_U^{(0)}(q^2), \quad (129)$$

$$U = V, A, \quad V_\mu = \bar{u} \gamma_\mu d, \quad A_\mu = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 d, \quad (130)$$

где V_μ и A_μ — векторный и аксиальный токи.

Мнимые части корреляторов соответствуют так называемым спектральным функциям ($s = q^2$)

$$v_1(s)/a_1(s) = 2\pi \text{Im} P_{V/A}^{(1)}(s), \quad a_0(s) = 2m \text{Im} P_A^{(0)}(s), \quad (131)$$

которые измеряются в τ -распаде. (Изотопически связанная с v_1 спектральная функция измеряется в e^+e^- -аннигиляции.) Нас не будет здесь интересовать спектральная функция $a_0(s)$, которая соответствует нулевому спину и насыщается в основном однопионным состоянием. Функции $P_V^{(1)}(s)$ и $P_A^{(1)}(s)$ в (131) аналитичны по s в комплексной s -плоскости с разрезом по правой полуоси, начинающейся с порога, соответствующего

низшему адронному состоянию: $4m_\pi^2$ для $P_V^{(1)}$ и $9m_\pi^2$ для $P_A^{(1)}$.

Кроме разреза, $P_A^{(1)}(q^2)$ имеет кинематический полюс при $q^2 = 0$. Это характерное свойство КХД и КЭТ следует из киральной симметрии в пределе нулевых масс u - и d -кварков и ее спонтанного нарушения. В этом пределе аксиальный ток сохраняется и существуют безмассовые пионы, вклад которых в аксиальный поляризационный оператор дается выражением

$$P_{\mu\nu,\pi}^A(q) = f_\pi^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \quad (132)$$

При учете масс кварков в первом порядке (или, что то же, в порядке m_π^2) выражение (132) модифицируется:

$$P_{\mu\nu,\pi}^A(q) = f_\pi^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - m_\pi^2} \right). \quad (133)$$

Разложим (133) по тензорным структурам (129):

$$P_{\mu\nu,\pi}^A(q) = -\frac{f_\pi^2}{q^2} (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) - \frac{m_\pi^2}{q^2} q_\mu q_\nu \frac{f_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2}. \quad (134)$$

Появление полюса в $P_1^A(q^2)$ при $q^2 = 0$ очевидно. Запишем дисперсионное соотношение для $P_1^V(s) - P_1^A(s)$. Это может быть безвычитательное дисперсионное соотношение, так как пертурбативные члены (за исключением малых вкладов от квадратов масс u - и d -кварков) при вычитании взаимно сокращаются, а члены операторного разложения убывают с ростом $q^2 = s$ по меньшей мере, как s^{-2} (член порядка $m_q \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ в операторном разложении):

$$P_1^V(s) - P_1^A(s) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty ds' \frac{v_1(s') - a_1(s')}{s' - s} + \frac{f_\pi^2}{s}. \quad (135)$$

Последний член в правой части (135) соответствует вкладу кинематического полюса.

Перейдем в (135) к пределу $s \rightarrow \infty$. Учитывая, что в этом пределе $P_1^V(s) - P_1^A(s) \rightarrow s^{-2}$, получаем первое правило сумм Вайнберга [51]:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty ds [v_1(s) - a_1(s)] = \frac{1}{2} f_\pi^2. \quad (136)$$

Точность правила сумм (136) порядка нарушения киральной симметрии в КХД или следующих членов в КЭТ, т.е. порядка m_π^2/M^2 (например, вычитательный член). Если в операторном разложении пренебречь членом порядка $m_q \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \sim f_\pi^2 m_\pi^2$, то, проводя разложение (135) до s^{-2} , находим второе правило сумм Вайнберга:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty ds s [v_1(s) - a_1(s)] = O(m_\pi^2). \quad (137)$$

(Другой вывод правил сумм (136) и (137) см. в [52].)

Приведем без вывода еще одно правило сумм в КЭТ (или в более ранней версии PCAC), а именно правило сумм Даса–Матура–Окубо [53]:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{1}{s} [v_1(s) - a_1(s)] = \frac{1}{6} f_\pi^2 \langle r_\pi^2 \rangle - F_A, \quad (138)$$

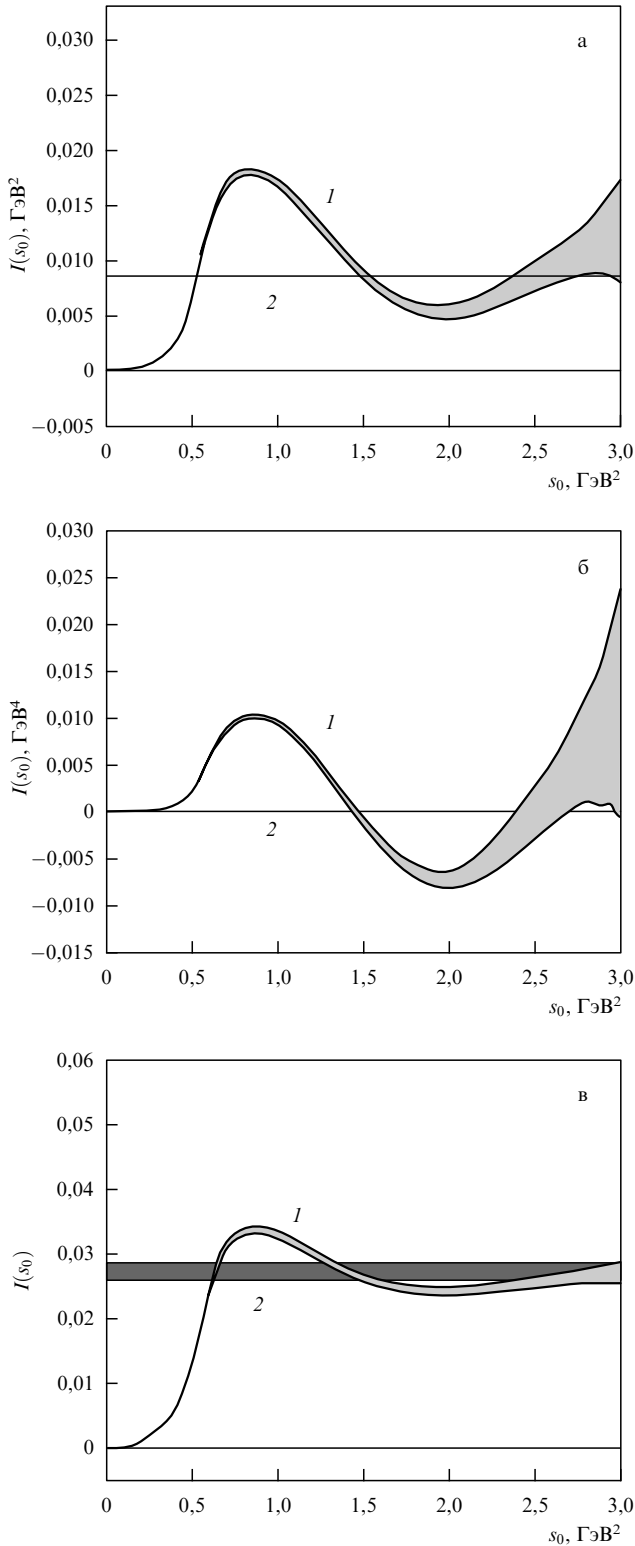


Рис. 4. Правила сумм (136)–(138) ((а)–(в) соответственно) как функции верхнего предела интегрирования s_0 : 1 — данные ALEPH [54]; 2 — предсказания КЭТ.

где $\langle r_\pi^2 \rangle$ — средний электромагнитный радиус пиона, а F_A — аксиальный векторный формфактор пиона в распаде $\pi^- \rightarrow e^- \nu_e \gamma$. Фактически с хорошей точностью F_A можно считать константой.

Правила сумм (136)–(138), как функции верхнего предела интегрирования s_0 , в сравнении с результатами

измерений $v_1(s) - a_1(s)$ в τ -распаде, выполненных коллаборацией ALEPH [54], представлены на рис. 4 (где $I(s_0)$ — это левые части (136)–(138) с верхним пределом, равным s_0).

8. КХД и КЭТ при конечной температуре

КЭТ оказывается полезной и для изучения КХД при конечной температуре. В настоящее время считается наиболее правдоподобным, что с ростом температуры адронная система претерпевает фазовый переход, приводящий к восстановлению киральной симметрии и высвобождению цвета — деконфайнменту (см. обзоры [55–57]). Эти два явления могут происходить либо в одном фазовом переходе, либо в двух последовательных. Оценки критических температур, найденные из решеточных вычислений, изучение соответствующих корреляционных функций в различных моделях, а также температурной зависимости кваркового конденсата в КЭТ указывают на то, что критическая температура $T_c \approx 150 - 250$ МэВ.

Приведем простой аргумент [58] в пользу таких значений T_c , основанный на рассмотрении любого адронного коррелятора $P(x)$ на больших пространственноподобных расстояниях x . Можно ожидать, что

$$P(x) \sim \exp[-\mu(T)|x|], \tag{139}$$

где $\mu(T)$ — параметр экранирования, зависящий от температуры.

Выражение (139) справедливо, если 1) $\mu|x| \gg 1$ и 2) $|x| \lesssim (\alpha_s(T)T)^{-1}$, так как на этих расстояниях в теории возникают инфракрасные расходимости [59]. В области больших температур параметр $\mu(T)$ дается мацубаровской частотой:

$$\mu = 2\pi T \text{ для бозонов (двух кварков)}, \tag{140}$$

$$\mu = 3\pi T \text{ для барионов (трех кварков)}.$$

При малых температурах T параметр $\mu(T)$ равен массе соответствующего адрона за исключением пиона, для которого условия 1) и 2) не могут быть выполнены одновременно. Используя в качестве примера ρ - и a_1 -мезоны, находим, что согласование двух режимов происходит при 150–200 МэВ.

Кварковый конденсат можно рассматривать как параметр порядка в КХД. Его исчезновение при некоторой критической температуре указывает на фазовый переход — восстановление киральной симметрии при $T = T_c$. Имея это в виду, вычислим поправку порядка T^2 к кварковому конденсату $\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = \langle 0|d\bar{d}|0\rangle$ в пределе безмассовых u - и d -кварков [60, 61]. Среднее значение оператора O при конечной температуре определяется как

$$\langle O \rangle_T = \sum_n \left\langle n \left| O \frac{1}{\exp(H/T) \pm 1} \right| n \right\rangle \rho_n, \tag{141}$$

где знак " \pm " отвечает ферми- и бозе-системам, ρ_n — плотность состояний $|n\rangle$. При малых температурах для безмассовых u - и d -кварков основной вклад возникает от состояний безмассовых пионов. Вклад остальных частиц экспоненциально подавлен множителем $\exp(-m/T)$, где m — масса частицы. (Суммирование по n проводится в гильбертовом пространстве физических частиц, так как

при малых температурах система находится в фазе конфайнмента и проблема характеризуется большими расстояниями.)

В порядке T^2 достаточно ограничиться в (141) вкладом однопионного состояния, равным

$$\Delta_T \langle \bar{u}u \rangle = 3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \cdot 2E} \langle \pi^+ | \bar{u}u | \pi^+ \rangle \frac{1}{\exp(E/T) - 1}. \quad (142)$$

Здесь Δ_T обозначает температурную поправку, а фактор 3 возникает от трех пионных состояний: π^+ , π^- , π^0 . Ясно, что однопионный фазовый объем дает нужную степень T^2 , двухпионные состояния — T^4 и т.д.

Из лагранжиана КХД имеем

$$\langle \pi^+ | \bar{u}u | \pi^+ \rangle = - \frac{\partial}{\partial m_u} \langle \pi^+ | L | \pi^+ \rangle. \quad (143)$$

Подставляя в (143) вместо лагранжиана КХД киральный эффективный лагранжиан (85), приходим к соотношению

$$\langle \pi^+ | \bar{u}u | \pi^+ \rangle = \frac{1}{2} B \langle \pi^+ | 2\varphi^+ \varphi | \pi^+ \rangle = B = - \frac{2}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle. \quad (144)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta_T \langle \bar{u}u \rangle &= - \frac{6}{(2\pi)^3 f_\pi^2} \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \cdot 2E} \frac{1}{\exp(E/T) - 1} = \\ &= - \frac{T^2}{4f_\pi^2} \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (145)$$

Кварковый конденсат уменьшается с ростом температуры. Если бы линейное по T^2 поведение продолжилось до температуры $T = 2f_\pi \approx 250$ МэВ, кварковый конденсат обратился бы в нуль и киральная симметрия была бы восстановлена. Вычисление членов более высокого порядка, вплоть до T^6 , дает [62, 63]

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle_T &= \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \left[1 - \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{T^2}{6f_\pi^2} - \frac{N_f^2 - 1}{2N_f^2} \left(\frac{T^2}{6f_\pi^2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - N_f(N_f^2 - 1) \left(\frac{T^2}{6f_\pi^2} \right)^3 \ln \frac{M}{T} \right], \end{aligned} \quad (146)$$

где N_f — число ароматов ($N_f = 2$ для безмассовых u - и d -кварков), а M — параметр обрезания. Все три члена разложения имеют один и тот же знак, что указывает на уменьшение температуры фазового перехода до $T_c \approx 150$ МэВ. Зависимость кваркового конденсата при малых температурах показана на рис. 5.

Для глюонного конденсата ситуация более сложная. Оператор $G_{\mu\nu} G_{\mu\nu}$ пропорционален следу тензора энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$, являющегося генератором конформных преобразований. Однако невзаимодействующий газ пионов конформно-инвариантен. (В силу теоремы Адлера при малых температурах пионы не взаимодействуют.) По этой причине низкотемпературное разложение глюонного конденсата начинается с члена порядка T^8 [62].

В заключение рассмотрим поправки порядка T^2 к корреляторам векторного и аксиального токов в пределе безмассовых кварков [64]. При конечной темпера-

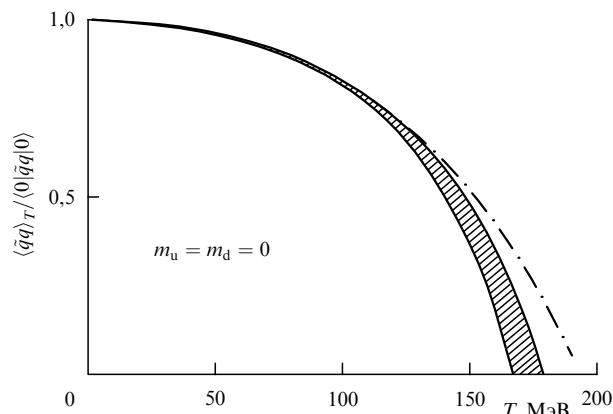


Рис. 5. Температурная зависимость кваркового конденсата в трехпетлевом приближении (при $m_u = m_d = 0$). Штрихпунктирная кривая соответствует формуле (146); заштрихованная область — модели, учитывающей массивные состояния [62, 63].

туре T корреляторы определяются как ($q^2 = -Q^2 < 0$)

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^U(q, T) &= i \int d^4 x \exp(iqx) \times \\ &\times \sum_n \langle n | T \left\{ U_\mu^a(x), U_\nu^a(0) \exp \frac{\Omega - H}{T} \right\} | n \rangle, \end{aligned} \quad (147)$$

$$U = V, A, \quad V_\mu^a = \bar{q} \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} q, \quad A_\mu^a = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q. \quad (148)$$

Здесь

$$\exp \left(- \frac{\Omega}{T} \right) = \sum_n \langle n | \exp \left(- \frac{H}{T} \right) | n \rangle.$$

Для вычисления $\Pi_{\mu\nu}^U(q, T)$ при низких температурах ($T^2 \ll Q^2$) в суммировании по $|n\rangle$ нужно учесть только вакуумное и однопионное состояния. Матричные элементы

$$\langle \pi | T \{ U_\mu^a(x), U_\nu^a(0) \} | \pi \rangle \quad (149)$$

легко найти, применяя к пионам редукционные формулы и используя соотношение (65). Возникающие одновременные коммутаторы определяются из соотношений алгебры токов (либо выводятся из (78)). Интегрирование по фазовому пространству пионов (релятивистский бозе-газ) выполняется при помощи следующей формулы (для безмассовых пионов):

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 \cdot 2q} \frac{1}{\exp(q/T) - 1} = \frac{T^2}{24}. \quad (150)$$

Окончательный результат таков:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^V(q, T) &= (1 - \varepsilon) \Pi_{\mu\nu}^V(q, 0) + \varepsilon \Pi_{\mu\nu}^A(q, 0), \\ \Pi_{\mu\nu}^A(q, T) &= (1 - \varepsilon) \Pi_{\mu\nu}^A(q, 0) + \varepsilon \Pi_{\mu\nu}^V(q, 0), \end{aligned} \quad (151)$$

где $\varepsilon = T^2/3f_\pi^2$.

Если записать $\Pi_{\mu\nu}^{V/A}(q, 0)$ в виде дисперсионных соотношений, выразив $\Pi_{\mu\nu}^{V/A}$ через вклады физических состояний в V - и A -каналах (скажем, полюсы ρ, a_1, π и

т.д.), то в соответствии с формулами (151) полюсы в корреляторах $P^{V,A}(q, T)$ не смещаются в порядке T^2 , а остаются в том же положении, что и при $T = 0$. Из (151) следует, что при $T \neq 0$ в поперечном векторном канале, кроме полюсов от векторных частиц, возникают полюсы от аксиальных частиц, и наоборот. Таким же образом в продольной части векторного канала появляется пионный полюс. Аналогичное смешивание по четности (а в некоторых случаях по изоспину) происходит при конечных температурах и в других каналах, включая барионные [65].

9. Заключение

Целью данного обзора было убедить читателя, что киральная эффективная теория (КЭТ) является, с одной стороны, прямым следствием КХД — киральной симметрии КХД и ее спонтанного нарушения, а с другой — очень эффективным методом решения проблем сильных взаимодействий при низких энергиях, имеющим большую предсказательную силу.

В обзоре показано, что в КХД массы легких кварков (u- и d-кварков, а также, хотя и с худшей точностью, s-кварков) малы и что КХД обладает киральной инвариантностью, если пренебречь массами этих кварков. Однако спектр физических состояний (включая вакуумное) не имеет такой симметрии: в пределе нулевых масс u- и d-кварков существует нарушающий симметрию кварковый конденсат, а массы барионов никоим образом нельзя считать малыми, в противоречии с киральной симметрией.

Было продемонстрировано, что эти два факта — наличие больших барионных масс и существование кваркового конденсата — тесно связаны между собой: первый вытекает из второго. Нарушение киральной симметрии в физическом спектре означает, что симметрия спонтанно нарушена. Прямым следствием этого является существование в спектре безмассовых голдстоуновских бозонов (пионов в случае SU(2)-симметрии, когда предполагается, что u- и d-кварки безмассовые, а s-кварк массивный). Знание симметрии теории и существование голдстоуновских бозонов позволяет сконструировать КЭТ, справедливую в области низких энергий. КЭТ является эффективной теорией, т.е. при переходе к следующей аппроксимации (учету старших степеней импульса частиц) в лагранжиане теории возникают дополнительные члены.

В обзоре сконструирован лагранжиан КЭТ в первом и втором порядках по импульсам, изучены его основные свойства. Приведены примеры, демонстрирующие эффективность КЭТ при исследовании взаимодействия пионов в области низких энергий. Представлены низкоэнергетические правила сумм, допускающие прямую экспериментальную проверку. Показано, что КЭТ является очень удобным инструментом для изучения КХД при конечных температурах, позволяющим получить указание о существовании фазового перехода в КХД.

Я весьма признателен Х. Лейтвилеру за разъяснение различных аспектов КЭТ, а также за гостеприимство и заботу обо мне в Берне. Я благодарен Ю. Шпету за приглашение в Исследовательский центр Юлих, где данное исследование было завершено, и фонду А. фон Гумбольдта за финансирование этой поездки.

Работа выполнена при поддержке грантов CRDF (RP2-2247), РФФИ (00-02-17808) и INTAS (2000-587).

Список литературы

1. Вайнштейн А И, Захаров В И *УФН* **100** 225 (1970)
2. Gasser J, Leutwyler H *Nucl. Phys. B* **94** 269 (1975)
3. Weinberg S, in *A Festschrift for I.I. Rabi* (Trans. New York Acad. Sci., Ser. 2, Vol. 38, Ed. L Motz) (New York: New York Acad. of Sciences, 1977) p. 185
4. Appelquist T, Carazzone J *Phys. Rev. D* **11** 2856 (1975)
5. Берестецкий В Б *УФН* **85** 393 (1965)
6. Dashen R *Phys. Rev.* **183** 1245 (1969)
7. Gasser J, Leutwyler H *Phys. Rep.* **87** 77 (1982)
8. Leutwyler H *J. Moscow Phys. Soc.* (6) 1 (1996)
9. Gell-Mann M, Oakes R J, Renner B *Phys. Rev.* **175** 2195 (1968)
10. Goldberger M L, Treiman S B *Phys. Rev.* **110** 1178 (1958)
11. Goldstone J *Nuovo Cimento* **19** 154 (1961)
12. Nambu Y, Jona-Lasinio G *Phys. Rev.* **122** 345 (1961)
13. Goldstone J, Salam A, Weinberg S *Phys. Rev.* **127** 965 (1962)
14. Coleman S "Laws of hadronic matter", in *Proc. 11 Course of the "Ettore Majorana" Intern. School of Subnuclear Physics* (Ed. A Zichichi) (New York: Academic Press, 1975)
15. Shifman M A, Vainshten A I, Zakharov V I *Nucl. Phys. B* **147** 385, 448 (1979)
16. Ioffe B L *Nucl. Phys. B* **188** 317 (1981); **192** 591 (1982)
17. Shifman M A (Ed.) *Vacuum Structure and QCD Sum Rules* (Current Physics—Sources and Comments, Vol. 10) (Amsterdam: North-Holland, 1992)
18. Chung Y et al. *Nucl. Phys. B* **197** 57 (1982)
19. Ioffe B L *Z. Phys. C* **18** 67 (1983)
20. Беляев В М, Иоффе Б Л *ЖЭТФ* **83** 876 (1982)
21. Беляев В М, Иоффе Б Л *ЖЭТФ* **84** 1236 (1983)
22. Ioffe B L *Acta Phys. Pol.* **16** 543 (1985)
23. Adler S L *Phys. Rev.* **137** B1022 (1965); **139** B1638 (1965)
24. Weinberg S *Physica A* **96** 327 (1979)
25. Leutwyler H, in *Lectures at the XXX Intern. Universitätswochen für Kernphysik (Schladming, Austria, Feb. 1991)*; Preprint BUTP-91/26 (1991)
26. Gasser J, Leutwyler H *Ann. Phys.* (New York) **158** 142 (1984)
27. Gasser J, Leutwyler H *Nucl. Phys. B* **250** 465 (1985)
28. Coleman S, Wess J, Zumino B *Phys. Rev.* **177** 2239 (1969)
29. Callan S G (Jr.) et al. *Phys. Rev.* **177** 2247 (1969)
30. Weinberg S *Phys. Rev. Lett.* **17** 616 (1966)
31. Langacker P, Pagels H *Phys. Rev. D* **8** 4595 (1973)
32. Bég M A B, Zepeda A *Phys. Rev. D* **6** 2912 (1972)
33. Волков М К, Первушин В Н *ЯФ* **20** 762 (1974)
34. Novikov V A et al. *Nucl. Phys. B* **191** 301 (1981)
35. Иоффе Б Л *ЯФ* **29** 1611 (1979)
36. Gross D J, Treiman S B, Wilczek F *Phys. Rev. D* **19** 2188 (1979)
37. Ioffe B L, Shifman M A *Phys. Lett. B* **95** 99 (1980)
38. Osborn H, Wallace D R *Nucl. Phys. B* **20** 23 (1970)
39. Gasser J, Leutwyler H *Nucl. Phys. B* **250** 539 (1985)
40. Wess J, Zumino B *Phys. Lett. B* **37** 95 (1971)
41. Witten E *Nucl. Phys. B* **223** 422 (1983)
42. Zahed I, Brown G E *Phys. Rep.* **142** 1 (1986)
43. Adler S L *Phys. Rev.* **177** 2426 (1969)
44. Bell J S, Jackiw R *Nuovo Cimento* **60** 1517 (1969)
45. Bardeen W A *Phys. Rev.* **184** 1848 (1969)
46. Терентьев М В *Письма в ЖЭТФ* **14** 140 (1971)
47. Adler S L et al. *Phys. Rev. D* **4** 3497 (1971)
48. Терентьев М В *УФН* **112** 37 (1974)
49. Meißner U-G "Chiral nucleon dynamics", in *Lectures at the 12th Annual Hampton Univ. Graduate Studies at CEBAF, Newport News, June 1997*; Preprint KFA-IKP(TH)-97-20 (1997); hep-ph/9711365
50. Leutwyler H *PiN Newsl.* **15** 1 (1999); hep-ph/0008123; Becher T, Leutwyler H *JHEP* **0106** 017 (2001); hep-ph/0103263
51. Weinberg S *Phys. Rev. Lett.* **18** 188, 507 (1967)

52. Ioffe B L, Khoze V A, Lipatov L N *Hard Processes* (Amsterdam: North-Holland, 1984)
53. Das T, Mathur V S, Okubo S *Phys. Rev. Lett.* **19** 859 (1967)
54. Barate R et al. (ALEPH Collab.) *Eur. J. Phys. C* **4** 409 (1998)
55. Shuryak E V *Phys. Rep.* **61** 71 (1980)
56. Gross D J, Pisarski R D, Yaffe L G *Rev. Mod. Phys.* **53** 43 (1981)
57. McLerran L *Rev. Mod. Phys.* **58** 1021 (1986)
58. Елецкий В Л, Иоффе Б Л *ЯФ* **48** 602 (1988)
59. Linde A D *Rep. Prog. Phys.* **42** 389 (1979)
60. Benétruy P, Gaillard M K *Phys. Rev. D* **32** 931 (1985)
61. Gasser J, Leutwyler H *Phys. Lett. B* **184** 83 (1987); **188** 477 (1987)
62. Leutwyler H *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **4** 248 (1988)
63. Gerber P, Leutwyler H *Nucl. Phys. B* **321** 387 (1989)
64. Dey M, Eletsky V L, Ioffe B L *Phys. Lett. B* **252** 620 (1990)
65. Eletsky V L, Ioffe B L *Phys. Rev. D* **47** 3083 (1993)

Chiral effective theory of strong interactions

B.L. Ioffe

*Institute of Theoretical and Experimental Physics,
B. Chermushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 123-31 93
Fax (7-095) 127-08 33
E-mail: ioffe@vitep5.itep.ru*

A review of chiral effective theory (CET) is presented. CET is based on quantum chromodynamics (QCD) and describes strong interaction processes at low energies. It is proved that CET arises as a consequence of the spontaneous violation of chiral symmetry in QCD — the appearance of chiral-symmetry-violating vacuum condensates. The Goldstone theorem is proved for the case of QCD, and the existence of the octet of massless Goldstone bosons (π , K , η) is demonstrated in the limit of massless u , d and s quarks (or the existence of the triplet of massless pions in the limit $m_u, m_d \rightarrow 0$). It is shown that the same phenomenon — the appearance of quark condensate in QCD — which is responsible for the Goldstone bosons also gives rise to chiral-symmetry-violating massive baryons. The general form of the CET Lagrangian is derived. Examples of higher order corrections to tree diagrams in CET are considered. The Wess–Zumino term (i.e., the p^4 term in the CET Lagrangian) is given. Low energy sum rules are presented. QCD and CET at finite temperature are discussed. In the CET framework, the T^2 correction to quark condensate in QCD is calculated at finite temperature, and results including higher order temperature corrections are presented. These results predict a phase transition to occur at $T \approx 150–200$ MeV in QCD. Finally, the mixing of T^2 current correlators is proved.

PACS numbers: 11.10.Wx, **12.38.–t**, 12.39.Fe

Bibliography — 65 references

Received 16 March 2001, revised 24 July 2001