Октябрь 2001 г. **Том 171, № 10**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости

Л.А. Большов, П.С. Кондратенко, В.Ф. Стрижов

Дан обзор теоретических и экспериментальных исследований конвективной теплоотдачи тепловыделяющей жидкости, находящейся в замкнутом объеме. Теоретические результаты получены путем аналитических оценок, основанных на законах сохранения физических величин и современных представлениях о процессах конвективного теплопереноса. Выделены четыре основных и один асимптотический режимы теплоотдачи в зависимости от мощности тепловыделения. Найдены предельные зависимости распределения теплоотдачи на нижней границе. Проанализирована теплоотдача в квазидвумерной геометрии. Отдельно исследована квазистационарная теплоотдача остывающей жидкости без внутренних источников тепла. Проведено сравнение теории с экспериментом.

PACS numbers: **28.90.+i**, **44.25.+f**

Содержание

Л.А. Большов. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН
113191 Москва, Большая Тульская 52, Российская Федерация
Тел. (095) 955-22-47. Факс (095) 958-00-40
E-mail: bolshov@ibrae.ac.ru
П.С. Кондратенко. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН
113191 Москва, Большая Тульская 52, Российская Федерация
Тел. (095) 955-22-91. Факс (095) 958-00-40
E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru
В.Ф. Стрижов. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН
113191 Москва, Большая Тульская 52, Российская Федерация
Тел. (095) 955-22-08. Факс (095) 958-00-40
E-mail: vfs@ibrae.ac.ru

Статья поступила 10 мая 2001 г.

1. Введение

Эксперимент Бенара [1] и его теоретическая интерпретация, предложенная Рэлеем [2], дали начало истории изучения естественной конвекции в жидкостях и газах (см. [3 – 13]), которая отметила столетний юбилей. Исследовались, как правило, процессы конвекции, обусловленные заданными внешними (разнотемпературными) граничными условиями. Например, конвекция вблизи стенки с температурой, отличающейся от температуры жидкости вдали от стенки. Между тем, существует целый класс свободно-конвективных течений, которые обусловлены не внешними условиями, а внутренними источниками тепла. До недавнего времени эти течения оставались почти без внимания. И только в последнюю четверть минувшего века в связи с потребностями ядерной энергетики работы по изучению естественной конвекции в жидкости с внутренними источниками тепла заметно оживились. Актуальность этих работ сделалась особенно очевидной после аварий на атомных электростанциях в США (Three Mile Island) и Чернобыле, приведших к тому, что проблема безопасности атомной энергетики выделилась в самостоятельную область исследований.

При анализе сценариев и предсказании последствий тяжелых аварий с разрушением активной зоны на атомных электростанциях возникает задача удержания радиоактивного горячего расплава в корпусе ядерного реактора. В настоящее время для реакторов малой и средней мощности наиболее приемлемым вариантом решения этой задачи считается внешнее охлаждение корпуса

кипящей водой [14]. В связи с этим исключительную важность приобретает знание закономерностей распределения теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла, находящейся в замкнутом объеме. Изучение этих закономерностей проводится, прежде всего, путем экспериментального [15–31] и численного [32–37] моделирования. При высоких уровнях мощности выделения тепла, отвечающих реальным ситуациям, связанным с безопасностью ядерных реакторов, конвективное течение жидкости становится сильно турбулентным и потому численные методы моделирования сталкиваются здесь со значительными трудностями. Это приводит к усилению роли аналитических подходов.

В связи с тем, что последовательная теория турбулентности в настоящее время отсутствует, единственным способом получения аналитических закономерностей для конвекции в жидкости с высокими уровнями тепловыделения являются качественные оценки, базирующиеся на общих принципах, связанных со свойствами симметрии, законами сохранения, а также соображениями подобия и размерности. Специфическая особенность метода оценок состоит в том, что, позволяя определять вид функциональных зависимостей, он оставляет открытым вопрос о точном значении численных коэффициентов. В этом отношении он уступает прямому численному моделированию. Однако по сравнению с последним метод оценок дает возможность продвинуть исследования свободной конвекции в ту область параметров, которая не поддается численному моделированию.

Метод аналитических оценок в гидродинамике вообще и в теории конвективного теплопереноса в частности восходит к классическим работам Прандтля [3, 4], Кармана [5], Колмогорова [6], Ландау [7] и Зельдовича [8]. Во всех этих работах исследуются жидкости без внутренних источников тепла. К жидкостям, обладающим этими источниками, данный подход начал применяться лишь в последнее время [38–44].

Цель настоящего обзора — дать представление о современном состоянии экспериментальных и основанных на аналитических оценках теоретических исследований конвективной теплоотдачи однокомпонентной жидкости с внутренними источниками тепла.

Несколько замечаний о способе описания результатов. Основные характеристики теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла — это распределение плотности потока тепла на границе q и максимальное превышение температуры жидкости в объеме над температурой границы, ΔT. Закономерности, связанные с этими характеристиками, удобно представлять в виде зависимостей безразмерных чисел Нуссельта Nu и Рэлея Ra, определенных соотношениями

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{H}\,\mathrm{Nu}\,, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\alpha \Delta T H^3}{\nu\chi} \tag{1.2}$$

от модифицированного числа Рэлея

$$\mathrm{Ra_i} = \frac{g\alpha Q H^5}{\lambda\nu\chi}\,. \tag{1.3}$$

В формулах (1.1)–(1.3) λ, ν, χ и α — соответственно теплопроводность, кинематическая вязкость, температуропроводность и термический коэффициент объемного расширения жидкости; H — характерный линейный размер по вертикали занимаемого жидкостью объема (высота), g — ускорение свободного падения, Q — плотность мощности внутренних источников тепла, распределение которых предполагается однородным. Естественно, что число Нуссельта, характеризуя распределение потока тепла на границе, является функцией координат на поверхности границы. Число $\mathrm{Ra_i}$ по существу есть безразмерная мощность внутреннего тепловыделения жидкости.

Отметим, что для жидкости без внутренних источников тепла независимой переменной является число Ra (при этом ΔT в (1.2) следует понимать как характерную разность температур, связанную с граничными условиями). Соответственно теплопередача в этой жидкости определяется в виде $\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}(\mathrm{Ra})$. Напротив, в тепловыделяющей жидкости в качестве независимой переменной выступает модифицированное число Рэлея $\mathrm{Ra_i}$, а число Ra подлежит определению и, как уже было сказано выше, наряду с числом Nu должно рассматриваться как функция числа $\mathrm{Ra_i}$: $\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}(\mathrm{Ra_i})$, $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}(\mathrm{Ra_i})$.

Дальнейшая структура обзора такова. В разделе 2 представлены результаты наиболее известных экспериментов по изучению теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла. В разделе 3 описаны аналитические результаты для интегральных характеристик теплоотдачи, определяющих распределение потока тепла между нижней и верхней границами объема жидкости. С практической точки зрения соотношение между потоками тепла через верхнюю и нижнюю границы существенно ввиду различия в способах внешнего теплоотвода при тяжелых авариях на атомных электростанциях: на нижней поверхности корпуса реактора тепло отводится горячей водой, тогда как верхняя поверхность охлаждается за счет радиационного теплообмена. В разделе 4 исследуются детали распределения потока тепла по нижней границе, важные для уточнения возможностей внешнего охлаждения. В большинстве моделирующих экспериментов исходному прототипному объему с жидкостью соответствует тонкий вертикальный срез по центру этого объема. Его принято называть квазидвумерным или slice объемом. Вопрос о правомерности использования квазидвумерного объема для моделирования естественной конвекции в прототипном аксиально-симметричном объеме рассматривается в разделе 5. Один из подходов к экспериментальному моделированию теплоотдачи тепловыделяющей жидкости состоит в изучении квазистационарного процесса остывания жидкости без внутренних источников тепла. Теоретическому исследованию теплоотдачи такой жидкости посвящен раздел 6. В заключительном разделе 7 сформулированы краткие выводы.

2. Обзор экспериментов по моделированию теплоотдачи

Экспериментальные работы по моделированию теплоотдачи тепловыделяющей жидкости, содержащейся в замкнутом объеме, различаются как по геометрии объема, так и в отношении самой постановки опыта. Для практических приложений представляют интерес аксиально-симметричные емкости, заполненные тепловыделяющей жидкостью ограниченной верхней горизонтальной поверхностью.

В большинстве проведенных экспериментов объемное тепловыделение обеспечивалось путем пропускания постоянного тока или за счет СВЧ-разогрева. В этом случае возникают определенные трудности в обеспечении однородности выделения тепла. Один из способов преодоления этих трудностей состоит в таком выборе формы моделирующего объема, при котором линейный размер объема по одному из трех направлений был много меньше двух других. Это тонкий плоскопараллельный горизонтальный или вертикальный слой. Тонкий вертикальный слой обычно рассматривается как центральный вертикальный срез (slice) прототипного трехмерного объема. При экспериментах в этой геометрии охлаждение жидкости проводится через узкие участки границы при постоянной температуре. Широкие же вертикальные участки остаются теплоизолированными. Предполагается, что распределение теплового потока по охлаждаемым участкам границы емкости в такой геометрии воспроизводит распределение теплоотдачи в прототипном объеме жидкости с внутренними источниками тепла. Моделирующий квазидвумерный объем в этом случае характеризуют тремя параметрами длины: H — вертикальный размер (высота), D — большой горизонтальный размер, L — толщина слоя (малый горизонтальный размер).

Другой экспериментальный подход к проблеме моделирования теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла состоит в изучении квазистационарной теплоотдачи остывающей жидкости, не обладающей внутренними источниками тепла.

Все экспериментальные результаты, представленные в этом обзоре, условно разделены на две группы. К первой отнесены эксперименты, отвечающие умеренно высоким мощностям тепловыделения — при значениях модифицированного числа Рэлея $\mathrm{Ra_i} < 10^{12}$ и $\mathrm{Ra_i} \sim 10^{12}$ (раздел 2.1), а ко второй группе — эксперименты при сверхвысоких мощностях, соответствующие $\mathrm{Ra_i} > 10^{12}$ (раздел 2.2).

2.1. Умеренно высокие мощности тепловыделения

Горизонтальный плоскопараллельный слой; изотермические верх и дно. В работе Кулаки и Голдстейна [15] моделировалось свободно-конвективное течение жидкости в емкости, соответствующей прямоугольному параллелепипеду с горизонтальным квадратным основанием, при адиабатических условиях на всех боковых участках границы. Размер стороны основания равен 25,4 см. Высота наполнения жидкости изменялась в пределах от 1,27 до 6,35 см. В качестве моделирующей жидкости использовался слабый водный раствор нитрата серебра с концентрацией 0,02 моль%. Объемное тепловыделение обеспечивалось пропусканием постоянного электрического тока через солевой раствор. Верхний и донный участки емкостной границы были выполнены в виде медных пластин. Профиль температуры по вертикали регистрировался методом лазерной интерферометрии с пропусканием светового луча в горизонтальном направлении перпендикулярно приложенной разности потенциалов. Безразмерный коэффициент теплоотдачи — число Нуссельта — определялся на основе измерений профиля температуры по вертикали в центральном сечении емкости с жидкостью.

Результаты исследования были представлены в виде эмпирических соотношений для чисел Нуссельта для теплоотдачи через верхний (up) и нижний (dn) участки границы:

$$\mathrm{Nu_{up}} = 0{,}371\,\mathrm{Ra_i^{0{,}228}}\,, \quad \mathrm{Nu_{dn}} = 1{,}407\,\mathrm{Ra_i^{0{,}095}}\,;$$
$$7{,}1\times 10^4 \leqslant \mathrm{Ra_i} \leqslant 2{,}4\times 10^7\,, \quad 0{,}05 \leqslant \frac{H}{D} \leqslant 0{,}25\,. \quad (2.1)$$

Погрешность результатов оценивалась как $\pm 10\,\%$.

В работе Маингера и др. [16] исследовалась теплоотдача в геометрии горизонтальных плоскопараллельных слоев с квадратным основанием 14×14 см^2 и высотой, изменяющейся от 0,5 до 6 см. Результаты были описаны соотношениями

$$\mathrm{Nu_{up}} = 0{,}345\,\mathrm{Ra_i^{0{,}233}}\,, \quad \mathrm{Nu_{dn}} = 1{,}389\,\mathrm{Ra_i^{0{,}095}}\,;$$
$$4{,}0\times 10^4 \leqslant \mathrm{Ra_i} \leqslant 5{,}0\times 10^{10}\,, \quad 0{,}05 \leqslant \frac{H}{D} \leqslant 0{,}43\,. \quad (2.2)$$

Горизонтальный плоскопараллельный слой; изотермический верх, теплоизолированное дно. В работе Кулаки и Эмара [17] исследовалась теплоотдача горизонтального плоскопараллельного слоя с охлаждаемым верхом и адиабатическими низом и боковыми гранями в широком диапазоне чисел Рэлея (до значений $4{,}4\times 10^{12}$), включая значительный интервал, отвечающий турбулентному режиму конвекции. Использовались две емкости со сторонами горизонтального квадратного основания равными 25,4 и 50,8 см. Полученные результаты описаны соотношением

$$\mathrm{Nu_{up}} = 0{,}338\,\mathrm{Ra_i^{0{,}227}}\,, \quad 3{,}8\times 10^3 < \mathrm{Ra_i} < 4{,}3\times 10^{12}\,,$$
$$0{,}025 < \frac{H}{D} < 0{,}5\,. \quad (2.3)$$

Отметим работу Кулаки и Нагла [18], в которой также исследовалась конвекция в горизонтальном плоскопараллельном слое с теплоизолированным дном.

Вертикально ориентированные емкости; прямоугольная геометрия. В работах [16, 19, 20] проводились измерения теплоотдачи в геометрии тонкого по одному из горизонтальных направлений прямоугольного параллелепипеда. Ширина экспериментальной емкости по другому горизонтальному направлению составляла $D = 2-6$ см. Охлаждались все четыре узких грани. Две широкие вертикальные грани были теплоизолированными. Для теплоотдачи через верхнюю, узкие боковые (sd) и нижнюю грани получены следующие результаты:

$$\mathrm{Nu_{up}} = 0{,}345\,\mathrm{Ra_i^{0{,}233}}\,, \quad \mathrm{Nu_{sd}} = 0{,}6\,\mathrm{Ra_i^{0{,}19}}\,,$$
$$\mathrm{Nu_{dn}} = 1{,}389\,\mathrm{Ra_i^{0{,}095}}\,;$$
$$3\times 10^7 < \mathrm{Ra_i} < 5{,}0\times 10^{10}\,, \quad 0{,}05 < \frac{H}{D} < 0{,}5\,. \quad (2.4)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что дополнительное охлаждение боковых поверхностей не привело к изменению коэффициентов теплопередачи $\mathrm{Nu_{up}}$, $\mathrm{Nu_{dn}}$ (ср. с (2.2)). Зависимость теплоотдачи от толщины параллелепипеда не исследовалась, но предполагалось, что она незначительна.

В экспериментах, выполненных в работе Штайнбреннера и Райнеке [21], исследовался теплоперенос в тонких вертикальных слоях квадратной формы. Размер стороны квадрата соответствовал $D = 80$ см, толщина слоя

$L = 3{,}5$ см. Широкие вертикальные поверхности были изготовлены из стекла и теплоизолированы. Оптическое зондирование объема жидкости проводилось по нормали к этим поверхностям. Использовались граничные условия двух типов: соответствующие охлаждению только узких боковых поверхностей и всех узких участков границы. Температура на всех охлаждаемых поверхностях поддерживалась одинаковой. Полученные результаты по теплопередаче через боковые поверхности аппроксимированы соотношением

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{sd}} = 0{,}85\,\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{0{,}19}\,; \qquad (2.5)$$
$$5\times 10^{12} \leqslant \mathrm{Ra}_{\mathrm{i}} \leqslant 1{,}0\times 10^{14}\,, \quad \frac{H}{D} = 1\,, \quad \frac{L}{H} = 0{,}044\,.$$

Данные измерений теплопередачи через верхнюю и нижнюю границы оказались в хорошем согласии с результатом Яна [19] (формула (2.4)).

Вертикально ориентированные емкости; полуцилиндрическая геометрия. В работах [16, 19, 20] изучалась также теплоотдача в геометрии короткого полуцилиндра с горизонтальной осью и плоской горизонтальной верхней границей. Радиус цилиндрического сегмента составлял $R = 2{,}5-28$ см. Охлаждались верхняя горизонтальная и нижняя изогнутая границы. Широкие вертикальные теплоизолированные участки границы использовались в качестве электродов для подвода электрического тока. Исследовалась зависимость теплоотдачи от высоты заполнения цилиндрического сегмента жидкостью, H. Результаты измерений привели к следующим зависимостям числа Нуссельта от модифицированного числа Рэлея:

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{up}} = 0{,}36\,\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{0{,}23}\,, \quad \mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}} = 0{,}54\,\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{0{,}18}\left(\frac{H}{R}\right)^{0{,}26}\,;$$
$$10^{7} < \mathrm{Ra}_{\mathrm{i}} < 5{,}0\times 10^{10}\,, \quad 0{,}3 < \frac{H}{R} < 1{,}0\,. \qquad (2.6)$$

Было также исследовано распределение коэффициента теплопередачи по нижнему участку границы. Отмечено, что передача тепла в окрестности самой низкой точки границы сильно отличается от вызванной чисто молекулярным (без конвекции) теплопереносом, а в верхней части боковой поверхности она близка к той, что имеет место на верхней горизонтальной границе.

2.2. Сверхвысокие мощности тепловыделения

Эксперименты на установке BAFOND. В работе Альвареца и др. [22] исследовалась теплоотдача слабого раствора соли в воде, заполнявшей емкость вертикального цилиндра, на границе которого поддерживалась постоянная температура. Выделение тепла в растворе обеспечивалось за счет пропускания тока между верхним и нижним круглыми горизонтальными основаниями цилиндра. Измерения проводились при мощности тепловыделения, принимавшей значения вплоть до уровня, соответствующего $\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}} \approx 10^{16}$. Полученные данные удалось описать с помощью простой модели. Согласно этой модели распределение теплового потока к вертикальному участку границы определялось известными соотношениями [45], описывающими ламинарный пограничный слой при относительно малых числах Рэлея, когда $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Ra}^{1/4}$, и турбулентный пограничный слоя при больших значениях числа Рэлея, для которого $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Ra}^{1/3}$. Для промежуточных значений числа Рэлея ($\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}} \approx 10^{13}$) оба соотношения одинаково хорошо описывали результаты измерений. Все это дало авторам [22] основание утверждать, что при числах Рэлея $\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}} \approx 10^{13}$ в пограничном слое на вертикальном участке границы происходит смена режимов течения от ламинарного к турбулентному.

Эксперименты на установке UCLA. В работах Асфиа и Дира [23], а также Франца и Дира [24] исследовался тепломассоперенос в трехмерной полусферической геометрии. Внутренний диаметр полусферы составлял 44, 21 и 15,2 см. Объемное тепловыделение достигалось за счет воздействия СВЧ-поля. Контроль однородности тепловыделения осуществлялся путем слежения за ростом температуры в различных точках внутри полусферы. Измерения проводились при значениях модифицированного числа Рэлея $\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}} \lesssim 10^{14}$.

Установлено, что при адиабатических условиях на верхнем горизонтальном участке границы, теплопередача через нижнюю границу удовлетворяет соотношению, близкому к тому, которое было получено Маингером и др. (см. (2.6)):

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}} = 0{,}5\,\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{0{,}2}\left(\frac{H}{R}\right)^{0{,}25}\,. \qquad (2.7)$$

Здесь H — уровень наполнения жидкостью полусферы.

Эксперименты на установке COPO. В работах Кималайнена и др. [25, 26] на установке COPO исследовалась теплоотдача при высоких значениях числа Рэлея (до значений $1{,}7\times 10^{15}$) в квазидвумерной геометрии. Она воспроизводит в масштабе 1 : 2 корпус реактора ВВЭР, имеющего полуэллиптическое дно и вертикальный цилиндрический участок. Толщина среза составляла 10 см. Широкие плоские вертикальные участки границы были выполнены из поликарбоната с отверстиями для оптических измерений. Высота жидкости изменялась в пределах 60 – 80 см, а ширина D равнялась 1,77 м. Рабочей жидкостью был водный раствор сульфата цинка. Объемное тепловыделение достигалось в результате пропускания электрического тока. Максимальное напряжение составляло 30 кВ, а максимальная мощность — 6 кВт. Максимальная рабочая температура достигала 80 °C. Узкие боковой и донный участки границы охлаждались с помощью 57 отдельных охлаждающих элементов. Контроль температуры осуществлялся с помощью термопар. Эксперименты давали возможность определения теплоотдачи в сравнении с результатами предыдущих исследователей, в частности Штайнбреннера и Райнеке [21].

Установлено, что около 70 % вложенной энергии отводилось путем теплоотдачи через верхнюю горизонтальную границу, остальная часть уходила через боковой и донный участки границы. Показано, что теплоотдача через вертикальные стенки согласуется с соотношениями Штайнбреннера и Райнеке [21], экстраполированными на бóльшие значения числа Рэлея, теплопередача через верхнюю границу несколько выше, а через донную часть границы намного ниже соответствующих соотношений из [21], если в качестве характерной высоты принимать высоту уровня жидкости. По этой причине при анализе теплоотдачи через нижнюю границу в качестве масштаба длины была принята высота изогнутой части емкости H_{c}. В итоге соотношения, описывающие полученные в [25, 26]

экспериментальные данные, принимают вид:

$$\mathrm{Nu_{up}} = 0{,}345\,\mathrm{Ra_i}^{0{,}233}\,, \quad \mathrm{Nu_{sd}} = 0{,}85\,\mathrm{Ra_i}^{0{,}19}\,,$$
$$\mathrm{Nu_{dn}} = 0{,}54\,\mathrm{Ra_i}^{0{,}18}\left(\frac{H_\mathrm{c}}{R}\right)^{0{,}26}\,;$$
$$4\times10^{12} < \mathrm{Ra_i} < 1{,}7\times10^{15}\,. \tag{2.8}$$

В работе Хелле и др. [27] представлены дополнительные экспериментальные исследования на установке COPO–COPO II. Важная ее модификация состояла в охлаждении внешней границы жидким азотом. Это привело к образованию корки на внутренней границе объема и таким образом обеспечило идеально изотермические граничные условия. Исследования проводились с содержащими жидкость емкостями в двух различных геометриях, а именно: полуэллиптическая донная часть с вертикальным цилиндрическим участком, соответствующая форме днища корпуса реактора ВВЭР и полусферическая, что отвечает форме корпуса реактора AP-600. В обоих случаях моделирование происходило в масштабе 1 : 2. Проведено сравнение результатов с данными, полученными в первой серии экспериментов (COPO I, [25, 26]) и с ранее известными эмпирическими соотношениями. Среднее значение теплоотдачи через верхнюю границу оказалось близким к тому, что дается корреляцией Штайнбреннера и Райнеке [21], а также к результату COPO I, независимо от формы объема. Однако средняя теплоотдача через нижнюю границу в серии COPO II была выше, чем в первой серии. Кроме того, в серии экспериментов COPO II в измерениях распределения теплового потока на нижней границе была обнаружена сильная зависимость от полярного угла θ, определяющего угловое расстояние вдоль границы от нижней ее точки — полюса вверх (см. раздел 4 настоящего обзора).

Эксперименты на установке BALI. Программа BALI, инициированная в работе Бернаца и др. [28], предназначена для исследования тепломассопереноса в больших объемах воды и моделирования конвекции в реакторе в масштабе 1:1. Установка соответствует полукругу в квазидвумерной геометрии с радиусом 2 м и толщиной 0,15 м. Число Рэлея в этих экспериментах изменялось от 10^{15} до 10^{17}, перекрывая область, наиболее важную для проблемы безопасности ядерных реакторов. Полученные результаты представлены в виде следующих соотношений:

$$\mathrm{Nu_{up}} = 0{,}383\,\mathrm{Ra_i}^{0{,}233}\,, \quad \mathrm{Nu_{dn}} = 0{,}116\,\mathrm{Ra_i}^{0{,}25}\left(\frac{H}{R}\right)^{0{,}32}\,. \tag{2.9}$$

Наряду с распределением теплового потока на границе в этом эксперименте регистрировалось также распределение температуры вдоль оси моделирующей емкости. Установлено, что в верхней части емкости усредненное по времени указанное распределение однородно, а в нижней оно носит характер устойчивой стратификации. В области предельно высоких значений числа $\mathrm{Ra_i}$ верхняя однородная по температуре часть занимает менее одной трети по высоте от всего объема.

Следует отметить, что по зависимости числа $\mathrm{Nu_{dn}}$ от отношения H/R результат (2.9) соответствует более раннему результату Маингера и др. [16, 19] для квазидвумерного объема — формула (2.5) и результату Асфи и Дира [23] для полусферы — формула (2.7), в которые данное отношение входит соответственно со степенями 0,26 и 0,25.

Эксперименты на установке mini-ACOPO. Созданная в работе Теофануса и Ли [29] установка mini-ACOPO выполнена в двух вариантах (A и B) и предназначена для проверки основных закономерностей свободной конвекции, установленных в предшествующих экспериментах для более низких значений числа Рэлея, а также для выяснения роли числа Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$. Форма моделирующего объема отвечала полусфере. Принятый в данных экспериментах подход принципиально отличается от тех, которые использовались ранее. Он состоит в том, что вместо жидкости с объемным тепловыделением исследовалась теплоотдача остывающей жидкости без внутренних источников тепла. Предполагалось, что в каждый момент времени квазистационарное состояние остывающей жидкости в точности воспроизводит соответственное стационарное состояние жидкости с внутренними источниками тепла. Основанием для такого предположения послужил тот факт, что процессы в пограничных слоях, определяющие характеристики теплоотдачи, являются значительно более быстрыми, чем сам процесс остывания. Рабочей жидкостью в варианте A установки был Фреон-113, которым заполнялась полусфера с радиусом 22 см. Температурный режим установки поддерживался с помощью девяти охлаждающих элементов. В варианте B установки рабочей жидкостью была вода. Исследование локального распределения потока тепла на этой установке не предусматривалось, и потому система охлаждения здесь была более простой.

Сравнение теплоотдачи через границу с расчетами суммарного изменения тепловой энергии в объеме остывающей жидкости показало, что в большинстве испытаний энергетический баланс соблюдается с точностью не хуже 10 %. Типичная продолжительность одной серии измерений составляла от 15 до 30 мин в зависимости от скорости охлаждения.

В восьми испытаниях на установке A начальная температура фреона составляла примерно 40 °C, а температура на границе была близкой к значению 3 °C. В течение цикла остывания соответствующее данному эксперименту модифицированное число Рэлея изменялось в пределах от 2×10^{13} до 7×10^{14}, а число Прандтля — от 7 до 11. В трех испытаниях на установке B начальная температура остывающей жидкости (воды) была близкой к 100 °C, контур охлаждения функционировал при температурах 3, 26 и 66 °C, изменение модифицированного числа Рэлея соответствовало интервалу от $2\times10^{12} < \mathrm{Ra_i} < 3\times10^{13}$ и числа Прандтля — интервалу $2{,}5 < \mathrm{Pr} < 11{,}0$.

Результаты измерений теплопередачи через верхнюю границу оказались в очень хорошем согласии с корреляцией Штайнбреннера и Райнеке [21] во всей области модифицированного числа Рэлея. Результаты по теплопередаче через нижнюю границу были представлены в виде следующих соотношений:

$$\mathrm{Nu_{dn}} = 0{,}048\,\mathrm{Ra_i}^{0{,}27}\,, \quad \mathrm{Nu_{dn}} = 0{,}0038\,\mathrm{Ra_i}^{0{,}35}\,,$$
$$10^{12} \leqslant \mathrm{Ra_i} \leqslant 3\times10^{13}\,; \quad 3\times10^{13} \leqslant \mathrm{Ra_i} \leqslant 7\times10^{14}\,. \tag{2.10}$$

Существенная особенность этих результатов состоит в наличии перехода к зависимости с более высоким степенны́м показателем при значении $\mathrm{Ra_i} \approx 3\times10^{13}$.

Результаты измерений распределения локальной плотности теплового потока на нижней границе в зависимости от полярного угла были представлены в виде выражений

$$\frac{\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}}(\theta)}{\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}}} = 0{,}1 + 1{,}08\left(\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{p}}}\right) - 4{,}51\left(\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{p}}}\right)^2 + 8{,}61\left(\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{p}}}\right)^3,$$
$$0{,}1 \leqslant \frac{\theta}{\theta_{\mathrm{p}}} \leqslant 0{,}6\,, \tag{2.11}$$
$$\frac{\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}}(\theta)}{\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}}} = 0{,}41 + 0{,}35\left(\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{p}}}\right) + \left(\frac{\theta}{\theta_{\mathrm{p}}}\right)^2,$$
$$0{,}6 \leqslant \frac{\theta}{\theta_{\mathrm{p}}} \leqslant 1{,}0\,, \quad \theta_{\mathrm{p}} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Важное следствие полученных результатов состоит в независимости теплоотдачи от числа Прандтля в интервале значений от 2,5 до 10,8.

Эксперименты на установке АСОРО. В экспериментах Теофануса и др. [30, 31], выполненных на установке АСОРО, использован тот же подход, что и в mini-АСОРО, но благодаря бóльшим размерам модулирующей емкости (диаметр полусферы был равным 2 м, составляя половину диаметра реактора) стало возможным довести значение числа Рэлея до 10^{16}. Рабочей жидкостью в эксперименте была вода с начальной температурой 100 °C, температура на границе поддерживалась равной 0 °C. Получены следующие корреляции для теплоотдачи, отличающиеся от известных ранее:

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{up}} = 1{,}95\,\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{0{,}18}\,, \quad \mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}} = 0{,}3\,\mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{0{,}22}\,. \tag{2.12}$$

3. Интегральные закономерности теплоотдачи

3.1. Общая физическая картина

Занимаемая тепловыделяющей жидкостью емкость объемом V, схематически изображенная на рис. 1, отвечает фигуре вращения вокруг вертикальной оси и обладает плоским верхним горизонтальным участком границы площадью S_{up}. Остальную, нижнюю часть границы будем обозначать S_{dn}. Всю границу объема S будем считать твердой и изотермической. Вертикальный размер объема (высоту) обозначим H.

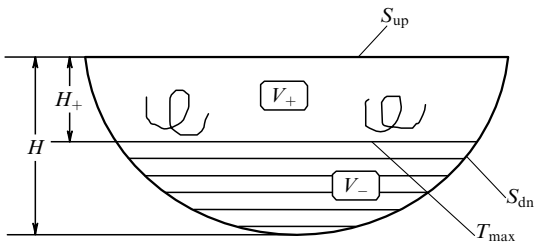

Рис. 1. Центральный вертикальный разрез занимаемого жидкостью объема: S_{up} и S_{dn} — соответственно верхняя горизонтальная и нижняя границы; $T_{\max}$ — горизонтальная плоскость, проходящая через точку максимального значения температуры в объеме; V_+ и V_- — области объема, расположенные выше и ниже плоскости $T_{\max}$; H — вертикальный размер (высота) всего объема; H_+ — высота области V_+.

Общую картину конвективного теплопереноса в жидкости можно представить следующим образом.

Горизонтальная плоскость, проходящая через точку максимума среднего по времени значения температуры жидкости, делит объем V на две части. В области V_+ высотой H_+ в силу инверсного распределения температуры складывается ситуация, близкая к условиям для конвекции Рэлея–Бенара (РБ) [1, 2]. Свободно-конвективное течение РБ обеспечивает передачу тепла к горизонтальной границе S_{up}. Передача тепла на нижнюю границу площадью S_{dn} определяется тонким в сравнении с H пограничным слоем (ПС), в котором жидкость стекает вниз. Медленное возвратное течение жидкости в условиях положительного градиента температуры по вертикали вверх не препятствует формированию состояния устойчивой температурной стратификации вне пограничного слоя в нижней части объема V_-.

В этом разделе нас будут интересовать интегральные закономерности теплоотдачи, т.е. усредненные отдельно по участкам границы S_{up} и S_{dn}. Их вывод будет базироваться на следствиях, вытекающих из общего условия энергетического баланса и фрагментарного сходства между процессами теплопередачи в жидкостях с внутренними источниками тепла и без них.

3.2. Условие энергетического баланса

Условие стационарного энергетического баланса для жидкости с однородно распределенными источниками тепла, отвечающими объемной плотности мощности Q, имеет вид

$$\frac{\lambda \Delta T}{H}\int_S \mathrm{d}S\,\mathrm{Nu} = QV\,, \quad S = S_{\mathrm{up}} + S_{\mathrm{dn}}\,. \tag{3.1}$$

Отсюда, выражая величины ΔT и Q через обычное и модифицированное числа Рэлея (формулы (1.2) и (1.3)), приходим к соотношению

$$\mathrm{Ra}\,\overline{\mathrm{Nu}} = \mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}\,. \tag{3.2}$$

В нем величина $\overline{\mathrm{Nu}}$ имеет смысл усредненного по всей границе числа Нуссельта и определена равенством

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{H}{V}(S_{\mathrm{up}}\mathrm{Nu}_{\mathrm{up}} + S_{\mathrm{dn}}\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}})\,, \tag{3.3}$$

в котором

$$\mathrm{Nu}_i = \frac{1}{S_i}\int_{S_i} \mathrm{d}S\,\mathrm{Nu}\,, \quad i = \mathrm{up}, \mathrm{dn} \tag{3.4}$$

— частично усредненные значения числа Нуссельта по верхней и нижней границам.

Теоретические зависимости характеристик теплоотдачи, а также соответствующие им результаты экспериментального и численного моделирования обычно выражаются степенны́ми функциями. Определим показатели экспонент γ_i, β_i ($i = \mathrm{up}, \mathrm{dn}$), β и ε соотношениями

$$\mathrm{Nu}_i \propto \mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{\gamma_i}\,, \quad \mathrm{Nu}_i \propto \mathrm{Ra}^{\beta_i}\,,$$
$$\overline{\mathrm{Nu}} \propto \mathrm{Ra}^{\beta}\,, \quad \mathrm{Ra} \propto \mathrm{Ra}_{\mathrm{i}}^{\varepsilon}\,, \tag{3.5}$$

в которых опущены численные коэффициенты порядка единицы.

Подстановка соотношений (3.5) в (3.2) ведет к установлению следующих важных связей между показателями степеней:

$$\varepsilon = (1+\beta)^{-1}\,, \tag{3.6}$$

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{1+\beta}\,. \tag{3.7}$$

Наша дальнейшая задача состоит в том, чтобы определить степенны́е показатели $\gamma_{\rm up}$, $\gamma_{\rm dn}$ и ε, отвлекаясь от численных коэффициентов при степенны́х зависимостях (порядка единицы), установление которых находится за пределами возможностей излагаемой здесь полуколичественной теории. Предположим, что число Прандтля принимает значения больше или порядка единицы, $\mathrm{Pr} \geqslant 1$.

Заметим, что зависимости (3.5) с постоянными показателями экспонент справедливы в ограниченных интервалах изменения числа $\mathrm{Ra_i}$, отвечающих определенным комбинациям режимов теплопередачи через участки границы $S_{\rm up}$ и $S_{\rm dn}$. Изменение этих режимов ведет к изменению (резкому или плавному) показателей степеней.

3.3. Основные режимы теплоотдачи

В последующем анализе теплоотдачи тепловыделяющей жидкости воспользуемся аналогиями с течением жидкости без внутренних источников тепла. Первая состоит в подобии процесса конвекции в объеме V_+ процессу конвекции РБ. Вторая аналогия основана на близком сходстве ПС для рассматриваемой задачи и ПС вблизи охлаждаемой поверхности. Правомерность обеих аналогий основана на следующих соображениях. В интересующей нас области больших значений числа Рэлея, $\mathrm{Ra} \gg 1$, главная часть теплосопротивления при передаче тепла через границу обусловлена тонкими приграничными тепловыми слоями. Их толщина много меньше характерного линейного размера всего объема жидкости, определяемого высотой H. Поэтому мощность тепловыделения в указанных слоях пренебрежимо мала по сравнению с тепловыми потоками, проходящими через эти слои. Отсюда следует, что выделение тепла в данных слоях практически не оказывает влияния на их структуру и, соответственно, на характеристики теплоотдачи. Перечислим основные характеристики режимов теплопередачи жидкости без внутренних источников тепла, являющихся прототипами для тепловыделяющей жидкости (конвекция РБ и ПС).

Конвекция РБ, происходящая в горизонтальном плоскопараллельном слое жидкости высотой H_+, подогреваемом снизу, имеет следующие режимы теплопередачи, отличающиеся друг от друга величинами показателя $\beta_{\rm RB}$ в соотношении для числа Нуссельта:

$$\mathrm{Nu_{RB}} \propto \mathrm{Ra}_+^{\beta_{\rm RB}}\,, \tag{3.8}$$

где $\mathrm{Ra}_+ = \mathrm{Ra}(H \to H_+)$. В интервале значений числа Рэлея $\mathrm{Ra_{c1}} < \mathrm{Ra} < \mathrm{Ra_{c2}}$ имеет место ламинарный режим конвекции и $\beta_{\rm RB} = 1/4$ [46]. В области $\mathrm{Ra_{c2}} < \mathrm{Ra} < \mathrm{Ra_{c3}}$ осуществляется режим мягкой турбулентности и $\beta_{\rm RB} = 1/3$ [47]. И, наконец, при числах Рэлея $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra_{c3}}$ имеет место режим жесткой турбулентности с $\beta_{\rm RB} = 2/7$ [47]. Критические значения $\mathrm{Ra_{c1}}$, $\mathrm{Ra_{c2}}$ и $\mathrm{Ra_{c3}}$ зависят от аспектного отношения $A = D/H_+$, где D — горизонтальный размер ячейки РБ. Величина $\mathrm{Ra_{c1}} \sim 10^3$ при $A > 1$. При значении $A \approx 1$ имеем $\mathrm{Ra_{c2}} = 2\times 10^5$ и $\mathrm{Ra_{c3}} \simeq 4\times 10^7$ [47]. В случае $A = 6{,}5$ число Рэлея $\mathrm{Ra_{c3}} \simeq 10^4$ [48]. Учитывая эти результаты можно сделать предположение, что при достаточно больших значениях аспектного отношения ламинарное течение в слое РБ с ростом числа Ra_+ при значениях $\mathrm{Ra}_+ > \mathrm{Ra_{c1}}$ испытывает переход к режиму жесткой турбулентности непосредственно, минуя режим мягкой турбулентности, который в этом случае не реализуется.

Пограничный слой на вертикальной стенке в жидкости без внутренних источников тепла, являющийся прототипом для ПС на участке границы $S_{\rm dn}$ объема с тепловыделяющей жидкостью, может находиться в двух режимах теплопередачи, отличающихся показателем степени в соотношении для числа Нуссельта:

$$\mathrm{Nu_{bl}} \propto \mathrm{Ra}^{\beta_{\rm bl}}\,. \tag{3.9}$$

Это ламинарный режим с $\beta_{\rm bl} = 1/4$ [13] и турбулентный — с $\beta_{\rm bl} = 1/3$ [49]. Переход между двумя режимами происходит при значении числа Рэлея, равном критическому значению $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}^*$, которое зависит от числа Прандтля. Согласно теоретическим оценкам [50], эта зависимость при значениях $\mathrm{Pr} > 1$ имеет форму $\mathrm{Ra}^* \propto \mathrm{Pr}^2$. В то же время имеющийся здесь численный коэффициент, как показывает опыт, может меняться от эксперимента к эксперименту на два порядка [51, 52], что может нивелировать данную зависимость в случае, когда число Прандтля меняется в не слишком широких пределах. Следует отметить, что согласно эксперименту критическое число Рэлея для смены режимов в ПС оказывается выше критического значения этого числа для перехода от мягкой турбулентности к жесткой в конвекции РБ, т.е. $\mathrm{Ra}^* > \mathrm{Ra_{c3}}$.

В ходе дальнейшего анализа будем считать, что каждый режим теплоотдачи во всем объеме V тепловыделяющей жидкости представляет собой комбинацию конвективных режимов, осуществляющихся в области V_+ и в ПС. Поэтому с учетом определения числа Nu имеем

$$\mathrm{Nu_{up}} \propto \frac{H}{H_+}\,\mathrm{Ra}_+^{\beta_{\rm RB}} = \left(\frac{H}{H_+}\right)^{1-3\beta_{\rm RB}} \mathrm{Ra}^{\beta_{\rm RB}}\,, \tag{3.10}$$

$$\mathrm{Nu_{dn}} \propto \mathrm{Ra}^{\beta_{\rm bl}}\,. \tag{3.11}$$

Вследствие того, что граница раздела между областями V_+ и V_- отвечает максимуму среднего значения температуры, различие между величинами H_+ и H_- тесно связано с различием между величинами $\mathrm{Nu_{up}}$ и $\mathrm{Nu_{dn}}$. С учетом неравенств

$$\left|\beta_{\rm RB} - \beta_{\rm bl}\right| \ll \beta_{\rm bl}\,, \qquad 1 - 3\beta_{\rm RB} \gg 1 \tag{3.12}$$

и ввиду того, что при значениях модифицированного числа Рэлея $\mathrm{Ra_i} \leqslant 10^{13} - 10^{14}$ поочередно реализуются случаи $\beta_{\rm RB} > \beta_{\rm bl}$ и обратный, можно считать, что в этом диапазоне $H_+ \approx H/2$ и, соответственно, положить $\mathrm{Ra}_+ \approx (1/8)\mathrm{Ra}$. В этой же области чисел $\mathrm{Ra_i}$ в силу определений (3.3), (3.5) имеет место соотношение

$$\beta = \frac{\beta_{\rm up} + \beta_{\rm dn}}{2} \pm \frac{|\beta_{\rm up} - \beta_{\rm dn}|}{2}\,. \tag{3.13}$$

С учетом соотношений (3.10), (3.11), (3.13) и на основе изложенной выше информации о характеристиках теп-

лопередачи в жидкости без внутренних источников тепла могут быть выделены четыре основных режима, которые различаются типами конвекции в области V_+ и в ПС и, соответственно, показателями степеней β, ε и γ_i, определенными соотношениями (3.5):

I. $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(1)} < \mathrm{Ra}_\mathrm{i} < \mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(2)}$:
ламинарная конвекция в области V_+ и в ПС,

$$\beta = 0{,}25\,, \quad \varepsilon = 0{,}8\,, \quad \gamma_\mathrm{up} = \gamma_\mathrm{dn} = 0{,}2\,. \tag{3.14}$$

II. $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(2)} < \mathrm{Ra}_\mathrm{i} < \mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(3)}$:
мягкая турбулентность в области V_+, ламинарное течение в ПС,

$$\beta = 0{,}290 \pm 0{,}040\,, \quad \varepsilon = 0{,}775 \pm 0{,}025\,,$$
$$\gamma_\mathrm{up} = 0{,}263 \pm 0{,}008\,, \quad \gamma_\mathrm{dn} = 0{,}195 \pm 0{,}005\,. \tag{3.15}$$

III. $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(3)} < \mathrm{Ra}_\mathrm{i} < \mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)}$:
жесткая турбулентность в области V_+, ламинарное течение в ПС,

$$\beta = 0{,}270 \pm 0{,}020\,, \quad \varepsilon = 0{,}790 \pm 0{,}030\,,$$
$$\gamma_\mathrm{up} = 0{,}225 \pm 0{,}004\,, \quad \gamma_\mathrm{dn} = 0{,}197 \pm 0{,}003\,. \tag{3.16}$$

IV. $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)} < \mathrm{Ra}_\mathrm{i} < 10^2\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)}$:
жесткая турбулентность в области V_+, комбинация ламинарного и турбулентного течения в ПС,

$$\beta = 0{,}31 \pm 0{,}025\,, \quad \varepsilon = 0{,}765 \pm 0{,}015\,,$$
$$\gamma_\mathrm{up} = 0{,}218 \pm 0{,}004\,, \quad \gamma_\mathrm{dn} = 0{,}255 \pm 0{,}005 \tag{3.17}$$

(значения степенны́х показателей, указанных для режима IV, соответствуют концу отвечающего этому режиму интервала значений числа Рэлея).

В соответствии с приведенными выше характеристиками теплопередачи в жидкости без внутренних источников тепла и с учетом соотношений (3.13), (3.5) и (3.6) границы между режимами I–IV (3.14)–(3.17) определены следующим образом:

$$\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(1)} \simeq 10^5\,, \quad \mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(2)} \simeq 15(\mathrm{Ra}_\mathrm{c2})^{1{,}25}\,,$$
$$\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(3)} \simeq 15(\mathrm{Ra}_\mathrm{c3})^{1{,}29}\,, \quad \mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)} \simeq 15(\mathrm{Ra}^*)^{1{,}27}\,. \tag{3.18}$$

Значения величин $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(2)}$ и $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(3)}$ зависят от аспектного отношения A для области V_+, а величина $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)}$ — от числа Прандтля. При достаточно больших значениях отношения A режим II может отсутствовать вовсе, и тогда режим III следует непосредственно за режимом I. Как уже отмечалось выше, имеет место некоторая неопределенность в зависимости критического значения Ra^* от числа Pr. Соответственно, эта неопределенность отражается и на значении граничного значения $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)}$. В качестве примера для жидкости с теплогидродинамическими характеристиками, отвечающими воде, указанное граничное значение приблизительно равно $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)} \simeq 2{,}5 \times 10^{13}$ [53].

Интервал значений числа Ra_i от 10^{13} до 10^{17} представляет наибольший интерес для проблемы безопасности ядерных реакторов. В этот интервал попадает область реализации режима IV, где происходит смена ламинарного режима течения в пограничном слое на турбулентный. При значениях $\mathrm{Ra}_\mathrm{i} > 10^2\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)}$ турбулентная часть пограничного слоя становится доминирующей. С учетом численных коэффициентов в зависимостях Nu(Ra) для ламинарного и турбулентного ПС в жидкости без внутренних источников тепла [13, 49] зависимость Nu_dn от числа Ra в режиме IV для тепловыделяющей жидкости может быть приближенно представлена в виде

$$\mathrm{Nu}_\mathrm{dn} \approx 0{,}68(\mathrm{Ra}^*)^{1/4} + 0{,}15\left[\mathrm{Ra}^{1/3} - (\mathrm{Ra}^*)^{1/3}\right]. \tag{3.19}$$

Процесс перестройки режима течения в ПС приводит к значительному усилению зависимости Nu_dn от числа Ra. Описывая, как и ранее, эту зависимость соотношением типа (3.5), степенной показатель γ_dn можно определить как логарифмическую производную выражения (3.19). При этом он будет функцией числа Ra_i. Определим среднюю величину показателя γ_dn соотношением

$$\bar{\gamma}_\mathrm{dn} = \frac{\Delta \ln \mathrm{Nu}_\mathrm{dn}}{\Delta \ln \mathrm{Ra}_\mathrm{i}}\,, \tag{3.20}$$

в котором $\Delta \ln \mathrm{Nu}_\mathrm{dn}$ — изменение величины $\ln \mathrm{Nu}_\mathrm{dn}$ на интервале усреднения от $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)}$ до $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)} \exp[\Delta \ln \mathrm{Ra}_\mathrm{i}]$. Принимая число $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)} = 2{,}5 \times 10^{13}$ как соответствующее жидкости с теплогидродинамическими характеристиками воды, а $\Delta \ln \mathrm{Ra}_\mathrm{i} = \ln 10^2$, с учетом формулы (3.19) из соотношения (3.20) получаем оценку для $\bar{\gamma}_\mathrm{dn}$ на интервале смены режима течения в ПС:

$$\bar{\gamma}_\mathrm{dn} \approx 0{,}36\,. \tag{3.21}$$

3.4. Асимптотический режим

Поскольку граница раздела между областями V_+ и V_- определяется положением максимума среднего значения температуры жидкости в объеме V, с ростом Ra_i при условии $\beta_\mathrm{up} \neq \beta_\mathrm{dn}$ эта граница смещается, обеспечивая минимум роста разности температур ΔT. Вплоть до значения числа Ra_i, равного $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{(4)}$ имеет место $\beta_\mathrm{up} \geqslant \beta_\mathrm{dn}$, и потому с ростом Ra_i происходит медленный сдвиг границы раздела вниз. После окончания перехода ПС в турбулентный режим показатель β_dn становится больше показателя β_up и с дальнейшим ростом Ra_i изменение соотношения между этими показателями уже не ожидается. Отсюда следует, что на данной стадии роста числа Ra_i граница раздела между областями V_+ и V_- монотонно сдвигается вверх. Это, в конце концов, приводит к наступлению асимптотической ситуации, когда $V_+ \ll V$, $H_+ \ll H$, и тогда практически все тепло, выделяемое в объеме V_+, уходит через верхнюю границу S_up. В этих условиях на основе соотношений (3.5)–(3.7) и (3.10), (3.11) и соотношения, вытекающего из условия энергетического баланса для области V_+, имеем

$$\beta = \frac{1}{3}\,, \quad \varepsilon = \frac{3}{4}\,, \quad \gamma_\mathrm{dn} = \frac{1}{4}\,, \quad \gamma_\mathrm{up} = \frac{7}{32} \approx 0{,}219\,. \tag{3.22}$$

Эти степенны́е показатели устанавливают характеристики асимптотического режима теплоотдачи тепловыделяющей жидкости. Условия реализации данного режима отвечает неравенству

$$\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{-1/32} \ll 1\,. \tag{3.23}$$

Отметим, что асимптотика теплоотдачи для горизонтального плоскопараллельного слоя жидкости с внут-

ренними источниками тепла рассматривалась в работе Чанга [54]. В этой работе в предположении, что при асимптотически больших значениях числа Рэлея осуществляется режим конвекции типа мягкой турбулентности (жесткая турбулентность была открыта позже) было получено значение для теплоотдачи через верхнюю границу $\beta_{\rm up} = 1/4$.

3.5. Сравнение с экспериментом

Начнем с важного замечания, которое касается аспектного отношения для области V_+ объема, содержащего тепловыделяющую жидкость. Как уже упоминалось выше, при умеренно высоких значениях числа Рэлея и при условии, что вся граница является охлаждаемой, имеет место оценка $H_+ \sim H/2$. С другой стороны, во всех известных экспериментах отношение горизонтального размера моделирующего объема к его высоте было около двух или больше. Поэтому аспектное отношение для области V_+ составляет $A \geqslant 4$. В то же время нижняя граница интервала чисел Рэлея в экспериментах была не меньше 10^4. Сопоставление этих фактов приводит к следующему заключению. Во всем исследовавшемся диапазоне чисел Рэлея, отвечающем известным экспериментам по теплоотдаче жидкости с внутренними источниками тепла, в соответствии с результатами [48] осуществлялся режим жесткой турбулентности для области V_+. Это означает, что режимы I и II по классификации раздела 3.3 в указанных экспериментах не реализовались.

Приступая непосредственно к сравнению теории с экспериментом, мы начнем с эксперимента Кулаки и Эмара [17] — наиболее подходящего с точки зрения апробации теории. Напомним, что в этом эксперименте исследовалась теплоотдача через верхнюю границу для горизонтального плоскопараллельного слоя жидкости с внутренними источниками тепла с теплоизолированной нижней границей. Аспектное отношение моделирующего объема ($A = D/H$) изменялось в пределах от 2 до 40, а модифицированное число Рэлея было заключено в интервале от 2×10^4 до 4×10^{12} (см. формулу (2.3)). Так как малым значениям $\mathrm{Ra_i}$ отвечали большие значения отношения A, то в соответствии со сделанным выше замечанием можно считать, что весь исследовавшийся в работе [17] диапазон чисел Рэлея соответствовал режиму жесткой турбулентности для конвекции РБ. Поэтому в вытекающую из (3.7) формулу для показателя степени, определяющего в рассматриваемом эксперименте теплоотдачу через верхнюю границу,

$$\gamma_{\rm up} = \frac{\beta_{\rm RB}}{1 + \beta_{\rm RB}}\,, \tag{3.24}$$

следует подставить $\beta_{\rm RB} = 2/7$, и мы получим $\beta_{\rm up}^{\rm theor} \approx 0{,}222$. Эта величина находится в хорошем согласии с экспериментальным значением данного степенно́го показателя [9] (см. (2.3)) $\beta_{\rm up}^{\rm exp} = 0{,}227$.

Такое близкое совпадение, безусловно, следует рассматривать и как экспериментальное доказательство аналогии между механизмами теплопередачи в области V_+, относящейся к объему, содержащему тепловыделяющую жидкость, и конвекцией РБ.

Два других эксперимента, описанных соответственно в работах [16, 19] и [21], проведены при изотермических граничных условиях при значениях модифицированного числа Рэлея около 10^{13} и, следовательно, по классификации раздела 3 отвечают режиму III. В таблице 1 дано сравнение экспериментальных и теоретических значений степенны́х показателей, относящихся к данным экспериментам.

Таблица 1. Сравнение теории с экспериментом, моделирующим теплоотдачу с полностью изотермическими граничными условиями при умеренно высоких значениях модифицированного числа Рэлея

$\gamma_{\rm up}$		$\gamma_{\rm dn}$	
Эксперимент	Теория	Эксперимент	Теория
0,23 [16, 19]	$0{,}225 \pm 0{,}004$	0,18 [16, 19]	$0{,}197 \pm 0{,}003$
0,233 [21]		0,19 [21]	

На установке АСОРО в работе Теофануса и Ли [29] в диапазоне $3 \times 10^{13} < \mathrm{Ra_i} < 7 \times 10^{14}$ было зафиксировано при увеличении числа Рэлея значительное ускорение теплоотдачи через нижнюю границу, которое было описано степенно́й зависимостью с показателем $\gamma_{\rm dn} = 0{,}35$. Заметим, что данный диапазон числа $\mathrm{Ra_i}$ может соответствовать режиму IV теплоотдачи со сменой режима течения с ламинарного на турбулентный в ПС на участке $S_{\rm dn}$. Если так, то теоретическая оценка (3.21), равная $\gamma_{\rm dn}^{\rm theor} \simeq 0{,}36$, вполне согласуется с экспериментом [29]. Отметим, что смена режима течения в ПС на вертикальном участке границы в том же диапазоне чисел $\mathrm{Ra_i}$ была зафиксирована также в эксперименте на установке BAFOND в работе Альвареца и др. [22].

Особого внимания заслуживает эксперимент Бернаца и др. [28] на установке BALI, относящийся к области предельно высоких значений модифицированного числа Рэлея, $10^{15} < \mathrm{Ra_i} < 10^{17}$. Полученные там величины степенны́х показателей соответствуют $\gamma_{\rm up} = 0{,}216$, $\gamma_{\rm dn} = 0{,}25$. Имеет место практически полное совпадение этих величин с теоретическими показателями для асимптотического режима теплоотдачи (формула (3.22)):

$$\gamma_{\rm up}^{\rm theor} \simeq 0{,}219\,, \quad \gamma_{\rm dn}^{\rm theor} = 0{,}25\,.$$

В эксперименте Теофануса и др. [30] на установке АСОРО получены эмпирические соотношения для теплоотдачи через верхнюю и нижнюю границы с отличающимися от [28] показателями степеней, однако в обоих случаях имеет место свойственное для предельно высоких уровней тепловыделения соотношение между показателями:

$$\gamma_{\rm dn} > \gamma_{\rm up}\,, \quad \mathrm{Ra_i} > 10^{14}\,, \tag{3.25}$$

которое можно рассматривать как подтверждение тенденции выхода на асимптотический режим с преобладанием теплоотдачи через нижнюю границу.

Подводя итог, можно охарактеризовать согласие теории с экспериментом в отношении интегральных характеристик теплоотдачи как вполне удовлетворительное.

4. Закономерности распределения локального теплового потока

4.1. Формулировка задачи

В предыдущем разделе проведены аналитические оценки характеристик теплоотдачи, усредненных отдельно по верхнему и нижнему участкам границы. Между тем для

решения проблемы безопасности ядерных реакторов требуется более детально знать распределение теплоотдачи жидкости с внутренними источниками тепла. Это, в частности, касается нижней части границы, где имеются особые условия для внешнего охлаждения кипящей водой [55].

Цель настоящего раздела состоит в выявлении закономерностей распределения потока тепла на границе и характеристик конвекции в нижней части объема, содержащего жидкость с внутренними источниками тепла.

Будем считать, что вблизи самой нижней точки (полюса) радиус кривизны границы R является конечным. Будем предполагать, что высота H объема с жидкостью сопоставима с R. Положение текущей точки на границе будем характеризовать углом θ между нормалью к границе и вертикальной осью (так что в полюсе $\theta = 0$). Координату, отсчитанную от уровня полюса по вертикали вверх, обозначим z. Будем интересоваться характеристиками конвекции в области, определяемой неравенствами $\theta \ll 1$ и $z \ll H$. Геометрия нижней части объема схематически представлена на рис. 2.

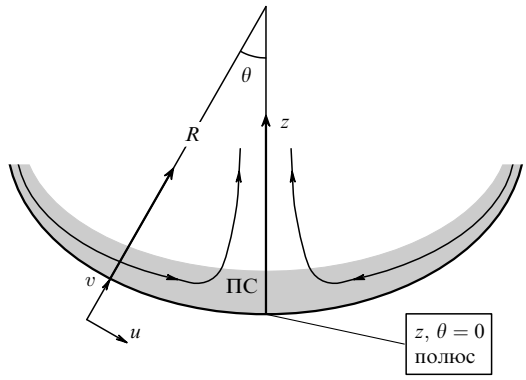

Рис. 2. Геометрия нижней части емкости с жидкостью: θ — полярный угол; z — вертикальная координата, отсчитанная от нижней точки границы (полюса); R — радиус кривизны границы в точке полюса ($\theta = 0$); u, v — соответственно продольная и поперечная компоненты скорости в ПС.

Теплоотдача через нижнюю границу определяется характеристиками формирующегося там ПС. При углах $\theta \sim 1$ этот слой, как уже отмечалось в разделе 3, подобен хорошо изученному свободно-конвективному ПС на вертикальной стенке в жидкости без внутренних источников тепла [13]. Свойства ПС приобретают принципиально иной характер с приближением к полюсу, когда $\theta \ll 1$. Здесь он в силу очевидных геометрических условий становится сходящимся. Благодаря этому обстоятельству возникает существенное требование, состоящее в необходимости обращения в нуль продольной компоненты скорости пограничного слоя в полюсе:

$$u(\theta = 0) = 0\,. \tag{4.1}$$

Это условие означает, что при углах $\theta \ll 1$ ПС оказывается не ускоряющимся, как при значениях $\theta \sim 1$, а замедляющимся. Кроме того, в отличие от области $\theta \sim 1$, в которой ПС подсасывает жидкость из основного объема, при углах $\theta \ll 1$ он ее туда возвращает. Еще одно важное качество ПС, приобретаемое им при значениях угла $\theta \ll 1$, заключается в ослаблении действия силы плавучести в продольном направлении.

Скорость течения и температура жидкости во внутреннем объеме (вне ПС) при значениях координаты $z \ll H$ благодаря условию (1) сильно от нее зависят. Это обстоятельство, в свою очередь, оказывает значительное обратное влияние на характеристики самого ПС. Поэтому задачи о ПС и о распределении течения и температуры жидкости вне ПС должны решаться совместно с учетом условий согласования на свободной (обращенной в глубь жидкости) стороне ПС. Эти условия состоят в непрерывности температуры и нормальной составляющей скорости течения жидкости:

$$T \approx T_{\rm b}\,, \qquad y \approx \delta\,, \tag{4.2}$$

$$v \approx v_{\rm b}\,, \qquad y \approx \delta\,, \tag{4.3}$$

где T и $T_{\rm b}$ — температуры соответственно в ПС и в основном объеме, v и $v_{\rm b}$ — нормальные к границе компоненты скорости течения жидкости в пограничном слое и в основном объеме, u — продольная компонента скорости, y — отсчитанная от границы нормальная к ней координата (см. рис. 2), δ — толщина пограничного слоя. Отметим, что поскольку $\theta \ll 1$, компонента $v_{\rm b}$ является одновременно и вертикальной составляющей скорости в основном объеме.

В следующем разделе рассмотрим соотношения, связывающие характеристики ПС с распределением температуры и скорости течения в основном объеме. Отдельно рассмотрим случаи ламинарного и турбулентного ПС.

4.2. Соотношения для сходящегося пограничного слоя

Ламинарный пограничный слой. В области значений полярного угла θ, удовлетворяющих условию

$$\frac{\delta}{R} \ll \theta^2 \ll 1\,, \tag{4.4}$$

система уравнений, выражающих свойство сохранения массы, продольной компоненты импульса и энергии жидкости в ламинарном ПС принимает вид:

$$-\frac{1}{R\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\theta u) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \tag{4.5}$$

$$-\frac{1}{R\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\theta u^2) + \frac{\partial}{\partial y}\,(vu) - \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g\alpha(T_{\rm b} - T)\theta\,, \tag{4.6}$$

$$-\frac{1}{R\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\theta u T) + \frac{\partial}{\partial y}\,(vT) = \chi\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,. \tag{4.7}$$

Давление при выводе системы (4.5)–(4.7) было исключено путем использования уравнения баланса поперечной составляющей импульса ПС. Выполнение левой части неравенства (4.4) дало, в частности, возможность пренебречь в уравнении (4.7) вкладом объемного тепловыделения и не учитывать силы инерции, вызванные переходом в криволинейную систему координат в уравнении (4.6).

Для дальнейшего вывода существен вопрос о форме поперечного профиля температуры в ПС. В обычном свободно-конвективном ПС вблизи вертикальной стенки с не зависящей от координат температурой жидкости в основном объеме профиль температуры является монотонным [13]. Иное положение возникает

при наличии неоднородности температуры, вызванной устойчивой стратификацией в основном объеме. Поскольку температура на внешней стороне ПС должна совпадать с окружающей средой (см. уравнение (4.2)), то с продвижением вниз по течению температура внутри ПС за счет конвективного переноса из более нагретых верхних участков становится выше, чем на внешней стороне. В результате сила плавучести оказывается направленной противоположно скорости продольного движения ПС, чем обеспечивается его торможение и, в конечном итоге, выполнение граничного условия (4.1). Ввиду того что распределение температуры в основном объеме формируется на базе возврата жидкости из ПС, максимальное превышение температуры внутри ПС над температурой окружающей среды должно иметь тот же порядок, что и последняя:

$$\max(T - T_{\mathrm{b}}) \sim T_{\mathrm{b}}\,. \tag{4.8}$$

Схематический вид температурного профиля в сходящемся ПС изображен на рис. 3.

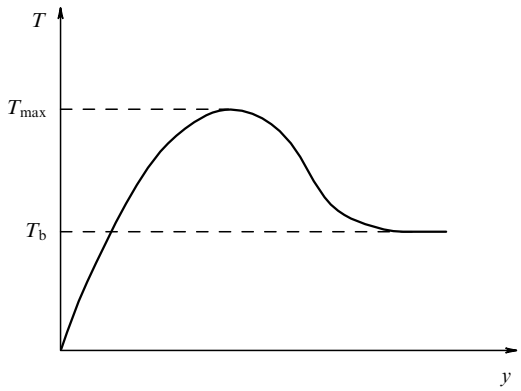

Рис. 3. Профиль температуры для сходящегося ПС: T — температура, y — координата, нормальная к границе, $T_{\max}$ — максимальная температура внутри ПС, T_{b} — температура в прилегающей к ПС окрестности основного объема.

Отметим, что о немонотонном профиле температуры в ПС вблизи вертикальной стенки со стратифицированной окружающей средой с учетом результатов численных расчетов и эксперимента, сообщалось в работе [56].

Приступим теперь к выводу соотношений между характеристиками ПС и основного объема. Из уравнений (4.5)–(4.7), оценки (4.8) и условий сшивки (4.2), (4.3) вытекают следующие соотношения:

$$\frac{u}{R\theta} \sim \frac{v_{\mathrm{b}}}{\delta}\,, \tag{4.9}$$

$$\left(\frac{u}{R\theta}\right)^2 \sim \frac{g\alpha T_{\mathrm{b}}}{R}\,, \tag{4.10}$$

$$v_{\mathrm{b}} \sim \frac{\chi}{\delta}\,. \tag{4.11}$$

Еще одно соотношение получается из самого определения теплового потока на границе:

$$q \sim \frac{\lambda T_{\mathrm{b}}}{\delta}\,. \tag{4.12}$$

Путем исключения скорости u из соотношений (4.9)–(4.11) и использования (4.12) получаются важные связи и для вертикальной составляющей скорости и плотности теплового потока с температурой в основном объеме:

$$v_{\mathrm{b}} \propto \left(\frac{\chi^2 g\alpha T_{\mathrm{b}}}{R}\right)^{1/4}, \tag{4.13}$$

$$q \propto \lambda\left(\frac{g\alpha T_{\mathrm{b}}^5}{\chi^2 R}\right)^{1/4}. \tag{4.14}$$

Остановимся теперь на случае сверхмалых полярных углов, когда

$$\theta^2 \ll \frac{\delta}{R}\,. \tag{4.15}$$

В этой области из условия баланса массы (4.5) имеем оценку:

$$u \sim u_* \frac{\theta}{\theta_*}\,, \tag{4.16}$$

в которой u_* — значение скорости u при угле $\theta = \theta_*$, а сам угол θ_* определяется соотношением

$$\theta_*^2 \sim \frac{\delta(\theta_*)}{R}\,. \tag{4.17}$$

С учетом (4.16) из условия баланса продольной компоненты импульса следует, что в области углов, определяемой неравенством (4.15), температура жидкости в ПС не зависит от полярного угла. В связи с этим и в соответствии с оценкой (4.16) первым членом в уравнении баланса энергии в этой области следует пренебречь. Вместе с тем, теперь в этом уравнении следует восстановить член, описывающий объемное тепловыделение. В результате, это уравнение принимает вид

$$v\frac{\partial T}{\partial y} = \chi\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{\rho C}\,, \tag{4.18}$$

где C — теплоемкость жидкости. Отсюда следует, что в области сверхмалых углов $\theta \ll \theta_*$ толщина ПС, как и температура, от полярного угла не зависит, и оценки для этих величин имеют вид

$$\delta \sim \delta_* \sim \frac{\chi}{v_*}\,, \qquad T \sim T(\theta_*) \sim \frac{Q\delta_*^2}{\lambda}\,, \tag{4.19}$$

где v_* — значение скорости v при угле $\theta \sim \theta_*$. Наконец, из соотношений (4.19) и (4.12) следует, что при углах $\theta \ll \theta_*$ плотность теплового потока на границе является также практически постоянной. В полюсе (при значении угла $\theta = 0$) она соответствует минимуму, величина которого дается следующей оценкой:

$$q_{\min} \sim q_* \equiv q(\theta_*) \sim \langle q\rangle\theta_*^2\,, \tag{4.20}$$

где $\langle q\rangle \sim QR$ — средняя величина теплового потока по всей границе.

Турбулентный пограничный слой. Для того чтобы получить соотношения для турбулентного ПС, подобные тем, что были получены для ламинарного, заметим, что главная часть перепада температуры приходится на вязко-кондуктивный подслой. В нем условия баланса массы, импульса и энергии носят локальный характер. Поэтому оценка, связывающая плотность потока тепла

на стенке с температурой окружающей среды в сходящемся турбулентном ПС совпадает с соответствующей оценкой для турбулентного ПС на вертикальной стенке при изотермической окружающей среде [49]:

$$q \propto \lambda \left(\frac{g\alpha T_{\mathrm{b}}^4}{\chi^2} \right)^{1/3} . \tag{4.21}$$

Для того, чтобы установить связь между вертикальной компонентой скорости течения жидкости v_{b} и температурой T_{b} в основном объеме, обратимся к турбулентному ядру ПС, где вязкость и теплопроводность несущественны. В этой области соотношение, связывающее усредненную по турбулентным пульсациям продольную компоненту скорости (для нее сохраним обозначение u) с вертикальной компонентой скорости течения в основном объеме согласно условию баланса массы и условию сшивки (4.3), совпадает с оценкой (4.9). Условия баланса импульса и энергии в турбулентном ядре приводят к следующим оценкам:

$$\left(\frac{u}{R\theta} \right)^2 \sim \frac{g\alpha \Delta T}{R} , \tag{4.22}$$

$$v'^2 \sim g\alpha T' \delta , \tag{4.23}$$

$$q \sim \rho C v' T' , \tag{4.24}$$

где ΔT — характерное значение средней величины превышения температуры в турбулентном ядре над температурой прилегающих участков основного объема, v' и T' — характерные значения турбулентных пульсаций соответственно скорости и температуры. Принимая во внимание, что $v' \sim v_{\mathrm{b}}$ и $T' \sim \Delta T$, получаем следующие оценки из (4.9), (4.22) – (4.24):

$$\left(\frac{u\delta}{R\theta} \right)^3 \sim g\alpha \frac{q}{\rho C} \delta , \tag{4.25}$$

$$u^3 \sim g\alpha \frac{q}{\rho C} \frac{R^2\theta^3}{\delta} , \tag{4.26}$$

$$v_{\mathrm{b}} \sim \left(\chi R^3 (g\alpha T_{\mathrm{b}})^4 \right)^{1/9} , \tag{4.27}$$

$$q \sim \frac{\lambda}{g\alpha\chi R} v_{\mathrm{b}}^3 . \tag{4.28}$$

4.3. Температура и скорость течения в основном объеме

Поскольку во внутреннем объеме (вне ПС) вязкость и теплопроводность несущественны, условия баланса импульса и энергии здесь приобретают вид

$$(\mathbf{v}_{\mathrm{b}}\nabla)\mathbf{v}_{\mathrm{b}} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g\alpha T_{\mathrm{b}} \mathbf{n} , \tag{4.29}$$

$$(\mathbf{v}_{\mathrm{b}}\nabla) T_{\mathrm{b}} = \frac{Q}{\rho C} . \tag{4.30}$$

В этом уравнении $\mathbf{v}_{\mathrm{b}} = \mathbf{v}_{\mathrm{h}} + v_{\mathrm{v}}\mathbf{n}$ — вектор скорости течения в основном объеме, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z, v_{v}, v_{h} — соответственно вертикальная и горизонтальная составляющие скорости.

По сравнению с течением в ПС течение в основном объеме является значительно более медленным. В связи с этим подъемная сила, возникающая здесь как следствие неоднородного распределения температуры, практически полностью уравновешивается силой, вызванной градиентом давления. Это означает, что в данной области складывается ситуация, близкая к гидростатической, где, как известно [7], температура оказывается функцией только координаты z и при ориентированном по оси z температурном градиенте имеет место устойчивая стратификация. Оценим поправки к стратифицированному распределению температуры, возникающие за счет наличия медленного течения.

Обозначим через Δp_{h} характерную величину изменения давления по площади горизонтального сечения основного объема при заданном значении координаты z. В соответствии с горизонтальной компонентой уравнения (4.29) указанные величины связаны соотношением

$$\Delta p_{\mathrm{h}} \sim \rho v_{\mathrm{h}}^2 .$$

Отсюда с помощью вертикальной компоненты уравнения (4.29) получим характерную величину изменения температуры в том же сечении:

$$(\Delta T_{\mathrm{b}})_{\mathrm{h}} \sim \frac{v_{\mathrm{h}}^2}{g\alpha z} . \tag{4.31}$$

С учетом того, что линейный размер горизонтального сечения при заданном значении z в рассматриваемом нами случае $z \ll R$ имеет порядок $\sqrt{Rz}$, из уравнения баланса массы для основного объема вытекает связь между горизонтальной v_{h} и вертикальной v_{v} составляющими скорости течения:

$$v_{\mathrm{h}}^2 \sim \frac{R}{z} v_{\mathrm{v}}^2 . \tag{4.32}$$

Подставив (4.32) в (4.31) и воспользовавшись соотношениями (4.13), (4.11), приходим к оценке

$$(\Delta T_{\mathrm{b}})_{\mathrm{h}} \sim \left(\frac{\delta}{z} \right)^2 T_{\mathrm{b}} . \tag{4.33}$$

Отсюда следует, что при значениях высоты много бóльших толщины ПС, $z \gg \delta$, поправки, обусловленные зависимостью температуры от горизонтальных координат, малы и

$$T_{\mathrm{b}} \simeq T_{\mathrm{b}}(z) . \tag{4.34}$$

Из этого факта в силу уравнения (4.30) следует, что аналогичное утверждение при том же условии $z \gg \delta$ справедливо и для вертикальной составляющей скорости течения:

$$v_{\mathrm{v}} \approx v_{\mathrm{v}}(z) . \tag{4.35}$$

С учетом соотношений (4.34), (4.35) уравнение (4.30) приобретает вид

$$v_{\mathrm{v}} \frac{dT_{\mathrm{b}}}{dz} = \frac{Q}{\rho C} . \tag{4.36}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что в области внутреннего объема, примыкающей к ПС, где при значениях угла $\theta \ll 1$ имеет место приближение $z \simeq R\theta^2/2$, справедлива

оценка:

$$T_{\rm b} \sim \frac{Q}{\rho C}\,\frac{R\theta^2}{2v_{\rm v}}\,. \tag{4.37}$$

4.4. Предельные зависимости

В области полярных углов, определяемых неравенством (4.4), уравнения (4.5)–(4.7) не содержат какого-либо масштаба для полярного угла θ. Поэтому зависимости характеристик жидкости от угла θ и высоты z здесь должны быть степенны́ми. Определим показатели степеней a, b, f, d следующими соотношениями:

$$q \propto \theta^a\,,\quad T_{\rm b} \propto \left(\frac{z}{R}\right)^b,\quad u \propto \theta^f,\quad \delta \propto \theta^d\,. \tag{4.38}$$

Как и ранее, рассмотрим отдельно случаи ламинарного и турбулентного режимов течения в ПС.

Ламинарный пограничный слой. В результате подстановки определений (4.38) в соотношения (4.9)–(4.12), (4.37) после предварительного исключения величины $v_{\rm v}$ приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений для степенны́х показателей:

$$f = b+1\,,\quad f = 1-2d\,,\quad 2b+f+d = 3\,,\quad a = 2b-d\,. \tag{4.39}$$

Решение ее приводит к следующему результату:

$$a = 2\,,\quad b = \frac{4}{5}\,,\quad c = \frac{9}{5}\,,\quad d = -\frac{2}{5}\,. \tag{4.40}$$

Турбулентный пограничный слой. Аналогично предыдущему случаю, в результате подстановки определений (4.38) в соотношения (4.21), (4.25), (4.26) и (4.37) получаем систему уравнений для степенны́х показателей:

$$3f+2d-a = 3\,,\quad 3f+d-a = 3\,,$$
$$2b+f+d = 3\,,\quad a = \frac{8b}{3}\,. \tag{4.41}$$

Решение ее дает

$$a = \frac{24}{13}\,,\quad b = \frac{9}{13}\,,\quad c = \frac{21}{13}\,,\quad d = 0\,. \tag{4.42}$$

Соотношения (4.38), (4.40) и (4.42) описывают поведение теплового потока на границе и распределение теплогидравлических характеристик в нижней части объема, содержащего жидкость с внутренними источниками тепла. Отметим, что показатель b, ответственный за распределение температуры в основном объеме, меньше единицы. Поэтому, согласно (4.38), имеет место неравенство

$$\frac{\partial^2 T_{\rm b}}{\partial z^2} < 0\,. \tag{4.43}$$

4.5. Обсуждение и сравнение с экспериментом

При малых значениях полярного угла, $\theta \ll 1$, плотность теплового потока на границе резко убывает при уменьшении угла в силу утолщения ПС и температурной стратификации в основном объеме. Как следствие (см. уравнение (3.43)), имеет место сгущение горизонтальных изотерм по мере приближения к нижней границе основного объема. Асимптотическое поведение теплового потока на границе и распределение температуры в основном объеме зависят от режима течения в ПС. Для ламинарного ПС асимптотические зависимости при $\theta_* \ll \theta \ll 1$ и $\delta \ll z \ll R$, согласно соотношениям (4.38), (4.40), определяются выражениями

$$q \propto \theta^2\,,\quad T_{\rm b} \propto \left(\frac{z}{H}\right)^{4/5}. \tag{4.44}$$

При $\theta \sim \theta_*$, где угол $\theta_* \ll 1$ определен соотношением (4.17), убывание плотности теплового потока при уменьшении угла замедляется и при $\theta \ll \theta_*$ она становится почти постоянной, принимая максимальное значение в полюсе (при $\theta = 0$).

Асимптотические зависимости для случая турбулентного режима течения в ПС, согласно соотношениям (4.38), (4.42), имеют вид

$$q \propto \theta^{24/13}\,,\quad T_{\rm b} \propto \left(\frac{z}{H}\right)^{9/13}. \tag{4.45}$$

Турбулентный режим в сходящемся ПС может иметь место при условии, что этот режим развивается на более ранней (вверх по течению) стадии при углах $\theta \sim 1$. В таком случае, согласно (4.38), (4.42), число Рейнольдса при углах $\theta \ll 1$ изменяется по закону

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{u\delta}{\nu} \propto \theta^{21/13}\,. \tag{4.46}$$

Если порог перехода от ламинарного режима к турбулентному в ПС не сильно превышен, число Рейнольдса с уменьшением полярного угла быстро убывает до значения ниже критического и тогда мы возвращаемся к асимптотическим зависимостям (4.44).

Оценим теперь величину минимума плотности теплового потока, реализуемого при угле $\theta = 0$, и значение граничного угла θ_*, ниже которого угловая зависимость плотности теплового потока значительно ослабевает. Согласно (4.38), (4.40) поведение толщины ПС в зависимости от угла определяется формулой

$$\delta(\theta) = \delta_0\theta^{-2/5}\,, \tag{4.47}$$

где δ_0 — величина порядка толщины ПС при углах $\theta \sim 1$. Подстановка соотношения (4.47) в (4.17) дает искомую оценку для θ_*

$$\theta_* \sim \left(\frac{\delta_0}{R}\right)^{5/12}. \tag{4.48}$$

В соответствии с соотношением (4.12) и результатами предыдущего раздела, зависимость величины δ_0 от модифицированного числа Рэлея дается оценкой $\delta_0/R \sim \mathrm{Ra}_{\rm i}^{-\gamma_{\rm dn}}$, где $\gamma_{\rm dn} \simeq 0{,}2$. Воспользовавшись этим результатом с учетом соотношений (4.48), (4.17) и (4.20), получаем оценку для отношения минимальной плотности теплового потока к ее среднему значению и для граничного угла:

$$\frac{q_{\min}}{\langle q\rangle} \sim \mathrm{Ra}_{\rm i}^{-1/6}\,,\quad \theta_* \sim \mathrm{Ra}_{\rm i}^{-1/12}\,. \tag{4.49}$$

В заключение раздела остановимся на сравнении полученных здесь результатов с экспериментом. Прежде всего отметим, что все известные экспериментальные данные демонстрируют быстрое убывание плотности теплового потока с уменьшением полярного угла при $\theta \ll 1$. Они также устанавливают наличие температурной стратификации в основном объеме при $z \ll H$. Сравнение результатов теории, описываемых соотношениями (4.44), (4.49), с экспериментальными данными, полученными в [24, 25, 28], представлены в табл. 2. Из нее следует, что имеется качественное согласие теории с экспериментом относительно угловой зависимости плотности теплового потока и отношения ее минимальной величины к среднему значению. Вместе с тем, для проведения более подробного сравнения требуются более высокая точность и пространственное разрешение при измерениях плотности теплового потока.

Таблица 2. Распределение теплового потока на границе. Сравнение теории с экспериментом

	Эксперимент	Теория
UCLA [24], $\mathrm{Ra_i} = (3-8) \times 10^{13}$	$q_{\min}/\langle q\rangle \simeq 0{,}1$ $q\,\theta/\langle q\rangle = a + b\theta^2$	$q_{\min}/\langle q\rangle \sim 10^{-2}$ $q(\theta)/\langle q\rangle \approx a + b\theta^2$
COPO [25], $\mathrm{Ra_i} \sim 10^{14}-10^{15}$	$q_{\min}/\langle q\rangle \simeq 0$	$q_{\min}/\langle q\rangle \simeq 10^{-3}$
BALI [28], $\mathrm{Ra_i} \sim 10^{15}-10^{17}$	$q_{\min}/\langle q\rangle < 10^{-2}$	$q_{\min}/\langle q\rangle \sim (1-5) \times 10^{-3}$

В работе [19] оптическими методами было зарегистрировано распределение температуры в объеме жидкости с внутренними источниками тепла. На рисунке 4 представлена типичная голограмма из [19], описывающая распределение изотерм. На ней отчетливо видны температурная стратификация и сгущение горизонтальных изотерм по мере приближения к нижней границе. Такое поведение находится в соответствии с теоретическим соотношением (4.43). На рисунке 5 показано количественное сравнение теории с экспериментом [19] по распределению температуры в основном объеме при мощности выделения тепла в жидкости, отвечающей $\mathrm{Ra_i} = 1{,}04 \times 10^8$. Теоретическая зависимость приведенной температуры от безразмерной приведенной высоты была задана, в соответствии с формулой (4.44) соотношением $T_\mathrm{b} \propto z^{4/5}$. Экспериментальные точки получены путем численной обработки голограммы рис. 4.

Рис. 4. Типичная голограмма из работы [19], описывающая распределение изотерм в основном объеме: темные линии соответствуют изотермам.

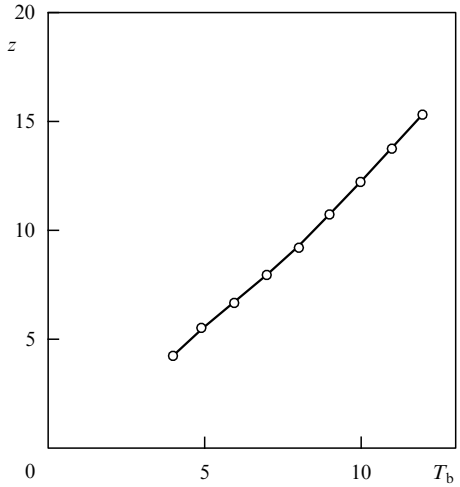

Рис. 5. Распределение температуры в основном объеме — сравнение теории (сплошная кривая) с экспериментом [19] (точки).

Теоретическая кривая совпала с экспериментом с погрешностью, не превышающей 2,7 %.

Таким образом, можно говорить о вполне удовлетворительном согласии теории с экспериментом в отношении предельных зависимостей характеристик конвекции для нижней части объема, содержащего жидкость с внутренними источниками тепла.

5. Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости в квазидвумерной геометрии

В этом разделе будут рассмотрены характеристики теплоотдачи тепловыделяющей жидкости, заключенной в моделирующем квазидвумерном объеме (рис. 6). Так же как и для прототипного объема, верхнюю и нижнюю границы квазидвумерного объема будем обозначать соответственно S_up и S_dn. Широкие плоские вертикальные стенки (размером $\sim R$) моделирующего объема предполагаются теплоизолированными. Толщина квазидвумерной емкости L удовлетворяет неравенству

$$L \ll R\,. \tag{5.1}$$

Строго говоря, распределение теплоотдачи по узкому участку границы квазидвумерного объема отличается от соответствующего распределения по границе исходного объема. Тем не менее можно ожидать, что при выполнении определенных условий эти два распределения, по

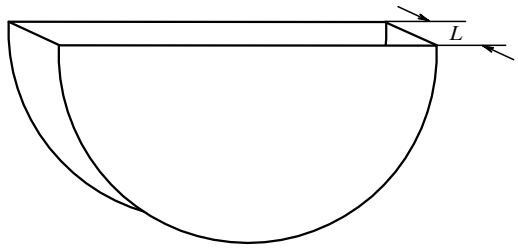

Рис. 6. Моделирующий квазидвумерный объем: L — толщина вертикального среза.

крайней мере, качественно, будут близкими друг к другу. Задача этого раздела состоит в том, чтобы определить характер максимально возможного соответствия в распределении теплоотдачи для двух типов объема и найти условия, при которых такое соответствие реализуется.

5.1. Характер максимально возможного соответствия теплоотдачи в моделирующем квазидвумерном и прототипном объемах

В силу неравенства (5.1) моделирующий slice-объем приближенно является также и поперечным срезом длинного горизонтального цилиндра с тем же сечением. Этим фактом мы будем широко пользоваться в ходе дальнейшего анализа, рассматривая длинный цилиндр как промежуточный объект между исходным объемом и его квазидвумерным аналогом.

Конечность толщины моделирующего объема ограничивает конвективное движение жидкости по толщине. Это ограничение несущественно при условии, что максимальная толщина свободно-конвективных пограничных слоев, формирующихся в таком объеме (в том числе и на широких вертикальных стенках), мала по сравнению с толщиной самой емкости:

$$\delta_{\max} \ll L\,. \tag{5.2}$$

В обратном предельном случае стесненный объем приводит к принципиальному видоизменению структуры конвективных течений и, соответственно, к существенному отличию характеристик конвективного теплопереноса в квазидвумерном объеме от существующих в длинном цилиндре и, естественно, в прототипном объеме.

Общие качественные особенности процессов переноса тепла внутри длинного горизонтального цилиндра совпадают со случаем прототипного объема. При достаточно высоких значениях числа Рэлея, отвечающих сильно развитой конвекции, распределение температуры внутри области объемом V_+ (см. рис. 1), ограниченной снизу горизонтальной плоскостью, проходящей через точку максимума среднего по времени значения температуры, и плоским верхним участком границы, благодаря турбулентному перемешиванию оказывается однородным независимо от формы объема. Отсюда следует, что характер зависимостей числа Нуссельта для теплоотдачи через верхнюю границу от обычного числа Рэлея для двух рассмотренных геометрий объема одинаков.

Несколько иная ситуация имеет место для теплоотдачи через нижнюю границу. Здесь играют роль геометрические различия между двумя типами рассмотренных объемов. Наблюдаются расхождения крупномасштабных характеристик распределений температуры и течения жидкости, относящихся к ПС и к внутренней области V_-. Хотя для объемов обоих типов указанные распределения являются двумерными, в исходном объеме они — осесимметричные, а в длинном горизонтальном цилиндре — плоские. Вместе с тем, эти различия носят количественный, а не качественный характер. Поэтому они не могут сказаться на самой форме зависимости числа Нуссельта $\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}}$ как от числа Рэлея, так и от полярного угла θ при углах $\theta \to 0$. Другими словами, показатели степеней в этих зависимостях должны быть одинаковыми, хотя численные коэффициенты при них могут быть разными. По той же причине могут различаться и критические значения числа Рэлея, определяющие переход от ламинарного режима к турбулентному в ПС (и соответственно от одного типа зависимости $\mathrm{Nu}_{\mathrm{dn}}(\mathrm{Ra})$ к другому). То же самое касается и характерных значений полярного угла, начиная с которых становятся справедливыми установленные в разделе 4 предельные угловые зависимости. Наконец, после перехода в аргументе функциональной зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея к модифицированному числу Рэлея ($\mathrm{Ra} \to \mathrm{Ra_i}$) различие между рассмотренными геометриями двух типов проявится также и в отношении численного коэффициента при степенях для теплоотдачи через верхнюю границу.

Отличительная особенность конвекции в квазидвумерном объеме по сравнению с исходным объемом и его цилиндрическим аналогом состоит, как уже было сказано выше, в ограничении течения по нормали к срезу и в наличии вязкого трения жидкости относительно вертикальных теплоизолированных стенок.

Адекватность моделирования теплопередачи зависит от воздействия этих факторов на искажение структуры ПС на охлаждаемых участках границы и на картину тепломассопереноса во внутренних областях V_+ и V_-, которая, в свою очередь, влияет на характеристики самих ПС.

В том случае, когда при выполнении неравенства (5.1) влияние двух указанных факторов незначительно, характеристики теплоотдачи в квазидвумерной геометрии будут близкими к таковым для соответствующего длинного цилиндра, поскольку усредненная по времени конвекция в обоих случаях является двумерной плоской, в то время как для прототипного объема она, как уже упоминалось, является осесимметричной.

Отсюда следует, что максимально возможное соответствие (по отношению к теплоотдаче) моделирующего квазидвумерного объема исходному объему сводится к тому, которое имеет место между длинным горизонтальным цилиндром и исходным объемом. Необходимое условие такого соответствия состоит в требовании выполнения неравенства (5.2). Далее раскроем содержание этого условия.

5.2. Условия максимально возможного соответствия теплоотдачи в моделирующем квазидвумерном и прототипном объемах

Согласно разделу 4 максимальная толщина ПС на охлаждаемой части границы, $\delta_{\max}$, достигается в точке полюса. Оценка ее, справедливая в области $\mathrm{Ra_i} < 10^{17}$, представляющей интерес для проблемы безопасности ядерных реакторов, в соответствии с формулами (4.17), (4.49) дается выражением:

$$\frac{\delta_{\max}}{R} \propto \mathrm{Ra_i}^{-1/6}\,. \tag{5.3}$$

Оценка толщины сдвигового ПС на вертикальных теплоизолированных стенках в области V_+ получается на основе общей теории для сдвиговых ПС [7]:

$$\frac{\delta_+}{R} \propto \sqrt{\frac{\nu}{Ru_+}}\,. \tag{5.4}$$

Здесь u_+ — характерное значение крупномасштабной пульсационной скорости течения жидкости внутри области V_+. Оно связано с характерным значением крупно-

масштабных пульсаций температуры в той же области оценкой

$$u_+^2 \sim g\alpha\delta T_+ R\,, \tag{5.5}$$

которая вытекает из условия баланса импульса.

Еще одно соотношение получается из условия баланса энергии в области V_+:

$$C\rho u_+ \delta T_+ \sim QR\,. \tag{5.6}$$

Комбинируя соотношения (5.4) — (5.6), приходим к оценке толщины ПС на теплоизолированных стенках в области V_+:

$$\frac{\delta_+}{R} \sim \mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{-1/6}\,. \tag{5.7}$$

Самое медленное течение жидкости во всем занимаемом ею объеме наблюдается в области устойчивой стратификации V_-. Поэтому на теплоизолированных вертикальных стенках можно, на первый взгляд, ожидать образования самых толстых ПС, способных привести к сильному искажению температурного распределения. Однако механизм формирования этих ПС носит, по сравнению с обычным механизмом, совершенно иной характер и потому требует специального рассмотрения. Дело в том, что вследствие замедления течения жидкости вблизи теплоизолированной стенки из-за вязкого торможения происходит дополнительный разогрев жидкости в этой области за счет внутренних источников тепла. Соответствующее локальное повышение температуры ведет, в свою очередь, к возрастанию подъемной силы, которое в значительной степени компенсирует вязкое торможение, что в качестве обратной связи приводит к ограничению локального повышения температуры. В результате происходит формирование своеобразного температурного ПС, принципиально отличающегося от ранее рассматривавшихся пограничных слоев. Оценим его толщину, δ_-, и возмущение в нем температуры, δT_-.

С учетом условия баланса между вязкой и подъемной силами получаем соотношение

$$\frac{\nu v_\mathrm{v}}{\delta^2} \sim g\alpha\delta T_-\,, \tag{5.8}$$

где v_v — вертикальная компонента скорости течения вне ПС в области V_-. Далее, требование энергетического баланса в ПС дает оценку

$$\frac{\lambda\delta T_-}{\delta_-^2} \sim Q\,. \tag{5.9}$$

Исключая величину δT_- из двух последних соотношений, получаем

$$\delta_- \sim \left(\frac{\lambda\nu v_\mathrm{v}}{g\alpha Q}\right)^{1/4}. \tag{5.10}$$

Подставляя сюда вытекающую из уравнения (4.36) оценку

$$\rho C v_\mathrm{v}\,\frac{T}{z} \sim Q\,, \tag{5.11}$$

имеем

$$\delta_- \sim \left(\frac{\nu\chi z}{g\alpha T}\right)^{1/4}. \tag{5.12}$$

Наконец, воспользовавшись вытекающей из соотношения (4.44) оценкой

$$T \sim T_\mathrm{max}\left(\frac{z}{H}\right)^{4/5} \tag{5.13}$$

и выражая величину T_max через толщину ПС, δ, на охлаждаемой стенке при значениях вертикальной координаты $z \sim H$, приходим к оценке толщины температурного ПС на вертикальных теплоизолированных стенках в области V_- квазидвумерного объема:

$$\delta_- \sim \delta\left(\frac{z}{H}\right)^{1/20} < \delta_\mathrm{max}\,. \tag{5.14}$$

Исходя из соотношений (5.9), (5.10) и поступая, как при выводе формулы (5.14), находим оценку для возмущения температуры в ПС на вертикальных теплоизолированных стенках в области V_- квазидвумерного объема:

$$\delta T_- \sim T\,\frac{\delta}{H}\left(\frac{H}{z}\right)^{7/10}. \tag{5.15}$$

Она свидетельствует о малости возмущения температуры при $z > \delta$.

Сравнивая оценки (5.3), (5.7) и (5.14), видим, что максимальная толщина ПС в квазидвумерном объеме достигается на охлаждаемой части границы в полюсе. Поэтому в соответствии с требованием (5.2) и оценкой (5.3) окончательно приходим к условию максимального соответствия теплопередачи в квазидвумерном объеме прототипному объему:

$$\frac{L}{R} \gg \mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{-1/6}\,. \tag{5.16}$$

Это неравенство следует рассматривать как критерий максимально возможного соответствия моделирующего квазидвумерного объема прототипному объему.

В области значений модифицированного числа Рэлея, представляющей наибольший интерес для проблемы безопасности ядерных реакторов, $\mathrm{Ra_i} \sim 10^{12} \sim 10^{17}$, условие (5.16) соответствует неравенству $L/R \gg 10^{-2}$, выполнение которого на практике обычно не встречает затруднений.

В таблице 3 приведены минимальные значения отношения L/R, интервалы изменения числа $\mathrm{Ra_i}$ и максимальное значение величины $\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{-1/6}$, реализованные в четырех известных экспериментах, выполненных в квазидвумерной геометрии. Видно, что наиболее благоприятное с точки зрения выполнения критерия (5.16)

Таблица 3. Параметры экспериментов, выполненных в квазидвумерной геометрии

	$(L/R)_\mathrm{min}$	$\mathrm{Ra_i}$	$(\mathrm{Ra}_\mathrm{i}^{-1/6})_\mathrm{max}$
Маингер и др. [16, 19, 20]	0,13	$10^7 - 5\times10^{10}$	5×10^{-2}
Штайнбреннер и Райнеке [21]	0,044	$5\times10^{12} - 1{,}0\times10^{14}$	$0{,}8\times10^{-2}$
COPO [25, 26]	0,125	$3\times10^{14} - 2\times10^{15}$	$3{,}8\times10^{-3}$
BALI [28]	0,1	$10^{15} - 10^{17}$	$0{,}32\times10^{-2}$

соотношение параметров имеет место в эксперименте BALI, а наименее благоприятное — в эксперименте Штайнбреннера и Райнеке.

6. Особенности конвекции в остывающей жидкости без внутренних источников тепла

6.1. Предварительный анализ

Ввиду того, что в области больших значений числа Рэлея толщина ПС много меньше характерного размера занимаемого жидкостью объема, скорости течения в ПС, как это следует из условия баланса массы, много больше скоростей во внутреннем объеме. Но именно последние определяют характерное время остывания. Поэтому процессы конвекции в ПС (определяющие теплосопротивление потоку тепла на границе) идут много быстрее процесса остывания, и, следовательно, данный процесс можно считать квазистационарным. Именно это обстоятельство дало основание авторам работы [29] сделать предположение об эквивалентности процессов теплоотдачи остывающей жидкости без внутренних источников тепла соответствующим процессам для жидкости с однородно распределенными источниками тепла (в стационарном режиме). Задача этого раздела состоит в более подробном анализе этого предположения.

Далее оставим в силе все предположения относительно формы занимаемого жидкостью объема, которые были приняты в разделах 3, 4 (а также на рис. 1, 2) и сохраним прежние обозначения.

Изменение тепловой энергии остывающей жидкости во многом близко действию внутренних источников тепла. Формально это выражается в том, что для квазистационарных процессов слагаемое с производной температуры по времени в уравнении баланса энергии, взятое с обратным знаком, можно рассматривать как эффективную плотность мощности тепловыделения:

$$\widetilde{Q} \equiv -C\rho\,\frac{\partial T}{\partial t}\,. \tag{6.1}$$

Уже из этого следует, что эффективная плотность мощности однородна только в той области объема, где усредненная по времени температура жидкости тоже однородна. Таковой является область V_+ (см. рис. 1), расположенная выше точки максимума усредненной по времени температуры в емкости с жидкостью. В области же V_- (ниже точки максимума усредненной по времени температуры) имеет место устойчивая температурная стратификация и там эффективная плотность мощности $\widetilde{Q}$ в соответствии с (6.1) является заведомо неоднородной. Это означает, в свою очередь, что распределение температуры в области V_- для жидкостей двух типов должно быть различным. В том, что это так, можно убедиться и иначе, обратившись к качественному рассмотрению механизмов формирования распределения температуры в данной области.

В тепловыделяющей жидкости частицы, преодолевая путь между двумя точками различной высоты в области V_-, испытывают разогрев пропорционально времени, затраченному на этот путь. Напротив, в остывающей жидкости, где внутренние источники тепла отсутствуют, но зато процесс тепломассопереноса нестационарен, температуры двух аналогичных точек совпадают, но в разные моменты времени, разделенные промежутком, необходимым для преодоления этими частицами пути между указанными точками. Естественно, что различие в распределении температуры во внутреннем объеме области V_- для жидкостей двух типов влечет за собой и различие в распределении теплового потока по нижней границе (см. рис. 1) для них. В дальнейшем мы сконцентрируем внимание на особенностях распределения теплоотдачи остывающей жидкости без внутренних источников тепла, относящегося к нижней границе при полярных углах $\theta \ll 1$ (см. рис. 2), когда различие между жидкостями двух типов является наиболее значительным. Как и для тепловыделяющей жидкости, данное распределение является решением совместной задачи о конвекции в ПС и в прилегающем к нему внутреннем объеме.

Основные качественные особенности ПС для остывающей жидкости без внутренних источников тепла на нижнем участке границы при углах $\theta \ll 1$ совпадают с таковыми для тепловыделяющей жидкости, рассмотренными в предыдущем разделе. Здесь ПС является сходящимся, тормозящимся и удовлетворяет тому же граничному условию (4.1), а также условиям сшивки с характеристиками внутреннего объема (4.2), (4.3). Ввиду квазистационарного характера процессов в ПС для остывающей жидкости соответствующие уравнения движения совпадают с таковыми для ПС в тепловыделяющей жидкости. Поэтому применительно к остывающей жидкости сохраняет силу большинство соотношений, полученных на основе анализа ПС в предыдущем разделе, в том числе соотношения (4.13), (4.14) и (4.27), (4.28), которыми мы и воспользуемся в ходе дальнейшего анализа.

6.2. Конвекция во внутреннем объеме и распределение потока тепла на границе

Во внутреннем объеме, где вязкость и теплопроводность несущественны, условия баланса импульса и энергии для остывающей жидкости без внутренних источников тепла приобретают вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\mathrm{b}}{\partial t} + (\mathbf{v}_\mathrm{b}\nabla)\mathbf{v}_\mathrm{b} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g\alpha T_\mathrm{b}\mathbf{n}\,, \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial T_\mathrm{b}}{\partial t} + (\mathbf{v}_\mathrm{b}\nabla)T_\mathrm{b} = 0\,. \tag{6.3}$$

Специфика этих уравнений состоит в отсутствии источника тепла в (6.3) и в наличии производных по времени в обоих уравнениях.

Анализ системы (6.2), (6.3), в точности совпадающий с анализом, проведенным в разделе 4 по отношению к системе (4.29), (4.30), приводит к заключению, что при условии $z \gg \delta$ температура и вертикальная компонента скорости течения жидкости во внутреннем объеме практически не зависят от горизонтальных координат. В результате, уравнение (6.3) приобретает вид

$$\frac{\partial T_\mathrm{b}}{\partial t} + v_\mathrm{v}\,\frac{\partial T_\mathrm{b}}{\partial z} = 0\,. \tag{6.4}$$

Как следует из соотношений (4.13), (4.27), зависимость функции v_b от координаты z является значительно более слабой по сравнению с зависимостью функции $T_\mathrm{b}(z,t)$ и ею можно пренебречь. После этого решение уравнения (6.4), полученное методом характеристик, может быть

представлено в виде

$$T_{\mathrm{b}}(z,t) = T_0\left(t - \frac{z}{v_0(t)}\right), \tag{6.5}$$

где $T_0(t)$ и $v_0(t)$ — соответственно значения температуры (отсчитанной от температуры на границе) и вертикальной компоненты скорости течения во внутреннем объеме при значении вертикальной координаты $z \approx \delta$.

Зависимость величины $T_0(t)$ от времени может быть описана уравнением

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = -\frac{T_0}{\tau(t)}, \tag{6.6}$$

которое является следствием условия баланса энергии для всего объема жидкости. Обратная величина времени остывания $\tau^{-1}(t)$ пропорциональна некоторой средней по границе величине числа Нуссельта $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Ra}^s$, где показатель степени s много меньше единицы ($1/4 < s < 1/3$). Так как $\mathrm{Ra} \sim \Delta T$, величина $\tau(t)$ из (6.6) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \ll 1. \tag{6.7}$$

С учетом этого неравенства из уравнений (6.5) и (6.6) следует, что распределение температуры во внутреннем объеме может быть представлено в виде:

$$T_{\mathrm{b}}(z,t) = T_0(t)\exp\left(\frac{z}{v_0(t)\tau(t)}\right). \tag{6.8}$$

Из соотношений (4.13), (4.27) и (6.8) следует

$$\frac{v_{\mathrm{b}}(z,t)}{v_0(t)} \sim \exp\left(\frac{z}{m v_0(t)\tau(t)}\right), \tag{6.9}$$

где $m = 4$ при ламинарном режиме в ПС и $m = 9/4$ — при турбулентном.

Выражения (6.8) с учетом соотношений (4.14) и (4.28) позволяют представить распределения температуры во внутреннем объеме и плотности теплового потока на границе в виде

$$T_{\mathrm{b}}(z,t) = T_0(t)\exp\left(k\frac{z}{R}\right), \tag{6.10}$$

$$q(\theta,t) = q_{\min}(t)\exp(p\theta^2), \tag{6.11}$$

где k и p — безразмерные величины; $q_{\min}$ — минимальная величина плотности теплового потока на границе, реализующаяся при угле $\theta = 0$. Учитывая, что

$$\frac{v_{\mathrm{b}}(R,t) - v_0(t)}{v_0(t)} \sim 1$$

и соотношение (6.9), приходим к выводу, что произведение $v_0(t)\tau(t)$ заметно меньше R и поэтому величины k и p, входящие в выражения (6.10), (6.11), должны быть заметно больше единицы. Кроме того, эти величины для турбулентного режима в ПС должны быть меньше, чем для ламинарного.

6.3. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Согласно выражениям (6.10), (6.11), при сравнительно небольших значениях аргументов температура в области устойчивой стратификации как функция высоты и плотность теплового потока как функция квадрата полярного угла имеют экспоненциальную форму. Масштаб зависимости температуры от высоты заметно меньше радиуса кривизны границы вблизи полюса, а масштаб зависимости плотности теплового потока от угла заметно меньше единицы. Поэтому уже при значениях $\theta \ll 1$ и $z \ll H$ ($H \sim R$ — высота объема с жидкостью) экспоненциальные зависимости носят ярко выраженный характер. Скорость экспоненциального роста зависит от режима течения в ПС. Она более значительна при ламинарном режиме. Поскольку при малых значениях полярного угла течение жидкости в ПС замедляется, режим течения там в конце концов становится ламинарным и экспоненциальная зависимость становится более крутой. Сравним теперь полученный в этом разделе теоретический результат для распределения потока тепла, $q(\theta)$, с экспериментом.

В эксперименте, выполненном на установке АСОРО в работе Теофануса и Ли [29], проведены измерения распределения плотности теплового потока по границе. Экспериментальные данные были представлены в виде зависимости приведенной плотности потока тепла

$$Y = \frac{q(\theta)}{q_{\mathrm{dn}}} \tag{6.12}$$

от приведенного угла

$$X = \frac{\theta}{\theta_0}, \tag{6.13}$$

где q_{dn} — среднее значение плотности теплового потока по нижней границе и θ_0 угловое положение верхней границы заполнения жидкостью моделирующей емкости. Экспериментальная зависимость $Y = Y(X)$ в [29] была отдельно интерполирована полиномами в двух областях: при $0{,}1 < X < 0{,}6$ полиномом третьей степени и при $0{,}6 < X < 1$ — полиномом второй степени. Обратимся теперь к сравнению теории с экспериментом.

В предположении о применимости результата (6.11) к области $X < 0{,}6$ теоретическая зависимость между приведенными величинами плотности потока тепла и полярного угла может быть записана в виде

$$Y = a\exp(bX^2), \tag{6.14}$$

где a и b — постоянные величины, являющиеся подгоночными параметрами. Выбор

$$a = 0{,}1658, \quad b = 4{,}987 \tag{6.15}$$

привел к согласию теоретической зависимости с экспериментальными данными с расхождением менее 3,4 %. Заметим, что полученное путем сравнения с экспериментом значение параметра b в (6.15) оказалось в согласии с развитой выше теорией, предписывающей параметру p в соотношении (6.11) быть заметно больше единицы. Результаты сравнения теории с экспериментом представлены на рис. 7.

Заметим, что, по сравнению с экспоненциальной зависимостью (6.14), полученной здесь теоретическим путем, предпринятая в работе [29] интерполяция полиномами представляется довольно неестественной, поскольку входящие в них численные коэффициенты являются знакопеременными и большими по абсолютной величине (см. формулы (2.11)).

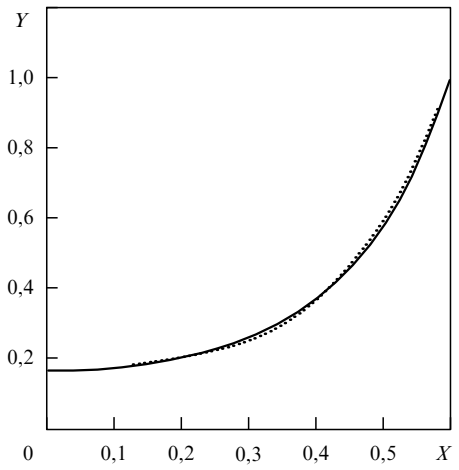

Рис. 7. Зависимости теплового потока от полярного угла — сравнение теории (сплошная кривая) с экспериментом (штриховая).

В итоге подчеркнем, что, несмотря на наличие элементов сходства конвекции в остывающей жидкости без внутренних источников тепла и тепловыделяющей жидкости, между ними имеется коренное различие в отношении распределений теплового потока на границе и температуры во внутреннем объеме. Для остывающей жидкости, как мы убедились, эти распределения носят экспоненциальный характер, тогда как для тепловыделяющей, в соответствии с выводами теории и согласно эксперименту (см. раздел 4), они — степенны́е.

7. Заключение

Складывающиеся на базе экспериментальных и теоретических исследований представления о структуре естественной конвекции в однокомпонентной жидкости с внутренними источниками тепла, находящейся в замкнутом объеме, состоят в следующем.

Существуют четыре основных и один асимптотический режимы теплоотдачи, различающиеся типами конвекции в верхней части объема и в ПС на нижнем участке границы. Каждому режиму соответствует определенная комбинация показателей в степенны́х зависимостях чисел Нуссельта для теплоотдачи через верхнюю и нижнюю границы от безразмерной мощности тепловыделения — модифицированного числа Рэлея.

В диапазоне мощности ($\mathrm{Ra_i} = 10^4 - 10^{17}$), в котором проводились эксперименты, осуществляются те режимы, в которых конвекция в верхней части объема соответствует жесткой турбулентности. При этом в области умеренно высоких уровней мощности ($\mathrm{Ra_i} = 10^4 - 10^{12}$) в ПС на нижней границе действует ламинарный режим. Здесь доля теплоотдачи через верхнюю границу слабо растет с увеличением мощности ($\gamma_{\mathrm{up}} > \gamma_{\mathrm{dn}}$). В диапазоне сверхвысоких уровней мощности в ПС на нижней границе происходит смена типа конвекции — от ламинарного к турбулентному. В результате, с увеличением мощности при $\mathrm{Ra_i} > 10^{13} - 10^{14}$ намечается тенденция к возрастанию долевой части теплоотдачи через нижнюю границу с $\gamma_{\mathrm{dn}} > \gamma_{\mathrm{up}}$.

При условии $\mathrm{Ra_i} \gg 1$ мощность тепловыделения, приходящаяся на ПС в целом, значительно меньше пропускаемых им тепловых потоков. Поэтому, если ограничиться рассмотрением только распределения теплоотдачи между верхней и нижней границами, оба фрагмента объема с тепловыделяющей жидкостью — верхняя часть объема и ПС на нижней границе — имеют конвекцию, аналогичную конвекции жидкости без внутренних источников тепла. Это обстоятельство в сочетании с использованием условия энергетического баланса позволило определить численные значения показателей γ_{up} и γ_{dn} для всех режимов теплоотдачи, близко совпавшие с экспериментальными значениями.

Положение значительно меняется при переходе к рассмотрению детальных характеристик распределения теплоотдачи на нижней части границы. Здесь ПС по мере продвижения в сторону самой низкой точки границы (полюса) приобретает свойства, не имеющие простых аналогий в конвекции жидкости без внутренних источников тепла. Он становится сходящимся, замедляющимся и возвращающим жидкость во внутреннюю часть объема. Распределение температуры во внутреннем объеме (вне ПС) оказывается здесь устойчиво стратифицированным. Характеристики конвекции в сходящемся ПС и в прилегающем к нему внутреннем объеме являются взаимосвязанными. Решения соответствующей самосогласованной задачи привели к подтвердившемуся экспериментом выводу, что зависимости плотности потока тепла на границе от полярного угла, отсчитанного от полюса, и температуры во внутреннем объеме от высоты определяются степенны́ми функциями, показатели в которых являются, вообще говоря, дробными.

Характеристики теплоотдачи жидкости в вертикально ориентированном осесимметричном объеме и в его тонком центральном вертикальном срезе могут быть в близком соответствии друг с другом при условии выполнения определенного ограничения снизу на толщину среза, которое с ростом мощности тепловыделения ослабевает.

Характеристики теплоотдачи остывающей жидкости без внутренних источников тепла во многом сходны с таковыми для тепловыделяющей жидкости. Однако в распределении теплоотдачи через нижнюю границу в жидкостях двух типов имеется принципиальное различие — зависимость плотности теплового потока от полярного угла для остывающей жидкости является экспоненциальной, а не степенно́й, как для тепловыделяющей жидкости. Такое различие накладывает определенные ограничения на использование экспериментов с остывающей жидкостью без внутренних источников тепла для моделирования теплоотдачи тепловыделяющей жидкости.

Авторы выражают глубокую благодарность А.М. Дыхне и А.И. Леонтьеву за интересные обсуждения материала обзора.

Список литературы

1. Benard H *Revue Gen. Sci. Pures Appl.* **11** 1261, 1309 (1900)
2. Rayleigh J W *S Philos. Mag.* **32** 529 (1916)
3. Prandtl L Z *Angew. Math. Mech.* **5** 136 (1925)
4. Prandtl L Z *Ver Deut. Ing.* **77** 105 (1933)
5. Von Karman T *Trans. ASME* 705 (1939)
6. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941)
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
8. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **12** 1463 (1937)
9. Кутателадзе С С *Основы теории теплообмена* (М.: Наука, 1979)
10. Spalding D B, Afgan N (Eds) *Heat Transfer and Turbulent Buoyant Convection* Vol. 1, 2 (Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1977)

11. *Natural Convection: Fundamentals and Applications* (Eds S Kakač, W Aung, R Viskanta) (Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1985)
12. Себиси Т, Брэдшоу П *Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы* (М.: Мир, 1987)
13. Гебхарт Б, Джалурия Й, Махаджан Р, Саммакия Б *Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен* Т. 1, 2 (М.: Мир, 1991)
14. Theofanous T G, in *Multiphase Flow 1995. Proc. of the Second Intern. Conf.* (Eds A Serizawa, T Fukano, J Bataille) (Amsterdam: Elsevier, 1995) p. 573
15. Kulacki F A, Goldstein R J *J. Fluid Mech.* **55** (Pt. 2) 271 (1972)
16. Mayinger F X, Jahn M, Reineke H H, Stainbrenner U, BMFT, RS 48/1 (Hannover, FRG: Institute für Verfahrenstechnik der T.U., 1976)
17. Kulacki F A, Emara A A *J. Fluid Mech.* **83** (Pt. 2) 275 (1977)
18. Kulacki F A, Nagle M E *J. Heat Transfer* **91** 204 (1975)
19. Jahn M "Holografische Untersuchung der freien Konvektion in volumetrisch beheiten Fluiden", Doktor-Ingenieur Dissertation (Hannover, 1975)
20. Mayinger F X, Fritz P, Reineke H H et al., Tecnical Report FT-FB RS 166-79-05 (Bonn: Bundesministerium für Forschung und Technologic, 1980)
21. Stainbrenner U, Reineke H H, in *Proc 6-th Int. Heat Transfer Conf.* Vol. 2 (Toronto, 1978) p. 305
22. Alvarez D, Malterre P, Seiler J *BNFS* (London, 1986) p. 331
23. Asfia F J, Dhir V K, in *Proc. of the Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer* (Grenoble, NEA/CSNI/R(94) 11) (Paris: OECD Nucl. Energy Agency, 1994) p. 229
24. Frantz B, Dhir V K *ASME* **192** 69 (1992)
25. Kymäläinen O, Hongisto O, Tuomisto H, Theofanous T G, in *Proc. of the Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer* (Grenoble, NEA/CSNI/R(94)11) (Paris: OECD Nucl. Energy Agency, 1994) p. 199
26. Kymäläinen O et al. *Nucl. Eng. Des.* **149** 401 (1994)
27. Helle M, Kymäläinen O, Tuomisto H, in *OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability* (Garching, NEA/CSNI/R(98)18) (Paris: OECD Nucl. Energy Agency, 1999) p. 173
28. Bonnet J-M, Seiler J-M, in 7-th *Int. Conf. on Nucl. Engineering ICONE-7057* (Tokyo, 1999)
29. Theofanous T G, Liu C, in *Proc. American Nucl. Soc. National Heat Transfer Conf.* (Portland, Oregon, 1995) p. 349
30. Theofanous T G et al., in *Proc. PSA '96-Int. Topical Meeting on Probabilistic Safety Assessment* (Park City, Utan, 1996) p. 1343
31. Theofanous T G, Angelini S, in *Proc. Eighth Intern. Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics: NURETH-8* (Kyoto, Japan, 1997) (Tokyo: Atomic Energy Soc. Japan, 1997) p. 165
32. Kelkar K M, Schmidt R C, Patankar S V, in *Proc. Int. Heat Transfer Conf.* (san Diego, USA, 1991) p. 355
33. Churbanov A G et al. *Int. J. Heat Mass Transfer* **37** 2969 (1994)
34. Bolshov L A et al. *Nuclear Science J.* **32** 134 (1995)
35. Dinh T N, Nourgaliev R R *Nucl. Eng. Design* **169** 131 (1997)
36. Nourgaliev R R et al., in *OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability* (Garching, NEA/CSNI/R(98)18) (Paris: OECD Nucl. Energy Agency, 1999) p. 215
37. Chudanov V V et al., in *OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability* (Garching, NEA/CSNI/R(98)18) (Paris: OECD Nucl. Energy Agency, 1999) p. 223
38. Bolshov L A, Kondratenko P S, Strizhov V F, in *Proc. of the Intern. Symp. on Transient Covective Heat Transfer* (Cesme, Turkey, August 19–23, 1996) (New York, Vallingford (UK), 1997) p. 103
39. Bolshov L A, Kondratenko P S, Strizhov V F *Int. J. Heat Mass Transfer* **41** 1223 (1998)
40. Большов Л А, Кондратенко П С, в кн. *Труды Второй российской национальной конференции по теплообмену* Т. 3 (26 – 30 октября 1998) (Москва, 1998) с. 50
41. Bolshov L A, Kondratenko P S, Strizhov V F, in *OECD/CSNI Workshop on In-Vessel Core Debris Retention and Coolability* (Garching, NEA/CSNI/R(98)18) (Paris: OECD Nucl. Energy Agency, 1999) p. 235
42. Bolshov L A, Kondratenko P S, in *Proc. of the 1999 NURETH-9 Conference* (San Francisco, California, 1999) Log 304
43. Bolshov L A, Kondratenko P S, Strizhov V F, in *Proc. of the 1999 NURETH-9 Conference* (San Francisco, California, 1999) Log 305
44. Bolshov L A, Kondratenko P S *Int. J. Heat Mass Transfer* **43** 3897 (2000)
45. Chawla T C, Chan S H *J Heat Transfer* **104** 465 (1982)
46. Catton I, Edwards D K *J Heat Transfer* **89** 295 (1967)
47. Castaing B et al. *J. Fluid Mech.* **204** 1 (1989)
48. Wu X-Z, Libchaber A *Phys. Rev. A* **45** 842 (1992)
49. Kutateladze S S, Berdnikov V S *Int. J Heat Mass Transfer* **27** 1595 (1984)
50. Bejan A, Gunnington G R *Int. J Heat Mass Transfer* **24** 131 (1983)
51. Mahajan R L, Gebhart B *J. Fluid Mech.* **91** 131 (1979)
52. Bejan A, in *Natural Convection: Fundamentals and Applications* (Eds S Kakač, W Aung, R Viskanta) (Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1985) p. 75
53. Vliet G C, Liu C K *J. Heat Transfer* **91** 517 (1969)
54. Cheung F B *J. Fluid Mech.* **97** 743 (1980)
55. Chu T Y, Bentz J H, Simpson R B *AIChE Symposium Series* **91** 154 (1995)
56. Himasekhar K "An Analytical and Experimental Study of Laminal Free Boundary Layer Flows in a Stratified Medium", Thesis (India: I.I.T. Kanpur, 1980)

Natural convection in a heat-generating fluid

L.A. Bol'shov
Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences
Bol'shaya Tul'skya 52, 113191 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 955-22 47. Fax (7-095) 958-00 40
E-mail: bolshov@ibrae.ac.ru
P.S. Kondratenko
Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences
Bol'shaya Tul'skya 52, 113191 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 955-22 91. Fax (7-095) 958-00 40
V.F. Strizhov
Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences
Bol'shaya Tul'skya 52, 113191 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 955-22 08. Fax (7-095) 958-00 40

Experimental and theoretical studies on convective heat transfer from a heat-generating fluid confined in a closed volume are reviewed. Theoretical results are obtained by means of analytical estimates based on the relevant conservation laws and the current understanding of convective heat transfer processes. Four basic and one asymptotic regime of heat transfer are identified depending on the heat generation rate. Limiting heat transfer distribution patterns are found for the lower portion of the boundary. Heat transfer in a quasi-two-dimensional geometry is analyzed. Transient heat transfer from a cooling fluid without internal heat sources is studied separately. Experimental results and theoretical predictions are compared.

PACS numbers: **28.90.+t**, **44.25.+f**

Bibliography —56 references *Received 10 May 2001*