

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ**Гравитационные свойства космических струн**

Б.Э. Мейерович

Изложены гравитационные свойства калибровочных и глобальных релятивистских космических струн в абелевой модели Хиггса и в модели скалярного поля. Проведена классификация струн, определены области значений параметров, при которых существуют статические конфигурации. В предельных случаях гравитационные свойства космических струн исследованы аналитически.

PACS numbers: 04.20.-q, 11.27.+d, 98.80.Cq

Содержание

1. Введение (1033).
2. Абелева модель Хиггса (1034).
3. Калибровочные струны (1036).
 - 3.1. Уравнения.
 - 3.2. Интеграл энергии.
 - 3.3. Граничные условия.
 - 3.4. Общие свойства калибровочных струн.
 - 3.5. Свойства решений вблизи линии вырождения.
 - 3.6. Плоскость параметров (β, γ).
 - 3.7. Вырожденный случай Богомольного.
 - 3.8. Решения с казнеровской асимптотикой при $\gamma \ll 1$.
4. Глобальные струны (1043).
 - 4.1. Годстоуновский бозон.
 - 4.2. Уравнения для глобальной струны.
 - 4.3. Самолокализация.
 - 4.4. Параметр порядка.
 - 4.5. Анализ при $\gamma \ll 1$.
 - 4.6. Метрика при $\gamma \rightarrow \gamma_{\max}$.
5. Заключительные замечания (1049).

Список литературы (1049).

1. Введение

Интерес к космическим струнам и другим топологическим дефектам вырос за последние два десятилетия. Этот интерес инициирован, с одной стороны, той ролью, которую топологические дефекты, возможно, играют в процессе эволюции Вселенной, а с другой — тем, что по своим физическим свойствам эти объекты отличаются от обычной материи. Читателю, интересующемуся широким спектром свойств топологических дефектов и их потенциальной роли во Вселенной, можно рекомендовать монографию Виленкина и Шелларда [1]. Предлагаемый обзор посвящен конкретному вопросу, а именно гравитационным свойствам релятивистских космических струн в абелевой модели Хиггса.

Согласно Стандартной космологической модели [2], начиная от долей секунды с момента Большого взрыва и

по сегодняшний день, Вселенная расширяется и остывает, оставаясь в целом однородной и изотропной. В процессе своей эволюции Вселенная проходит через цепочку фазовых переходов: Великое объединение (10^{-35} с от момента Большого взрыва), электрослабый фазовый переход (10^{-11} с), образование нейтронов и протонов из кварков (10^{-6} с), рекомбинация (4×10^5 с) и т.д.

Состояние выше температуры фазового перехода обладает, как правило, более высокой симметрией, чем состояние ниже температуры перехода. При охлаждении в процессе фазового перехода происходит спонтанное нарушение симметрии. Области со спонтанно нарушенной симметрией, расстояние между которыми больше корреляционной длины, статистически независимы. На границах этих областей с неизбежностью должны возникать так называемые топологические дефекты. Возникновение тех или иных топологических дефектов — доменных стенок, струн, монополей или текстур — определяется топологическими свойствами вакуума [3]. Классическим примером топологического дефекта является доменная стенка — переходная область на границе между двумя доменами в ферромагнетике [4].

Фундаментальная роль нарушения симметрии в фазовых переходах выявлена Ландау [5]. Понятие о спонтанном нарушении симметрии с образующимися при этом топологическими дефектами исторически возникло и развивалось при изучении фазовых переходов в конденсированных средах. В этом контексте предшественниками (и нерелятивистскими аналогами) космических струн являются магнитные вихри в сверхпроводниках второго рода [6], а также квантованные вихревые нити в сверхтекучем ^4He [7].

Спонтанное нарушение симметрии играет фундаментальную роль в современной теории элементарных частиц. При этом симметрия может быть "внутренней", т.е. не обязательно связанный с пространственно-временными преобразованиями. Симметрии Великого объединения, электрослабая, изотопическая — это примеры внутренних симметрий.

Определяющий шаг к применению понятия о спонтанном нарушении симметрии в космологии был сделан

Б.Э. Мейерович. Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, 117334 Москва, ул. Косыгина 2, Российской Федерации
Тел. (095) 137-79-85. Факс (095) 938-20-30
E-mail: meierovich@yahoo.com; http://geocities.com/meierovich

Статья поступила 15 января 2001 г.,
после доработки 23 апреля 2001 г.

в 1972 г. Киржницием [8]. Он предположил, что (как и в твердых телах) в теории поля спонтанно нарушенная симметрия может быть восстановлена при достаточно высокой температуре. Так, считается, что на ранней стадии эволюции Вселенной, пока температура была достаточно велика, существовала симметрия электроСлабого и сильного взаимодействий. В процессе расширения и остывания Вселенной произошел фазовый переход "великого разъединения", в результате которого эта симметрия оказалась спонтанно нарушенной и единое взаимодействие распалось на сильное и электроСлабое.

В 1974 г. Вейнберг [9] отметил возможность возникновения доменных стенок при фазовых переходах на ранней стадии эволюции Вселенной. Первый количественный анализ космологических следствий спонтанного нарушения симметрии принадлежит Зельдовичу, Кобзареву и Окуню [10]. Рост интереса к космическим струнам был в значительной степени стимулирован работами Зельдовича [11] и Виленкина [12], в которых рассмотрена возможная роль космических струн как источников флуктуаций, приведших впоследствии к формированию галактик.

Теория Большого взрыва дает надежду распространить возможности экспериментальной проверки новых теорий до планковских энергий, которые совершенно недостижимы в лабораторных условиях. При этом классическую общую теорию относительности приходится экстраполировать до расстояний порядка 10^{-33} см, хотя на сегодняшний день гравитационное взаимодействие экспериментально проверено лишь до расстояний порядка доли сантиметра. Квантовая теория гравитации еще не построена. В этих условиях большую роль играют точные аналитические решения уравнений Эйнштейна, которые, несмотря на их сложность, все же удается найти для некоторых задач. Таким исключением, в частности, является задача о релятивистской статической космической струне в абелевой модели Хиггса.

Физические свойства топологических дефектов сильно отличаются от привычных нам свойств обычной материи. Например, гравитационная масса глобальной струны отрицательна, и это означает, что ее взаимодействие с материей имеет характер отталкивания. Космическим струнам отводится важная роль в идеях о топологической инфляции [13–15].

В релятивистской теории гравитации существуют струноподобные решения с казнеровской внешней метрикой, которых не было в нерелятивистской теории. Наличие сингулярности в казнеровской метрике вызывает соблазн объявить эти решения нефизическими [1]. С моей точки зрения с этим торопиться не следует. В настоящее время нет ясности, какие именно фазовые переходы вызывали спонтанное нарушение симметрии в период инфляции. Отсутствие ясности в физических механизмах инфляции не позволяет однозначно интерпретировать сингулярности метрики, связанные со струнами.

Теория, в основе которой лежит абелева модель Хиггса, является макроскопической. В отсутствие микроскопической теории физический смысл параметра порядка не конкретизируется. Эту ситуацию можно сопоставить со становлением теории сверхпроводимости; в начале 50-х годов XX века уже существовала макроскопическая теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау [16], но феномен куперовского спарива-

ния [17], лежащий в основе микроскопической теории сверхпроводимости, еще не был понят.

2. Абелева модель Хиггса

Среди различных теорий со спонтанным нарушением симметрии центральное место принадлежит калибровочным теориям. Исторически первым примером калибровочной теории со спонтанным нарушением симметрии является феноменологическая теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау [16]. Релятивистское обобщение этой теории применительно к анализу космических струн в современной литературе часто называют абелевой моделью Хиггса.

Для учета взаимного влияния топологического дефекта и метрики полная плотность лагранжиана системы \mathcal{L}_{tot} записывается в виде суммы

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{grav}}. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{D}}_{\mu} \overline{\phi} \mathcal{D}^{\mu} \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2)$$

— плотность лагранжиана Гинзбурга–Ландау, записанная в общековариантном виде,

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = -\frac{1}{16\pi G} R \sqrt{-g}$$

— плотность лагранжиана гравитационного поля (где R — скалярная кривизна пространства–времени, g — определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$).

Комплексный параметр порядка ϕ в формуле (2) — это скалярное поле, которое также называют хиггсовским, $\mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$ (e — константа связи), $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ — антисимметричный тензор векторного калибровочного поля A_{μ} , а $V(\phi)$ — потенциал, допускающий спонтанное нарушение симметрии. В качестве последнего чаще всего используется так называемый потенциал "фи в четвертой", или "сомбреро" ("Mexican hat potential"):

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\overline{\phi} \phi - \eta^2)^2 \quad (3)$$

(рис. 1). Здесь λ — безразмерная константа, а η имеет размерность энергии, которой задается характерный масштаб энергии спонтанного нарушения симметрии.

Варьируя лагранжиан (1) по $g_{\mu\nu}$, ϕ и A_{μ} , мы получаем соответственно уравнения Эйнштейна для гравитационного поля $g_{\mu\nu}$, уравнение для волновой функции ϕ и

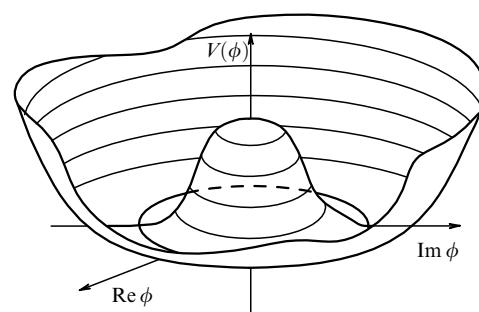


Рис. 1. Потенциал "сомбреро" (3).

уравнения для калибровочного поля A_μ . Эта простая модель инвариантна относительно группы U(1) локальных калибровочных преобразований

$$\phi(x) \rightarrow \exp(i\alpha(x))\phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (4)$$

Минимум потенциала $V(\phi)$ достигается при $|\phi| = \eta$. В минимуме потенциала ожидаемое вакуумное значение поля ϕ отлично от нуля, и симметрия оказывается спонтанно нарушенной.

Выбором надлежащей калибровки $A_\mu(x)$ функцию ϕ можно сделать вещественной. Тогда для малых возмущений вблизи минимума:

$$\phi = \eta + \frac{\phi_1}{\sqrt{2}}, \quad \phi_1 \ll \eta,$$

лагранжиан (2) принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - \frac{1}{2}M_H^2\phi_1^2 - \left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}M_G^2A_\mu A^\mu\right) + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (5)$$

где \mathcal{L}_{int} содержит кубические члены и члены более высокого порядка по ϕ_1 и A_μ .

Введенные в (5) параметры

$$M_H = \sqrt{\lambda}\eta, \quad M_G = \sqrt{2}e\eta, \quad (6)$$

можно отождествить с массами хиггсовских (M_H) и калибровочных (M_G) частиц. Отношение этих масс

$$\beta = \frac{M_G}{M_H} = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{\lambda}} \quad (7)$$

является фундаментальным безразмерным параметром теории. В теории сверхпроводимости [16] параметр (7) с точностью до множителя $\sqrt{2}$ совпадает с параметром Гинзбурга – Ландау: $\kappa = \beta/\sqrt{2}$, а ϕ — волновая функция куперовской пары.

Второй безразмерный параметр теории

$$\gamma = 8\pi G\eta^2 \quad (8)$$

характеризует величину гравитационного поля. В естественной системе единиц, в которой основные фундаментальные константы равны единице:

$$\hbar = c = k_B = 1, \quad (9)$$

гравитационная постоянная $G = m_{\text{Pl}}^{-2}$, где $m_{\text{Pl}} = 1,22 \times 10^{19}$ ГэВ — масса Планка. Таким образом, параметр γ в (8) пропорционален квадрату отношения энергии спонтанного нарушения симметрии к массе Планка.

Свойства статической бесконечно длинной струны можно описывать посредством функций, зависящих только от одной пространственной координаты x^1 — "расстояния" от оси симметрии. Временная переменная x^0 и две другие пространственные координаты x^2 и x^3 в уравнениях не содержатся.

В абелевой модели Хиггса космическая струна описывается вихревым решением вида

$$\phi(x^1, x^2) = \eta f(x^1) \exp(inx^2), \quad A_2(x^1) = \frac{n}{e}\alpha(x^1). \quad (10)$$

Если азимутальная координата x^2 меняется от нуля до 2π , то число квантов потока n должно быть целым. Состояние системы (10) зависит от x^2 , тогда как лагранжиан (2) от x^2 не зависит (разумеется, если метрический тензор $g_{\mu\nu}$ зависит только от x^1):

$$\mathcal{L} = \eta^2 [g^{11}f'^2 + n^2g^{22}(1-\alpha)^2f^2] - \frac{n^2}{2e^2}g^{11}g^{22}\alpha'^2 - V. \quad (11)$$

Тензор энергии-импульса струны

$$T_\mu^\nu = -\delta_\mu^\nu\mathcal{L} + 2g^{\lambda\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\lambda}} \quad (12)$$

диагонален:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= T_3^3 = -\mathcal{L}, \\ T_1^1 &= V - \frac{n^2}{2e^2}g^{11}g^{22}\alpha'^2 + \eta^2[g^{11}f'^2 - n^2g^{22}(1-\alpha)^2f^2], \\ T_2^2 &= V - \frac{n^2}{2e^2}g^{11}g^{22}\alpha'^2 - \eta^2[g^{11}f'^2 - n^2g^{22}(1-\alpha)^2f^2]. \end{aligned} \quad (13)$$

Равенство $T_0^0 = T_3^3$ обеспечивает инвариантность системы относительно лоренцевых сдвигов вдоль струны. По аналогии со статическим макроскопическим телом, для которого $T_0^0 = \varepsilon$, $T_3^3 = -p$ (ε и p — энергия и давление), соотношение

$$p = -\varepsilon \quad (14)$$

иногда трактуют как "уравнение состояния" струны. Разумеется, в строгом смысле слова равенство $T_0^0 = T_3^3$ является микроскопической характеристикой струны и не имеет отношения к макроскопическому уравнению состояния статистической системы.

При наличии статической гравитирующей струны пространство-время остается инвариантным относительно произвольных преобразований временной переменной x^0 , трансляций вдоль струны x^3 , вращения вокруг ее оси x^2 , а также лоренцевых сдвигов вдоль струны. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (15)$$

можно считать диагональным:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(\exp(2F_0), -\exp(2F_1), -\exp(2F_2), -\exp(2F_3)). \quad (16)$$

Гравитационное поле описывается четырьмя функциями F_0 , F_1 , F_2 и F_3 .

Общая ковариантность уравнений общей теории относительности позволяет выбрать координату x^1 произвольным образом. Обычно для решения цилиндрически-симметричных задач используют простую цилиндрическую систему координат $x^1 = r$. Чтобы метрика (15) имела вид

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dr^2 - g_{22}(dx^2)^2 - g_{33}(dx^3)^2,$$

координату x^1 выбирают из условия $F_1 = 0$. Однако для цилиндрически-симметричных систем уравнения Эйн-

штейна принимают более простой вид, если координату x^1 выбрать с помощью условия Бронникова¹ [18]

$$F_1 = F_0 + F_2 + F_3. \quad (17)$$

Чтобы понять, какое значение в этой системе координат x^1 принимает на оси струны и какое на бесконечности, перейдем к галилеевой метрике и отождествим $x^0 \equiv t$, $x^2 \equiv \varphi$, $x^3 \equiv z$. Тогда

$$F_0 = F_3 = 0, \quad \exp(F_2(x^1)) = r, \quad \exp(F_1(x^1)) dx^1 = dr, \quad (18)$$

причем в силу (17) $F_1 = F_2$. Отсюда в галилеевом пределе находим связь координаты Бронникова x^1 с радиусом r :

$$x^1 - x_0 = \ln r, \quad \gamma = 0, \quad (19)$$

где x_0 — константа интегрирования.

Таким образом, в системе координат, заданной условием (17), на оси $x^1 = -\infty$, а при удалении от струны в радиальном направлении $x^1 \rightarrow \infty$. Координату $x_0 \equiv \ln r_0$ удобно принять в качестве условной границы сердцевины струны. Тогда вне струны $x^1 \gg 1$.

В системе координат, выбранной из условия (17),

$$\sqrt{-g} = -g_{11} = \exp(2F_1).$$

Тензор Риччи принимает простой и прозрачный вид:

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -g^{11}F_0'', \\ R_1^1 &= -g^{11}[F_1'' - 2(F_2'F_3' + F_3'F_0' + F_0'F_2')], \\ R_2^2 &= -g^{11}F_2'', \\ R_3^3 &= -g^{11}F_3''. \end{aligned} \quad (20)$$

Тензор энергии-импульса T_μ^ν входит в уравнения Эйнштейна

$$R_\mu^\nu = 8\pi GS_\mu^\nu \quad (21)$$

в комбинации

$$S_\mu^\nu = T_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu T, \quad T = T_\mu^\mu. \quad (22)$$

В силу тождества Бианки из уравнений Эйнштейна (21) следует, что ковариантная производная тензора энергии-импульса (13) равна нулю: $T_{\mu;\nu}^\nu = 0$. Прямое вычисление ковариантной производной дает

$$\begin{aligned} 2g^{11}f' &\left[f'' - n^2 g_{11} g^{22} (1-\alpha)^2 f + \frac{g_{11}}{2\eta^2} \frac{\partial V}{\partial f} \right] + \\ &+ \frac{n^2}{e^2} g^{11} \alpha'^2 [\eta^{-2} (\alpha' \exp(-2F_2))'] - \\ &- 2e^2 g_{11} g^{22} (1-\alpha) f^2 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражения в квадратных скобках в (23) совпадают с левыми частями уравнений для параметра порядка и калибровочного поля:

$$f'' - n^2 g_{11} g^{22} (1-\alpha)^2 f + \frac{g_{11}}{2\eta^2} \frac{\partial V}{\partial f} = 0, \quad (24)$$

$$\eta^{-2} (\alpha' \exp(-2F_2))' - 2e^2 g_{11} g^{22} (1-\alpha) f^2 = 0. \quad (25)$$

Уравнения (24) и (25) являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (11). Наличие линейной связи (23) означает, что в системе уравнений (21), (24) и (25) не все уравнения являются независимыми. Уравнения Эйнштейна, по существу, содержат в себе уравнения движения [20]. Если в общей связке с уравнениями Эйнштейна одно из двух уравнений, например (24), считать независимым, то (25) будет следствием остальных уравнений (для $\alpha' \neq 0$).

Симметрии в теории элементарных частиц и в астрофизике не обязательно связаны с пространственно-временными преобразованиями. Это в равной степени могут быть внутренние симметрии, такие как изотопическая, электрослабая, симметрия Великого объединения или даже суперсимметрия, преобразования которой переводят друг в друга бозоны и фермионы. Преобразования внутренних симметрий не действуют на пространственно-временные характеристики преобразуемых состояний и, следовательно, не зависят от координат и времени. Топологические дефекты, связанные со спонтанным нарушением внутренних симметрий, называют глобальными.

С физической точки зрения калибровочные и глобальные струны — это разные по своей природе объекты, и описывающие их уравнения различны. Абелева модель Хиггса описывает калибровочные струны. Глобальные струны описываются моделью хиггсовского скалярного поля, в которой калибровочного поля вообще нет. Плотность лагранжиана в модели скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (26)$$

В абелевой модели Хиггса (2) имеется калибровочная, а в модели (26) — глобальная симметрия. Соответственно, струны в модели (2) называют калибровочными, а в модели (26) — глобальными.

3. Калибровочные струны

3.1. Уравнения

В отсутствие обычной материи выражения для F_0'' и F_3'' совпадают, и можно положить² $F_0 = F_3$. Сдвигая начало отсчета функций F_1 и F_2 :

$$F_{1,2} \rightarrow F_{1,2} - \ln(e\eta), \quad (27)$$

¹ Система координат, определенная условием (17), была использована при анализе равновесия каналов сильного тока в общей теории относительности [19].

² Из условия регулярности на оси следует $F'_0 = F'_3$. Равенство $F_0 = F_3$ достигается надлежащим выбором единиц измерения координаты x^3 .

полную систему уравнений для статической калибровочной струны можно привести к виду

$$\begin{aligned} (\alpha' \exp(-2F_2))' + 2(1-\alpha)f^2 \exp(4F_0) &= 0, \\ f'' - n^2(1-\alpha)^2 f \exp(4F_0) - \beta^{-2} \exp(2F_1) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial f} &= 0, \\ F_0'' + \gamma \left[\frac{2\tilde{V}}{\beta^2} \exp(2F_1) - \frac{n^2}{2} \alpha'^2 \exp(-2F_2) \right] &= 0, \quad (28) \\ F_2'' + \gamma \left[\frac{2\tilde{V}}{\beta^2} \exp(2F_1) + \frac{n^2}{2} \alpha'^2 \exp(-2F_2) + \right. \\ \left. + 2n^2(1-\alpha)^2 f^2 \exp(4F_0) \right] &= 0, \\ F_1 &= F_2 + 2F_0. \end{aligned}$$

Здесь \tilde{V} — безразмерный потенциал, вызывающий спонтанное нарушение симметрии. В модели "сомбреро" (3) потенциал $\tilde{V} = (1/4)(1-f^2)^2$. Струна и гравитационное поле описываются четырьмя функциями f , α , F_0 и F_2 и тремя безразмерными параметрами n , β и γ (см. (7) и (8)).

Сдвигом (27) фиксируется единица измерения радиуса r . Для нерелятивистского вихря в сверхпроводнике $\delta = (e\eta)^{-1}$ — это глубина проникновения магнитного поля. Ниже при описании калибровочных струн единицей измерения радиуса r в цилиндрической системе координат является $r_0 = (e\eta)^{-1}$.

3.2. Интеграл энергии

Энергия единицы длины струны равна

$$E = 2\pi \int dx^1 \sqrt{-g} T_0^0.$$

С учетом (11) и (16) подынтегральное выражение состоит из четырех положительных членов:

$$\begin{aligned} E = 2\pi\eta^2 \int dx^1 \left[f'^2 + n^2(1-\alpha)^2 f^2 \exp(4F_0) + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{2} \alpha'^2 \exp(-2F_2) + \frac{2\tilde{V}}{\beta^2} \exp(2F_1) \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

Гравитационная масса единицы длины струны дается формулой Толмана³ [20, с. 425]:

$$M = \frac{1}{4\pi G} \iint dx^1 dx^2 \sqrt{-g} R_0^0 = \frac{m_{Pl}^2}{2} F_0'(\infty). \quad (30)$$

3.3. Границные условия

Физическое требование конечности энергии на единицу длины струны (для чего интеграл (29) должен сходиться), а также необходимое условие регулярности на оси

³ Размерность массы на единицу длины — это [масса/длина]. В единицах (9) [масса]=[длина]⁻¹. В результате [масса/длина]=[масса]²; $m_{Pl}^2 = 1,35 \times 10^{28}$ г см⁻¹. Отметим, что при выводе формулы Толмана для полной массы объекта предполагается, что вдали от этого объекта пространство-время асимптотически плоское. Для струн это, конечно, не так. Однако интеграл (30) сходится, и константа $F_0'(\infty)$ является физической характеристикой струны. Ее связь с массой единицы длины можно установить в ньютонахском пределе.

определяют граничные условия:

$$F_0'(-\infty) = 0, \quad F_2'(-\infty) = 1, \quad f(-\infty) = 0, \quad \alpha(-\infty) = 0, \quad (31)$$

$$(\tilde{V} \exp(2F_1))_{x^1 \rightarrow \infty} = 0, \quad f'(\infty) = 0, \quad \alpha(\infty) = 1. \quad (32)$$

Выбором единиц измерения "времени" x^0 можно положить

$$F_0(-\infty) = 0. \quad (33)$$

Координата x^1 не содержится в уравнениях (28) явно; она входит только через производные. В результате все функции зависят от x^1 в комбинации $x \equiv x^1 - x_0$, где x_0 — константа интегрирования. В соответствии с (31) можно положить

$$F_2(x^1) = x, \quad x^1 \rightarrow -\infty. \quad (34)$$

Поскольку F_1 — растущая функция координаты x^1 , оба условия $(\tilde{V} \exp(2F_1))_{x^1 \rightarrow \infty} = 0$ и $f'(\infty) = 0$ выполняются, если $\tilde{V}(\infty) = 0$. Для потенциала "сомбреро" (3) имеем

$$f(\infty) = 1. \quad (35)$$

Границное условие (35) до сих пор использовалось повсеместно. Если гравитация несущественна, в его применимости нет сомнений. Однако при учете гравитации универсальным граничным условием при $x^1 \rightarrow \infty$ является не (35), а более слабое условие:

$$f'(\infty) = 0. \quad (36)$$

Само $f(\infty)$ может быть произвольной константой, не обязательно единицей [21]. Ниже будет показано, что для сверх массивных калибровочных струн, а также для глобальных струн $f(\infty) < 1$. Использование граничного условия (35) вне области его применимости не позволяет правильно определить область физических параметров, в которой существуют статические струнные решения.

3.4. Общие свойства калибровочных струн

3.4.1. Первые интегралы. В тензор Риччи (20) вторые производные F_i'' входят линейно. Составляя линейную комбинацию уравнений Эйнштейна и используя условие Бронникова (17), можно исключить вторые производные и таким образом получить первый интеграл:

$$\begin{aligned} F_0'(F_0' + 2F_2') = -\gamma \left[\frac{2\tilde{V}}{\beta^2} \exp(2F_1) - \frac{n^2}{2} \alpha'^2 \exp(-2F_2) + \right. \\ \left. + n^2(1-\alpha)^2 f^2 \exp(4F_0) - f'^2 \right]. \quad (37) \end{aligned}$$

В правую часть (37) входят те же члены, что и в (29), но с разными знаками. В соответствии с граничными условиями (32) при $x^1 \rightarrow \infty$ правая часть первого интеграла (37) обращается в нуль. Поэтому

$$F_0'(\infty) [F_0'(\infty) + 2F_2'(\infty)] = 0. \quad (38)$$

Уравнения (28) позволяют найти еще один первый интеграл:

$$F_2' - F_0' = 1 - \gamma n^2 [B + (\alpha - 1)\alpha' \exp(-2F_2)]. \quad (39)$$

Здесь

$$B = (\alpha' \exp(-2F_2))_{x^1 \rightarrow -\infty}. \quad (40)$$

Физический смысл константы B очевиден: это напряженность калибровочного поля на оси струны. В нерелятивистском случае сверхпроводящей вихревой нити это магнитное поле на оси. Константа B является неизвестной функцией параметров n , β и γ , которая определяет гравитационное поле вне струны.

3.4.2. Гравитационное поле вне струны. Соотношение (38) показывает, что калибровочные струны могут быть двух типов: либо

$$F'_0(\infty) = 0, \quad F'_0(\infty) + 2F'_2(\infty) \neq 0, \quad (41)$$

либо

$$F'_0(\infty) + 2F'_2(\infty) = 0, \quad F'_0(\infty) \neq 0. \quad (42)$$

В силу граничного условия (32) из соотношения (39) имеем

$$F'_2(\infty) - F'_0(\infty) = 1 - \gamma n^2 B. \quad (43)$$

В случаях (41) и (42) метрика вне струны определяется константой (40).

Оба решения (41) и (42) вырождаются в одно и то же, если функции F'_0 и F'_2 обращаются в нуль при $x^1 \rightarrow \infty$. Совпадение решений имеет место вдоль линии, определяемой условием

$$F'_2(\infty) = 0. \quad (44)$$

Коническая метрика. Из соотношений (41) и (43) находим

$$F'_0(\infty) = 0, \quad F'_1(\infty) = F'_2(\infty) = 1 - \gamma n^2 B, \quad (45)$$

и, таким образом, при $x^1 \rightarrow \infty$

$$F_1(x^1) = F_2(x^1) = (1 - \gamma n^2 B)x^1 + \text{const}. \quad (46)$$

Подстановкой

$$dt = dx^0, \quad dr = \exp(F_1(x^1)) dx^1, \quad d\varphi = dx^2, \quad dz = dx^3 \quad (47)$$

метрика вне струны приводится к виду

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(1 - \gamma n^2 B)^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (48)$$

Метрика (48) отличается от галилеевой только постоянным множителем $(1 - \gamma n^2 B)^2 < 1$ при $r^2 d\varphi^2$. Угол φ меняется от нуля до 2π . В пространстве с метрикой (48) длина окружности, имеющей радиус r и центр на оси струны, равна $2\pi r(1 - \gamma n^2 B) < 2\pi r$. В плоскости (r, φ) струна вырезает клин, как на рис. 2а, и создает "дефицит угла"

$$\Delta = 2\pi \gamma n^2 B. \quad (49)$$

Если оставшуюся часть круга склеить по линиям разреза, то получится конус, как на рис. 2б. Поэтому

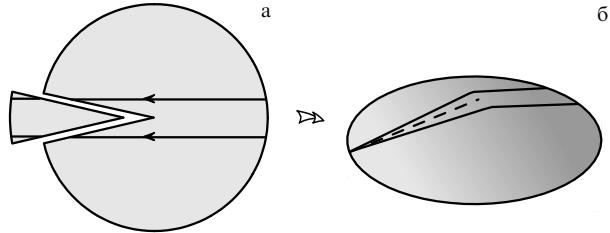


Рис. 2. Коническая струна вырезает клин в плоскости (r, φ) .

метрику (48) называют конической⁴. Константа B зависит от параметров n , β и γ . Чтобы найти эту зависимость, нужно решить уравнения (28).

Гравитационная масса (30) конической струны равна нулю. Это своеобразный пример макроскопического тела с нулевой массой [23]. На расстояниях, больших по сравнению с радиусом сердцевины струны, такая струна не оказывает влияния на материю.

В (47) и (48) молчаливо предполагалось, что $1 - \gamma n^2 B > 0$. Однако с ростом γ угол вырезаемого клина (49) растет, так что при анализе сверх массивных струн следует иметь в виду и случай $1 - \gamma n^2 B \leq 0$. В случае $1 - \gamma n^2 B < 0$ все пространство вне струны оказывается вырезанным, в результате чего радиус r меняется не до бесконечности, а только до некоторого предельного значения⁵ r_{\max} :

$$r = r_{\max} - (\gamma n^2 B - 1)^{-1} \exp[-(\gamma n^2 B - 1)x^1 - \text{const}],$$

$$1 - \gamma n^2 B < 0.$$

Наружная метрика при $1 - \gamma n^2 B < 0$ принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (r_{\max} - r)^2(1 - \gamma n^2 B)^2 d\varphi^2 - dz^2, \\ 1 - \gamma n^2 B < 0. \quad (50)$$

Казнеровская метрика. Для решений (42) получаем

$$F'_0(\infty) = -\frac{2}{3}(1 - \gamma n^2 B), \\ F'_1(\infty) = -(1 - \gamma n^2 B), \\ F'_2(\infty) = \frac{1}{3}(1 - \gamma n^2 B). \quad (51)$$

После подстановки (47) приходим к внешней метрике казнеровского типа [24]:

$$ds^2 = \begin{cases} [(1 - \gamma n^2 B)(r_{\max} - r)]^{4/3}(dt^2 - dz^2) - dr^2 - \\ - [(1 - \gamma n^2 B)(r_{\max} - r)]^{-2/3} d\varphi^2, & F'_2(\infty) > 0, \\ [(1 - \gamma n^2 B)r]^{4/3}(dt^2 - dz^2) - dr^2 - \\ - [(1 - \gamma n^2 B)r]^{-2/3} d\varphi^2, & F'_2(\infty) < 0. \end{cases} \quad (52)$$

⁴ Конические метрики изучались [22] задолго до того, как выяснилась их причастность к космическим струнам.

⁵ Появление предельного радиуса является намеком на то, что обычная цилиндрическая система координат не является самой подходящей для данной задачи. Координата x^1 , определенная условием (17), меняется от $-\infty$ до ∞ .

Тот факт, что внешняя метрика может быть либо конической, либо казнеровской, был установлен Виленкиным [25]. Решение с внешней казнеровской метрикой было найдено Лагуной и Гарфинкелем [26].

3.5. Свойства решений вблизи линии вырождения

При фиксированном значении азимутального числа n в плоскости параметров (β, γ) линия вырождения (44), вдоль которой решения (41) и (42) совпадают, определяется уравнением

$$1 - \gamma n^2 B(n, \beta, \gamma) = 0. \quad (53)$$

В области $1 - \gamma n^2 B > 0$ решения с казнеровской внешней метрикой, в отличие от решений с конической метрикой, ограничены предельным радиусом r_{\max} . В области же $1 - \gamma n^2 B < 0$, наоборот, казнеровская метрика не ограничена по радиусу, а коническая ограничена. И это не случайно.

Ситуация похожа на пересечение термов [27, § 79]. Любое сколь угодно малое возмущение, нарушающее симметрию системы, снимает вырождение. Пересечение исчезает, и две ветви становятся изолированными. При этом одна из ветвей имеет предельный радиус, а другая нет.

Продемонстрируем это на примере струны при наличии сколь угодно малого количества обычной материи с $p \ll \varepsilon$, где p и ε — давление и энергия материи. Будем считать, что распределение материи в пространстве имеет ту же цилиндрическую симметрию, что и струна. Однако теперь $T_0^0 \neq T_3^3$, и система в целом перестает быть инвариантной относительно лоренцева сдвига в направлении струны. В результате уравнения Эйнштейна с F_0'' и F_3'' больше не совпадают:

$$\begin{aligned} F_0'' &= -\gamma \left[\frac{2\tilde{V}}{\beta^2} \exp(2F_1) - \frac{n^2}{2} \alpha'^2 \exp(-2F_2) \right] + \\ &\quad + 4\pi G\varepsilon \exp(2F_1), \\ F_3'' &= -\gamma \left[\frac{2\tilde{V}}{\beta^2} \exp(2F_1) - \frac{n^2}{2} \alpha'^2 \exp(-2F_2) \right] - \\ &\quad - 4\pi G\varepsilon \exp(2F_1), \end{aligned}$$

так что

$$F_0'(\infty) - F_3'(\infty) = 4G\mathcal{M}, \quad (54)$$

где

$$\mathcal{M} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \varepsilon \exp(2F_1)$$

— масса материи на единицу длины.

При наличии материи комбинация $F_2'F_3' + F_3'F_2' + F_0'F_2'$ не сводится к произведению двух множителей, и вместо (38) получается квадратное уравнение относительно $\chi = F_0'(\infty)$:

$$\chi^2 + 2\chi [F_2'(\infty) - 2G\mathcal{M}] - 4G\mathcal{M}F_2'(\infty) = 0.$$

Если $\mathcal{M} \rightarrow 0$, то решение

$$F_0'(\infty) = 2G\mathcal{M} - F_2'(\infty) + [F_2'^2(\infty) + (2G\mathcal{M})^2]^{1/2}$$

стремится к нулю при $F_2'(\infty) > 0$, т.е. переходит в (41). Если же $F_2'(\infty)$ отрицательно, то

$$F_0'(\infty) \rightarrow -2F_2'(\infty)$$

в соответствии с (42).

Классификация струнных решений при наличии материи иная, чем без нее. Изменение систематики струнных решений иллюстрируется рис. 3, из которого следует, что в этом случае решения уже нельзя разделять на коническую и казнеровскую. Классификация решений при наличии материи должна производиться не по знаку $F_2'(\infty)$, а по наличию или отсутствию предельного радиуса. Коническое решение с $F_2'(\infty) > 0$ и казнеровское с $F_2'(\infty) < 0$ образуют одну ветвь, а коническое решение с $F_2'(\infty) < 0$ и казнеровское с $F_2'(\infty) > 0$ — другую. При наличии материи эти две ветви расщепляются (верхняя и нижняя кривые), и между ними появляется щель порядка M/m_{Pl}^2 . При такой систематике для одной ветви (нижней) существует предельное значение радиуса r_{\max} , а для другой (верхней) нет.

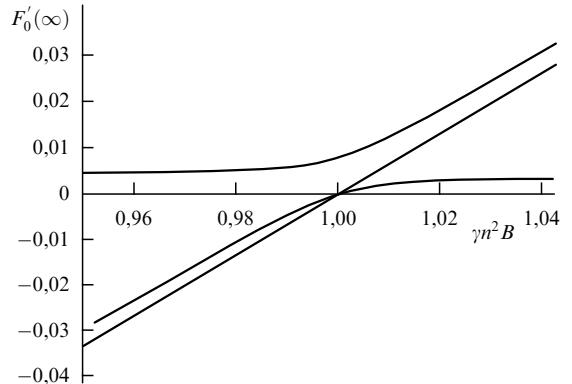


Рис. 3. Пересечение решений с конической и казнеровской внешней метрикой на примере зависимости $F_0'(\infty)$ от $\gamma n^2 B$. В отсутствие материи коническая метрика — ось абсцисс $F_0'(\infty) = 0$, казнеровская — это $F_0'(\infty) = -(2/3)(1 - \gamma n^2 B)$. При наличии материи две ветви расщепляются, и между ними появляется щель порядка M/m_{Pl}^2 .

Как мы видим, наличие сколь угодно малого количества обычной материи не позволяет разделить струнно-подобные решения на чисто конические и чисто казнеровские. По этой причине не следовало бы торопиться объявлять решения с казнеровской особенностью нефизическими.

3.6. Плоскость параметров (β, γ)

При численном интегрировании уравнений (28) важно правильно выбрать граничное условие при $x^1 \rightarrow \infty$. Для нерелятивистских вихревых структур традиционно используется граничное условие (35). Попытки [28] найти верхнюю границу области существования статических релятивистских струн с использованием граничного условия $f(\infty) = 1$ оказались несостоятельны. Для правильного определения верхней границы следует выбрать более слабое граничное условие (36).

Для сверх массивных конических струн $F_1(x^1) = (1 - \gamma n^2 B)x^1 + \text{const}$ при $x^1 \rightarrow \infty$ (см. (46)), причем $1 - \gamma n^2 B < 0$. Сходимость интеграла от члена $(2\tilde{V}/\beta^2) \exp(2F_1)$ в энергии (29) вблизи верхней границы

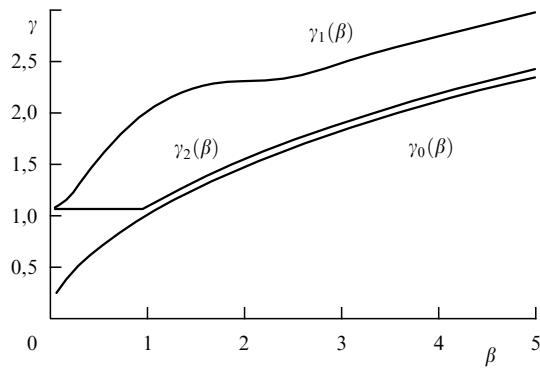


Рис. 4. "Географическая карта" струнных решений на плоскости (β, γ) .

обеспечивается экспоненциально убывающим множителем $\exp(2F_1)$. Предельное значение параметра порядка f должно быть константой (иначе расходимость в (29) возникла бы от члена f'^2), но не обязательно единицей. Интегрирование уравнений (28) с граничным условием (36) позволяет найти границы существования статических решений [21]. "Географическая карта" струнных решений на плоскости параметров (β, γ) при $n = 1$ представлена на рис. 4.

В пределах точности вычислений [21] для линии вырождения (53) при $\beta \sim 1$ численное интегрирование дает зависимость

$$\gamma = \beta^{0,535}, \quad (55)$$

которой на рис. 4 соответствует линия $\gamma_0(\beta)$. Свойства решений выше и ниже линии вырождения (55) кардинально различны.

Во всей области ниже линии (55) существуют как конические, так и казнеровские решения. И для конических, и для казнеровских решений ниже линии (55) предельное значение параметра порядка $f(\infty) = 1$, а радиус r в обычной цилиндрической системе координат меняется на интервале $(0, \infty)$. Но если для конических решений $F'_1(\infty) > 0$, то для казнеровских, наоборот, $F'_1(\infty) < 0$.

Выше линии вырождения (55) также существуют области статических струноподобных решений. Здесь для решений обоих типов радиус r в обычной цилиндрической системе координат меняется не до бесконечности, а до некоторого конечного предельного значения r_{\max} . Для конических решений выше кривой (55) $F'_1(\infty) < 0$, а для казнеровских, наоборот, $F'_1(\infty) > 0$. Выше (но вблизи) кривой вырождения предельное значение параметра порядка $f(\infty)$ убывает с ростом γ для решений обоих типов.

В зависимости от величины β имеют место две возможности. Для конических струн при малых $\beta \leq 1$ предельное значение параметра порядка $f_\infty = f(\infty)$ монотонно убывает с ростом γ и при некотором $\gamma = \gamma_{\text{cr}}(n, \beta)$ обращается в нуль, при этом производная $|df_\infty/d\gamma| \rightarrow \infty$. В области не малых $\beta > \beta_{\text{bif}} \geq 1$ обращение производной $|df_\infty/d\gamma|$ в бесконечность при $\gamma = \gamma_{\text{cr}}(n, \beta)$ происходит при конечном значении f_∞ . Обращение f_∞ в нуль или $|df_\infty/d\gamma|$ в бесконечность (что раньше определяет верхнюю границу

$$\gamma = \gamma_{\text{cr}}(n, \beta) \quad (56)$$

области существования статических сверхмассивных калибровочных струн. Для конических струн — это кривая $\gamma_1(\beta)$ на рис. 4, а для казнеровских — кривая $\gamma_2(\beta)$. При $\beta \rightarrow 0$ верхние границы $\gamma_1(\beta)$ и $\gamma_2(\beta)$ сливаются в одной точке: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 1,067\dots$

При $n = 1$ для конических струн зависимости предельных значений параметра порядка $f_\infty(\gamma)$ для $\beta = 1$ и $\beta = 2$ представлены на рис. 5. В случае $\beta = 1$ обращение f_∞ в нуль и $|df_\infty/d\gamma|$ в бесконечность происходит при одном и том же $\gamma = \gamma_{\text{cr}}(n, 1)$. Этот результат является аналитически точным; см. ниже. В случае же $\beta = 2$ обращение $|df_\infty/d\gamma|$ в бесконечность происходит при конечном значении f_∞ . Следовательно, в области $\beta \geq 1$ должна существовать точка бифуркации β_{bif} , выше которой с ростом γ для конических струн производная $|df_\infty/d\gamma|$ обращается в бесконечность раньше, чем параметр порядка f_∞ обратится в нуль. На сегодняшний день точка бифуркации β_{bif} еще не найдена.

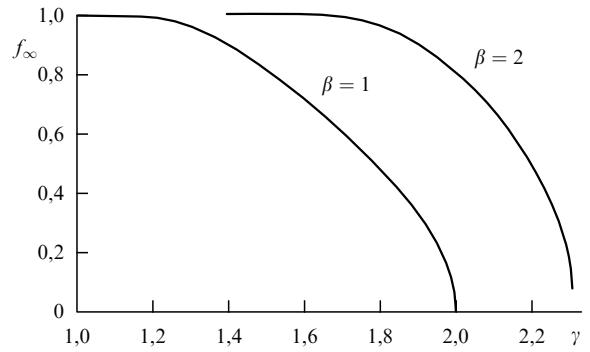


Рис. 5. Зависимости предельных значений параметра порядка $f_\infty(\gamma)$ при $\beta = 1$ и $\beta = 2$ для конических струн.

3.7. Вырожденный случай Богомольного

Общее свойство конических решений для калибровочных струн (45) означает, что калибровочное и хиггсовское поля компенсируют друг друга интегрально при любом значении параметра β в интервале $(0, \infty)$. В задаче о калибровочной струне с потенциалом (3) и конической внешней метрикой существует внутренняя симметрия, связанная с возможностью взаимной замены хиггсовских и калибровочных частиц. Следствием такой скрытой симметрии является существование выделенного значения β , а именно

$$\beta = 1 \quad (57)$$

(когда массы (6) хиггсовской и калибровочной частиц совпадают), при котором взаимная компенсация полей имеет место в любой точке x^1 , а не только интегрально. В этом вырожденном случае система уравнений (28) существенно упрощается. Для обычных нерелятивистских вихрей [6, 29] Богомольный [30] показал, что в частном случае (57) уравнения для параметра порядка и калибровочного поля в действительности являются уравнениями первого, а не второго порядка, как в общем случае (24) и (25).

Для потенциала "сомбреро" (3) в вырожденном случае Богомольного (57) интеграл энергии (29) можно

привести к виду

$$E_B = 2\pi\eta^2 \int dx^1 \left\{ [f' - n(1-\alpha)f \exp(2F_0)]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [n\alpha' \exp(-F_2) - (1-f^2) \exp(F_1)]^2 - \right. \\ \left. - n[(1-f^2)(1-\alpha)]' \exp(2F_0) \right\}. \quad (58)$$

Оказывается, решения уравнений

$$f' - n(1-\alpha)f \exp(2F_0) = 0, \quad (59)$$

$$\alpha' \exp(-2F_2) - \frac{1}{n}(1-f^2) \exp(2F_0) = 0,$$

минимизирующих функционал энергии (58), удовлетворяют системе (28). С учетом уравнений (59) и граничных условий (31) и (32) энергия (58) минимальна и равна

$$E = 2\pi\eta^2. \quad (60)$$

В силу уравнений (59) третье уравнение системы (28) сводится к $F_0'' = 0$, и с учетом (33) получается, что при $\beta = 1$

$$F_0'(x^1) = 0$$

для любого x^1 в интервале $(-\infty, \infty)$. Из второго уравнения (59) видно, что при $\beta = 1$ константа B в (40) не зависит от параметра γ и равна

$$B_B = \frac{1}{n}. \quad (61)$$

3.7.1. Точка двойного вырождения. В плоскости параметров (β, γ) на рис. 4 случаю Богомольного соответствует вертикальная линия $\beta = 1$. Она пересекает линию вырождения (53) в точке с координатами

$$\beta = 1, \quad \gamma = \frac{1}{n}. \quad (62)$$

Это — точка двойного вырождения: как по симметрии хиггсовских и калибровочных частиц, так и в смысле совпадения решений с конической и казнеровской внешней метрикой.

Выражение для первого интеграла (39) при $\beta = 1$ можно преобразовать в полный дифференциал:

$$F_2' = 1 - \gamma n + \gamma \left(\ln f - \frac{1}{2} f^2 \right)' . \quad (63)$$

Теперь функция $F_2(x^1)$ выражается через параметр порядка $f(x^1)$:

$$F_2 = (1 - \gamma n)(x^1 - x_0) + \gamma \left(\ln f - \frac{1}{2} f^2 \right) + C, \quad \beta = 1, \quad (64)$$

где C — константа интегрирования. С ней связана амплитуда параметра порядка f при $x^1 \rightarrow -\infty$:

$$f(x^1) = \exp \left[n(x^1 - x_0) - \frac{C}{\gamma} \right], \quad x^1 \rightarrow -\infty. \quad (65)$$

Зависимость $C(\gamma, n)$ можно найти, решив уравнение для f :

$$(\ln f)'' + (1 - f^2) f^{2\gamma} \exp[2(1 - \gamma n)(x^1 - x_0) - \gamma f^2 + 2C] = 0. \quad (66)$$

В цилиндрических координатах соответствующее уравнение было выведено Линетом [31].

В точке двойного вырождения (62) явная зависимость от x^1 из уравнения (66) выпадает, и решение можно записать в квадратурах. Для $n = 1$ имеем

$$2(x^1 - x_1) \exp \left(C - \frac{1}{2} \right) = \int^f \frac{dz}{z[1 - z \exp(1 - z)]^{1/2}}, \\ \beta = 1, \quad \gamma = 1. \quad (67)$$

Здесь x_1 — еще одна константа интегрирования. Решение (67) должно совпадать с (65) при $x^1 \rightarrow -\infty$. Этим требованием определяется константа C в точке двойного вырождения:

$$C = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1.$$

3.7.2. Анализ вблизи верхней границы. Выше точки двойного вырождения $\gamma n > 1$ предельное значение параметра порядка f_∞ убывает с ростом γ . В случае (57) параметр порядка f обращается в нуль при $\gamma n = 2$, т.е.

$$\gamma_{\text{cr}}(n, 1) = \frac{2}{n}. \quad (68)$$

Вблизи верхней границы (68) уравнение (66) решается аналитически [21].

Введем новую функцию

$$W = \ln f, \quad (69)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$W'' + [1 - \exp(2W)] \times \\ \times \exp[2\gamma W + 2(1 - \gamma n)(x^1 - x_0) - \gamma \exp(2W) + 2C] = 0 \quad (70)$$

и граничным условиям

$$W'(-\infty) = n, \quad W'(\infty) = 0. \quad (71)$$

Вблизи верхней границы (68) $\exp W \ll 1$, и уравнение (70) можно решать последовательными приближениями по $\exp W \ll 1$ ($W = W_0 + W_1$):

$$W_0'' = \exp[2\gamma W_0 + 2(1 - \gamma n)(x^1 - x_0) + 2C], \quad (72)$$

$$W_1'' + 2\gamma W_0'' W_1 = (1 + \gamma) W_0'' \exp(2W_0). \quad (73)$$

Решение уравнения (72), переходящее в (65) при $x^1 \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$\exp W_0 = f_m \exp \left[\left(n - \frac{2}{\gamma} \right) (x^1 - x_0) \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{4}{\gamma} \exp(-2(x^1 - x_0)) \right]^{-1/\gamma}, \quad (74)$$

где

$$f_m = \left(\frac{4}{\gamma}\right)^{1/\gamma} \exp\left(-\frac{C}{\gamma}\right). \quad (75)$$

Соотношение (75) проясняет физическую роль константы C : она связана с предельным значением параметра порядка. Решение (74) уравнения (72) со сколь угодно малым $f_m \ll 1$ существует при любом γ . Однако энергия (29) этих решений конечна, только если $\gamma n < 2$. При $\gamma n > 2$ параметр порядка (74) экспоненциально растет при $x^1 \rightarrow \infty$, и интеграл энергии (29) расходится.

Нулевое приближение (74) не удовлетворяет граничному условию (71) при $x^1 \rightarrow \infty$. Однако вблизи верхней границы (68) при $(2/\gamma) - n \ll 1$ эту "неправильную" зависимость решения нулевого приближения (74) при $x^1 \rightarrow \infty$ можно выпрямить за счет членов первого порядка. Для этого нужно решить уравнение (73) с граничными условиями

$$W_1(-\infty) = 0, \quad W'_1(\infty) = \frac{2}{\gamma} - n. \quad (76)$$

Уравнение (73) — это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Соответствующее однородное уравнение принадлежит к классу уравнений Лежандра:

$$\hat{L}Z + v(v+1)Z = 0, \quad \hat{L} = \frac{d}{d\zeta}(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}. \quad (77)$$

В данном случае собственные значения равны $v_1 = 1$, $v_2 = -2$, а два линейно независимых решения однородного уравнения — это функции Лежандра

$$P_1(\zeta) = \zeta, \quad Q_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - 1. \quad (78)$$

Независимая переменная ζ связана с координатой x^1 соотношением

$$\zeta = \tanh(x^1 - x^*), \quad x^* = x_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{\gamma}.$$

Общее решение уравнения (73) имеет вид

$$W_1 = A_1 \zeta + A_2 Q_1(\zeta) + \frac{f_m^2 \zeta}{2^{n+1}(n+1)} \int_{-1}^{\zeta} dz \frac{(1+z)^n [nz - (1-z)]}{z^2(1-z)}. \quad (79)$$

Из граничного условия (76) при $x^1 \rightarrow -\infty$ следует $A_1 = A_2 = 0$. Поведение решения W_1 при $x^1 \rightarrow \infty$ определяется третьим членом в (79):

$$\begin{aligned} \frac{f_m^2 \zeta}{2^{n+1}(n+1)} \int_{-1}^{\zeta} dz \frac{(1+z)^n [nz - (1-z)]}{z^2(1-z)} &= \\ &= -\frac{n f_m^2}{n+1} (x^1 - x^*) + \dots \end{aligned} \quad (80)$$

Сопоставляя (76) и (80), находим

$$f_m^2 = (n+1) \left(1 - \frac{\gamma n}{2}\right), \quad 2 - \gamma n \ll 1. \quad (81)$$

Поскольку f_m^2 должно быть величиной неотрицательной, мы приходим к выводу, что область существования статических вихревых решений в случае Богомольного (57) ограничена неравенством $\gamma n < 2$. Вблизи этой границы для параметра порядка получаем

$$\begin{aligned} f(x^1) &= \left[(n+1) \left(1 - \frac{\gamma n}{2}\right) [1 + 2n \exp(-2(x^1 - x_0))]^{-n} \right]^{1/2}, \\ \beta &= 1, \quad 2 - \gamma n \ll 1. \end{aligned} \quad (82)$$

Для калибровочного поля находим

$$\alpha = [1 + 2n \exp(-2(x^1 - x_0))]^{-1}, \quad \beta = 1, \quad 2 - \gamma n \ll 1. \quad (83)$$

Константа C логарифмически растет при приближении к границе:

$$C = \ln(2n) - \frac{1}{n} \ln \left[(n+1) \left(1 - \frac{\gamma n}{2}\right) \right], \quad \beta = 1, \quad 2 - \gamma n \ll 1. \quad (84)$$

Гравитационное поле при $2 - \gamma n \ll 1$ равно

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n}{2} \left[\cosh \left(x^1 - x_0 - \frac{1}{2} \ln(2n) \right) \right]^{-2} \right).$$

Подстановкой (47) мы находим метрику в цилиндрических координатах

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \frac{1}{4} \sin^2(2r) d\varphi^2 - dz^2, \quad 2 - \gamma n \ll 1. \quad (85)$$

В метрике (85) радиус r меняется от нуля до максимального значения $r_{\max} = \pi/2$. Вблизи оси струны ($r \rightarrow 0$) метрика (85) является галилеевой, а при $r \rightarrow r_{\max}$ она переходит в (50) с $B = 1/n$ в (61) и $\gamma n = 2$.

Для калибровочных струн в случае Богомольного ($\beta = 1$) в соответствии с (68) зависимость $\eta_{\max}(n)$ имеет вид

$$\frac{\eta_{\max}(n)}{m_{\text{Pl}}} = (4\pi n)^{-1/2} = 0,282 n^{-1/2}.$$

В статье [15] численно получен другой результат:

$$\frac{\eta_{\max}(n)}{m_{\text{Pl}}} = an^p, \quad p = -0,56, \quad a = 0,16.$$

Основная причина, почему авторы [15] получили заниженное значение $\eta_{\max}(n)$, — это использование граничного условия $f = 1$ при $r \rightarrow \infty$. Оно справедливо только в области $\gamma n \leq 1$, пока дефицит угла меньше 2π . Граничное условие, применимое во всем диапазоне $0 < \gamma < \gamma_{\text{cr}}$, — это $f'(\infty) = 0$. Любопытно, что оценка $p = -0,5$, которую авторы [15] называют "наивной", в действительности в случае Богомольного ($\beta = 1$) оказывается точной.

3.8. Решения с казнеровской асимптотикой при $\gamma \ll 1$

В области малых γ , а именно

$$\gamma \ll 1, \quad (86)$$

гравитационное поле калибровочных струн с внешней асимптотикой казнеровского типа можно найти аналитически. Основным упрощающим фактором в случае (86) является то, что области основного изменения параметра

метра порядка и калибровочного поля разделены в пространстве. При условии (86) характерный масштаб спонтанного нарушения симметрии очень мал, и потому влияние параметра порядка на метрику несущественно. Калибровочное же поле, наоборот, в метрике казнеровского типа является определяющим. Константа B в (40) при малых γ велика: $B \sim 1/\gamma \gg 1$; см. (91). По этой причине членами порядка $\gamma n^2 B$ и $\gamma n^2 B^2$ в уравнениях (28) пренебречь нельзя даже при малых γ .

При условии (86) калибровочное поле α растет от нуля до единицы в той области, где параметр порядка f все еще очень мал. И покуда $f \ll 1$, изменение α и F_2 описывается уравнениями

$$\alpha' \exp(-2F_2) = B = \text{const}, \quad (87)$$

$$F_2'' = -\frac{1}{2} \gamma n^2 B^2 \exp(2F_2). \quad (88)$$

Их решение, удовлетворяющее граничным условиям (31), имеет вид

$$F_2 = -\ln[\cosh(x^1 - x_0)] - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} \gamma n^2 B^2\right), \quad (89)$$

$$\alpha = \frac{2}{\gamma n^2 B} [1 + \tanh(x^1 - x_0)]. \quad (90)$$

С помощью граничного условия (32) находим теперь константу B :

$$B = \frac{4}{\gamma n^2}, \quad \gamma \ll 1. \quad (91)$$

Остальные функции, определяющие гравитационное поле, суть

$$F_0 = \ln[1 + \exp(2(x^1 - x_0))], \quad (92)$$

$$F_1 = \ln[\exp(x^1 - x_0) + \exp(3(x^1 - x_0))] - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\gamma n^2}.$$

Область основного изменения калибровочного и гравитационного полей — это $|x^1 - x_0| \sim 1$. При $x^1 - x_0 \gg 1$ имеем

$$F_1 = 3(x^1 - x_0) - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\gamma n^2}, \quad x^1 - x_0 \gg 1. \quad (93)$$

Параметр порядка f меняется в основном в той области, где $\exp(2F_1)$ становится порядка единицы, т.е.

$$\left| x^1 - x_0 - \frac{1}{6} \ln \frac{2}{\gamma n^2} \right| \sim 1.$$

Поскольку $(1/6) \ln(2/\gamma n^2) \gg 1$, области изменения функций α и f разделены в пространстве.

В области (86) для решений с казнеровской асимптотикой (42) метрику можно представить в виде

$$ds^2 = [1 + \exp(2x)]^2 [(dx^0)^2 - (dx^3)^2] - \frac{\gamma n^2}{2} [\exp x + \exp(3x)]^2 (dx^1)^2 - \frac{\gamma n^2}{8 \cosh^2 x} (dx^2)^2. \quad (94)$$

Цилиндрическая координата r связана с $x = x^1 - x_0$ соотношением

$$r = \left(\frac{\gamma n^2}{2}\right)^{1/2} \left[\exp x + \frac{1}{3} \exp(3x) \right]. \quad (95)$$

Вблизи оси ($x^1 \rightarrow -\infty$) метрика (94) сводится к галилеевой:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dr^2 - r^2(dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Вне струны (при $x^1 \rightarrow \infty$) соотношение (94) переходит в метрику казнеровского типа (52) с $B = 4/\gamma n^2$ в (91).

4. Глобальные струны

4.1. Голдстоуновский бозон

В простейшей модели скалярного поля глобальная струна описывается плотностью лагранжиана (26). В отсутствие калибровочного поля волновая функция вблизи минимума потенциала (3) является комплексной:

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2),$$

и для плотности лагранжиана (26) вблизи минимума потенциала (3) вместо (5) имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} M_H^2 \phi_1^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (96)$$

Теперь \mathcal{L}_{int} содержит кубические члены и члены более высокого порядка по ϕ_1 и ϕ_2 . Поле ϕ_1 в (96) по-прежнему представляет хиггсовскую частицу с массой $M_H = \sqrt{\lambda} \eta$; см. (6). В случае глобальной симметрии поле ϕ_2 является безмассовым, и соответствующую скалярную частицу называют голдстоуновским бозоном.

Принципиальное отличие глобальных струн от калибровочных связано с голдстоунской степенью свободы. Соответствующий голдстоуновскому бозону член в тензоре энергии-импульса глобальной струны очень медленно убывает с расстоянием от оси [1]. Если не учитывать искривление пространства-времени, то энергия единицы длины неограниченной глобальной струны расходится. Это общее свойство спонтанно нарушенной глобальной симметрии. Однако в общей теории относительности чем больше энергия, тем сильнее искривляется пространство-время, и в результате интегрирование по поперечному сечению струны дает конечный результат.

Гравитационное взаимодействие приводит к самолокализации струны. Чем слабее гравитационное поле струны, тем больше радиус самолокализации r_L ; см. (111). В пределе галилеевой метрики радиус самолокализации обращается в бесконечность. Если глобальная струна имеет конечную длину L , то в зависимости от соотношения между радиусом гравитационной самолокализации r_L и длиной струны L возможны два предельных случая.

В пределе $L \ll r_L$ самолокализация несущественна, и гравитационные свойства глобальной струны можно анализировать с помощью линеаризованных уравнений Эйнштейна [32]. В обратном пределе

$$L \gg r_L \quad (97)$$

струна локализуется на расстояниях от оси, много меньших, чем ее длина. В случае (97) струну можно считать одномерной, а все ее характеристики — зависящими только от одной координаты: расстояния от оси. В промежуточном случае $L \sim r_L$ струна не является одномерной, а ее гравитационные свойства нельзя описать с помощью линеаризованных уравнений Эйнштейна.

С точки зрения гравитационных свойств статической глобальной космической струны наиболее интересен случай (97), который мы здесь и рассмотрим. При $\gamma > 0$ параметр порядка глобальной струны f является монотонно убывающей функцией γ . Если $\gamma \rightarrow 0$, то параметр порядка $f \rightarrow 1$, оставаясь меньше единицы.

Обращение параметра порядка глобальной струны в нуль происходит при

$$\gamma = \gamma_{\text{cr}}(n, 0), \quad (98)$$

где $\gamma_{\text{cr}}(n, \beta)$ — функция (56), которая определяет предельное значение γ для калибровочной струны [36]. Попытки [33–35] определить верхнюю границу по γ с использованием граничного условия $f = 1$ не могли привести к успеху, ибо на этой границе параметр порядка f обращается в нуль. Поведение гравитационного поля и параметра порядка удается исследовать аналитически в предельном случае $\gamma \ll 1$, а также вблизи верхней границы (98).

4.2. Уравнения для глобальной струны

Для глобальных струн $\alpha = 0$, и полная система уравнений может быть представлена в виде

$$f'' - n^2 f \exp(4F_0) + \frac{1}{2} f(1-f^2) \exp(2F_1) = 0, \quad (99)$$

$$F_0'' + \frac{\gamma}{4}(1-f^2)^2 \exp(2F_1) = 0, \quad (100)$$

$$F_1'' + \gamma \left[\frac{3}{4}(1-f^2)^2 \exp(2F_1) + 2n^2 f^2 \exp(4F_0) \right] = 0. \quad (101)$$

Здесь сохранены те же обозначения, что и выше для калибровочных струн. Однако вместо сдвига (27) мы используем

$$F_1 \rightarrow F_1 - \ln(\sqrt{\lambda}\eta). \quad (102)$$

В галилеевом пределе ($\gamma \rightarrow 0$) координата x^1 связана с радиусом r тем же соотношением $x^1 - x_0 = \ln r$, но только теперь в силу сдвига (102) радиус r измеряется в единицах характерного радиуса сердцевины глобальной струны

$$r_0 = (\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}. \quad (103)$$

Энергия единицы длины глобальной струны равна

$$E = 2\pi r_0^2 \int dx^1 \left[f'^2 + n^2 f^2 \exp(4F_0) + \frac{1}{4}(1-f^2)^2 \exp(2F_1) \right]. \quad (104)$$

Гравитационная масса определяется той же формулой (30), что и для калибровочной струны.

Из уравнения (100) и граничного условия (31) следует, что при $\gamma > 0$ для глобальной струны $F'_0(\infty) < 0$:

$$F'_0(\infty) = -\frac{\gamma}{4} I_1 < 0, \quad I_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 (1-f^2)^2 \exp(2F_1). \quad (105)$$

Масса (30) глобальной струны отрицательна, и ее взаимодействие с обычной материйей носит характер отталкивания.

Без калибровочного поля хиггсовское поле компенсировать нечем. Поэтому аналога конических решений для глобальной струны нет, и остается только одна возможность — решение казнеровского типа.

4.3. Самолокализация

Член $f^2 \exp(4F_0)$ экспоненциально убывает при $x^1 \rightarrow \infty$, и благодаря гравитации интеграл энергии (29) сходится. Без гравитации ($\gamma = 0$) этот интеграл расходится. Сколько угодно слабое гравитационное взаимодействие ликвидирует голдстоуновскую расходимость и обеспечивает самолокализацию глобальной струны.

С учетом $\alpha = 0$ и (17) первый интеграл (37) имеет вид $F'_0(2F'_1 - 3F'_0) =$

$$= -\gamma \left[\frac{1}{4}(1-f^2)^2 \exp(2F_1) + n^2 f^2 \exp(4F_0) - f'^2 \right]. \quad (106)$$

Поскольку для глобальной струны $F'_0(\infty) < 0$, при $x^1 \rightarrow \infty$ из (106) следует

$$F'_1(\infty) = \frac{3}{2} F'_0(\infty). \quad (107)$$

Значит, $F'_1(\infty)$ тоже отрицательно, и член $\exp(2F_1)$ экспоненциально стремится к нулю при $x^1 \rightarrow \infty$.

Из уравнения (101) и граничного условия (31) находим

$$F'_1(\infty) = 1 - \gamma \left(\frac{3}{4} I_1 + 2n^2 I_2 \right), \quad I_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 f^2 \exp(4F_1). \quad (108)$$

Сравнивая (105), (107) и (108), получаем следующее соотношение между интегралами I_1 и I_2 :

$$\frac{3}{8} I_1 + 2n^2 I_2 = \frac{1}{\gamma}. \quad (109)$$

При $\gamma \sim 1$ основной вклад в интеграл энергии (104) дает область $|x^1 - x_0| \sim 1$. Для $\gamma \ll 1$ при численном интегрировании уравнений (99)–(101) проявляются два характерных масштаба структуры струны. Параметр порядка f растет от нуля почти до единицы в области $|x^1 - x_0| \sim 1$, а в интеграл энергии (104) основной вклад дает область $|x^1 - x_0| \sim \gamma^{-1} \gg 1$.

При малом γ криволинейная координата x^1 вблизи края струны пропорциональна $\ln r$:

$$x^1 - x_0 = \ln \frac{r}{r_0}, \quad \gamma \ll 1, \quad (110)$$

где r_0 — радиус сердцевины струны (103). Отсюда вытекает следующая оценка сверху для характерного радиуса самолокализации:

$$r_L \sim r_0 \exp \frac{1}{\gamma}. \quad (111)$$

Соотношение (110) справедливо в области сердцевины струны. На далеких расстояниях эта связь x^1 и r нарушается даже при малых γ . Из-за этого радиус самолокализации r_L в действительности еще меньше: во всяком случае, он не может быть больше предельного радиуса r_{\max} в (129).

Свойства струны можно считать зависящими всего от одной координаты, если ее структура формируется на расстояниях от оси, много меньших длины L . Поэтому для струн конечной длины условием применимости уравнений (99)–(101) является неравенство

$$\gamma \ln \frac{L}{r_0} \gg 1. \quad (112)$$

4.4. Параметр порядка

При учете гравитации сходимость интеграла энергии (104) обеспечивается граничным условием $f'(\infty) = 0$. Подчеркнем еще раз, что значение $f(x^1)|_{x^1 \rightarrow \infty} \equiv f_\infty(\gamma)$ должно быть константой, но не обязательно единицей. Параметр порядка $f_\infty(\gamma)$ стремится к единице только при $\gamma \rightarrow 0$. Правильно поставить граничное условие при $x^1 \rightarrow \infty$ важно, в частности, для развивающейся в последнее время идеи топологической инфляции [13–15]. Топологическая инфляция может иметь место, если энергия спонтанного нарушения симметрии η превышает критическое значение η_{\max} , и тогда реализуются только нестационарные решения. Чувствительность топологической инфляции к η_{\max} демонстрирует, как важно иметь точные значения $\eta_{\max}(n)$.

Зависимость предельного значения параметра порядка f_∞ от γ , найденная численно в работе [40], представлена на рис. 6. Параметр порядка $f_\infty(\gamma)$ является монотонно убывающей функцией, и при некотором $\gamma = \gamma_{\max}(n)$ она обращается в нуль. Для $n = 1$ критическое значение⁶ $\gamma_{\max} = 1,067\dots$ Соответственно, максимальная энергия спонтанного нарушения симметрии

$$\eta_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma_{\max}}{8\pi}} m_{\text{Pl}} = 2,514 \times 10^{18} \text{ ГэВ}, \quad n = 1. \quad (113)$$

Как показывают численные расчеты, с ростом n критическое значение $\gamma_{\max}(n)$ уменьшается (табл. 1).

Таблица 1

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\gamma_{\max}(n)$ | 1,067 | 0,456 | 0,269 | 0,183 |

4.5. Анализ при $\gamma \ll 1$

Для многих космологических приложений энергия спонтанного нарушения симметрии мала по сравнению с массой Планка и гравитационное поле струны является слабым. В этом случае предельное значение параметра порядка очень близко к единице.

Отклонение предельного значения параметра порядка от единицы может иметь серьезные космологические последствия. Оно эквивалентно появлению отличной от нуля космологической постоянной в уравнениях

⁶ То же самое значение $\gamma_{\max}(n)$ ограничивает интервал значений параметра γ , в котором существуют статические решения для калибровочных струн в пределе $\beta \rightarrow 0$.

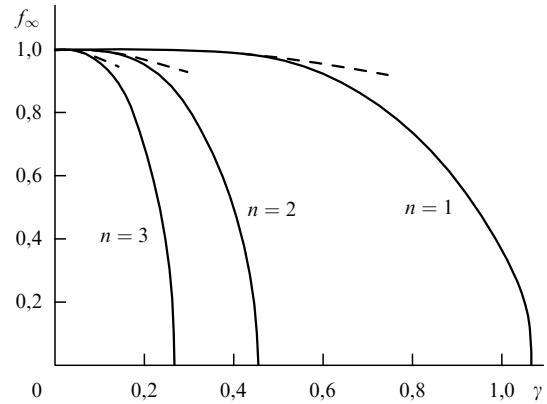


Рис. 6. Зависимость $f_\infty(\gamma)$ для значений n , равных 1, 2, 3. Штриховые кривые — аналитическая асимптотика (141).

Эйнштейна. При энергиях масштаба Великого объединения ($\eta \sim 10^{16}$ ГэВ) эта "космологическая постоянная" очень мала. Однако сценарии топологической инфляции во время (и сразу после) эпохи Планка могут оказаться чувствительными к эффекту космологической постоянной, появляющемуся из-за отличия предельного значения параметра порядка от единицы. Поэтому аналитическое исследование параметра порядка и гравитационного поля слабой глобальной струны представляет интерес [40].

Заметим, что при $\gamma \ll 1$ отличие предельного значения параметра порядка от единицы — это экспоненциально малый эффект, который нельзя получить разложением по степеням γ .

4.5.1. Предел $\gamma = 0$.

В галилеевом пределе $\gamma = 0$ координата x^1 связана с радиусом r соотношением

$$x^1 - x_0 = \ln \frac{r}{r_0},$$

где r_0 — радиус сердцевины струны (103). При $\gamma = 0$ параметр порядка $f = f_0$ удовлетворяет уравнению

$$f_0'' - n^2 f_0 + \frac{1}{2} (1 - f_0^2) f_0 \exp(2x) = 0 \quad (114)$$

и граничным условиям

$$f_0(-\infty) = 0, \quad f_0(\infty) = 1. \quad (115)$$

При $\gamma = 0$ интеграл (105) остается сходящимся:

$$I_1 = 2n^2, \quad \gamma = 0, \quad (116)$$

а интеграл (108) расходится. Вне коры струны при $x \gg 1$ параметр порядка экспоненциально близок к единице:

$$f_0(x) = 1 - n^2 \exp(-2x), \quad x \gg 1, \quad \gamma = 0. \quad (117)$$

Структура нерелятивистского квантованного вихря, описываемого уравнением (114), изучалась многими авторами (см., например, [1, 7, 37]).

4.5.2. Гравитационное поле глобальной струны при $\gamma \ll 1$.

В определении $F_1(x)$ для $x \gg 1$ использовалась экспоненциальная близость параметра порядка $f_\infty(\gamma)$ к единице

при $\gamma \ll 1$; см. (141). При $\gamma \ll 1$ уравнения (100) и (101) в периферийной области ($x \gg 1$) сводятся к

$$F_0'' = 0, \quad F_1'' = -2\gamma n^2 f^2 \exp(4F_0).$$

Ввиду (105) и (107) имеем

$$F_0(x) = -\frac{1}{4} \gamma I_1(x - x^*), \quad (118)$$

$$F_1'(x) = -\frac{3}{8} \gamma I_1 + \frac{2n^2}{I_1} \exp(-\gamma I_1(x - x^*)), \quad (119)$$

где интеграл I_1 определен в (105), а

$$x^* = \frac{1}{2n^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x (1 - f_0^2)^2 \exp(2x) \quad (120)$$

— константа порядка единицы, которую можно найти численно. Для $n = 1$ константа $x^* \approx 0.53$.

Интегрируя (119), получаем

$$F_1(x) = C - \frac{3}{8} \gamma I_1(x - x^*) - \frac{2n^2}{\gamma I_1^2} \exp(-\gamma I_1(x - x^*)). \quad (121)$$

В области $1 \ll x \ll \gamma^{-1}$ функция (121) сводится к

$$F_1(x) = C + x - x^* - \frac{2n^2}{\gamma I_1^2},$$

и мы находим константу интегрирования C :

$$C = x^* + \frac{2n^2}{\gamma I_1^2}. \quad (122)$$

Таким образом, в области $x \gg 1, \gamma \ll 1$ функция

$$F_1(x) = \frac{2n^2}{\gamma I_1^2} [1 - \exp(-\gamma I_1(x - x^*))] - \frac{3}{8} \gamma I_1(x - x^*) + x^*. \quad (123)$$

Формулы (118) и (123) определяют гравитационное поле глобальной струны в основной области его изменения $x \sim \gamma^{-1} \gg 1$.

4.5.3. Максимальный радиус r_{\max} . Найдем r_{\max} для глобальной струны при $\gamma \ll 1$. В области $x \gg 1$ связь координаты x с радиусом r получим, подставив (123) в (47):

$$dr = \exp \left[\frac{2n^2}{\gamma I_1^2} [1 - \exp(-\gamma I_1(x - x^*))] - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \gamma I_1(x - x^*) + x^* \right] dx, \quad x \gg 1.$$

В области $x \ll \gamma^{-1}$ связь x с r имеет вид

$$r = \exp x, \quad x \ll \gamma^{-1}. \quad (124)$$

Возьмем любую точку \tilde{x} , удовлетворяющую неравенствам

$$1 \ll \tilde{x} \ll \gamma^{-1}. \quad (125)$$

В соответствии со (124) при $x = \tilde{x}$ имеем

$$r = \tilde{r} \equiv \exp \tilde{x}. \quad (126)$$

Используем соотношение (126) как граничное условие при определении связи x и r в области $x \gg 1$:

$$r = \exp \tilde{x} + \int_{\tilde{x}}^x dx \exp \left[\frac{2n^2}{\gamma I_1^2} [1 - \exp(-\gamma I_1(x - x^*))] - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \gamma I_1(x - x^*) + x^* \right], \quad x \gg 1. \quad (127)$$

В силу неравенств (125) \tilde{x} из формулы (127) выпадает, и после замены

$$u = \exp \left[-\frac{3}{8} \gamma I_1(x - x^*) \right]$$

имеем

$$r = \exp x^* - \frac{8}{3\gamma I_1} \exp \left(\frac{1}{2n^2\gamma} + x^* \right) \times \\ \times \int_1^{\exp \left[-\frac{3}{8} \gamma I_1(x - x^*) \right]} du \exp \left(-\frac{u^{8/3}}{2n^2\gamma} \right), \quad x \gg 1. \quad (128)$$

Устремляя в (128) $x \rightarrow \infty$, с точностью до предэкспоненциального множителя порядка единицы для r_{\max} находим

$$r_{\max} \sim \gamma^{-5/8} \exp \frac{1}{2n^2\gamma}, \quad \gamma \ll 1, \quad n \sim 1. \quad (129)$$

4.5.4. Параметр порядка в области $x \sim \gamma^{-1} \gg 1$. Основной областью изменения параметра порядка f является сердцевина струны $x \sim 1$. Во внешней области $x \sim \gamma^{-1} \gg 1$ параметр порядка f очень близок к единице. Чтобы найти отличие предельного значения параметра порядка от единицы при $\gamma \ll 1$, необходимо найти решение уравнения (99) в далекой периферийной области. И тут мы сталкиваемся с проблемой малого параметра при старшей производной⁷. Член f'' в (99) очень мал по сравнению с двумя другими членами. Из равенства этих двух членов определяется координатная зависимость параметра порядка f на периферии струны:

$$f = 1 - n^2 \exp(4F_0 - 2F_1), \quad x \sim \gamma^{-1} \gg 1.$$

С учетом (118) и (123) получаем

$$f = 1 - n^2 \exp \left[-\frac{1}{4} \gamma I_1(x - x^*) - \right. \\ \left. - \frac{4n^2}{\gamma I_1^2} [1 - \exp(-\gamma I_1(x - x^*))] - 2x^* \right], \quad x \sim \gamma^{-1} \gg 1. \quad (130)$$

⁷ Аналогичная ситуация имеет место в плотной плазме, когда дебаевский радиус мал по сравнению с характерными размерами задачи. В этом случае старшей производной можно пренебречь, и координатная зависимость плотности плазмы определяется условием квазинейтральности.

При $\gamma^{-1} \gg x \gg 1$ параметр порядка (130) сводится к f_0 в (117), а в обратном пределе $x \gg \gamma^{-1}$ он принимает вид

$$f = 1 - n^2 \exp \left[-\frac{1}{4} \gamma I_1(x - x^*) - \frac{4n^2}{\gamma I_1^2} - 2x^* \right], \quad x \gg \gamma^{-1}. \quad (131)$$

4.5.5. Предельное значение параметра порядка. Формула (131) справедлива до тех пор, пока $1 - f(x) \gg 1 - f_\infty$. В области, где $1 - f(x) \sim 1 - f_\infty$, два последних члена в уравнении (99) зависят от x по-разному. Принимая во внимание, что

$$1 - f_\infty \sim \exp \left(-\frac{4}{3\gamma n^2} \right)$$

(см. (141)), и сравнивая

$$n^2 \exp(4F_0) \approx \exp(-2n^2 \gamma x)$$

с

$$\frac{1}{2}(1 - f^2) \exp(2F_1) \approx \exp \left(-\frac{1}{3\gamma n^2} - \frac{3}{2} n^2 \gamma x \right),$$

мы видим, что два последних члена в (99) могут компенсировать друг друга только при $x \ll \gamma^{-2}$. (В этой оценке мы считаем $n \sim 1$.) В далекой зоне $x \gg \gamma^{-2}$ доминирует последний член в (99). В области $x \sim \gamma^{-2}$ происходит переход от экспоненциального поведения параметра порядка (131) к предельному значению f_∞ . Чтобы найти f_∞ , необходимо решить уравнение (99) в далекой периферийной области $x \sim \gamma^{-2}$.

В области $x \sim \gamma^{-2}$ уравнение (99) принимает вид

$$f'' + f \left[\frac{1}{2}(1 - f^2) \exp \left(\frac{4n^2}{\gamma I_1^2} - \frac{3}{4} \gamma I_1(x - x^*) + 2x^* \right) - n^2 \exp(-\gamma I_1(x - x^*)) \right] = 0.$$

Это уравнение можно упростить:

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{d\psi}{dt} \right) - \psi = 1 - b^{-1} t^{1/3}, \quad (132)$$

если линеаризовать его по $f_\infty - f \ll 1$ и сделать замену переменных

$$\psi = \frac{f_\infty - f}{1 - f_\infty}, \quad (133)$$

$$t = \left(\frac{4}{3\gamma I_1} \right)^2 \exp \left(\frac{4n^2}{\gamma I_1^2} - \frac{3}{4} \gamma I_1(x - x^*) + 2x^* \right). \quad (134)$$

Области $x \ll \gamma^{-2}$ отвечают $t \sim \exp(1/\gamma) \gg 1$; обратному пределу $x \gg \gamma^{-2}$ соответствуют $t \sim \exp(-3/2\gamma) \ll 1$. Таким образом, нас интересует решение уравнения (132), удовлетворяющее граничным условиям

$$\psi \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad (135)$$

$$\psi \rightarrow 1 - b^{-1} t^{1/3}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (136)$$

Все физические параметры задачи входят в уравнение (132) и граничные условия (135) и (136) в единой

комбинации

$$b \equiv \frac{1 - f_\infty}{n^2} \left(\frac{4}{3\gamma I_1} \right)^{2/3} \exp \left[\frac{4}{3} \left(\frac{4n^2}{\gamma I_1^2} + 2x^* \right) \right]. \quad (137)$$

Общее решение уравнения (132) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(t) = & C_1 I_0(2\sqrt{t}) + C_2 K_0(2\sqrt{t}) + \\ & + I_0(2\sqrt{t}) \int_0^t \frac{dt'}{t' I_0^2(2\sqrt{t'})} \int_0^{t'} dt'' I_0(2\sqrt{t''}) [1 - b^{-1}(t'')^{1/3}], \end{aligned} \quad (138)$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Чтобы удовлетворить граничному условию (135), обе константы интегрирования нужно положить равными нулю: $C_1 = C_2 = 0$. Чтобы удовлетворить второму граничному условию (136), необходимо потребовать, чтобы

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t I_0^2(2\sqrt{t})} \int_0^t dt' I_0(2\sqrt{t'}) [1 - b^{-1}(t')^{1/3}] = 0.$$

Из этого соотношения определяется константа b в (137).

Замечая, что

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t I_0^2(2\sqrt{t})} \int_0^t dt' I_0(2\sqrt{t'}) = 1,$$

имеем

$$b = \int_0^\infty \frac{dt}{t [I_0(2\sqrt{t})]^2} \int_0^t dt' (t')^{1/3} I_0(2\sqrt{t'}) = 0,7974\dots \quad (139)$$

Соотношения (137) и (139) определяют предельное значение f_∞ параметра порядка:

$$1 - f_\infty = bn^2 \left(\frac{3\gamma I_1}{4} \right)^{2/3} \exp \left[-\frac{4}{3} \left(\frac{4n^2}{\gamma I_1^2} + 2x^* \right) \right], \quad \gamma \ll 1. \quad (140)$$

Чтобы правильно определить зависимость предэкспоненциального множителя от n , необходимо в экспоненте (140) разложить интеграл I_1 в (105) до членов порядка γ . Поскольку уравнение (114) аналитически не решается, общий множитель можно найти лишь численно. Конечный результат [40] выглядит так:

$$f_\infty = 1 - \mu(n) \gamma^{2/3} \exp \left(-\frac{4}{3\gamma n^2} \right), \quad \gamma \ll 1. \quad (141)$$

Найденная численно зависимость $\mu(n)$ представлена в табл. 2. В пределах точности эту зависимость можно аппроксимировать формулой

$$\mu(n) = \frac{a + bn^2}{n^{4/3}}, \quad a = 0,394, \quad b = 0,215.$$

Если интересоваться тонкими деталями выхода параметра порядка на предельное значение, то просматриваются уже не две, а три ключевые области изменения

Таблица 2

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mu(n)$ | 0,594 | 0,484 | 0,536 | 0,607 | 0,677 | 0,748 | 0,817 | 0,885 | 0,951 | 1,015 |

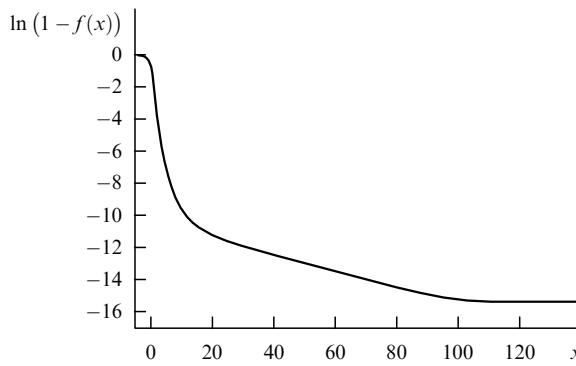


Рис. 7. Функция $\ln(1-f(x))$ при $n=1$ и $\gamma=0,1$.

функций f , F_0 и F_1 . Основная область изменения f и F_0 — это сердцевина струны $x \sim 1$. Здесь параметр порядка меняется от нуля до почти единицы. Отрицательная толмановская масса струны (30) также локализована в сердцевине. Производная F'_1 меняется от единицы на оси до предельного значения (107) вне струны в области $x \sim \gamma^{-1} \gg 1$. В далекой зоне $\gamma^{-1} \ll x \ll \gamma^{-2}$ параметр порядка стремится к единице значительно медленнее, но все еще экспоненциально в соответствии со (131). И наконец, в самой далекой периферийной области $x \sim \gamma^{-2}$ экспоненциальное поведение f сменяется выходом на f_∞ . Представленная на рис. 7 функция $\ln(1-f(x))$ демонстрирует три области изменения параметра порядка $f(x)$ при $n=1$ и $\gamma=0,1$.

При $\gamma \ll 1$ многие свойства глобальных струн можно исследовать с помощью линеаризованных уравнений Эйнштейна [32]. Однако некоторые свойства нельзя обнаружить ни в каком порядке разложения уравнений Эйнштейна–Хиггса по степеням γ . Экспоненциально малое отличие f_∞ от единицы (141) — это типичный пример.

Отличие предельного значения параметра порядка f_∞ от единицы искажает физический вакуум во всем пространстве вне струны и эффективно приводит к ненулевой "космологической постоянной"⁸

$$\Lambda = \frac{\lambda\gamma^2}{8\pi G}(1-f_\infty)^2. \quad (142)$$

Из оценки флуктуаций, необходимых для формирования галактик, в книге [1] приводится ограничение $\lambda \leq 10^{-12}$. В масштабе Великого объединения ($\eta \sim 10^{16}$ ГэВ) параметр γ в (8) порядка 10^{-5} , и "космологическая постоянная" Λ мала. Однако "космологическая постоянная" струнного происхождения (142) может сыграть важную роль в сценариях топологической инфляции, если фазовый переход со спонтанным нарушением симметрии имел место в эпоху Планка.

4.6. Метрика при $\gamma \rightarrow \gamma_{\max}$

Вблизи критического значения

$$\gamma_{\max} - \gamma \ll 1 \quad (143)$$

⁸ На возможную связь космологической постоянной с элементарными частицами указал Зельдович [41]. В данном случае глобальная струна играет похожую роль. "Уравнение состояния" $p = -\varepsilon$ упоминается в [41].

метрику можно найти аналитически. Здесь параметр порядка f очень мал, и уравнения (100) и (101) сводятся к

$$F_0'' = -\frac{\gamma_{\max}}{4} \exp(2F_1), \quad (144)$$

$$F_1'' = -\frac{3\gamma_{\max}}{4} \exp(2F_1). \quad (145)$$

Решение уравнения (145) имеет вид

$$F_1 = \mathcal{B} - \ln \cosh(x^1 - x_0 - x^*), \quad (146)$$

где x_0 — постоянная интегрирования, а значение $\mathcal{B} = -(1/2) \ln(3\gamma_{\max}/4)$ и $x^* = \mathcal{B} + \ln 2$ подобраны так, чтобы удовлетворить граничному условию $F_1 = x^1 - x_0$, $x^1 \rightarrow -\infty$.

При $n=1$ имеем

$$\mathcal{B} = 0,11142\dots, \quad x^* = 0,80457\dots$$

Для F_0 получаем

$$F_0 = \frac{1}{3} [\mathcal{B} - x^1 + x_0 - \ln \cosh(x^1 - x_0 - x^*)]. \quad (147)$$

Совпадение аналитического решения (146) и (147) с результатами численного интегрирования уравнений (99)–(101) демонстрируется на рис. 8, на котором представлены зависимости $F_0(x)$ и $F_1(x)$ как функций $x = x^1 - x_0$ для $n=1$ и $\gamma = \gamma_{\max} = 1,067$.

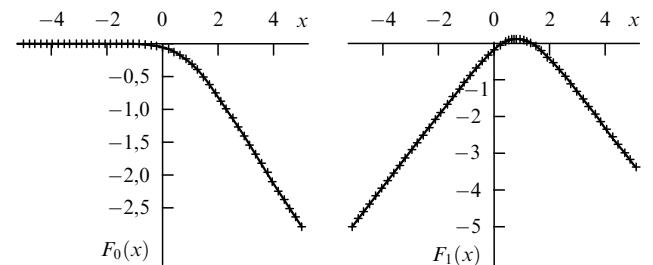


Рис. 8. Зависимости F_0 и F_1 как функций $x = x^1 - x_0$. Точки — результат численного интегрирования системы уравнений (99)–(101) с $\gamma = 1,067$, сплошные линии — аналитические решения (147) и (146).

После подстановки (47) метрика принимает вид

$$ds^2 = g_{00}(r)(dt^2 - dz^2) - dr^2 - g_{22}(r)d\varphi^2. \quad (148)$$

Здесь

$$g_{00}(r) = \cos^{4/3}(r \exp(-x^*)),$$

$$g_{22}(r) = \exp(2x^*) \sin^2(r \exp(-x^*)) \cos^{-2/3}(r \exp(-x^*)).$$

Радиус r в цилиндрических координатах связан с x^1 соотношением

$$r = \exp x^* \arctan[\exp(x^1 - x_0 - x^*)]$$

и меняется от нуля до своего предельного значения $r_{\max} = (\pi/2) \exp x^*$, в то время как x^1 меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Вблизи оси ($r \rightarrow 0$) метрика (148) является

галилеевой:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2,$$

а при $r \rightarrow r_{\max} = (\pi/2) \exp x^*$ она превращается в метрику казнеровского типа [24]:

$$ds^2 = (r_{\max} - r)^{4/3} \exp\left(-\frac{4}{3}x^*\right)(dt^2 - dz^2) - dr^2 - (r_{\max} - r)^{-2/3} \exp\left(\frac{8}{3}x^*\right)d\varphi^2. \quad (149)$$

5. Заключительные замечания

В критической точке (143) параметр порядка f глобальной струны обращается в нуль. Становится очевидным, что в абелевой модели Хиггса с потенциалом (3) не только казнеровская сингулярность на границе $r = r_{\max}$ [38], но и кривизна всей метрики (148) порождается вакуумом, "испорченным" из-за того, что вне струны не обращается в нуль потенциал $V(\phi)$, стимулирующий спонтанное нарушение симметрии. Отличие предельного значения параметра порядка от единицы может иметь серьезные космологические последствия, поскольку это эквивалентно появлению ненулевого космологического члена в уравнениях Эйнштейна.

Гипотеза о космической "цензуре" [39] запрещает появление голых сингулярностей из регулярных исходных состояний. Чтобы образование глобальных струн и сверх массивных калибровочных струн в ранней Вселенной не противоречило гипотезе о космической "цензуре", естественно предположить, что исходное состояние ненарушенной симметрии не было регулярным.

Автор признателен В.А. Рубакову за конструктивные критические замечания.

Список литературы

1. Vilenkin A, Shellard E P S *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994)
2. Зельдович Я Б, Новиков И Д *Релятивистская астрофизика* (М.: Наука, 1967)
3. Kibble T W B *J. Phys. A* **9** 1387 (1976)
4. Landau L D, Lifshits E M *Phys. Z. Sowjetunion* **8** 153 (1935); в кн. *Собрание трудов Л.Д. Ландау* Т. 1 (М.: Наука, 1969) ст. 17
5. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **7** 19 (1937); в кн. *Собрание трудов Л.Д. Ландау* Т. 1 (М.: Наука, 1969) ст. 28
6. Абрикосов А А *ЖЭТФ* **32** 1442 (1957)
7. Халатников И М *ЖЭТФ* **23** 253 (1952)
8. Киржиц Д А *Письма в ЖЭТФ* **15** 745 (1972)
9. Weinberg S *Phys. Rev. D* **9** 3357 (1974)
10. Зельдович Я Б, Кобзарев ИЮ, Окунь Л Б *ЖЭТФ* **67** 3 (1974)
11. Zel'dovich Ya B *Month. Not. R. Astron. Soc.* **192** 663 (1980)
12. Vilenkin A *Phys. Rev. Lett.* **46** 1169 (1981); Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **46** 1496 (1981)
13. Linde A *Phys. Lett. B* **327** 208 (1994)
14. Vilenkin A *Phys. Rev. Lett.* **72** 3137 (1994)
15. De Laix A, Trodden M, Vachaspati T *Phys. Rev. D* **57** 7186 (1998)
16. Гинзбург В Л, Ландау Л Д *ЖЭТФ* **20** 1064 (1950)
17. Cooper L N *Phys. Rev.* **104** 1189 (1956)
18. Bronnikov K A *J. Phys. A* **12** 201 (1979)
19. Мейерович Б Э *ЖЭТФ* **112** 385 (1997); Meierovich B E *Gravitation Cosmology* **3** 29 (1997); *Phys. Rev. D* **61** 024004 (2000)
20. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
21. Meierovich B E, Podolyak E R *Phys. Rev. D* **61** 125007 (2000)
22. Bach R, Weyl H *Math. Z.* **13** 134 (1922); Marder L *Proc. R. Soc. London Ser. A* **252** 45 (1959); Israel W *Phys. Rev. D* **15** 935 (1977); Соколов Д Д, Старобинский А А *ДАН СССР* **22** 312 (1977)
23. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **38** 648 (1974)
24. Kasner E *Am. J. Math.* **43** 217 (1921)
25. Vilenkin A *Phys. Rev. D* **23** 852 (1981)
26. Laguna P, Garfinkle D *Phys. Rev. D* **40** 1011 (1989)
27. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика* (М.: Наука, 1974)
28. Christensen M, Larsen A L, Verbin Y *Phys. Rev. D* **60** 125012 (1999)
29. Nielsen N B, Olesen P *Nucl. Phys. B* **61** 45 (1973)
30. Богомольный Е Б *ЯФ* **24** 449 (1976)
31. Linet B *Class. Quant. Grav.* **7** L75 (1990)
32. Harari D, Sikivie P *Phys. Rev. D* **37** 3488 (1988)
33. Gregory R *Phys. Lett. B* **215** 663 (1988)
34. Gibbons G W, Ortiz M E, Ruiz R T *Phys. Rev. D* **39** 1546 (1989)
35. Cohen A G, Kaplan D B *Phys. Lett. B* **215** 67 (1988)
36. Meierovich B E *Gen. Rel. Grav.* **33** 405 (2001)
37. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961)
38. Harari D, Polychronakos A P *Phys. Lett. B* **240** 55 (1990)
39. Penrose R *Riv. Nuovo Cimento* **1** 252 (1969)
40. Meierovich B E, Podolyak E R *Gravitation Cosmology* **7** 117 (2001)
41. Зельдович Я Б *Письма в ЖЭТФ* **6** 883 (1967)

Gravitational properties of cosmic strings

B.E. Meierovich

P.L. Kapitza Institute of Physics Problems, Russian Academy of Sciences,
ul. Kosygina 2, 117334 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 137-79 85. Fax (7-095) 938-20 30
E-mail: meierovich@yahoo.com; http://geocities.com/meierovich

The gravitational properties of gauge and global relativistic cosmic strings in abelian Higgs and scalar field models are presented. A complete classification of the strings is given and the ranges of the parameters allowing static configurations are determined. Gravitational properties of cosmic strings in the limiting cases are treated analytically.

PACS numbers: 04.20.-q, 11.27.+d, 98.80.Cq

Bibliography — 41 references

Received 15 January 2001, revised 23 April 2001