

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Гравитационно-волновая астрономия: в ожидании первого зарегистрированного источника

Л.П. Гришук, В.М. Липунов, К.А. Постнов,
М.Е. Прохоров, Б.С. Сатьяпракаш

Первое поколение длиннобазовых лазерных интерферометрических детекторов гравитационных волн начнет накапливать данные в 2001–2003 гг. Мы тщательно анализируем их запланированные возможности и сравниваем их с ожидаемой мощностью астрофизических источников. В нашем анализе были учтены научная важность ожидаемого открытия различных гравитационно-волновых сигналов и надежность их теоретического предсказания. Мы старались быть консервативными как в оценке теоретической неопределенности параметров источников, так и в отношении перспектив их обнаружения. После рассмотрения большого числа возможных источников мы отдаем предпочтение: 1) сливающимся двойным системам, состоящим из черных дыр звездных масс, и 2) реликтовым гравитационным волнам. Мы пришли к заключению, что сливающиеся черные дыры скорее всего будут зарегистрированы первыми вступающими в строй наземными интерферометрами. Наши оценки показывают, что первые интерферометры будут видеть 2–3 события в год от черных дыр с массами компонент $10–15 M_{\odot}$ при отношении сигнала к шуму примерно 3 в сети детекторов, состоящей из GEO, VIRGO и двух антенн LIGO. Из анализа следует, что другие возможные источники, включая сливающиеся нейтронные звезды, вряд ли будут доступны этому поколению инструментов. Мы также приводим аргументы в пользу того, что реликтовые гравитационные волны могут быть открыты космическим интерферометром в диапазоне частот $2 \times 10^{-3}–10^{-2}$ Гц при отношении сигнала к шуму равном примерно 3.

PACS numbers: 04.30. – w, 04.80.Nn, 95.55.Jm, 95.85.Sz

Содержание

1. Введение (4).
2. Астрофизические источники. Тесные двойные нейтронные звезды и черные дыры (7).
 - 2.1. Наблюдательные ограничения частоты слияния двойных нейтронных звезд. 2.2. Популяционный синтез сливающихся двойных NS и BH. 2.3. Влияние дополнительной скорости.
3. Темп регистрации (16).
 - 3.1. Темп регистрации: обычная картина. 3.2. Нестандартные сценарии и влияние дополнительной скорости на частоту детектирования слияний BH + BH.

Л.П. Гришук, В.М. Липунов, К.А. Постнов, М.Е. Прохоров.
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119899 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация
Тел. (095) 939-50-06. Факс (095) 932-88-41
E-mail: pk@sai.msu.ru
В.М. Липунов, К.А. Постнов. Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
119899 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация
Л.П. Гришук, Б.С. Сатьяпракаш (B.S. Sathyaprakash).
Cardiff University, P.O. Box 913, Cardiff, CF2 3YB, Great Britain
E-mail: grishchuk@astro.cf.ac.uk

Статья поступила 28 августа 2000 г.

4. Вспыхивающие и непрерывные источники гравитационных волн (18).
 - 4.1. Транзиенты. 4.2. Постоянные источники.
5. Астрофизический стохастический фон гравитационных волн (21).
 - 5.1. Неразрешенные источники в нашей Галактике. 5.2. Гравитационно-волновой шум от внегалактических двойных.
6. Реликтовые гравитационные волны и их детектирование (25).
 - 6.1. Космологические гравитационные волны. 6.2. Космологическое поле накачки. 6.3. Решение уравнений для гравитационных волн. 6.4. Теоретические и наблюдательные ограничения. 6.5. Детектируемость реликтовых гравитационных волн. 6.6. Краткие итоги.
7. Гравитационно-волновые детекторы и их чувствительность (37).
 - 7.1. Современный статус гравитационно-волновых антенн. 7.2. Чувствительность гравитационно-волновой антенны. 7.3. Амплитуды источников и чувствительность детекторов. 7.4. Спектральная мощность шума интерферометров первого поколения. 7.5. Ложные события и порог детектирования. 7.6. Диаграмма направленности детектора.
8. Анализ данных (40).
 - 8.1. Оптимальная фильтрация и оптимальное отношение сигнала к шуму. 8.2. Оптимальный фильтр для сигналов от сливающихся компактных двойных систем. 8.3. Чувствительность к стохастическим гравитационным волнам. 8.4. Требования к вычислительным мощностям. 8.5. Ковариационная матрица и оценка параметров.
9. Заключение (51).

10. Приложения (51).

I. Кеплеровские двойные системы и обратная реакция гравитационного излучения. II. Режимы переноса массы и потери вещества в двойных системах. III. Постньютоновское приближение для потока и энергии гравитационных волн.

Список литературы (57).

1. Введение

Цель этого обзора весьма амбициозна. Мы хотим предсказать характеристики первых гравитационно-волновых сигналов, которые будут зарегистрированы строящимися чувствительными детекторами. Строительство некоторых из них в настоящее время находится на завершающей стадии. Эти детекторы позволят получать данные уже через два-три года. Очевидно, что наша точка зрения субъективна. Она использует теоретические оценки сигналов, которые нам кажутся наиболее обоснованными, для ожидаемой чувствительности инструментов. Не исключено, что другие авторы поставили бы на первое место иные источники, которые с их точки зрения являются более многообещающими. Возможно, наш взгляд субъективен также и потому, что он отчасти сформирован личными исследованиями авторов. В любом случае, мы не будем крайне разочарованными, если наша точка зрения окажется неверной. Природа может оказаться удивительнее того, что сейчас кажется наиболее вероятным. Важно, однако, что впервые за долгую историю гравитационно-волновых исследований консервативные оценки сигналов от астрофизических источников оказываются сравнимы с чувствительностью реальных инструментов. Так что именно в это время следует разработать стратегию для поиска и анализа сигналов, которые кажутся наиболее вероятными из всех возможных.

Теория гравитационного излучения хорошо разработана и описана в учебниках [1–3]. Статус гравитационно-волновой астрономии регулярно освещается в различных обзорах [4–6], включая статьи в *УФН* [7–10]. Здесь мы только хотели бы напомнить читателю, что гравитационные волны (ГВ) являются неизбежным следствием общей теории относительности Эйнштейна и вообще любой теории гравитации, в которой соблюдаются принципы специальной теории относительности. Гравитационные волны имеют ряд свойств, схожих с электромагнитными волнами, они распространяются со скоростью света c , имеют две независимые поляризации и по своему действию на пробные массы имеют аналоги электрического и магнитного воздействия на заряды. Гравитационные волны уносят из излучающей системы энергию, момент импульса и импульс. Поле ГВ безразмерно и качественно характеризуется единственной величиной — безразмерной амплитудой ГВ h . Амплитуда спадает при удалении от локализованного источника обратно пропорционально пройденному расстоянию: $h \propto 1/r$. Трудность прямого детектирования ГВ видна из того факта, что ожидаемая на Земле амплитуда сигнала h от реалистических астрономических источников чрезвычайно мала — порядка или меньше 10^{-21} . Возможные амплитуды от лабораторных источников оказываются еще меньше. Эта малая величина h входит во все мыслимые схемы детектирования ГВ и потому делает задачу их детектирования столь сложно выполнимой. Например, ГВ вызывают малое

изменение Δl расстояния l между двумя свободными массами: $\Delta l = hl$. В интерферометре с длиной плеча 1 км смещение одного концевое зеркала относительно другого будет порядка $\Delta l = 10^{-16}$ см. Это чрезвычайно малое изменение расстояния необходимо измерять и выделять на фоне любого возможного шума. В космосе, однако, ГВ являются важным эволюционным фактором. Так, ГВ с необходимостью учитываются при изучении орбитальной эволюции компактных пар звезд [11]. Измеренное вековое изменение орбитальных параметров двойной системы, включающей пульсар PSR 1913 + 16, согласуется с гравитационно-волновым предсказанием общей теории относительности с точностью лучше 1 % [12]. За изучение пульсаров и за это открытие Халс и Тейлор получили Нобелевскую премию по физике 1993 г.

Как и всякая наблюдательная наука, гравитационно-волновая астрономия имеет дело с источниками, детекторами, обработкой данных и их интерпретацией. Ниже мы в той или иной мере остановимся на каждой из этих составных частей. Однако мы не ставили перед собой задачу рассмотреть все интересные астрофизические теории, все возможные источники и все разнообразные методы их детектирования. Мы сосредоточимся на источниках, которые, как нам кажется, наиболее теоретически обоснованы, важны с научной точки зрения и используют минимальное количество дополнительных предположений.

Источник, интересный с точки зрения его детектируемости, должен быть достаточно мощным, сигнал от него должен попадать в полосу чувствительности детектора и случаться достаточно часто за время функционирования инструмента. Частотный диапазон обсуждаемых сигналов определяется интервалом частот чувствительности детектора. Работающие в настоящее время твердотельные антенны имеют чувствительность в узком интервале частот вблизи 10^3 Гц. Наземные лазерные интерферометры чувствительны в интервале частот 10 – 10^4 Гц. Диапазон чувствительности лазерных антенн в космосе будет 10^{-4} – 1 Гц. Большие надежды связываются со вступающими в строй наземными лазерными интерферометрами. В Японии уже построен 300-метровый лазерный интерферометр, называемый ТАМА. Завершается строительство совместного британо-германского 600-метрового лазерного интерферометра GEO600 [13]. Силами франко-итальянской коллаборации производится строительство 3-километрового интерферометра VIRGO [14]. В рамках американского проекта LIGO строятся два 4-километровых интерферометра [15]. Ожидается, что эти установки начнут функционировать через 1–2 года. Предложение о строительстве лазерной интерферометрической антенны в космосе (LISA) [16] предварительно одобрено Европейским космическим агентством и НАСА, а ее запуск может состояться около 2010 г. Кроме того, планируется строительство и наземных интерферометров повышенной чувствительности типа LIGO-II [17].

Способность того или иного инструмента детектировать сигнал зависит от природы сигнала. Импульсные источники, сопровождающие космические катастрофы, излучают ГВ на некоторой характерной частоте в течение всего лишь нескольких периодов. По своей природе такие источники могут быть достаточно мощными, однако темп их образования очень мал. Крайне маловероятно, что такой источник появится в нашей

Галактике в течение, скажем, одного года наблюдений. Чтобы увидеть несколько событий в год, инструмент должен обладать чувствительностью, достаточной для наблюдений источников из больших (космологических) объемов пространства. Квазипериодические астрофизические источники встречаются чаще, чем импульсные источники, но их сигнал гораздо слабее в терминах величины h . Однако энергия, излучаемая за достаточно длинный промежуток времени T , может быть ненамного меньше, чем от импульсного источника. Если временная структура сигнала известна или может быть смоделирована, можно накапливать сигнал на выходе детектора в течение многих волновых периодов, содержащихся в интервале наблюдений T . Тогда детектирование слабого периодического сигнала может оказаться ненамного более трудным, чем детектирование импульсного сигнала. Некоторые редко встречающиеся, но астрофизически достоверные источники, такие как двойные нейтронные звезды на последних стадиях эволюции, излучают квазипериодический гравитационно-волновой сигнал при сближении по спирали друг с другом, а в момент самого слияния сигнал становится больше похожим на импульс. Типичные стохастические фоны ГВ малы, и их трудно выделить из инструментальных шумов. Однако при взаимной корреляции сигналов с выходов двух или более инструментов стохастический фон можно измерить. Реликтовые ГВ, имеющие фундаментальное значение, также образуют своего рода стохастический фон. Только эти волны в состоянии дать информацию об очень ранней Вселенной вплоть до планковских времен и Большого Взрыва. Было бы крайне ценно, несмотря на сложность задачи, зарегистрировать реликтовые гравитационные волны.

Соотношение между ожидаемыми научными результатами и теоретической вероятностью различных астрофизических источников, с одной стороны, и возможностями их детектирования на строящихся и планируемых интерферометрах, с другой стороны, находится в центре внимания настоящего обзора. На основе анализа многих возможных источников гравитационных волн и учета всех факторов мы отдаем предпочтение тесным двойным системам из компактных звезд (нейтронных звезд и черных дыр) и реликтовым ГВ. Фактически мы утверждаем, что сближающиеся двойные черные дыры, которые образуются в результате звездной эволюции, скорее всего, будут обнаружены первыми с помощью сети вступающих в строй интерферометров. Мы также полагаем, что реликтовые ГВ могут быть открыты на следующем поколении наземных интерферометров и на космических лазерных интерферометрах. Чтобы обосновать нашу точку зрения, мы детально описываем эволюцию компактных двойных звезд и свойства реликтовых гравитонов.

Раздел 2 посвящен образованию и эволюции двойных звезд. Двойные звезды столь же многочисленны, как и одиночные звезды. Они излучают ГВ на удвоенной орбитальной частоте. Для излучения ГВ большой интенсивности в диапазоне чувствительности наземных интерферометров компоненты пары должны быть массивными и двигаться по очень тесным орбитам с полуосями всего лишь в несколько сотен километров. Согласно существующей точке зрения, такие массивные объекты могут быть только конечными продуктами звездной эволюции — нейтронными звездами и черными ды-

рами. Из-за уноса момента импульса гравитационными волнами такие тесные двойные звезды находятся на последних тысячах оборотов фазы спирального сближения. Они всего лишь в десяти минутах от финального слияния, результатом которого может оказаться образование общей черной дыры или другое замечательное космическое явление, такое как мощный гамма-всплеск. Ключевой вопрос состоит в том, сколько таких двойных систем существует в нашей Галактике и на космологических расстояниях. Это число определяет темп событий — число слияний, которое может произойти в данном объеме пространства в течение, скажем, одного года. Детектор с чувствительностью, достаточной для регистрации наиболее удаленного события из этого объема, будет детектировать все события. Детектор с меньшей чувствительностью сможет регистрировать события на меньшем расстоянии, а значит и зарегистрирует меньшее число событий или не зарегистрирует вообще ни одного события за 1 год наблюдений.

В разделе 2.1 мы обсуждаем все наблюдательные данные о двойных нейтронных звездах. Одних только этих данных оказывается достаточно для простых оценок темпа слияния двойных нейтронных звезд. До сих пор нет наблюдательных свидетельств существования двойных систем, состоящих из нейтронной звезды и черной дыры или из двух черных дыр. Однако мы наверняка не наблюдаем все продукты звездной эволюции в двойных системах. Следует прибегнуть к теории, которая успешно объясняет образование и относительную распространенность наблюдаемых двойных систем, состоящих из нормальных и нейтронных звезд. Эта теория предсказывает существование тесных пар нейтронных звезд и черных дыр как конечных результатов некоторых каналов эволюции двойных звезд. Именно эти эволюционные каналы наиболее важны для гравитационно-волновой астрономии.

Раздел 2.2 посвящен методу популяционного синтеза, с помощью которого описывается постоянное рождение и эволюция двойных звезд. Цель этого анализа — найти статистически ожидаемое число массивных и достаточно тесных двойных систем, которые могли бы находиться на заключительной стадии приближения друг к другу в настоящий момент времени. Это означает, что нам интересны только двойные, ожидаемое время жизни которых, вплоть до слияния, короче хаббловского возраста Вселенной. Результат эволюции зависит от начальных условий и физических процессов в ходе эволюционного пути. В нашем анализе мы сочетаем хорошо установленные наблюдательные данные и разумные теоретические предположения. При этом особенно существенными оказываются два параметра: дополнительная скорость w , которую приобретает при рождении нейтронная звезда, и доля массы предсверхновой $k_{\text{ВН}}$, которая превращается в черную дыру при коллапсе. Черная дыра, как и нейтронная звезда, также может приобрести дополнительную пространственную скорость в ходе коллапса. Большая дополнительная скорость может или разрушить двойную систему — потенциальный мощный источник ГВ, или же наоборот — сделать орбиту системы более вытянутой, что увеличивает гравитационно-волновую светимость. В наших расчетах мы варьировали параметры w и $k_{\text{ВН}}$ в пределах, допускаемых наблюдательными ограничениями. При расчете эволюции также учитывался унос массы из

системы звездным ветром. Дополнительная скорость компактной звезды оказывается настолько существенным фактором эволюции двойных звезд, что ей посвящен отдельный раздел 2.3.

Результаты расчетов методом популяционного синтеза суммированы в разделе 3. Эти результаты в то же время являются нашими предсказаниями темпа регистрации сигналов от слияния различных типов тесных двойных звезд. Оценки показывают, что в заданном космологическом объеме пространства темп слияния двойных черных дыр примерно в 10 раз меньше, чем для двойных нейтронных звезд и систем нейтронная звезда – черная дыра. Однако, поскольку массы черных дыр значительно больше масс нейтронных звезд, пары черных дыр являются более мощными источниками ГВ, чем двойные нейтронные звезды. Поэтому сближающиеся черные дыры могут регистрироваться детектором с больших расстояний. Мы приходим к заключению, что лазерные интерферометры первой очереди чаще будут регистрировать сближения компонент двойных черных дыр, чем двойных нейтронных звезд, причем число таких регистраций в год будет примерно 2–3.

Раздел 4 посвящен транзиентным и периодическим источникам. К ним относятся вспышки сверхновых, различные неустойчивые моды быстро вращающихся нейтронных звезд и квазинормальные моды дрожаний черных дыр. Все эти источники интересны и потенциально детектируемы. Тем не менее мы не ставим их в начало нашего приоритетного списка. Асимметричные взрывы сверхновых, как и заключительные стадии слияния двойных звезд, являются источниками импульсов гравитационного излучения, но оценки эффективности этих процессов основаны на факторах, которые плохо известны теоретически и не имеют надежных наблюдательных оснований. Заключительному всплеску от сливающейся пары предшествует сигнал от фазы спирального сближения, но нельзя полагаться только на поиск этих всплесков. Однако если мы ошибаемся в наших приоритетах, то как раз особый тип асимметричных гиперновых может возглавить список. Что касается неустойчивых мод вращающихся нейтронных звезд, то для их возбуждения требуются специальные условия, и они могут подавляться вязкостью и иными физическими процессами. Интригующие возможности кроются в столкновениях черных дыр и квазинормальных модах только что образовавшихся черных дыр, но эти явления, скорее, будут вначале обнаружены в гравитационно-волновых наблюдениях, чем надежно рассчитаны из чисто теоретических соображений.

В разделе 5 дается обзор стохастических фонов ГВ астрофизического происхождения. Такие фоны образуются при перекрывании сигналов от многих индивидуальных источников. Мы рассматриваем популяцию двойных белых карликов в нашей Галактике и на космологических расстояниях, а также вращающиеся нейтронные звезды. Детектирование таких фонов само по себе содержало бы некоторую научную информацию, но есть и другая причина важности изучения этих источников. Эти стохастические сигналы создают дополнительный (гравитационный) шум, препятствующий детектированию более интересных сигналов. Мы приходим к выводу, что LISA будет свободна от влияния шума от неразрешенных двойных звезд на частотах выше 2×10^{-3} Гц. Основной шум вносят неразрешенные двой-

ные звезды нашей Галактики, а вклад от внегалактических двойных составляет не более 10% от галактического уровня. Таким образом, любой стохастический фон, обнаруженный на частотах выше 2×10^{-3} Гц в диапазоне чувствительности LISA, должен иметь догалактическое происхождение. Популяция неосесимметричных вращающихся нейтронных звезд потенциально могла бы создать дополнительный шум для наземных интерферометров. Однако мы находим, что этот шум ниже инструментального шума интерферометров первой очереди и может создать проблему только для детекторов типа LIGO второй очереди. Оценки показывают, что другие стохастические фоны от астрофизических источников еще ниже.

Раздел 6 посвящен реликтовым гравитационным волнам. В отличие от остальных источников, в основе которых лежит классическая физика, механизм генерации реликтовых гравитонов включает некоторые элементы квантовой физики. Именно неизбежные нулевые квантовые колебания ГВ, усиленные изменяющимся гравитационным полем в ранней Вселенной, образуют в конечном счете стохастический фон ГВ, который можно измерять в настоящее время. Несмотря на то что существование такого гравитационно-волнового сигнала опирается на квантовую физику, он не является менее надежным, чем многие другие источники. Генерация реликтовых гравитонов, в сущности, базируется только на общей теории относительности и основных принципах квантовой теории поля. Поскольку полагают, что тот же самый механизм отвечает за происхождение первичных флуктуаций плотности, из которых впоследствии формировались галактики, мы приводим его качественное описание в разделе 6.1. Расчет ожидаемого фона реликтовых ГВ приведен для класса космологических моделей, согласующихся с другими наблюдательными данными. В частности, мы используем данные по измерению анизотропии микроволнового фона. Результаты этого анализа приведены в разделе 6.6. Мы нашли, что в наиболее благоприятном случае детектирование реликтовых ГВ может быть осуществлено при взаимной корреляции сигналов с выходов двух лазерных интерферометров первого поколения. В более реалистическом случае потребуется повышенная чувствительность наземных интерферометров второй очереди и космических антенн. Мы также обсуждаем специфические статистические свойства реликтовых гравитонов, связанные с явлением "сжатых" квантовых состояний. Это явление также известно в стандартной квантовой механике и квантовой оптике. Статистические свойства сжатого состояния реликтовых гравитонов возможно удастся использовать для улучшения отношения сигнала к шуму.

Проблемы детектируемости ГВ систематически затрагиваются на протяжении всего обзора, однако строгое обсуждение детекторов и анализа данных сконцентрировано в разделах 7 и 8. Когда мы квалифицируем источник как детектируемый или недетектируемый, мы строим наши заключения на более детальном описании, приведенном в этих разделах. Раздел 7 содержит общее описание детекторов и их кривых чувствительности. Важным понятием при детектировании сигнала с известной временной структурой является понятие фильтра (template). Фильтр позволяет пользоваться техникой оптимальной фильтрации (раздел 8.1) для увеличения

отношения сигнала к шуму. Данный метод будет незамечен при поиске сигналов от сливающихся двойных звезд. К этому понятию следует добавить проблемы практически достижимого числа фильтров, их перекрытие в пространстве параметров, вычислительные затраты и т.д. Перечисленные проблемы важны не только для надежной регистрации сигнала, но и при извлечении астрофизической информации из сигнала (разделы 8.4, 8.5), что и является конечной целью гравитационно-волновой астрономии.

Некоторые математические детали кеплерова движения двойных систем и силы реакции гравитационного излучения описаны в приложении I. Приложение II содержит технические вопросы переноса и потери массы в двойных звездных системах. Приложение III описывает энергию и гравитационно-волновой поток в постньютоновском приближении. Основные выводы обзора сформулированы в заключении.

2. Астрофизические источники. Тесные двойные нейтронные звезды и черные дыры

В этом разделе мы обсуждаем наблюдательные и теоретические оценки частоты слияния тесных двойных нейтронных звезд и черных дыр. Мы начнем с обзора наблюдательных ограничений на частоту слияния нейтронных звезд. Затем мы опишем основы популяционного синтеза эволюции двойных, который позволяет теоретически предсказать частоту событий для систем, включающих в себя нейтронные звезды и черные дыры. Роль асимметрии коллапса и возникающей дополнительной скорости остатка обсуждается в разделе 2.3. Ожидаемая частота регистрации событий на вступающих в строй высокочувствительных гравитационно-волновых антеннах рассмотрена в разделе 3.

2.1. Наблюдательные ограничения частоты слияния двойных нейтронных звезд

Что мы знаем о компактных двойных звездах и частоте их слияния на основе *наблюдательных* данных? Более тысячи одиночных нейтронных звезд (NS) наблюдаются сегодня как радиопульсары (см. [18] и новые постоянно добавляемые данные в <http://puppsr.princeton.edu>). Кроме того, около 30 NS проявляют себя как рентгеновские пульсары, а еще более 100 — как вспыхивающие и транзистентные рентгеновские источники. Эти NS входят в двойные системы с невырожденными компаньонами, т.е. их компаньоны являются нормальными звездами, а не нейтронными звездами или черными дырами. Известны только шесть NS в двойных системах с другой NS в качестве вторичного компонента¹. Все шесть систем являются двойными радиопульсарами. Некоторые параметры этих систем приведены в табл. 1. Орбитальные периоды даны в сутках, а массы — в солнечных массах M_{\odot} . Три из этих систем (а именно, B1913 + 16, B1534 + 12 и B2127 + 11c) достаточно тесные, чтобы слиться из-за испускания гравитационных волн за время, меньшее хаббловского t_H . Мы называем двойные системы сли-

Таблица 1. Двойные PSR в парах с NS (данные из [23])

PSR	P_{orb} , сут	e	$M_1 + M_2$	M_1	M_2	t_{coal} , лет
J1518 + 4904	8,634	0,249	2,62	—	—	$\geq 3,6 \times 10^{12}$
B1913 + 16*	0,323	0,617	2,8284	1,44	1,39	$1,0 \times 10^8$
B1534 + 12*	0,420	0,274	2,6784	1,34	1,34	$1,0 \times 10^9$
B2127 + 11c*, **	0,335	0,681	2,712	1,35	1,36	$8,0 \times 10^7$
B2303 + 46	12,340	0,658	2,60	—	—	$\geq 1,6 \times 10^{12}$
B1820-11***	357,762	0,795	—	—	—	$\geq 2,4 \times 10^{15}$

* Сливающиеся двойные пульсары.
** Двойной пульсар в шаровом скоплении.
*** Вторичный компаньон может не быть NS.

вающимися, если ожидаемое время до момента их слияния t_{coal} короче, чем хаббловское время t_H . Для численных оценок мы использовали значение $t_H \sim 12 \times 10^9$ лет.

О черных дырах (ВН) известно намного меньше. Десяток кандидатов в ВН входят в состав двойных систем с невырожденными компонентами. Они известны как постоянные рентгеновские источники (подобные Cyg X-1) или как рентгеновские (в большинстве как рентгеновские новые, см. обзор [21]). Ни одной одиночной ВН или ВН в паре с радиопульсаром или другой ВН до сих пор не найдено. Параметры кандидатов в ВН в двойных системах приведены в табл. 2. Отметим, что согласно этим данным, средняя масса ВН $M_{\text{ВН}} \simeq 8,5 M_{\odot}$, т.е. заметно выше, чем типичная масса NS, составляющая $M_{\text{NS}} \simeq 1,4 M_{\odot}$. (Конечно, здесь мы подразумеваем черные дыры в астрофизическом смысле, т.е. как очень компактные гравитирующие объекты определенной массы. Наличие или отсутствие горизонта событий для нашей дискуссии не важны.) Современный обзор данных по определению масс NS приведен в [22].

Таблица 2. Кандидаты в черные дыры (из статьи [21])

Системы	Спектральный класс	P_{orb} , сут	$f_v(m)$, M_{\odot}	m_x , M_{\odot}	m_v , M_{\odot}
Cyg X-1	O9,7 Iab	5,6	0,23	7–18	20–30
LMC X-3	B(3–6) II–III	1,7	2,3	7–11	3–6
LMC X-1	O(7–9) III	4,2	0,14	4–10	18–25
A0620-00	K(5–7)V	0,3	3,1	5–17	$\sim 0,7$
GS2023 + 338	K0IV	6,5	6,3	10–15	0,5–1,0
GSR1121-68	K(3–5)V	0,4	3,01	9–16	0,7–0,8
GS2000 + 25	K(3–7)V	0,3	5,0	5,3–8,2	$\sim 0,7$
GRO J0422 + 32	M(0–4)V	0,2	0,9	2,5–5,0	$\sim 0,4$
GRO J1655-40	F5IV	2,6	3,2	4–6	$\sim 2,3$
XN Oph 1977	K3	0,7	4,0	5–7	$\sim 0,8$
Cyg X-3(?)					
Среднее значение массы ВН				$\sim 8,5 M_{\odot}$	

В настоящее время существуют две группы оценок частоты слияния NS. Оценки первой группы выведены напрямую из наблюдательных данных (табл. 3), оценки второй группы следуют из теории эволюции двойных звезд (табл. 4). Мы будем рассматривать группы по очереди.

Первая группа оценок основана на данных по трем радиопульсарам, которые должны слиться за время, меньшее хаббловского (см. табл. 1). В этих оценках используется следующая аргументация: среднее время слияния этих пульсаров приблизительно равно 3×10^8 лет. Поэтому частота слияния таких пульсаров

¹ Новые двойные пульсары найдены в последнем обзоре пульсаров (см., например, [19, 20]). Однако надежное определение масс компаньонов будет возможно только после существенно более длительных наблюдений.

Таблица 3. Наблюдательные оценки частоты слияния двойных NS

Статья	Частота слияний, год ⁻¹
Phinney 1991 [24]	1/10 ⁶
Narayan et al. 1991 [25]	1/10 ⁶
Curran, Lorimer 1995 [26]	3/10 ⁶
Van den Heuvel, Lorimer 1996 [27]	8/10 ⁶
Bailes 1996 [28]	< 1/10 ⁵
Arzoumanian et al. 1999 [29]	< 1/10 ⁴

Таблица 4. Теоретические оценки частоты слияния двойных NS

Статья	Частота слияний, год ⁻¹
Clark et al. 1979 [32]	1/10 ⁴ – 1/10 ⁶
Lipunov et al. 1987 [33]	1/10 ⁴
Hills et al. 1990 [34]	1/10 ⁴
Tutukov, Yungelson 1993 [35]	3/10 ⁴ – 1/10 ⁴
Lipunov et al. 1995 [36]	< 3/10 ⁴
Portegies Zwart, Spreeuw 1996 [37]	3/10 ⁵
Lipunov et al. 1996 [38]	3/10 ⁴ – 3/10 ⁵
Portegies Zwart, Yungelson 1998 [39]	~ 1/10 ⁴ – 3/10 ⁵
Bethe, Brown 1999 [40]	~ 1/10 ⁴

будет около одного события за 100 миллионов лет. Так как мы наблюдаем только около 1 % объема Галактики, *нижний* предел частоты слияния двойных NS составит одно событие в миллион лет [24]. Впервые такая оценка была сделана, когда были открыты только два из трех известных сегодня сливающихся пульсаров. С учетом пространственного распределения пульсаров в Галактике и того факта, что типичные радиопульсары выключаются задолго до слияния, оценка нижнего предела частоты слияния нейтронных звезд может быть увеличена по крайней мере почти на порядок величины [27], что составляет 10⁻⁵ в год.

Другая оценка интересующей нас величины, так называемый "предел Бейлиса", была получена независимым образом [28]. Было замечено, что свойства радиопульсаров в трех сливающихся двойных системах (в первую очередь магнитные поля на их поверхности) существенно отличаются от свойств обычных одиночных пульсаров. Поскольку общее число последних достигает примерно 1000, то был сделан вывод, что сливающиеся двойные системы с пульсарами, близкими по свойствам к одиночным, образуются по крайней мере в 1000 раз реже, чем рождаются одиночные радиопульсары. Взяв темп рождения одиночных пульсаров из наблюдательных данных, Бейлис смог найти верхний предел частоты рождения двойных нейтронных звезд: (частота рождения одиночных пульсаров) × (число пульсаров с обычными свойствами среди двойных радиопульсаров) = (1/60 год⁻¹) × (1/1000) ≈ 2 × 10⁻⁵ год⁻¹.

Заметим, однако, что обе оценки — и основанная на сливающихся двойных радиопульсарах, и связанная с пределом Бейлиса — подвержены эффектам селекции. Они зависят от расстояния до пульсаров (которое в некоторых случаях известно с точностью до фактора 2)², от характеристического возраста пульсаров (известного с точностью до порядка величины) и от различия

свойств одиночных и двойных пульсаров. То есть из наблюдений нельзя получить абсолютно надежную оценку частоты слияния двойных NS. В самом деле, последняя оценка предела Бейлиса [29] с учетом современного количества пульсаров, исправленного на меньшую чувствительность при поиске пульсаров с короткими орбитальными периодами, дает верхний предел частоты слияния двойных NS в Галактике 10⁻⁴ год⁻¹. Альтернативный вывод верхнего предела, основанный на эмпирической частоте рождения пульсаров и теоретическом понимании процессов образования двойных NS, был использован в [31] и дал несколько событий за 10⁵ лет. В указанной статье ясно показано, что 1) существует устойчивая тенденция к *росту* эмпирического верхнего предела частоты слияния двойных NS и 2) что различные селекционные эффекты, общие для всех пульсарных обзоров неба, и отсутствие детальных знаний о свойствах галактической популяции радиопульсаров не позволяют нам получить полностью надежные оценки.

2.2. Популяционный синтез сливающихся двойных NS и ВН

Теперь мы вернемся к оценкам, частично основанным на теоретических аргументах. Частота слияний двойных компактных звезд была рассчитана различными независимыми исследовательскими группами, в основном с помощью метода популяционного синтеза (см. табл. 4). Достоверность этих результатов зависит от того, насколько правильно конкретный сценарий эволюции двойных систем воспроизводит различные свойства реально наблюдаемых популяций. Обнадешивает тот факт, что независимые вычисления различных групп дают похожие результаты.

Теоретические оценки частоты слияний двойных NS систематически выше, чем наблюдательные, в среднем на порядок величины. Это не означает, что данные оценки конфликтуют друг с другом. Главная причина расхождения в том, что по наблюдательным данным оценивается частота слияния двойных NS, по крайней мере одна из компонент которых является радиопульсаром. Присутствие пульсара в такой двойной системе, конечно, не является *необходимым* для того, чтобы эта система была интересной с точки зрения гравитационно-волновой астрономии. Например, нейтронные звезды могут рождаться со слабым магнитным полем и/или с медленным вращением и из-за этого могут никогда не проявлять себя как радиопульсары. Теоретические расчеты обеспечивают более широкий диапазон оценок потому, что они зависят от нескольких эволюционных параметров, которые плохо известны. Однако популяционный синтез оказывается единственным методом, позволяющим оценивать частоты слияния до сих пор не наблюдавшихся компактных двойных, состоящих из двух ВН или ВН и NS. Такие системы очень важны для гравитационной астрономии. Ниже, в разделе 2.3, мы рассмотрим результаты популяционного синтеза для всех возможных пар: NS+NS, NS+ВН и ВН+ВН.

Основы популяционного синтеза. Частоты слияний различных типов компактных двойных звезд рассчитываются с помощью современной теории эволюции звезд (см., например, книгу [41] и цитируемую в ней литературу). Полное описание метода можно найти в [38]. Некоторые наиболее важные формулы приведены в приложении II.

² Например, последние наблюдения пульсара PSR 1534+12 [30] указывают на расстояние в два раза большее, чем считалось ранее, поэтому "наблюдательные оценки" слияний двойных NS могут быть уменьшены примерно вдвое.

Двойные звезды образуются с различными начальными массами, полуосями, эксцентриситетами и т.д. Эти начальные параметры берутся из определенных законов распределения. Кроме того, есть и другие физические параметры, важные для эволюции двойных, такие как эффективность уноса углового момента на стадии с общей оболочкой $\alpha_{\text{СЕ}}$ или распределение дополнительной скорости $f(\mathbf{w})$, приобретаемой молодыми нейтронными звездами при рождении. Таким образом, для того, чтобы рассчитать ожидаемый темп слияний двойных звезд, необходимо получить число двойных, образовавшихся во всех соответствующих областях пространства параметров и затем их просуммировать. Некоторые распределения могут быть более или менее аккуратно получены из астрономических наблюдений. Это относится к функции распределения начальных масс звезд и полуосям орбит. Другие распределения основываются на теоретических предположениях. Мы проводили эволюционные расчеты, используя "машину сценариев" — Монте-Карло-версию метода популяционного синтеза (см. [38] в качестве обзора). В типичном численном эксперименте производится расчет $\sim 10^6$ эволюционных треков двойных систем с различными начальными параметрами. Подобный подход к исследованию эволюции двойных использовался и другими группами (см., например, [39]) и получил название "метод популяционного синтеза".

Начальные параметры двойных. В качестве начальных компонент двойных систем берутся звезды главной последовательности нулевого возраста. Начальными параметрами, которые определяют последующую эволюцию двойных, являются: масса первичной компоненты M_1 , отношение масс в системе $q = M_2/M_1 < 1$ и полуось орбиты a . Начальный эксцентриситет у достаточно тесных двойных, из которых развиваются сливающиеся NS или BH, мы полагали равным нулю. Это предположение вполне оправдано, поскольку приливное взаимодействие компонент в таких системах эффективно циркуляризирует их орбиты.

Распределение двойных по начальным полуосям орбит получено из наблюдений [42]:

$$f(\log a) = \text{const, для таких } a, \text{ что} \\ \max\{10R_{\odot}, \text{ полость Роша } (M_1)\} < a < 10^7 R_{\odot}. \quad (1)$$

Мы предполагали, что распределение масс первичных (более массивных) компонент подчиняется закону Солпитера, полученному для одиночных звезд главной последовательности в окрестности Солнца [43]:

$$f\left(\frac{M_1}{M_{\odot}}\right) = \left(\frac{M_1}{M_{\odot}}\right)^{-2,35}. \quad (2)$$

Наблюдаемый темп звездообразования в галактическом диске связан с этим распределением следующим образом:

$$\frac{dN}{d(M_1/M_{\odot}) dt} = 0,9 \text{ год}^{-1} f\left(\frac{M_1}{M_{\odot}}\right), \\ 0,1M_{\odot} < M_1 < 120M_{\odot}. \quad (3)$$

Если считать, что 50 % от общего числа звезд в Галактике входит в состав двойных систем, то данное распределение предсказывает рождение одной массивной звез-

ды (с массой $M_1 > 10M_{\odot}$, такие звезды порождают компактные остатки) в двойной системе примерно каждые 60 лет. Эта оценка совпадает с частотой рождения, выведенной из наблюдений двойных звезд [44].

Начальное отношение масс q в двойной системе очень существенно для ее последующей эволюции [45], потому что оно определяет ход первого обмена массами между компонентами. Начальное распределение по q не может быть надежно выведено из-за различных эффектов селекции. Обычно используется "нулевое предположение", согласно которому распределение отношений масс имеет плоскую форму, т.е. двойные с высоким отношением масс образуются столь же часто, как и системы с примерно равными массами (см. [41]):

$$\frac{dN}{dq} = \text{const}, \quad q \equiv \frac{M_2}{M_1} < 1. \quad (4)$$

В расчетах, представленных далее в разделе 2.2, мы использовали именно это предположение. Влияние начального распределения q на статистику двойных пульсаров исследовано в [46].

Дополнительная скорость нейтронных звезд. В ходе эволюции массивных двойных звезд могут образовываться одна или две нейтронные звезды. Наиболее важным параметром, влияющим на возможный темп их слияний, является дополнительная скорость \mathbf{w} , приобретаемая нейтронной звездой при рождении в результате вспышки сверхновой. Существует достаточное количество наблюдательных указаний на наличие такой скорости. Влияние дополнительной скорости $\sim 100 \text{ км с}^{-1}$ объясняет прецессию орбиты двойного пульсара PSR J0045-7319 [47]. Указанием на наличие дополнительной скорости является наклоненный относительно орбитальной плоскости диск вокруг Be-звезды SS 2883 — оптического компонента двойного пульсара PSR B1259-63 [48]. Еще одно прямое указание на наличие дополнительной скорости вытекает из наблюдения геодезической прецессии в знаменитом двойном пульсаре PSR 1913+16 [49, 50]. Все эти наблюдения указывают, что для создания наблюдаемой несоосности между орбитальным угловым моментом и осью вращения нейтронной звезды необходима компонента дополнительной скорости, перпендикулярная орбитальной плоскости. Ненулевая дополнительная скорость также нужна для объяснения наблюдаемых свойств распределения пульсаров по скоростям³.

Скорее всего, происхождение дополнительной скорости связано с асимметрией взрыва сверхновой. Астрофизические указания на существование большой дополнительной скорости обсуждались в [53] и недавно собраны в [54, 55]. Однако, какой именно физический механизм отвечает за дополнительную скорость, все еще не ясно (см. обзор в [56]). Для малых и умеренных дополнительных скоростей (менее 100 км с^{-1}) многообещающими являются механизмы, связанные с асимметричным испусканием нейтрино в сильных магнитных полях нейтронных звезд [57, 58].

Пространственные скорости нейтронных звезд обычно выводятся из прямых наблюдений собственных движений одиночных радиопулсаров [59, 60]. Или, с большей неопределенностью, из наблюдаемого смеще-

³ С альтернативной точкой зрения можно ознакомиться в [51], а с ее критикой — в [52].

ния положения молодых пульсаров относительно центров связанных с ними остатков сверхновых (например, [61]). Оба метода, однако, определяют только поперечную компоненту скорости. Кроме того, нельзя забывать о существующей неопределенности расстояний до пульсаров, которая влияет на определяемую дополнительную скорость. В среднем неопределенность расстояний составляет $\sim 30\%$ [62], а в отдельных случаях может достигать двух раз. Вообще, наблюдаемое распределение трансверсальных скоростей пульсаров обладает следующими свойствами: высоким средним значением ($\sim 200 - 350 \text{ км с}^{-1}$) и широкой формой с высокоскоростным хвостом, тянущимся до 1500 км с^{-1} .

Получить исходное распределение дополнительных скоростей по этим данным — достаточно трудная проблема. Если бы все пульсары, которые сегодня являются одиночными, произошли из одиночных массивных звезд, то распределение их скоростей точно отражало бы начальное распределение дополнительных скоростей, поскольку одиночные массивные звезды обладают очень малыми пространственными скоростями (порядка 10 км с^{-1}). Однако, когда взрыв сверхновой происходит в двойной системе, которая в результате него может распасться, нейтронная звезда может дополнительно приобрести существенную пространственную скорость, равную орбитальной скорости предсверхновой, даже при отсутствии дополнительной скорости, вызванной асимметрией взрыва. Если же ненулевая дополнительная скорость присутствует, то решить аналитически обратную задачу нахождения распределения дополнительной скорости по известному наблюдаемому распределению скоростей пульсаров становится практически невозможно.

Таким образом, единственный способ проверить само предположение о ненулевой дополнительной скорости — это задать теоретическое распределение дополнительных скоростей, численно рассчитать вытекающее из него распределение пульсарных скоростей и сравнить результат с наблюдениями. Это обычно осуществляется с помощью моделирования эволюции двойных методом Монте-Карло. Пока нет согласия в вопросе о виде распределения дополнительной скорости. Максвелловское распределение для $w = |\mathbf{w}|$

$$f_M(w) \propto w^2 \exp\left(-\frac{w^2}{w_0^2}\right) \quad (5)$$

с $w_0 = 190 \text{ км с}^{-1}$ использовали Хансен и Финни [63]. Другой вид распределения был предложен в [46]. Это распределение хорошо описывает двумерное распределение скоростей пульсаров, найденное Лайном и Лори-мером [59]. В отличие от максвелловского это распределение имеет степенной вид:

$$f_{LL}(|\mathbf{w}|) \propto \frac{(|\mathbf{w}|/w_0)^{0,19}}{[1 + (|\mathbf{w}|/w_0)^{6,72}]^{0,5}}, \quad (6)$$

где $w_0 \approx 400 \text{ км с}^{-1}$. В наших расчетах, описанных в разделах 2.3 и 3, мы использовали последнюю форму распределения, при этом w_0 считалось свободным параметром. Влияние дополнительной скорости на темп слияния нейтронных звезд было исследовано в [64, 65]. Мы приведем детальный анализ этих эффектов в разделе 2.3.

Образование и слияние двойных нейтронных звезд. Мы интересуемся эволюционными треками, которые приводят к образованию пар сливающихся NS. В литературе можно найти детальное исследование путей эволюции, которые порождают сливающиеся двойные NS (например, [35, 39, 64, 66, 67]). Обычно эволюционный анализ проводится в следующей последовательности: начинают с наблюдаемых параметров двойной NS, затем из них пытаются вывести параметры предсверхновой, а из них — начальные массы и орбиту системы. В противоположность этому в популяционном синтезе с Монте-Карло-моделированием, который мы применяем, рассчитывают эволюцию пробных двойных, добиваясь подходящих результатов путем изменения начальных параметров внутри их распределений. Один типичный рассчитанный трек изображен на рис. 1, мы детально его рассмотрим.

Тесные двойные NS образуются из двух достаточно массивных звезд главной последовательности, разделенных расстоянием порядка 100 радиусов Солнца (1-я строка на рис. 1). Для того чтобы в ходе эволюции

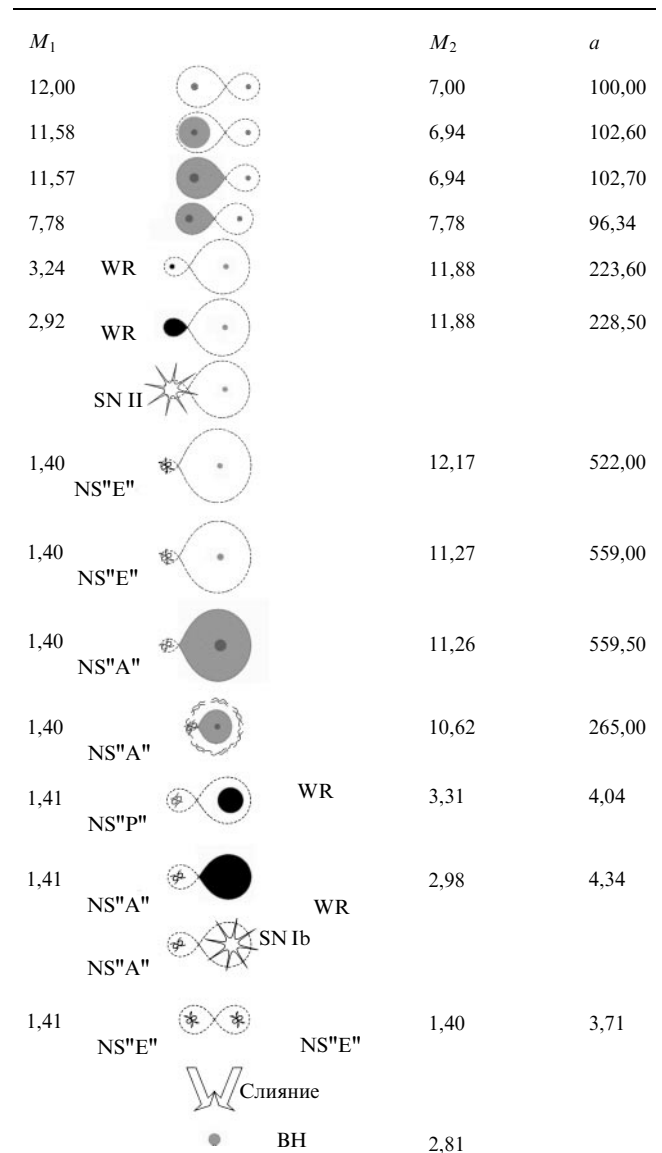


Рис. 1. Эволюционный трек массивной двойной системы, приводящий к образованию и слиянию двух NS.

образовалась NS, начальная масса звезды должна быть изначально больше $\approx 10M_{\odot}$ или с учетом возможных процессов переноса массы в тесных двойных она должна достичь массы $\approx 10M_{\odot}$ на стадии ядерного горения. Чем больше масса звезды, тем быстрее она эволюционирует. Для звезд главной последовательности время горения водорода в ядре пропорционально $t_{\text{nucl}} \propto M^{-2}$. После выгорания водорода в центральных областях звезды там образуется плотное гелиевое ядро с массой $M_{\text{He}} \sim 0,1(M/M_{\odot})^{1,4}$. Примерно в это время звезда покидает главную последовательность. Внешняя оболочка звезды расширяется, и она переходит в область красных гигантов на диаграмме Герцшпрунга – Рассела. На некоторой стадии эволюции звезда заполняет свою полость Роша (см. формулу (П.42)) (3-я строка на рис. 1). Водородная оболочка начинает перетекать на вторую, менее массивную звезду, которая все еще находится на главной последовательности. Первичная звезда будет непрерывно терять водородную оболочку до тех пор, пока не оголится гелиевое ядро. Ядро может наблюдаться как горячая компактная гелиевая звезда или, для более массивных звезд, как звезда Вольфа – Райе с интенсивным звездным ветром (5-я строка).

Масса первичной звезды уменьшается, а второй — растет, на этой стадии обмен масс происходит квазиконсервативно. У не слишком массивных ($M \lesssim 20M_{\odot}$) звезд главной последовательности нет сильного звездного ветра, который мог бы унести достаточное количество вещества из системы. Вторичная компонента приобретает большой угловой момент, приходящий вместе с падающим веществом, так что ее внешние слои раскручиваются до высоких угловых скоростей, близких к предельной (орбитальной кеплеровской) величине. Такие массивные быстро вращающиеся звезды наблюдаются как Ве-звезды. В ходе консервативного обмена масс большая полуось орбиты сначала убывает, достигает минимума, когда массы компонент двойной становятся равными друг другу, а затем возрастает. Такое поведение диктуется законом сохранения углового момента (формула (П.26)). После завершения стадии консервативного обмена масс изначально более массивная компонента становится менее массивной, чем ее компаньон. Параметр $q = M_2/M_1$ становится больше единицы. За короткое время, обычно около 10 % от времени горения водорода, ядерная эволюция гелиевой звезды завершается и, если ее масса превышает $2-3M_{\odot}$, то происходит взрыв сверхновой 2-го типа с коллапсом ядра, после которого остается нейтронная звезда.

Даже при асимметричных взрывах сверхновых большинство таких двойных не распадается. Это происходит из-за того, что отношение масс предсверхновой двойной системы $q = M_2/M_1$ в общем случае оказывается велико, $q \sim 3-5$. После первого взрыва SN двойная система состоит из Ве-звезды и NS на эллиптической орбите (8-я строка). Эволюция орбиты после взрыва сверхновой более детально описана в приложении (формулы (П.35) – (П.40)).

Ве-звезды обладают очень быстро вращающейся оболочкой, но в остальных аспектах они не отличаются от обычных звезд главной последовательности. После завершения горения водорода в ядре Ве-звезды она начинает расширяться, пока не станет заполнять свою полость Роша при прохождении периастра эллиптической орбиты (10-я строка). Начинается второй эпизод

обмена массой, который проходит в тепловой шкале Ве-звезды — с типичным темпом порядка $10^{-6}M_{\odot}$ в год. Однако этот обмен массой качественно отличается от первого, поскольку масса переносится на компактную звезду. Когда темп аккреции превысит величину, при которой энерговыделение вблизи поверхности NS становится больше эддингтоновского предела светимости ($\sim 10^{-8}M_{\odot}$ в год), NS не сможет принять все падающее вещество. Начинается так называемая стадия с общей оболочкой (11-я строка), в ходе которой нейтронная звезда находится в достаточно плотных внешних слоях звезды-компаньона. Численные гидродинамические расчеты [68, 69] показывают, что динамическое трение нейтронной звезды эффективно передает ее орбитальный угловой момент общей оболочке, которая рассеивается за очень короткое время (типичное значение — 10^3-10^4 лет). Большая полуось двойной системы сильно уменьшается (П.41). В результате этих процессов формируется тесная двойная система, состоящая из NS и WR-звезды (12-я строка). Другой возможный исход — погружение NS в соседний красный гигант (образуется так называемый объект Торна – Житковой; на рисунке не показан).

Через короткое время ($\lesssim 10^5$ лет) звезда WR взрывается как сверхновая типа Ib и порождает вторую нейтронную звезду. В результате второго взрыва системы распадаются гораздо чаще, чем в результате первого, поскольку в этот раз взрывается более массивная, чем ее компаньон, звезда. Нераспавшиеся системы образуют тесные высокоэксцентричные двойные NS, похожие на двойной пульсар PSR 1913+16. Орбитальные параметры в дальнейшем изменяются только вследствие излучения гравитационных волн (см. приложение I). Если эти системы достаточно тесные, их время слияния меньше t_H .

Параметры образования черных дыр. До сих пор мы рассматривали образование одиночных и двойных NS. Считается, что очень массивные звезды заканчивают свою эволюцию образованием черных дыр звездной массы. Здесь мы обсудим формирование индивидуальных черных дыр.

При анализе формирования ВН появляются новые важные параметры. В первую очередь — это пороговая масса звезды главной последовательности M_{cr} , при превышении которой звезда, после окончания ее ядерной эволюции, может сколлапсировать в ВН. Эта масса не слишком хорошо известна, различные авторы предполагают различные ее значения, например, $40M_{\odot}$ [70], $60M_{\odot}$ [71], более $20M_{\odot}$ [72]. Простые физические аргументы, обычно приводимые в литературе, заключаются в том, что оболочка звезды главной последовательности с массой $M > M_{\text{cr}} \approx 30M_{\odot}$ обладает энергией связи, превышающей 10^{51} эрг (типичная энергия наблюдаемых сверхновых), так что взрыв сверхновой оказывается недостаточно сильным, чтобы разметать оболочку звезды.

Второй параметр — масса формирующейся черной дыры $M_{\text{ВН}}$. Вопрос о массах ВН рассматривался в целом ряде работ (например, [40, 73–75]). В некоторых из них получалось, что типичная масса ВН не может быть существенно больше, чем верхний предел масс нейтронных звезд (предел Оппенгеймера – Волкова, $\sim 1,6-2,5M_{\odot}$, который зависит от неизвестного уравнения состояния вещества нейтронной звезды), даже если возможно выпадение части вещества оболочки на оста-

ток [73]. Однако наблюдения решительно указывают в сторону больших масс кандидатов в ВН, порядка $6-10M_{\odot}$ (см. табл. 2). Чтобы получить такие массы ВН, в работе [40] было сделано предположение, что $M_{\text{сг}} \sim 80M_{\odot}$. В недавних расчетах [75] был получен спектр масс ВН, непрерывный до $10-15M_{\odot}$. Поскольку сегодняшние расчеты не способны самосогласованно воспроизвести даже взрыв сверхновой, мы параметризовали массы черных дыр $M_{\text{ВН}}$ заданием доли массы предсверхновой M_* , которая коллапсирует в ВН: $k_{\text{ВН}} = M_{\text{ВН}}/M_*$. Фактически масса предсверхновой M_* напрямую связана с $M_{\text{сг}}$, но это соотношение имеет различный вид для различных сценариев эволюции массивных звезд. Согласно нашей параметризации минимальная масса ВН может быть $M_{\text{ВН}}^{\text{min}} = k_{\text{ВН}}M_*$, где M_* само зависит от $M_{\text{сг}}$. Мы варьировали $k_{\text{ВН}}$ в широком интервале от 0,1 до 1.

Третий параметр, такой же, как и в случае NS, — это дополнительная скорость $w_{\text{ВН}}$, приобретаемая новорожденной ВН. Из общих соображений можно ожидать, что ВН будут обладать меньшими дополнительными скоростями, чем NS, поскольку черные дыры более массивны. В наших расчетах мы использовали соотношение

$$\frac{w_{\text{ВН}}}{w_{\text{NS}}} = \frac{M_* - M_{\text{ВН}}}{M_* - M_{\text{OV}}} = \frac{1 - k_{\text{ВН}}}{1 - M_{\text{OV}}/M_*}, \quad (7)$$

где $M_{\text{OV}} = 2,5M_{\odot}$ — максимальная масса NS. Когда $M_{\text{ВН}}$ близка к M_{OV} , отношение $w_{\text{ВН}}/w_{\text{NS}}$ стремится к 1, т.е. маломассивные черные дыры приобретают такую же дополнительную скорость, что и нейтронные звезды. Когда же $M_{\text{ВН}}$ значительно выше M_{OV} , то параметр $k_{\text{ВН}} = 1$, и дополнительная скорость ВН становится пренебрежимо малой⁴. Как мы покажем в разделе 3.2, учет даже умеренных $w_{\text{ВН}}$ приводит к резкому возрастанию темпа слияния двойных ВН. Последние исследования пространственных скоростей некоторых кандидатов в ВН не выявили необходимости ненулевой $w_{\text{ВН}}$ [76]. Однако другие работы показывают, что некоторая дополнительная скорость может возникать при образовании ВН, и ее присутствие не противоречит наблюдательным данным [77]. С теоретической точки зрения умеренная дополнительная скорость приобретаемая при образовании ВН выглядит вполне правдоподобно [75].

Слияние черных дыр при $w_{\text{ВН}} = 0$. Типичный пример. Начнем с простейшего предположения $w_{\text{ВН}} = 0$. Более реалистичные случаи с $w_{\text{ВН}} \neq 0$ будут рассматриваться в разделе 2.3. В отличие от двойных систем NS+NS двойные системы ВН+ВН и ВН+NS до сих пор не наблюдались. Соответственно, нет возможности вывести из наблюдений интервал возможных прогениторов таких двойных систем. Мы можем только применить метод популяционного синтеза и получить параметры всех двойных, включая ВН+ВН и ВН+NS, которые появляются в конце эволюции очень массивных двойных звезд.

В дополнение к неопределенностям хода эволюции звезд, превращающихся в двойные NS, для очень массивных звезд с начальными массами выше $M \gtrsim 40M_{\odot}$

появляются новые неопределенности. Прежде всего, это большая потеря массы за счет звездного ветра, который наблюдается у таких звезд. Согласно современным взглядам, массивные одиночные звезды могут терять более половины своей начальной массы уже на главной последовательности. Дальнейшее быстрое уменьшение массы ожидается на стадии гелиевой звезды. Согласия по вопросу об описании такой потери вещества нет. Однако можно рассмотреть два предельных случая уноса массы звездным ветром: медленную и очень быструю. Поскольку точный ход потери массы звездным ветром неизвестен, мы в нашем численном моделировании принимали во внимание обе возможности (детальнее см. [64]). Типичный эволюционный трек, приводящий к образованию сливающейся двойной черной дыры, показан на рис. 2.

Перед тем как перейти к эволюционным расчетам, мы качественно объясним, каким образом могут формироваться сливающиеся двойные ВН даже при экстремально высокой потере массы. Большая потеря массы делает системы шире, согласно уравнению (П.29), так что система должна была быть гораздо теснее до начала фазы активной потери массы. Рассмотрим две уже существующие черные дыры, каждая массой $10M_{\odot}$, на круговой орбите. Для того чтобы время слияния было меньше $t_{\text{Н}}$, орбитальное расстояние должно быть $< 20R_{\odot}$ (см. рис. 19 в приложении I). Это означает, что радиус Вольфа–Райе (гелиевой) звезды, которая коллапсирует

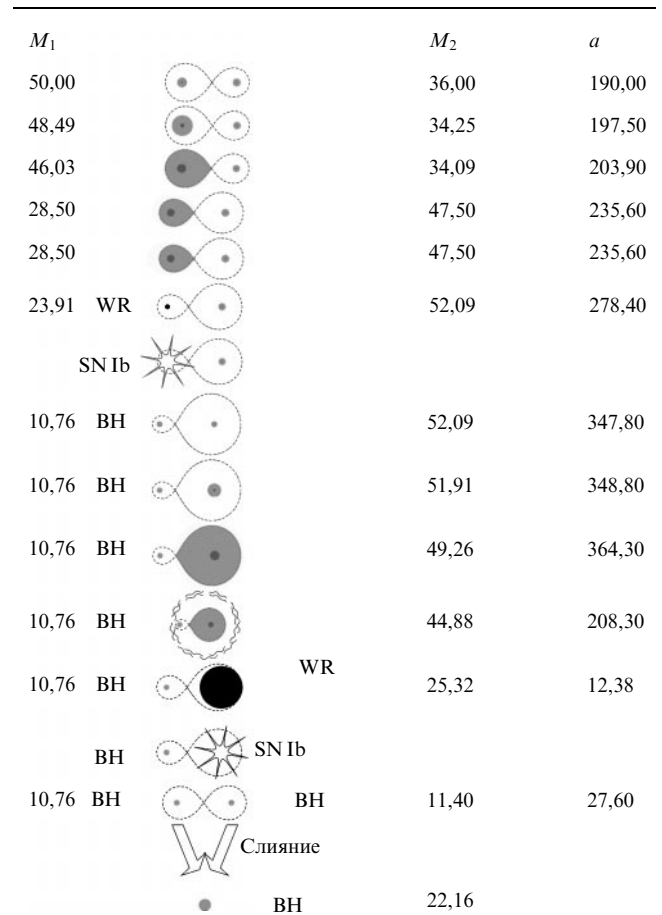


Рис. 2. Эволюционный трек массивной двойной, приводящий к образованию и слиянию двух ВН. Использован сценарий малого уноса массы звездным ветром.

⁴ Были проверены и другие возможные соотношения между $w_{\text{ВН}}$ и w_{NS} , но это не сказалось существенно на результатах.

второй и тоже образует ВН, должен быть меньше $10R_{\odot}$. Масса звезды до коллапса не может быть меньше $10M_{\odot}$, поскольку $k_{\text{ВН}} \leq 1$. Подобные массивные гелиевые звезды имеют очень малый радиус ($\sim 1R_{\odot}$) и не слишком сильно расширяются перед коллапсом, так что требование $R < 10R_{\odot}$ выполняется. Время жизни массивных гелиевых звезд примерно 10^5 лет, поскольку они с высокой скоростью (порядка $10^{-5}M_{\odot}$ в год) теряют массу. Такая звезда может потерять существенную долю своей массы, например, половину, до коллапса. Таким образом, мы будем иметь дело с гелиевой звездой с массой $20M_{\odot}$ в паре с ВН с массой $10M_{\odot}$ на круговой орбите с радиусом $a \approx 13R_{\odot}$ (для расчета радиуса орбиты мы использовали формулу (П.29)). Заметим, что полость Роша вокруг гелиевой звезды массой $20M_{\odot}$ имеет радиус $8R_{\odot}$, что гораздо больше радиуса самой звезды. Для образования такой тесной двойной WR+ВН необходима стадия с общей оболочкой. Гелиевое ядро с массой $20M_{\odot}$ соответствует, по крайней мере, звезде главной последовательности с массой $55M_{\odot}$, как следует из (П.44). Согласно моделям [78], массивные звезды теряют на главной последовательности примерно половину своей начальной массы, так что для образования ВН с массой $10M_{\odot}$ звезда должна потерять $\sim 25M_{\odot}$ на стадии главной последовательности. Это означает, что фаза общей оболочки должна начаться, когда красный сверхгигант с массой $30M_{\odot}$ в паре с ВН с массой $10M_{\odot}$ заполнит свою полость Роша. Отношение масс в подобной системе достаточно велико для того, чтобы общая оболочка образовалась. Полуось орбиты в ходе стадии с общей оболочкой уменьшается в 6–12 раз, согласно уравнению (П.43), в зависимости от параметра $\alpha_{\text{СЕ}}$ и точного значения массы красного гиганта. Таким образом, до начала общей оболочки размер орбиты должен был быть $\sim 130R_{\odot}$. В момент образования первой черной дыры орбита должна была быть несколько меньше (порядка $120R_{\odot}$ или менее) из-за действия мощного ветра красного гиганта и большой потери массы системы. Для того чтобы первичная звезда сколлапсировала первой, ее масса должна составлять, по крайней мере, $60M_{\odot}$ (т.е. должна быть выше, чем у вторичного компонента с $55M_{\odot}$). Полагая звездный ветер изотропным и используя соотношение (П.29), мы заключаем, что начальная система стала шире максимум в $(60 + 55)/(10 + 30) \approx 3$ раза с момента образования до начала общей оболочки, т.е. начальная полуось орбиты должна была превышать $40R_{\odot}$. Начальная полуось $50R_{\odot}$ достаточна для того, чтобы вместить две звезды с $60M_{\odot}$, чьи радиусы не превышают $20R_{\odot}$ на главной последовательности. Подобные массивные и тесные системы редки, тем не менее, они существуют. И мы видим, что некоторая доля массивных двойных звезд должна заканчивать свою эволюцию в виде очень тесных пар черных дыр.

2.3. Влияние дополнительной скорости

Картина, нарисованная в предыдущем разделе, изменяется, если в процессе своего образования NS и ВН приобретают дополнительную скорость. В свою очередь, это оказывает существенное влияние на частоту слияний компактных двойных, которые представляют для нас основной интерес. В общем случае, образование компактных объектов (NS и ВН) сопровождается как выбросом массы из системы, так и дополнительной скоростью. Роль дополнительной скорости в процессе

взрыва сверхновой в двойной системе рассматривалась в большом числе работ (см., например, [79, 80] и приложение II). Наиболее общие формулы условий распада системы и параметров получившейся орбиты, если система остается связанной, выведены в приложении II, см. (П.35), (П.36), (П.38). Здесь мы представим качественные аргументы, позволяющие читателю увидеть основные последствия ненулевой дополнительной скорости. Мы рассматривали только круговые орбиты перед взрывом и полагали равновероятными все возможные ориентации вектора дополнительной скорости \mathbf{w} . Мы показываем, что умеренная (не слишком большая) дополнительная скорость увеличивает частоту слияний двойных. Это происходит из-за того, что умеренная дополнительная скорость не меняет слишком сильно вероятность распада системы, но всегда делает периастр получающейся эллиптической орбиты меньше, чем при отсутствии дополнительной скорости. В результате этого некоторые двойные, чье время слияния без дополнительной скорости было бы больше $t_{\text{Н}}$, теперь получают шанс слиться за время меньшее $t_{\text{Н}}$. Это увеличивает число детектируемых источников гравитационных волн.

Влияние дополнительной скорости на распад двойных систем. Процессы коллапса звезд в ВН или взрывы, приводящие к образованию NS, обычно рассматриваются как мгновенные. Это предположение оправдано для двойных систем, поскольку типичные орбитальные скорости перед взрывом не превосходят нескольких сот км с^{-1} , в то время как большая часть сброшенной массы движется со скоростями в несколько тысяч км с^{-1} . Если после взрыва звезда массы M_1 превращается в остаток M_c , то система теряет массу $\Delta M = M_1 - M_c$. Относительная скорость звезд перед взрывом есть

$$V_i = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a_i}}. \quad (8)$$

Сразу после него она становится равной

$$\mathbf{V}_f = \mathbf{V}_i + \mathbf{w}. \quad (9)$$

В зависимости от ориентации вектора дополнительной скорости \mathbf{w} , абсолютная величина \mathbf{V}_f меняется в интервале от наименьшего $V_f = |V_i - w|$ до наибольшего $V_f = V_i + w$ значений. Система распадется, если (см. приложение II):

$$V_f \geq V_i \sqrt{\frac{2}{\chi}}, \quad (10)$$

где $\chi \equiv (M_1 + M_2)/(M_c + M_2)$.

Начнем с предельного случая, когда потеря массы практически равна нулю ($\Delta M = 0$, $\chi = 1$), но присутствует ненулевая дополнительная скорость. Эта модель описывает образование ВН при $k_{\text{ВН}} = 1$. Из формулы (10) вытекает, что при относительно малой дополнительной скорости $w < (\sqrt{2} - 1)V_i$ система всегда остается связанной (вне зависимости от направления вектора \mathbf{w}), а при $w > (\sqrt{2} + 1)V_i$ двойная всегда распадается. Усредняя равновероятные ориентации вектора \mathbf{w} с фиксированной амплитудой w , можно показать, что в характерном случае $w = V_i$ система распадается или выживает с равными вероятностями. Если $V_f < V_i$, то полуось системы становится меньше, чем до взрыва, $a_f < a_i$ (см.

формулу (П.35)). Это означает, что система становится более связанной, чем была, т.е. ее (отрицательная) полная энергия становится ниже, чем у исходной двойной. При $V_i < V_f < \sqrt{2}V_i$ система остается связанной, но $a_f > a_i$. Для малых и умеренных дополнительных скоростей $w \lesssim V_i$ вероятности того, что система станет более или менее связанной, приблизительно равны.

В более общем случае система теряет некоторую долю своей массы ΔM . Для случая формирования ВН это соответствует $k_{\text{ВН}} < 1$. В отсутствие дополнительной скорости система остается связанной, если $\Delta M < M/2$, и распадается, если $\Delta M \geq M/2$ (см. приложение II). Ясно, что при специально направленной дополнительной скорости (противоположно вектору V_i) система может остаться двойной, даже если бы она распалась без дополнительной скорости. А с другой стороны, неудачное направление w может разрушить систему, которая иначе осталась бы связанной.

Рассмотрим вначале случай $\Delta M < M/2$. Параметр χ меняется от 1 до 2, а скорость убегания (параболическая скорость) V_e — от $\sqrt{2}V_i$ до V_i (см. приложение II). Из формулы (П.39) следует, что двойная всегда остается связанной при $w < V_e - V_i$ и всегда распадается при $w > V_e + V_i$. Это есть обобщение формул, выведенных выше для предельного случая $\Delta M = 0$. Очевидно, что для заданного w вероятность системе распасться или стать менее связанной возрастает с увеличением ΔM . Теперь обратимся к случаю $\Delta M > M/2$. Скорость убегания для компактной звезды становится $V_e < V_i$. То есть двойная система всегда распадается при слишком больших или слишком малых дополнительных скоростях: $w > V_i + V_e$ или $w < V_i - V_e$. Однако для всех промежуточных значений w система может не распасться и даже стать более связанной, если направление w окажется примерно противоположным вектору V_i . Детальные расчеты вероятностей выживания или распада двойных систем требуют интегрирования функции распределения дополнительной скорости $f(w)$ (см., например, [80]).

Воздействие дополнительной скорости на темп слияния компактных двойных систем. Здесь мы будем рассматривать двойные системы, которые не распались при формировании компактных объектов. Параметры a_f и e их эллиптических орбит определяются соотношениями (П.35) и (П.36). Наибольшее сближение звезд происходит в периастре, при этом расстояние между ними равно $a_p = a_f(1 - e)$. Из формул (П.35), (П.36) вытекает, что $a_p = a_i$ в отсутствие дополнительной скорости. Важность случая $w \neq 0$ заключается в том, что, хотя дополнительная скорость может увеличить или уменьшить полуось орбиты, расстояние в периастре всегда станет меньше: $a_p < a_i$. Это соотношение получается из комбинации уравнений (П.35), (П.36) с требованием сохранения двойной системы, т.е. чтобы величины, входящие в неравенство (П.38), удовлетворяли противоположному неравенству (см. приложение II). Уменьшение расстояния в периастре играет важную роль в последующей эволюции двойной, которая к этому моменту состоит из новорожденной компактной звезды и ее компаньона.

Рассмотрим сначала в качестве компаньона нормальную звезду. Поскольку дополнительная скорость сокращает расстояние в периастре по сравнению со случаем без нее, то нормальная звезда начнет раньше заполнять свою полость Роша при проходе через периастр. После приливной циркуляризации орбиты будет сформирована

более тесная двойная. Соответственно, последующая стадия с общей оболочкой сделает эту двойную более тесной, чем она могла бы стать при нулевой дополнительной скорости (см. формулу (П.43)). Как результат, двойная в конечном состоянии (т.е. состоящая из двух компактных объектов) будет сливаться под действием гравитационного излучения за более короткое время (см. формулу (П.22)). Другими словами, некоторые двойные, которые были слишком широкими, чтобы слиться за t_H , становятся обнаруживаемыми источниками ГВ под действием умеренной по величине дополнительной скорости. Если же компаньон уже является компактной звездой, орбитальная эволюция вызывается исключительно гравитационным излучением (приложение I). И если дополнительная скорость не столь велика, чтобы сделать результирующую полуось a_f очень большой, двойные также будут сливаться за время меньшее, чем при эволюции без дополнительной скорости.

Данное качественное рассмотрение объясняет результаты численного моделирования большого числа пробных систем. Нас интересует результат, усредненный по большому числу систем с разными начальными параметрами. Эти результаты приведены ниже. Как и ожидалось, умеренная дополнительная скорость в среднем увеличивает темп слияний компактных звезд.

Темпы слияния компактных двойных. Теперь мы можем представить результаты наших численных вычислений темпа слияния компактных двойных в типичной галактике [81]. Полная масса галактики полагалась равной $10^{11} M_\odot$. Мы приняли постоянный темп звездообразования, определяемый формулой (3). Считается, что это соотношение хорошо отражает ситуацию в галактике, подобной Млечному Пути.

На рисунке 3 мы изобразили частоты слияний систем типа NS+NS, ВН+NS и ВН+ВН в зависимости от параметра w_0 в распределении дополнительной скорости (6). Расчеты проводились для дискретных значений w_0 , но результирующие точки соединены гладкими кривыми. Были взяты следующие параметры образования ВН: $M_* = 15 - 50 M_\odot$ и $k_{\text{ВН}} = 0,25$. Рассматривались оба возможных сценария — со слабой и сильной потерей массы за счет звездного ветра. Широкий диапазон значений M_* и неопределенности в задании звездного ветра дали вклад в заметный разброс результатов для систем ВН+NS и ВН+ВН. Двойные NS+NS возникают из относительно менее массивных систем, поэтому они не столь чувствительны к неопределенностям описания звездного ветра. Из рисунка 3 видно, что темп слияний NS+NS лежит в диапазоне от $\sim 3 \times 10^{-4}$ до $\sim 3 \times 10^{-5}$ событий в год. Темп слияний ВН+NS и ВН+ВН в 10–100 раз ниже. Для предельного случая нулевой дополнительной скорости ($w_0 = 0$) наши частоты согласуются с независимыми оценками Тутукова и Юнгельсона [82]. В этом же пределе ($w_0 = 0$) наша оценка для слияний двойных NS+ВН ($\sim 10^{-6}$ в год) ниже, чем оценка Бете и Брауна [40], которые получили величину $\sim 2 \times 10^{-5}$ событий в год. Однако мы думаем, что их оценка получена на основе несколько упрощенной картины эволюции двойных.

Как и ожидалось, частоты слияний ВН+NS и ВН+ВН имеют тенденцию возрастать при увеличении дополнительной скорости вблизи нуля. На графике видно, как растут кривые для NS+ВН и ВН+ВН при малых и умеренных величинах w_0 (до $w_0 \sim 100 \text{ км с}^{-1}$). Для

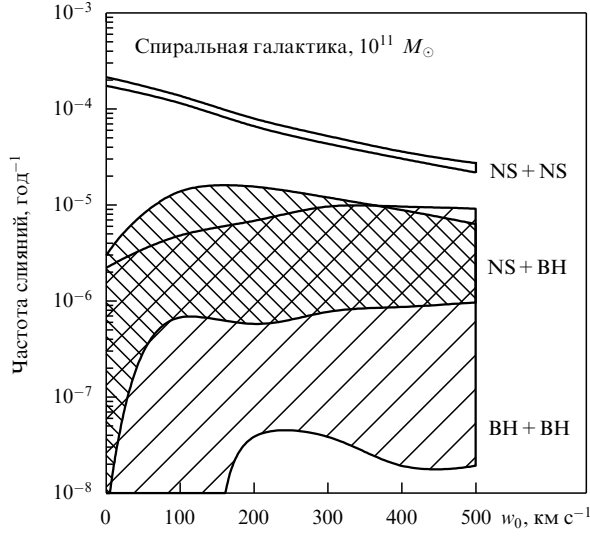


Рис. 3. Темпы слияний систем типа NS+NS, BH+NS и BH+BH в галактике с массой $10^{11} M_{\odot}$ и постоянным темпом звездообразования в зависимости от характерного значения дополнительной скорости w_0 в распределении (6). Параметры образования BH: $M_* = 15-50 M_{\odot}$, $k_{\text{BH}} = 0,25$.

бóльших значений w_0 дополнительная скорость преимущественно разрушает двойные системы, по этой причине кривые начинают загигаться вниз. Вообще говоря, темп для NS+NS систем также должен возрастать при малом увеличении w_0 от нуля. Однако массы NS малы по сравнению с BH, поэтому возрастание темпа происходит при слишком малых w_0 не разрешаемых на рисунке. Для бóльших значений w_0 дополнительная скорость в основном разрушает двойные, и кривая NS+NS идет вниз. Значение w_0 , согласующееся с наблюдениями радиопульсаров, лежит в интервале $w_0 = 200-400 \text{ км с}^{-1}$.

Во всем широком диапазоне использованных параметров, несмотря на все оставшиеся неопределенности, результаты эволюционных расчетов показывают, что число сливающихся пар BH+BH всего лишь в 10–100 раз меньше, чем число слияний NS+NS. Это отношение можно легко объяснить, обратившись к начальным условиям образования двойных звезд. Аргументация выглядит следующим образом. Рассмотрим NS с массой $1,4 M_{\odot}$ (это типичная масса, хорошо подтвержденная существующими наблюдениями) и BH с массой $8,5 M_{\odot}$ (среднее значение массы кандидатов в BH из табл. 2). Предположим, что нижний предел массы звезды, порождающей NS, приблизительно равен $M_{\text{NS}} \approx 10 M_{\odot}$, а для порога образования BH возьмем максимальную из приводившихся выше оценок: $M_{\text{BH}} > M_{\text{cr}} = 80 M_{\odot}$. Интегрируя солпитеровскую функцию распределения начальных масс звезд, образующихся в Галактике (см. формулу (2)),

$$\frac{dN}{dt d(M/M_{\odot})} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2,35} \text{ год}^{-1},$$

и учитывая нижний (более существенный) предел интегрирования, находим

$$\frac{N(M > 80 M_{\odot})}{N(M > 10 M_{\odot})} = \left(\frac{80 M_{\odot}}{10 M_{\odot}}\right)^{-1,35} \approx 0,06.$$

Это соотношение должно выполняться и для двойных звезд. Разумно ожидать, что отношение темпов слияния, несмотря на различия и бóльшую сложность эволюции двойных, также будет описываться примерно той же величиной:

$$\frac{\mathcal{R}_{\text{BH}}}{\mathcal{R}_{\text{NS}}} = \left(\frac{80 M_{\odot}}{10 M_{\odot}}\right)^{-1,35} \approx 0,06. \quad (11)$$

Эта грубая оценка приблизительно согласуется с результатами детальных эволюционных расчетов, приведенных выше.

Полученный для одиночной галактики темп слияний \mathcal{R}_G может быть экстраполирован на бóльший объем. Для успешного детектирования гравитационных волн важно знать частоту событий с расстояний, достижимых на инструментах LIGO, VIRGO, GEO600. Это большие расстояния, достигающие и даже превышающие 100 Мпк (см. раздел 7). Для столь большого объема можно считать, что галактики распределены однородно, и в то же время еще можно пренебрегать эффектами изменения темпа звездообразования на космологических временах и космологическими эффектами. Для оценки средней плотности галактик в больших объемах существует несколько подходов. Можно использовать светимость галактик в Мпк^3 (как сделано в [24]). Иначе, можно положиться на оценку плотности барионов, связанных в звездах. Плотность барионов ρ_b часто выражают в терминах безразмерного параметра $\Omega_b \equiv \rho_b / \rho_{\text{cr}}$, где $\rho_{\text{cr}} = 3H_0^2 / 8\pi G$ — критическая плотность, а H_0 — современное значение постоянной Хаббла. Тогда можно связать галактическую частоту событий \mathcal{R}_G (приходящуюся на $10^{11} M_{\odot}$ звезд) с объемным темпом \mathcal{R}_V на 1 Мпк^3 :

$$\mathcal{R}_V = 3 \times 10^{-3} \mathcal{R}_G \frac{\varepsilon}{0,5} \frac{\Omega_b h_{70}^2}{0,0045} \text{ Мпк}^{-3}, \quad (12)$$

здесь ε — доля двойных звезд $h_{70} = H_0 / (70 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1})$. Эта оценка согласуется с результатом [24] при $\varepsilon = 1$ (все звезды двойные). Имеющиеся астрономические измерения общего запаса барионов дают $\Omega_b \approx 0,0015 h_{70}^{-1}$ в дисках галактик и $\Omega_b \approx 0,003 h_{70}^{-1}$ в балджах спиральных галактик и в эллиптических галактиках [83] (или несколько бóльшие значения [84]). С другой стороны, оценки Ω_b , основанные на первичном нуклеосинтезе, дают $\Omega_b h^2 = 0,016$, хотя это число может быть и в два раза меньше [85]. Формула (12) для сферы радиуса r может быть переписана как

$$\mathcal{R}_V = 0,1 \mathcal{R}_G \frac{\varepsilon}{0,5} \frac{\Omega_b h^2}{0,016} \left(\frac{r}{1 \text{ Мпк}}\right)^3. \quad (13)$$

При сравнении результатов численного моделирования, описанного в разделе 3, с качественными оценками мы опирались на соотношение

$$\mathcal{R}_V = 0,1 \mathcal{R}_G \left(\frac{r}{1 \text{ Мпк}}\right)^3. \quad (14)$$

Эта оценка \mathcal{R}_V основана на величине \mathcal{R}_G для спиральных галактик. Звездообразование в эллиптических галактиках бóльше похоже на короткий эпизод, чем на непрерывный процесс, описываемый соотношением (3). Темп слияний в эллиптических галактиках также может быть рассчитан. Однако, как было показано в [86], их вклад в

суммарный темп слияний на обсуждаемых расстояниях не превосходит 10–20 %.

3. Темп регистрации

Найдя темпы слияний \mathcal{R}_V для двойных различной природы, мы можем оценить частоты регистрации этих событий в данном детекторе ГВ. Так как двойные, включающие черные дыры, имеют лучшее отношение сигнала к шуму, чем двойные нейтронные звезды, то, несмотря на их меньшее количество, пары ВН+ВН и ВН+НС будут наблюдаться чаще, чем пары НС+НС. В разделе 3.1 мы выводим темпы регистрации, основанные на обсуждавшейся выше величине \mathcal{R}_G . В разделе 3.2 мы обсуждаем возможные изменения в наших выводах в связи с недавним сценарием для эволюции очень массивных звезд [87]. Поскольку предложенный сценарий может повлиять только на частоту детектирования ВН+ВН, то мы рассматриваем только эти системы и указываем на важную роль дополнительной скорости.

3.1. Темп регистрации: обычная картина

Темп слияния НС+НС выше темпов слияния НС+ВН и ВН+ВН. Однако массы ВН заметно больше, чем у НС. Двойная, в которую входят одна или две черные дыры, производит гравитационные волны значительно большей амплитуды, чем система НС+НС (см. приложение I). При заданной чувствительности детектора (заданном отношении сигнал/шум, S/N) такие двойные могут быть видны с больших расстояний, чем системы НС+НС. Следовательно, объем, в котором регистрируются подобные яркие двойные, намного больше, чем объем регистрации относительно слабых двойных. Темп регистрации на конкретном детекторе зависит от сочетания двух факторов: частоты слияния (пространственной плотности источников) и отклика детектора на источник того или иного типа.

Сливающиеся двойные испускают гравитационно-волновой сигнал с хорошо известной временной структурой (waveform). Это позволяет использовать технику оптимальной фильтрации [4]. Отношение сигнала к шуму S/N зависит в основном от чирп-массы двойной системы $\mathcal{M} = (M_1 + M_2)^{-1/5} (M_1 M_2)^{3/5}$ и от расстояния r до нее. Точная формула для S/N приведена в разделе 8 (формула (134)). Здесь мы будем использовать ее упрощенную версию, которая достаточна для наших целей ([4], см. также [88]):

$$\frac{S}{N} \equiv \rho = 3^{-1/2} \pi^{-2/3} \frac{G^{5/6}}{c^{3/2}} \frac{\mathcal{M}^{5/6}}{r} \frac{f^{-1/6}}{h_{\text{rms}}(f)}. \quad (15)$$

При фиксированном уровне S/N , детектируемый объем пространства пропорционален r^3 и, следовательно, пропорционален $\mathcal{M}^{5/2}$. Темп регистрации \mathcal{D} двойных данного класса равен произведению удельного темпа слияний \mathcal{R}_V на доступный детектору объем для данного типа систем, пропорциональный $\mathcal{M}^{5/2}$.

Начнем с качественного обсуждения ожидаемого отношения

$$\frac{\mathcal{D}_{\text{ВН}}}{\mathcal{D}_{\text{НС}}} = \frac{\mathcal{R}_{\text{ВН}}}{\mathcal{R}_{\text{НС}}} \left(\frac{\mathcal{M}_{\text{ВН}}}{\mathcal{M}_{\text{НС}}} \right)^{5/2}, \quad (16)$$

где $\mathcal{D}_{\text{ВН}}$ и $\mathcal{D}_{\text{НС}}$ относятся, соответственно, к парам ВН+ВН и НС+НС. Мы обсуждаем отношение темпов

регистрации, а не их абсолютные значения. Получение абсолютных значений требует детальных эволюционных расчетов, которые будут описаны далее в этом и следующем разделах. В качестве грубой оценки для $\mathcal{R}_{\text{ВН}}/\mathcal{R}_{\text{НС}}$ можно взять формулу (11). Тогда из (16) вытекает следующий замечательный результат:

$$\frac{\mathcal{D}_{\text{ВН}}}{\mathcal{D}_{\text{НС}}} = \left(\frac{80 M_{\odot}}{10 M_{\odot}} \right)^{-1,35} \left(\frac{8,5 M_{\odot}}{1,40 M_{\odot}} \right)^{15/6} \simeq 5,5. \quad (17)$$

Это отношение будет даже больше, чем 5,5, если взять $M_{\text{cr}} < 80 M_{\odot}$, как обычно и полагают. Таким образом, темп регистрации слияний ВН должен быть *выше*, чем для сливающихся НС. Эта оценка, конечно, очень груба, но она служит указанием на результат, который можно ожидать от детальных расчетов.

На рисунке 4 мы показываем результаты расчетов абсолютных значений темпов регистрации различных типов двойных. Чувствительность детектора бралась равной $h_{\text{rms}} = 10^{-21}$ на частоте $f = 100$ Гц, что и ожидается для первой очереди инструментов LIGO, VIRGO, GEO600. Предполагалось, что $S/N = 1$. Так как наиболее интересные результаты относятся к системам, в которые входят черные дыры, мы варьировали параметр $k_{\text{ВН}}$ образования черных дыр. Расчеты проводились для лайн-лоримеровского распределения дополнительной скорости с $w_0 = 400$ км с⁻¹. Вертикальный разброс результатов объясняется разбросом параметра M_{cr} .

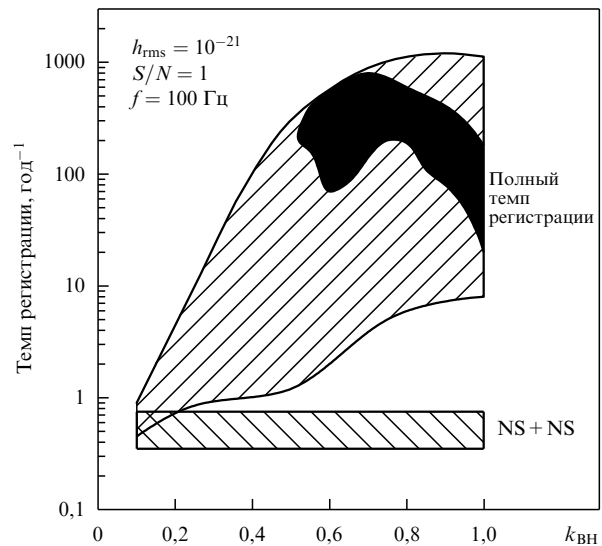


Рис. 4. Темп регистрации \mathcal{D} слияний различных двойных систем приемником с чувствительностью $h_{\text{rms}} = 10^{-21}$ на частоте 100 Гц при отношении $S/N = 1$ как функция параметра $k_{\text{ВН}}$. Расчеты проводились для распределения дополнительной скорости (6) с $w_0 = 400$ км с⁻¹. Разброс \mathcal{D} при фиксированном значении $k_{\text{ВН}}$ связан с варьированием параметра M_{cr} от $15 M_{\odot}$ до $50 M_{\odot}$. Прямоугольная область внизу показывает темп слияний двойных НС. Как и должно быть, он не зависит от $k_{\text{ВН}}$ и составляет несколько событий за 1–3 года наблюдений. Темп регистрации всех событий может быть на 2–3 порядка выше, чем темп регистрации только систем НС+НС, и почти полностью определяется слияниями ВН+ВН и ВН+НС. Закрашенная область соответствует наиболее вероятным параметрам для сценария со слабым звездным ветром. Внутри этой области результаты расчетов находятся в согласии с верхним пределом для числа двойных радиопульсаров с ВН (менее 1 на 700 одиночных пульсаров) и с количеством массивных галактических кандидатов в ВН, подобных Суг X-1 (от 1 до 10 на Галактику).

Как видно из рисунка, при перечисленных условиях можно ожидать несколько слияний NS+NS за 1–3 года наблюдений при отношении сигнала к шуму $S/N = 1$. Эти системы будут расположены примерно на расстоянии 100 Мпк. Отношение S/N выше для более близких систем, но частота таких событий ниже. Для более далеких систем частота событий растет, но S/N становится меньше 1. Таким образом, маловероятно, что слияния NS+NS будут зарегистрированы инструментами первого поколения.

Ситуация значительно лучше для систем, включающих черные дыры. Как видно из рис. 4, полный темп регистрации для всех двойных, включая ВН+ВН и ВН+NS, может быть на 2–3 порядка величины выше, чем темп регистрации систем NS+NS, в основном за счет массивных двойных с ВН. Это верно за исключением малых $k_{\text{ВН}}$ ($k_{\text{ВН}} < 0,4$). Закрашенная область отвечает "наиболее вероятным" значениям рассмотренных параметров. Это означает, что при выборе таких параметров результаты эволюционных расчетов оказываются в согласии с наблюдениями. А именно, с верхним пределом числа двойных пульсаров в парах с ВН (менее 1 на 700 одиночных радиопулсаров) и с числом массивных кандидатов в ВН, подобным системе Суг X-1 (от 1 до 10 на Галактику). Внутри этого региона ожидается примерно 100 регистраций в год (на уровне $S/N = 1$), большинство которых отвечает сливающимся ВН. Средняя полная масса системы ВН+ВН в закрашенной области составляет $M = 30M_{\odot}$. Упрощенная формула (15), использованная при построении рис. 4, переоценивает S/N от пар с массой выше $30M_{\odot}$, как показано в разделе 8. Однако такая коррекция для более массивных систем, вероятно, не изменит существенно полученный здесь темп регистрации.

Для надежного обнаружения отношение S/N должно быть не менее 2 в каждом детекторе сети из четырех или более инструментов. При этом рассчитанный темп детектирования уменьшится по крайней мере на фактор $(S/N)^3 = 8$ из-за того, что $S/N \propto 1/r$ и $\mathcal{D} \propto r^3 \propto (S/N)^{-3}$. В этой ситуации ожидаемая частота детектирования пар ВН+ВН будет меньше 10 событий в год. Как будет разъяснено в разделе 8, отношение S/N несколько различается для трех различных инструментов: LIGO, VIRGO и GEO. Для пары с $M = 30M_{\odot}$ на расстоянии $r = 100$ Мпк отношение S/N примерно равно 4. (VIRGO обладает преимуществами по сравнению с другими инструментами, поскольку его чувствительность на низких частотах выше и он позволяет наблюдать сливающуюся двойную в течение большего числа циклов.) Если же мы удовлетворимся значением $S/N = 2$, то доступный радиус возрастет до $r = 200$ Мпк. В этом случае рассчитанный темп детектирования (несколько событий в год) будет находиться в согласии с соотношением (14), если принять для частоты слияния черных дыр в галактике разумное значение $\mathcal{R}_G = 3 \times 10^{-6}$ и $r = 200$ Мпк. В свою очередь, эта величина для \mathcal{R}_G близка к частоте событий, полученной из численного моделирования, как видно на рис. 3.

Таким образом, с учетом всех оставшихся неопределенностей, мы заключаем, что инструменты первой очереди, скорее всего, будут регистрировать за год 2–3 сливающиеся компактные двойные с суммарной массой около $30M_{\odot}$ при отношении $S/N \sim 2$ –3.

3.2. Нестандартные сценарии

и влияние дополнительной скорости

на частоту детектирования слияний ВН + ВН

Некоторые недавние эволюционные расчеты [87] предполагают, что первичная звезда с массой $M_1 > 40M_{\odot}$ никогда не заполняет свою полость Роша и компоненты двойной эволюционируют подобно одиночным звездам. В результате образующиеся двойные ВН-системы будут слишком широкими, чтобы успеть слиться за t_H . В принципе этот эффект может изменить выводы относительно частоты слияния двойных ВН. Хотя мы думаем, что сценарий [87] столкнется с наблюдательными трудностями, поскольку он будет предсказывать слишком мало двойных, состоящих из ВН и массивной голубой звезды (системы типа Суг X-1), мы рассмотрели его для того, чтобы детально понять возможную судьбу двойных ВН. Мы показываем, что дополнительная скорость, приобретаемая ВН при рождении, увеличивает эксцентриситет орбиты двойной, уменьшает время ее слияния и позволяет сохранить темп регистрации событий примерно на том же уровне, который обсуждался в разделе 3.1. Кроме того, дополнительная скорость приводит к интересным изменениям в ориентации спинов черных дыр относительно друг друга и относительно орбитального углового момента.

Мы взяли предложенный сценарий [87] и провели по нему популяционный синтез, меняя дополнительную скорость. Был получен темп слияния двойных ВН в модельной галактике с массой $10^{11}M_{\odot}$ (в предположении, что все звезды двойные) с постоянным темпом звездообразования. Для простоты распределение дополнительной скорости бралось в виде дельта-функции. Более сложные распределения не изменяют существенно получившихся результатов и не будут комментироваться здесь. Результаты этих расчетов показаны на рис. 5. Слева показан темп слияний, а справа — соответствующий темп детектирования. Темп регистрации двойных ВН приведен для лазерных интерферометров первого поколения ($h_{\text{rms}} = 10^{-21}$ на частоте $f = 100$ Гц) в зависимости от дополнительной скорости ВН. Из рисунка видно, что темп слияния и темп регистрации быстро возрастают с увеличением дополнительной скорости. Как темп слияний, так и темп регистрации достигают максимума ($\mathcal{R} \sim 2,5 \times 10^{-5} \text{ год}^{-1}$ и $\mathcal{D} \sim 20$ событий в год) при $w \simeq 120 \text{ км с}^{-1}$. Поскольку $\mathcal{D} \sim \mathcal{M}^{5/2} \mathcal{R}$, то графики функций $\mathcal{R}(w)$ и $\mathcal{D}(w)$ имеют одинаковую форму.

Очевидно, что дополнительная скорость, получаемая новорожденной черной дырой, делает эксцентриситет орбиты нераспавшейся двойной более высоким. Очень важно подчеркнуть, что при этом некоторая часть двойных ВН сохраняет свой высокий эксцентриситет до поздних стадий сближения. Это обстоятельство должно отразиться на форме испускаемого гравитационного сигнала, и его надо учитывать при построении фильтров.

Асимметричные взрывы, сопровождаемые дополнительной скоростью, изменяют пространственную ориентацию орбитального углового момента. С другой стороны, направления осей вращения звезд остаются неизменными (если только взрыв не происходит нецентрально). В результате устанавливается некоторое распределение углов J между осями вращения звезд и орбитальным угловым моментом [89]. Интересно, что даже для малой дополнительной скорости в несколько десятков км с⁻¹ ощутимая доля (30–50 %) сливающихся

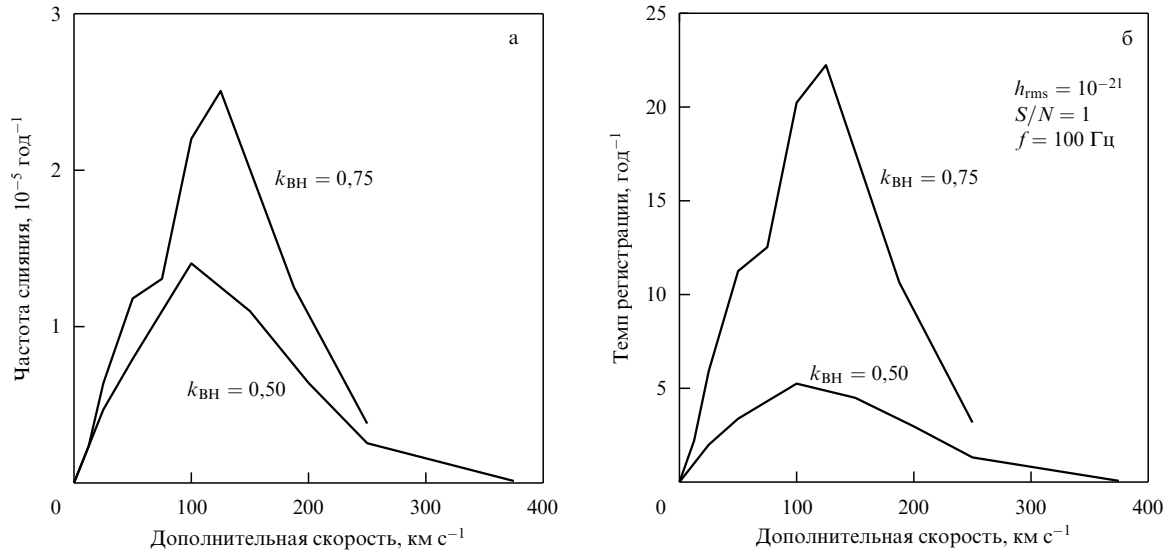


Рис. 5. Новый эволюционный сценарий со сверхмощным звездным ветром. (а) Темп слияния ВН+ВН для галактики с массой $10^{11} M_{\odot}$ и постоянным темпом звездообразования в зависимости от средней дополнительной скорости, приобретаемой ВН. Параметры образования ВН: $M_{\text{ср}} = 35 M_{\odot}$, $k_{\text{ВН}} = 0,50$ и $0,75$. (б) Темп регистрации слияний ВН+ВН на интерферометре первого поколения ($h_{\text{rms}} = 10^{-21}$ на частоте $f = 100$ Гц) в зависимости от средней дополнительной скорости ВН.

двойных ВН будет иметь $\cos J < 0$. Это означает, что в таких двойных вектор орбитального углового момента ориентирован почти противоположно спинам черных дыр. Это еще одно проявление дополнительной скорости, которое можно проверить наблюдениями. Этот эффект также обсуждался в недавней работе [90].

В заключение данного анализа мы еще раз подчеркиваем, что слияния двойных черных дыр остаются наиболее вероятным источником, который может быть зарегистрирован первым с помощью сети лазерных интерферометров первого поколения.

4. Вспыхивающие и непрерывные источники гравитационных волн

В этом разделе мы обсудим два различных типа сигнала: 1) вспышки (транзиенты), длящиеся от нескольких миллисекунд до десятков миллисекунд, которые должны существовать согласно астрофизическим представлениям, и излучающие волны, фаза которых меняется неизвестным нам образом, как в случае сверхновых; 2) квазипериодическое излучение, которое испускается в течение нескольких суток или более только что образовавшимися вращающимися нейтронными звездами или старыми раскрученными нейтронными звездами. Мощность, длительность и форма этих сигналов очень плохо определены. Из общих физических соображений следует, что такие источники существуют. Разумеется, мы должны пытаться их обнаружить, используя все преимущества, даваемые современным знанием. Однако в настоящее время астрофизические неопределенности столь велики, что мы можем обсуждать данную тему только качественно.

4.1. Транзиенты

Сверхновые и асимметрия их взрывов. Вспышки сверхновых типа II сопровождаются интенсивным выбросом вещества со скоростями порядка $0,001c$ и образованием компактного остатка — нейтронной звезды или черной

дыры. В этом событии выделяется разность энергий связи предсверхновой и образовавшейся компактной звезды, равная, если пренебречь первым членом,

$$|E| \sim 3 \times 10^{53} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{10 \text{ км}} \right)^{-1} \text{ эрг.} \quad (18)$$

99 % этой энергии уносится потоком нейтрино, примерно 1 % переходит в кинетическую энергию выброшенного вещества, а около 10^{-4} общей энергии испускается в виде электромагнитного излучения. В зависимости от асимметрии коллапса некоторая доля энергии будет излучена в виде гравитационных волн; при сферически симметричном коллапсе, конечно, не может быть никакого гравитационного излучения. Согласно численному моделированию (см. обзор [91]) можно ожидать, что до 10^{-7} общей энергии может быть испущено в виде гравитационных волн. Вместе с неопределенностью частоты самих событий это дает не слишком обнадеживающий прогноз обнаружения таких всплесков на инструментах первой очереди [4, 5]. Коллапс звезды в черную дыру также не слишком хорошо подходит для обнаружения на резонансных детекторах или вступающих в строй интерферометрах [92]. Однако второе поколение интерферометров будет способно увидеть сверхновую на расстоянии скопления в созвездии Девы, содержащего примерно 200 ярких галактик и по крайней мере вдвое больше слабых галактик. Кроме того, есть еще несколько не столь крупных скоплений, расположенных ближе указанного расстояния, а также большое число галактик поля. Для инструментов второго поколения частота регистрации всплесков сверхновых может достигать десяти событий в год. Такие наблюдения, несомненно, представляли бы большой интерес и могли бы пролить свет на до сих пор не понятые процессы, происходящие при коллапсе звезды в компактный объект.

Асимметричный коллапс генерирует гравитационные волны, но не обязательно изменяет импульс взорвав-

шейся звезды. Однако, как мы отмечали выше, наблюдения одиночных и двойных радиопульсаров требуют присутствия существенного дополнительного импульса, приобретаемого нейтронной звездой при рождении. Дополнительная скорость достигает $200\text{--}400\text{ км с}^{-1}$. Это означает, что при неосесимметричном взрыве нейтронная звезда приобретает и дополнительный импульс. Возможная причина асимметрии взрыва может быть связана с асимметрией излучения нейтрино во время коллапса [93]. Используя наблюдаемые величины дополнительной скорости, можно определить степень асимметрии взрыва и рассчитать амплитуду излучаемых ГВ. Назин и Постнов [94] получили, что средняя энергия, уносимая вспышкой гравитационных волн, может достигать величины $E_{\text{gw}} = 5 \times 10^{-6} M_{\odot} c^2$. Интересно, что испускаемый при этом гравитационно-волновой сигнал относится к категории импульсов "с памятью" [95, 96]. Однако полученная оценка мощности излучения от асимметричных взрывов сверхновых слишком мала, чтобы считать их реалистичными источниками для первого обнаружения.

Возникновение бар-моды и конвективная неустойчивость. Некоторое количество ГВ может быть излучено в течение двух особых стадий коллапса: 1) деформация звезды в бар и 2) конвективная неустойчивость, возникающая в ядре новорожденной нейтронной звезды.

Если ядро предсверхновой вращается достаточно быстро, то оно может превратиться в плоский диск до достижения им ядерной плотности. Такое уплощенное ядро подвержено действию неустойчивостей, превращающих его в бароподобную конфигурацию, вращающуюся вокруг своей поперечной оси. Некоторые из этих неустойчивостей могут даже разорвать ядро на две или большее число частей, которые будут обращаться друг вокруг друга. Оба пути приводят к эффективной потере энергии в форме ГВ. Как было показано в [97], ГВ могут унести до $10^{-3} M_{\odot} c^2$ за несколько миллисекунд. Используя это значение в уравнении (20) (см. раздел 4.2), мы видим, что детекторы LIGO и VIRGO могут регистрировать такое событие с расстояния до 50 Мпк или примерно с 5–10 Мпк, если волны генерируются на частоте 1 кГц. GEO может регистрировать подобные сигналы на частотах около 200 Гц [98].

Конвективная неустойчивость в ядре звезды, которая сохраняется около секунды после окончания коллапса, может производить гравитационное излучение из-за анизотропного распределения и движения вещества [99]. Мюллер и Янка [100] обнаружили, что амплитуда гравитационных волн на расстоянии 100 кпк будет составлять $h \sim 10^{-23}$ и что эти волны будут генерироваться на частотах вблизи 100 Гц. За время существования неустойчивости произойдет порядка 100 циклов, что может увеличить регистрируемую амплитуду до примерно 10^{-22} , при условии что мы знаем форму сигнала. Но даже при этом он остается все еще слишком слабым для уверенной регистрации с расстояний превышающих 10 кпк.

Фаза слияния. Физика стадии слияния, следующей за этапом спирального сближения компонентов сливающейся компактной двойной, практически неизвестна. В настоящее время она является предметом активного изучения, но содержит большое количество неопределенностей. Некоторые авторы ожидают, что именно на этой стадии может быть испущено достаточное для обнару-

жения количество гравитационного излучения [88], в то время как другие заключают, что фаза слияния является просто продолжением фазы сближения и добавляет к ней еще один-два оборота [101]. Было предпринято множество попыток решить эту важную проблему, используя полуаналитические и численные методы. Возможно, что решение будет найдено к моменту начала наблюдений на первых чувствительных детекторах. Тот факт, что фазе слияния предшествует излучение фазы спирального сближения, делает ее поиск более простым, хотя может оказаться, что на фазе слияния не удастся использовать точные фильтры сигнала в отличие от фазы спирального сближения. Флэнаган и Хьюгес [88] считают, что для двойных систем, суммарная масса которых превышает $25 M_{\odot}$, гравитационное излучение со стадии слияния будет гораздо более интенсивным, чем со стадии сближения. Детекторы регистрируют более массивные двойные с больших расстояний, поэтому эти авторы заключают, что, вероятно, первыми будут зарегистрированы ГВ именно от заключительной фазы слияния массивных двойных систем.

Двойные черные дыры малой массы. Современные эксперименты по микролинзированию [102] обнаружили существование компактных объектов с массой $0,5^{+0,3}_{-0,2} M_{\odot}$ (МАСНО) в гало Галактики. Накамура и др. [103] считают, что МАСНО являются черными дырами, образовавшимися на ранних стадиях эволюции Вселенной и полагают, что наша Галактика может содержать порядка 10^8 двойных черных дыр с временем сближения меньшим, чем хаббловское время. В этом случае частота слияния МАСНО в Галактике будет составлять $\sim 5 \times 10^{-2}\text{ год}^{-1}$, что подразумевает несколько событий в год на расстояниях ближе 15 Мпк. Как будет показано в разделе 8, первое поколение интерферометров будет способно регистрировать финальную фазу сближения в подобных системах, если они действительно существовали.

Квазинормальные колебания черных дыр. Слияние компактной двойной системы под действием испускаемых ею гравитационных волн приведет, скорее всего, к образованию общей черной дыры. Только что образовавшаяся черная дыра будет несколько деформированной, и такая динамическая несферичность будет приводить к излучению гравитационных волн. Поведение потока этого излучения на поздних временах хорошо изучено, в литературе по черным дырам можно найти детальные расчеты частот и амплитуд (квази) нормальных мод колебаний как для статических (т.е. шварцшильдовских), так и для стационарных (керровских) черных дыр. Во всех случаях временная эволюция испускаемого излучения хорошо описывается квазипериодическим сигналом следующей формы:

$$h(t; \tau, \omega) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos \omega t, \quad (19)$$

где τ — характерное время затухания исследуемой моды, а ω — ее круговая частота. Обе величины зависят от массы и углового момента черной дыры. У всех черных дыр (кроме предельных керровских черных дыр, которые обладают максимально возможным угловым моментом) доминирующей модой излучения, т.е. модой с максимальным временем затухания и наибольшей амплитудой, является фундаментальная мода колеба-

ний, частота которой зависит от массы и углового момента черной дыры: $\omega = [1 - 0,63(1 - a)^{0,3}]/M$, где M — масса черной дыры в системе единиц $G = c = 1$, а $a = J/M$ — удельный угловой момент черной дыры. Время затухания τ определяется соотношением $\tau = 4/[\omega(1 - a)^{0,45}]$ (подробнее см. статью [104] и цитируемую в ней литературу).

Согласно оценкам [88], за время затухания квазинормальной моды черная дыра излучает энергию, эквивалентную 3 % полной массы системы. С помощью оптимальной фильтрации (см. раздел 8.1) можно на интерферометрах первого поколения зарегистрировать квазинормальные моды от черных дыр с массами в интервале $60 - 10^3 M_\odot$ с расстояния до 200 Мпк. В идентификации излучения квазинормальных мод черных дыр может помочь предшествующее ему излучение от стадии спирального сближения.

4.2. Постоянные источники

Считается, что в нашей Галактике должно существовать по крайней мере 10^8 вращающихся нейтронных звезд, которые образуются примерно каждые 30 лет. Некоторая доля этих звезд входит в состав двойных. Существует несколько механизмов, которые позволяют вращающейся одиночной нейтронной звезде излучать гравитационные волны (конечно, если звезда осесимметрична, то излучения не будет):

1. Нейтронные звезды обычно вращаются с высокой частотой (от нескольких герц до 500 Гц). Из-за этого вращения звезда раздается по экватору и сплющивается у полюсов. Наличие магнитного поля может заставить звезду вращаться вокруг оси, отличной от оси симметрии, что приводит к переменности во времени ее квадрупольного момента.

2. Звезда может обладать некоторыми неоднородностями ядра или коры, образовавшимися при рождении звезды и/или во время последующих неустойчивых движений в ядре.

3. Присутствие аккреционного диска, направление углового момента которого не обязательно совпадает с моментом нейтронной звезды, может нарушить осевую симметрию. Воздействие диска и силы реакции электромагнитного излучения могут вызвать и затем поддерживать покачивания нейтронной звезды.

4. Нормальные моды колебаний нейтронных звезд (радиальные и прочие осцилляции) могут извлекать энергию вращения и затем переизлучать ее в виде гравитационных волн.

5. Существуют определенные классические и релятивистские неустойчивости в нейтронных звездах, которые могут заставить звезду терять энергию в виде гравитационного излучения. Далее мы будем обсуждать примеры из современных публикаций, посвященных излучению гравитационных волн вращающимися нейтронными звездами.

Амплитуда гравитационных волн от вращающихся асимметричных нейтронных звезд. Если I_{zz} — момент инерции относительно оси вращения нейтронной звезды, излучающей гравитационные волны с частотой f , то амплитуда этих волн на расстоянии r будет равна

$$h = 3 \times 10^{-27} \left(\frac{10 \text{ кпк}}{r} \right) \left(\frac{I_{zz}}{10^{45} \text{ г см}^2} \right) \left(\frac{f}{200 \text{ Гц}} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right), \quad (20)$$

где ϵ — эллиптичность звезды. В простой модели, где экваториальное сечение звезды имеет форму эллипса с большой полуосью a_1 и малой полуосью a_2 , этот параметр равен $\epsilon \equiv 1 - a_2/a_1$. Величина эллиптичности неизвестна, но можно получить ее верхний предел, полагая, что наблюдаемое торможение пульсаров \dot{P} целиком вызвано гравитационным излучением, т.е. потери их энергии вращения $E = I\Omega^2/2$ в точности равны светимости в ГВ. Тогда эллиптичность так выражается через темп замедления пульсаров:

$$\epsilon = 5,7 \times 10^{-6} \left(\frac{P}{10^{-2} \text{ с}} \right)^{3/2} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-15}} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

С помощью этой формулы можно получить верхний предел на ϵ , используя известные значения P и \dot{P} . Применяя эту оценку к пульсару в Крабовидной туманности, можно найти, что для него $\epsilon \leq 7 \times 10^{-4}$ и амплитуда сигнала $h \leq 10^{-24}$. Отсюда можно сделать вывод, что если торможение пульсара в Крабе полностью вызвано гравитационным излучением, то амплитуда h достаточно велика, чтобы ее можно было зарегистрировать детектором GEO в течение одного года непрерывных наблюдений [6]. Вряд ли эллиптичность ϵ столь велика. Однако интерферометры второго поколения, возможно, позволят обнаружить сигнал, даже если ϵ пульсара в Крабе составляет 1/10 или 1/100 от максимально возможного значения.

Далее в этом разделе мы обсудим новые достижения в релятивистской астрофизике, связанные с объектами — предполагаемыми кандидатами на роль источников ГВ, которые, как ожидается, будут открыты первыми.

Релятивистские неустойчивости в молодых нейтронных звездах. Чандрасекар [105] и Фридман и Шутц [106] открыли неустойчивость (теперь называемую CFS-неустойчивостью) фундаментальной моды колебаний нейтронных звезд (f -мода). Неустойчивость возникает в результате испускания гравитационных волн. Мода становится неустойчивой, когда скорость вращения нейтронной звезды превышает критическую и быстро нарастает, а не затухает в процессе излучения гравитационных волн.

Физическая причина данной неустойчивости может быть объяснена следующим образом. Представим себе, что в невращающейся звезде возбуждено квадрупольное возмущение плотности, приводящее к неоднородному распределению массы. Неоднородность будет перемещаться по поверхности звезды, и эта динамическая асимметрия заставит звезду излучать гравитационные волны. Через некоторое время вся энергия возбуждения будет излучена, и мода затухнет. А теперь рассмотрим вращающуюся нейтронную звезду, в которой возбуждены моды, движущиеся по и против направления ее вращения. Эти моды имеют определенную скорость движения узора по поверхности звезды. При медленном вращении звезды обе эти моды будут затухать со временем из-за излучения ГВ. Но когда вращение звезды превысит некоторую критическую скорость, для удаленного инерциального наблюдателя обе моды окажутся движущимися в направлении вращения звезды. Поэтому мода, движущаяся относительно звезды в направлении, противоположном ее вращению, будет отдавать положительный угловой момент, что вызовет увеличение связанного с этой модой углового момента и

возрастание ее амплитуды. Другими словами, мода, движущаяся против вращения относительно звезды, но выглядящая перемещающейся в том же направлении, что и вращение звезды для инерциального наблюдателя, может отдавать только отрицательный собственный угловой момент, что приводит к росту ее углового момента. Энергия, необходимая для данного увеличения, черпается из вращения нейтронной звезды. Таким образом, хотя мода, движущаяся по вращению относительно звезды, будет затухать, противоположная мода растет по амплитуде и производит все больше и больше гравитационного излучения. Так продолжается до тех пор, пока растущая мода не отберет у звезды достаточное количество момента вращения, чтобы сделать движение этой моды направленным противоположно вращению не только относительно звезды, но и в системе инерциального наблюдателя.

Известно, что CFS-неустойчивость не работает в присутствии вязкости, следовательно, она не существенна для старых нейтронных звезд. Однако новорожденные нейтронные звезды должны быть очень горячими, и в них вязкие силы могут быть незначительными. Недавно Андерссон [107] открыл другой класс неустойчивостей в так называемых r -модах, которые, в отличие от CFS-мод, обладают не массовым, а токовым квадрупольным моментом и являются неустойчивыми при любой скорости вращения, но могут быть важны только для молодых нейтронных звезд. Некоторые авторы считают, что r -моды ответственны за предельную скорость вращения молодых нейтронных звезд [108]. Оуэн и др. [109] рассчитали эффективность, с которой эти моды извлекают энергию вращения звезд, и ожидаемую амплитуду гравитационных волн как от изолированных одиночных звезд, так и от ансамбля таких звезд, удаленных на космологические расстояния. Они пришли к заключению, что второе поколение гравитационных интерферометрических антенн будет способно выделить этот фон по корреляции с сигналами близко расположенных твердотельных детекторов. Подобные наблюдения могут дать независимую информацию о распределении галактик во Вселенной на больших красных смещениях, а также об истории образования звезд — через наблюдения r -мод, возникающих при образовании нейтронных звезд и пульсаров.

Нейтронные звезды в рентгеновских двойных. В последние годы наблюдения рентгеновских двойных со спутника RXTE обнаружили высокочастотные (килогерцовые) квазипериодические осцилляции (QPO) в спектре мощности рентгеновского излучения. Высказывается предположение, что эти QPO возникают в результате биения двух частот, одна из которых есть частота вращения нейтронной звезды. Согласно этой модели частоты вращения нейтронных звезд лежат в узком интервале 250–350 Гц, т.е. с точностью 20 % равны 300 Гц. Нейтронные звезды могут рождаться быстровращающимися (несколько сот герц), но быстро тормозятся до умеренных частот (десятки герц). В двойных системах, когда компаньон становится красным гигантом, нейтронная звезда аккрецирует массу и угловой момент. Даже при очень низком темпе ($\dot{M} \sim 10^{-10} M_{\odot}$ в год) аккреция может ускорить вращение нейтронной звезды и заметно нагреть ее кору. Действительно, миллисекундные пульсары считаются старыми нейтронными звездами, раскрученными аккрецией в двойных системах.

Непонятно, почему частоты вращения всех нейтронных звезд в двойных лежат в таком узком интервале. Бильд-стен [110] предположил, что отсутствие эффективных процессов оттока тепла делает возможным возникновение в аккрецирующей нейтронной звезде температурного градиента. Если предположить, что распределение температуры имеет крупномасштабную асимметрию, то из-за чувствительного к температуре электронного захвата в глубине коры может возникнуть квадрупольное возмущение в распределении массы ($\sim 10^{-7} MR^2$), необходимое для излучения в виде ГВ аккрецируемого углового момента. Это приводит к ограничению частоты вращения звезды. Такой механизм действует только во время аккреции и быстро выключается по ее окончании. Если эта идея верна, то частота гравитационного излучения заранее известна, поскольку мы знаем частоты вращения пульсаров из рентгеновских наблюдений. Утверждается [110], что амплитуда гравитационных волн будет равна $h \sim (0,5-3) \times 10^{-26}$ для многих из этих источников. Тогда с помощью LIGO, VIRGO и GEO600, применяя технику возвращения лазерного света, можно было бы зарегистрировать наиболее сильный из этих источников, Sco X-1, при отношении сигнал/шум порядка 5 после нескольких лет накопления.

5. Астрофизический стохастический фон гравитационных волн

В центре нашего внимания находятся сливающиеся двойные компактные системы. Детектор будет следить за гравитационно-волновым сигналом такой системы, пока изменяющаяся частота сигнала перемещается внутри окна чувствительности детектора. Обнаружение источника ГВ ограничивается инструментальными шумами, а также возможным гравитационно-волновым шумом от других источников. Если большая популяция астрофизических источников испускает перекрывающиеся ГВ, то результирующий сигнал будет восприниматься детектором как гравитационно-волновой шум. В принципе этот шум может превышать инструментальный. Астрофизический фон гравитационных волн важен сам по себе, но здесь мы будем его рассматривать, в основном, как помеху, препятствующую обнаружению сигналов большей научной важности. Цель нашего обсуждения — получить среднеквадратичную амплитуду ГВ в заданном интервале частот Δf и сравнить ее с инструментальным шумом в том же интервале. Если фон ниже инструментального шума, он не будет мешать обнаружению полезного сигнала. В разделе 5.1 мы выведем общие формулы, описывающие излучение большого числа неразрешенных источников. Кроме того, мы обсудим популяцию вращающихся нейтронных звезд в Галактике. Они могут представить наибольшую опасность для наземных интерферометров. Впрочем, результаты анализа покажут, что опасность может проявиться только при крайне нереалистичных предположениях о параметрах этой популяции. Далее в разделе 5.1 мы рассмотрим стохастический гравитационный фон, порождаемый двойными белыми карликами Галактики. Этот фон превышает инструментальный шум LISA в интервале частот от $\sim 10^{-4}$ Гц до $\sim 10^{-3}$ Гц, но оставляет гравитационно-волновое небо прозрачным на более низких и более высоких частотах. Наконец в разделе 5.2 мы рассмотрим астрофизический фон от внегалактиче-

ских источников. Этот фон должен быть примерно на порядок величины слабее, чем фон, создаваемый галактическими источниками.

5.1. Неразрешенные источники в нашей Галактике

Большой набор независимых источников порождает сигналы, интенсивности которых складываются. Рассмотрим N идентичных источников, расположенных на примерно одинаковом расстоянии r от наблюдателя. Результирующее поле гравитационных волн характеризуется среднеквадратичной амплитудой h_N :

$$h_N = h_1 \sqrt{N}, \quad (22)$$

где h_1 — средняя амплитуда одиночного источника. Мы будем интересоваться узким интервалом частот от f до $f + \Delta f$. Источники излучения постепенно меняют свою частоту и пересекают интересующее нас окно. Пересечение окна может происходить либо от низких частот в сторону высоких, как в случае сливающихся двойных, либо в противоположном направлении, как у вращающихся нейтронных звезд. Для того, чтобы найти h_N , нам необходимо знать число излучающих систем $N(f, \Delta f)$ в обсуждаемом частотном интервале. Обозначим символом \mathcal{R} темп, с которым источники появляются в окне. Источник присутствует в окне в течение времени Δt , где $\Delta t = \Delta f / \dot{f}$. Таким образом,

$$N(f, \Delta f) = \mathcal{R} \Delta t = \mathcal{R} \frac{\Delta f}{\dot{f}} \quad (23)$$

и

$$h_N = h_1 \sqrt{\mathcal{R} \frac{\Delta f}{\dot{f}}}. \quad (24)$$

Если частота изменяется только под действием ГВ, то величина \dot{f} определяется потерями на излучение ГВ. Например, в случае двойных систем \dot{f} определяется уравнением (П.19). Противоположным является случай, когда величина \dot{f} определяется электромагнитными потерями. Такая ситуация имеет место для сильно намагниченных нейтронных звезд, у которых \dot{f} определяется электромагнитными, а не гравитационными силами. Темп появления источников \mathcal{R} данной популяции в окне Δf равен частоте рождения или частоте слияния источников как таковой (см., например, $\mathcal{R}_{\text{coal}}$ в разделе 4). Это рассуждение верно, если число источников в окне остается постоянным за время прохождения одного из них через окно, что мы и предполагаем.

Для источников, эволюционирующих только под действием гравитационного излучения, формула (24) может быть выражена через энергию, излучаемую одной системой, и темп \mathcal{R} . Для этого с помощью уравнения (П.16) надо выразить h_1^2 через dE/dt , приняв при этом во внимание соотношение $dE/dt = (dE/df) \dot{f}$. Тогда уравнение (24) принимает вид

$$h_N^2 = \frac{G}{c^3} \frac{\mathcal{R}}{r^2 (\pi f)^2} \frac{dE}{df} \Delta f. \quad (25)$$

Обычно энергия, излучаемая системой, степенным образом зависит от частоты f : $E(f) \sim f^\alpha$. Например, в случае двойной системы с круговой орбитой из уравнения (П.6)

можно получить

$$E(f) = \frac{G^{2/3}}{2} \mathcal{M}^{5/3} (\pi f)^{2/3}, \quad (26)$$

где \mathcal{M} — чирп-масса. Таким образом, в случае двойных систем, $\alpha = 2/3$. Для неосесимметричных вращающихся звезд $E(f) \sim f^2$, так что $\alpha = 2$. Тогда уравнение (25) можно записать в универсальном виде:

$$h_N^2 = \frac{G}{c^3} \frac{\mathcal{R}}{r^2 (\pi f)^2} \alpha E(f) \frac{\Delta f}{f}. \quad (27)$$

Рассчитанная величина $h_N^2 / \Delta f$ есть среднеквадратичная амплитуда шума h_f^2 (с размерностью Гц^{-1}), которая используется в выражении

$$\langle h^2 \rangle = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} h_f^2 df. \quad (28)$$

Теперь мы можем сравнить эту величину с зависящим от частоты инструментальным шумом. Мы будем работать с безразмерной спектральной амплитудой

$$h_N(f) \equiv h_N \sqrt{\frac{f}{\Delta f}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{G \alpha E(f) \mathcal{R}}{c^3 (\pi f)^2}}. \quad (29)$$

Очевидно, что независимые источники формируют стохастический фон, если их число $N(f, \Delta f)$ много больше единицы. Источники становятся разрешимыми, если их число порядка единицы. Для набора эволюционирующих источников можно найти предельную частоту f_{lim} , на которой это происходит. При заданных Δf и \mathcal{R} с помощью конкретной зависимости $\dot{f}(f)$ (определяемой действием сил реакции гравитационного излучения или другими причинами) можно найти f_{lim} из условия

$$\mathcal{R} \frac{\Delta f}{\dot{f}} = 1. \quad (30)$$

Для ансамбля двойных звезд из уравнения (П.19) можно получить

$$f_{\text{lim}} \approx (1.2 \times 10^{-3} \text{ Гц}) \mathcal{R}_{300}^{3/11} \left(\frac{\Delta f}{3 \times 10^{-8} \text{ Гц}} \right)^{3/11} \times \left(\frac{\mathcal{M}}{0.52 M_\odot} \right)^{-5/11}. \quad (31)$$

Темп появления (слияния) \mathcal{R}_{300} взят для двойных белых карликов, которые, как считается, сливаются в нашей Галактике раз в 300 лет. Чирп-масса нормирована на $0.52 M_\odot$, что соответствует слиянию двух СО белых карликов с массами $0.6 M_\odot$. Эта оценка потребует в конце раздела 5.1, где будут обсуждаться шумы LISA.

Шумы от старых нейтронных звезд на частотах наземных интерферометров. Вращающиеся нейтронные звезды как источники ГВ могут быть грубо разделены на две группы. Одна состоит из старых нейтронных звезд с относительно слабыми магнитными полями и малыми электромагнитными потерями. Частота их вращения медленно убывает из-за испускания ГВ. В другую группу входят молодые, сильно намагниченные нейтронные звезды. Их частота вращения убывает гораздо быстрее из-за электромагнитных потерь. Ход эволюции их частот

таков, что члены обеих групп пересекают окно чувствительности наземных интерферометров в направлении убывания частоты от 10^3 Гц до 10 Гц. Число источников, одновременно излучающих в заданном интервале частот, пропорционально частоте рождения нейтронных звезд \mathcal{R} данной группы и обратно пропорционально средней скорости \dot{f} движения объектов через окно. Мы начнем со старых нейтронных звезд, а затем обсудим молодые нейтронные звезды.

Эволюция частоты вращения старых деформированных нейтронных звезд определяется гравитационными волнами. Формула для \dot{f} , аналогичная формуле (П.19) для двойных звезд, имеет следующий вид:

$$\dot{f} = \frac{32\pi^4 G}{c^5} I \epsilon^2 f^5, \quad (32)$$

где I — момент инерции звезды, а ϵ — эллиптичность (параметр деформации). Частота рождения \mathcal{R} нейтронных звезд этой популяции может быть оценена через наблюдаемую долю миллисекундных пульсаров (которые также являются старыми нейтронными звездами со слабым магнитным полем, чье вращение было ускорено аккрецией в двойных системах) по отношению к обычным радиопульсарам: $N_{\text{ms}}/N_{\text{PSR}} \approx 20/2000 = 1/100$. Напомним, что время жизни миллисекундных пульсаров примерно равно $t_{\text{ms}} = 10^8$ лет, обычных радиопульсаров — $t_{\text{PSR}} = 10^6$ лет, а частота рождения последних равна 1 за 30 лет (т.е. равна частоте вспышек сверхновых типа II с коллапсом ядра). Приведенные значения позволяют оценить частоту образования миллисекундных пульсаров:

$$\mathcal{R}_{\text{ms}} = \mathcal{R}_{\text{PSR}} \frac{N_{\text{ms}}}{N_{\text{PSR}}} \frac{t_{\text{PSR}}}{t_{\text{ms}}} \approx 3 \times 10^{-6} \text{ год}^{-1}.$$

Эта оценка находится в согласии с результатом [111], выведенным из наблюдаемой пространственной плотности миллисекундных пульсаров.

Из уравнения (30) можно получить предельную частоту

$$f_{\text{lim}} \approx 53 \text{ Гц} \left(\frac{\mathcal{R}}{3 \times 10^5 \text{ лет}} \right)^{1/5} \left(\frac{\Delta f}{3 \times 10^{-8} \text{ Гц}} \right) \times \left(\frac{I}{10^{45} \text{ г см}^2} \right)^{-1/5} \left(\frac{\epsilon}{10^{-9}} \right)^{-2/5}. \quad (33)$$

Таким образом, на частотах ниже 53 Гц популяция старых нейтронных звезд может порождать стохастический фон. Взяв $E(f) = \pi^2 I f^2 / 2$, можно из (29) получить

$$h_N(f) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{G}{c^3}} I \mathcal{R} \approx 2 \times 10^{-26} \left(\frac{10 \text{ кпк}}{r} \right) \times \left(\frac{\mathcal{R}}{3 \times 10^5 \text{ лет}} \right)^{1/2} \left(\frac{I}{10^{45} \text{ г см}^2} \right)^{1/2}. \quad (34)$$

Интересно, что эта величина не зависит от параметра деформации ϵ , если только он не равен нулю. Величины h_1^2 и \dot{f} обе пропорциональны ϵ^2 и взаимно сокращаются в выражении для h_N^2 . Величина $h_N(f)$ также не зависит от частоты f . Численно уровень $h_N(f)$ много меньше, чем инструментальный шум как у начальных,

так и у улучшенных интерферометров. Значение $h_N(f)$ может быть увеличено на два порядка величины, и гравитационно-волновой шум от старых нейтронных звезд достигнет границы обнаружимости только при постулировании существенно большего (и, как мы считаем, нереального) темпа образования старых нейтронных звезд \mathcal{R} (ср. со [112]).

На частотах выше предельной частоты (33) источники можно разрешить за один год непрерывных наблюдений. Однако для того, чтобы следить за отдельной нейтронной звездой, необходимо знать ее положение на небе с высокой точностью — это позволяет устранить влияние доплеровской модуляции, возникающей из-за движения Земли вокруг Солнца (см. раздел 8).

Молодые нейтронные звезды отличаются от старых тем, что их электромагнитные потери

$$\dot{E}_{\text{em}} = \frac{2\pi^4}{3c^3} \mu^2 f^4, \quad (35)$$

где μ — магнитный дипольный момент нейтронной звезды, существенно больше гравитационно-волновых

$$\dot{E}_{\text{gw}} = \frac{32\pi^6 G}{c^5} I^2 \epsilon^2 f^6. \quad (36)$$

Отношение $x = \dot{E}_{\text{em}} / \dot{E}_{\text{gw}}$ равно

$$x \approx 4 \times 10^3 (\mu_{30})^2 (\epsilon_{-6})^{-2} (I_{45})^{-2} \left(\frac{100 \text{ Гц}}{f} \right)^2, \quad (37)$$

здесь $\mu_{30} = \mu / (10^{30} \text{ Гс см}^3)$, $\epsilon_{-6} = \epsilon / 10^{-6}$ и $I_{45} = I / 10^{45} \text{ г см}^2$. Для типичных параметров молодых нейтронных звезд имеем $x \gg 1$. Отношение x становится ~ 1 только для относительно слабых магнитных полей, когда магнитный момент μ удовлетворяет условию $\mu < 1,5 \times 10^{26} (\text{Гс см}^3) \epsilon_{-6} (f/100 \text{ Гц})$. Изменение частоты f определяется электромагнитными потерями

$$\dot{f} = \frac{2\pi^2}{3c^3} \frac{\mu^2 f^3}{I}. \quad (38)$$

Для f_{lim} получается соотношение

$$f_{\text{lim}} = 0,5 \text{ Гц} (\mathcal{R}_{30})^{1/3} \left(\frac{\Delta f}{3 \times 10^{-8} \text{ Гц}} \right)^{1/3} (\mu_{30})^{-2/3} (I_{45})^{1/3}. \quad (39)$$

Средняя амплитуда h_1 от одной нейтронной звезды равна

$$h_1 = \frac{G\pi^2 \sqrt{32}}{c^4} \frac{1}{r} I f^2 \epsilon. \quad (40)$$

Тогда $h_N(f)$ находится из уравнения (24) с помощью (38):

$$h_N(f) = \frac{4\sqrt{3}\pi G}{c^{5/2}} \frac{1}{r} I^{3/2} \mathcal{R}^{1/2} \epsilon \mu^{-1} f \approx 3 \times 10^{-26} \left(\frac{10 \text{ кпк}}{r} \right) \mathcal{R}_{30}^{1/2} I_{45}^{3/2} \epsilon_{-6} \mu_{30}^{-1} \frac{f}{100 \text{ Гц}}. \quad (41)$$

Таким образом, гравитационно-волновой шум от молодых нейтронных звезд имеет тот же самый уровень, что и фон от старых нейтронных звезд. Частота появления

молодых нейтронных звезд много выше, чем старых, но они пересекают окно чувствительности намного быстрее, так что в нем не оказывается достаточного количества источников, чтобы создать сильный шум. Мы заключаем, что обе популяции нейтронных звезд не представляют какой-либо опасности для чувствительности наземных инструментов первого или второго поколения. Важно также отметить, что рассчитанный уровень шума лежит ниже ожидаемого фона реликтовых ГВ (см. раздел 6).

Шум от галактических двойных белых карликов внутри диапазона частот LISA. Диапазон частот LISA, $10^{-4} - 10^{-1}$ Гц, может быть загрязнен гравитационно-волновым шумом от сливающихся двойных белых карликов (WD) и нейтронных звезд. Темп появления объектов \mathcal{R} обеих популяций в окне чувствительности численно равен темпу их слияний. Двойные WD гораздо более многочисленны, чем двойные NS, и темп слияний у объектов первой популяции также существенно выше, чем у второй. Двойные WD сливаются примерно 1 раз в 300 лет, в то время как двойные NS — 1 раз каждые 10000 лет. В то же время их чирп-массы ($\mathcal{M} \approx 0,52 M_\odot$ для двойных WD и $\mathcal{M} \approx 1,22 M_\odot$ для двойных NS) не слишком сильно различаются. Отсюда видно, что шум от WD более важен, чем шум от NS, и мы будем рассматривать только его.

Для набора источников, состоящего из двойных звезд, можно подставить формулы (П.13), (П.19) в уравнение (24) или, наоборот, уравнение (26) при $\alpha = 2/3$ в (27). В обоих случаях получится соотношение

$$h_N(f) = \frac{G^{5/6}}{\sqrt{3} \pi^{2/3} c^{3/2}} \frac{1}{r} \mathcal{R}^{1/2} \mathcal{M}^{5/6} f^{-2/3} = 10^{-20} \left(\frac{10 \text{ кпк}}{r} \right) \times \left(\frac{\mathcal{R}}{300 \text{ лет}} \right)^{1/2} \left(\frac{f}{10^{-3} \text{ Гц}} \right)^{-2/3} \left(\frac{\mathcal{M}}{0,52 M_\odot} \right)^{5/6}. \quad (42)$$

Грубо, это результат одновременного действия $\approx 10^6$ двойных в интервале частот $\Delta f = f = 10^{-3}$ Гц со средней амплитудой (см. формулу (П.13))

$$h_1 = \frac{\sqrt{32} \pi^2 G^{5/3}}{\sqrt{5} c^4} \frac{1}{r} \mathcal{M}^{5/3} f^{2/3} = 2,5 \times 10^{-23} \left(\frac{10 \text{ кпк}}{r} \right) \left(\frac{\mathcal{M}}{0,52 M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{f}{10^{-3} \text{ Гц}} \right)^{2/3}. \quad (43)$$

Необходимо заметить, что формула (42) дает оценку амплитуды, усредненную по всему небу, в то время как реальный фон сильно сконцентрирован в направлении плоскости Галактики (см. [36]). Отклик космического интерферометра будет модулироваться из-за его поворотов в ходе орбитального движения. В принципе, эта модуляция галактического фона может быть использована для его отделения от фонов космологического происхождения [113].

В формуле (42) величина \mathcal{R} содержит в себе все астрофизические неопределенности эволюции двойных WD. На частотах выше 3×10^{-4} Гц эволюция большей части двойных белых карликов полностью определяется излучением гравитационных волн. Поэтому на интересующих нас частотах гравитационно-волновой шум зависит только от темпа слияния двойных WD в Галактике и не зависит от сложной эволюции двойных систем

на более низких частотах. (Примеры рассчитанных спектров на всех частотах можно найти в [33, 34, 114, 115].) Темп слияний тесных двойных WD известен с точностью до фактора 2–3. Один из способов оценить \mathcal{R} основывается на поиске близких двойных WD. Последние исследования [116] обнаружили большее число таких систем, чем полагали ранее. Однако статистика таких галактических двойных систем остается очень малой. Если слияния двойных WD ассоциируются со взрывами сверхновых типа Ia, как было предложено в [117] и последующих исследованиях многих авторов (современный обзор прародителей SN Ia приведен в [118]), то темп их слияний может быть оценен с помощью существенно более представительной статистики сверхновых. Авторы [118] приходят к заключению, что сливающиеся двойные белые карлики CO–CO остаются наиболее правдоподобными кандидатами, ответственными за феномен SN Ia. Частота вспышек SN Ia в Галактике оценивается как 4×10^{-3} в год [119, 120], что близко к рассчитанной частоте слияний CO–CO ($\sim (1-3) \times 10^{-3}$). Слияния пар WD He–CO и He–He (также возможные прогениторы SN Ia) происходят примерно в 10 раз чаще, чем для WD CO–CO [118]. Поскольку взрывы SN Ia могут инициироваться также и другими механизмами, то мы заключаем, что наблюдаемая частота вспышек SN Ia является верхним пределом темпа слияния двойных WD вне зависимости от особенностей их эволюции.

На рисунке 6 показана кривая чувствительности LISA (сплошная толстая линия) как функция частоты, рассчитанная для узких интервалов частот (бинов) $\Delta f = 3 \times 10^{-8}$ Гц, что соответствует 1 году наблюдений. Предел, определяемый двойными звездами, показан штрихпунктирной линией. На частотах ниже $\sim 4 \times 10^{-4}$ Гц гравитационно-волновой фон от двойных порождается не только сливающимися белыми карликами, но также и другими двойными. В этой части рисунка мы основываемся на численных расчетах [33, 121]. На предельной частоте $\sim 10^{-3}$ Гц индивидуальные двойные WD становятся разрешимы за 1 год наблюдений, и фон от двойных систем опускается ниже уровня чувствительности LISA. Однако он продолжается как шум, производимый изотропно распределенными внегалактическими двойными (см. раздел 5.2). На рисунке 6 также показан ожидаемый фон реликтовых гравитационных волн (см. раздел 6). Помня, что реальный фон,

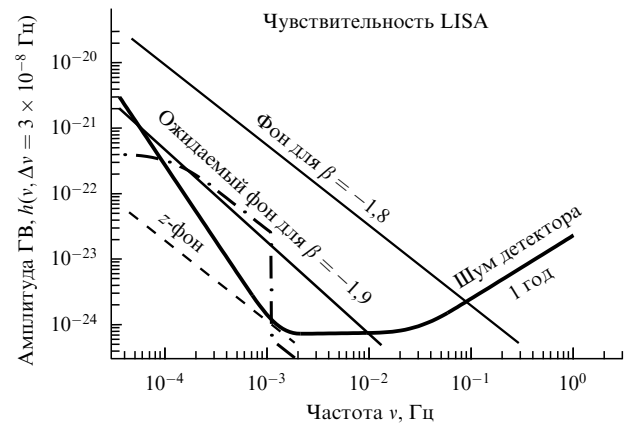


Рис. 6. Ожидаемый спектр с $\beta = -1,9$ и другие возможные спектры в сравнении с чувствительностью LISA.

вызванный слиянием галактических WD, может быть ниже, чем изображенный на рисунке, и в любом случае он будет зависеть от направления, мы делаем вывод, что в интервале частот $\sim 10^{-3} - 10^{-1}$ Гц не может быть никакого фона ГВ галактической природы, превышающего кривую чувствительности LISA, рассчитанную для интервала частот $\Delta f = 3 \times 10^{-8}$ Гц. Если LISA обнаружит гравитационно-волновой фон на этих частотах, то он должен иметь космологическое происхождение. Несмотря на то, что ограничения на низкочастотную часть помех от двойных систем более модельно-зависимы (они определяются реальным числом двойных звезд в Галактике, их пространственным распределением и деталями эволюции), рассчитанный шум от них лежит ниже кривой чувствительности LISA на частотах ниже $\sim 10^{-4}$ Гц. Это оставляет открытым для поиска космологических фонов также некоторую низкочастотную часть окна чувствительности LISA в дополнение к уже обсуждавшемуся выше интервалу $\sim 10^{-3} - 10^{-1}$ Гц.

5.2. Гравитационно-волновой шум от внегалактических двойных

Простые оценки показывают, что ожидаемый изотропный внегалактический фон будет на полтора порядка величины слабее усредненного по небу фона галактических двойных (см. [33, 34, 36, 114]). Рассмотрим объем пространства с радиусом $r = 300$ Мпк. Это большой объем, в котором, однако, все еще можно пренебрегать кривизной пространства и космологической временной эволюцией темпа звездообразования. Согласно (14), частота событий в этом объеме \mathcal{R}_V связана с частотой событий в отдельной галактике \mathcal{R}_G соотношением $\mathcal{R}_V = 3 \times 10^6 \mathcal{R}_G$. Формула (29), записанная для внегалактических источников, будет содержать \mathcal{R}_V вместо галактического темпа событий \mathcal{R} и $r = 300$ Мпк вместо типичного галактического расстояния $r = 10$ кпк. Комбинируя эти числа, находим соотношение между галактической $h_N(f)$ и внегалактической $h_N^{eg}(f)$ амплитудами:

$$h_N^{eg}(f) \approx 5 \times 10^{-2} h_N(f). \quad (44)$$

Таким образом, ожидается, что амплитуда шума от внегалактических двойных будет в 20 раз меньше амплитуды от двойных систем из нашей Галактики.

Более сложные расчеты принимают во внимание заметно больший темп звездообразования на больших красных смещениях [115, 122]. Согласно этим работам, неразрешенные внегалактические двойные могут давать до 10 % среднего галактического фона. Это все еще меньше проектной чувствительности LISA, так что нет угрозы появления помех. Вклад неразрешенных внегалактических двойных показан на рис. 6 справа от частоты $\approx 10^{-3}$ Гц, где галактические двойные становятся разрешимыми и их вклад в фон резко падает. Дополнительной отличительной особенностью гравитационно-волнового фона источников из удаленных галактик является специфическая угловая анизотропия излучения, связанная с неоднородностью распределения галактик по небу [123].

6. Реликтовые гравитационные волны и их детектирование

Существование реликтовых ГВ следует из самых общих предположений. По сути дела мы опираемся только на общую теорию относительности и квантовую теорию

поля. Быстро изменяющееся гравитационное поле в ранней Вселенной усиливает неизбежные нулевые квантовые осцилляции ГВ и создает стохастический фон гравитационных волн, который можно измерять в настоящее время [9, 124, 125]. Детектирование реликтовых ГВ является единственным способом узнать об эволюции ранней Вселенной вплоть до планковских времен и Большого Взрыва. Важно осознать фундаментальную и неизбежную природу этого механизма. Стохастические фоны ГВ могут генерироваться и другими механизмами. Однако эти процессы либо привлекают много дополнительных и зачастую сомнительных гипотез, либо производят фон ГВ (наподобие фона от двойных звезд в нашей Галактике), который рассматривается скорее как нежелательный шум, а не полезный и интересный сигнал. Научная значимость детектирования реликтовых ГВ многократно подчеркивалась в литературе (см., например, [4–6]).

Центральное понятие в теории реликтовых гравитонов — явление сверхадиабатического (параметрического) усиления. Это явление известно в классической физике, и мы напомним его основные свойства. Как и для всякого волнового процесса, для ГВ используется концепция гармонического осциллятора. Фундаментальное уравнение для свободного гармонического осциллятора имеет вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (45)$$

где q может быть смещением механического маятника или зависящей от времени амплитудой моды физического поля. Энергия осциллятора может изменяться под действием внешней силы или при параметрическом влиянии, когда изменяется параметр осциллятора, например, длина маятника. В первом случае фундаментальное уравнение принимает вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t), \quad (46)$$

в то время как во втором случае уравнение (45) записывается как

$$\ddot{q} + \omega^2(t) q = 0. \quad (47)$$

Уравнения (46) и (47) коренным образом отличаются как математически, так и физически.

Рассмотрим более подробно параметрическое влияние. Пусть маятник имеет длину L и осциллирует в постоянном гравитационном поле g . Невозмущенный маятник имеет постоянную частоту колебаний $\omega = \sqrt{g/L}$. Рисунок 7а иллюстрирует изменение длины

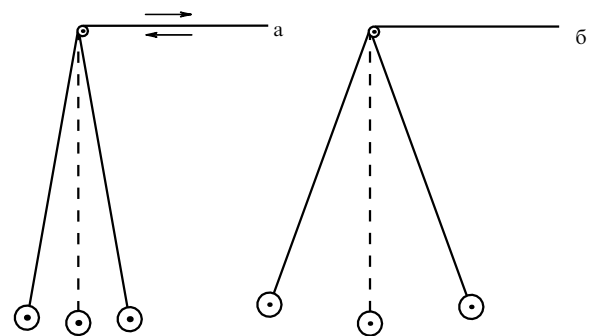


Рис. 7. Параметрическое усиление: изменение длины маятника (а); возрастание амплитуды колебаний (б).

маятника $L(t)$ внешним агентом, что обозначено стрелками. Поскольку $L(t)$ изменяется, частота осциллятора тоже меняется: $\omega(t) = \sqrt{g/L(t)}$. Изменение $L(t)$ не обязательно должно быть периодическим, но не может быть слишком медленным (адиабатическим), если мы хотим добиться осязаемого эффекта. В противоположном случае, в адиабатическом режиме медленных изменений, энергия осциллятора E и его частота ω медленно изменяются, но так, что отношение E/ω остается постоянным, и потому можно сказать, что "число квантов" $E/\hbar\omega$ в осцилляторе не изменяется. Другими словами, для рождения новых "частиц-возбуждений", характерное время переменности должно быть сравнимо с периодом осциллятора, и адиабатическое поведение должно быть нарушено. После некоторого времени соответствующего параметрического влияния маятник будет колебаться с начальной частотой, но будет иметь значительно большую, чем раньше, амплитуду и энергию. Результат процесса показан на рис. 76. Очевидно, энергия осциллятора возросла за счет внешнего агента (поля накачки). Для простоты мы рассмотрели хорошо известный пример, когда изменяется длина маятника, а ускорение свободного падения g остается постоянным. Изменение g отвечало бы параметрическому гравитационному влиянию и еще ближе соответствовало бы тем процессам, которые рассматриваются ниже.

Для работы механизма усиления классический осциллятор должен иметь ненулевую начальную амплитуду. В противном случае, если начальная амплитуда равна нулю, конечная амплитуда также будет нулевой. Действительно, представим себе маятник в состоянии покоя, когда его нить направлена вертикально вниз. Как бы ни изменялась его длина, это не заставит маятник колебаться и приобретать энергию. Напротив, квантовый осциллятор не обязательно должен быть возбужден с самого начала. Осциллятор может изначально находиться в своем вакуумном квантовомеханическом состоянии. Неустранимые нулевые квантовые осцилляции ассоциируются с энергией вакуумного состояния $(1/2)\hbar\omega$. Можно представить себе маятник, висящий вертикально вниз, но флуктуирующий с малой амплитудой, определяемой энергией в "полкванта в моде". В классической картине именно эта малая амплитуда, имеющая квантовомеханическое происхождение, параметрически усиливается.

Шрёдингеровская эволюция квантового осциллятора критически зависит от того, как возбужден осциллятор — параметрически или внешней силой. Рассмотрим фазовую диаграмму (q, p) , где q — смещение и p — сопряженный импульс. Вакуумное состояние описывается окружностью в центре (рис. 8). Средние значения q и p равны нулю, но их дисперсии (нулевые квантовые флуктуации) не равны нулю и равны друг другу по величине. Их численные значения представлены окружностью в центре. Под действием силы вакуумное состояние эволюционирует в когерентное состояние. Средние значения p и q возрастают, но их дисперсии все еще равны друг другу и описываются окружностью того же размера, что и для вакуумного состояния. С другой стороны, при параметрическом усилении вакуумное состояние эволюционирует в сжатое вакуумное состояние. (Недавний обзор вакуумных состояний содержится, например, в книге [126]; см. также цитируемую в ней литературу.) Дисперсии сопряженных переменных q и p

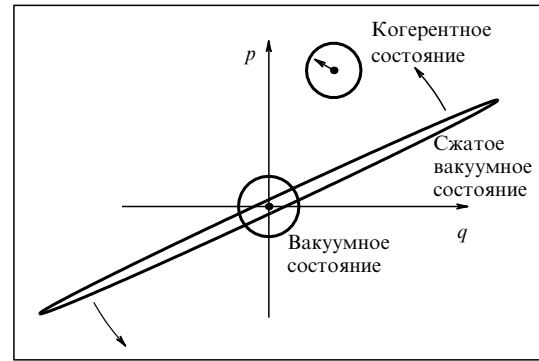


Рис. 8. Некоторые квантовые состояния гармонического осциллятора.

становятся существенно разными и изображаются эллипсом. Как функция времени, эллипс вращается относительно центра (q, p) -диаграммы, и численные значения дисперсий осциллируют. Среднее значение числа квантов в двух состояниях, одно из которых когерентное, а другое — сжатый вакуум, могут быть равны (подобно когерентному и сжатому состояниям, показанным на рис. 8), но статистические свойства этих состояний существенно различны. В частности, дисперсия фазы осциллятора в сжатом квантовом состоянии очень мала (отсюда название — "сжатое"). Графически это отражено в том факте, что эллипс очень узкий, поэтому неопределенность в угле между горизонтальной осью и ориентацией эллипса очень мала. Этот сильно вытянутый эллипс можно рассматривать как портрет гравитационно-волнового квантового состояния, которое с неизбежностью генерируется параметрическим усилением и с которым мы будем иметь дело ниже.

Волновое поле не есть одиночный осциллятор, оно зависит от пространственных координат и времени и может иметь несколько независимых компонент — поляризационных состояний. Однако поле можно разложить в ряд по пространственным фурье-гармоникам. Таким путем мы представляем гравитационно-волновое поле как набор многих мод, многих осцилляторов. В силу нелинейного характера уравнений Эйнштейна, каждый из этих осцилляторов взаимодействует с переменным гравитационным полем окружающей Вселенной. Для достаточно коротких ГВ, интересных с экспериментальной точки зрения, это взаимодействие было особенно эффективным в ранней Вселенной, когда условие адиабатического поведения осциллятора было нарушено. Именно это однородное изотропное гравитационное поле всей материи в ранней Вселенной играло роль внешнего агента — поля накачки. Переменное поле накачки параметрически воздействует на гравитационно-волновые осцилляторы и переводит их в многоквантовые состояния. Конкретно, начальное вакуумное состояние каждой пары волн с противоположно направленными импульсами эволюционирует в сильно коррелированное состояние, известное как двухмодовое сжатое вакуумное состояние [127–130]. Величина и длительность эффективной связи зависят от частоты осциллятора. Все осцилляторы изначально находятся в вакуумном состоянии, но возбуждаются в различной степени. В результате формируется широкий спектр

реликтовых ГВ. Этот спектр доступен для экспериментального изучения в наше время.

6.1. Космологические гравитационные волны

В рамках общей теории относительности однородное изотропное гравитационное поле описывается интервалом

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

Более удобно ввести новую временную координату η и записать ds^2 в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (48)$$

В космологии функция $a(t)$ (или $a(\eta)$) называется масштабным фактором. В нашем анализе функция $a(\eta)$ будет собой представлять гравитационное поле накачки.

Космологические гравитационные волны являются малыми поправками h_{ij} к метрическому тензору. Они определяются выражением

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j]. \quad (49)$$

Функции $h_{ij}(\eta, \mathbf{x})$ могут быть разложены по пространственным фурье-гармоникам $\exp(+i\mathbf{n}\mathbf{x})$ и $\exp(-i\mathbf{n}\mathbf{x})$, где \mathbf{n} — постоянный волновой вектор. Таким образом, мы сводим динамическую задачу к эволюции зависящих от времени амплитуд для каждой моды \mathbf{n} . Среди шести функций h_{ij} есть лишь две независимые компоненты (поляризации). Это разложение может быть сделано как для классического, так и для квантованного поля h_{ij} . В квантовой версии функции h_{ij} интерпретируются как квантовомеханические операторы. Мы будем использовать представление Гейзенберга, в котором операторы несут зависимость от времени, а сами квантовые состояния не изменяются. Эта картина полностью эквивалентна обсуждавшемуся в начале раздела 6 представлению Шрёдингера, в котором вакуумное состояние эволюционирует в сжатое вакуумное состояние, а операторы от времени не зависят.

Оператор Гейзенберга для квантованного вещественного поля h_{ij} может быть записан как

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{C}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{n} \sum_{s=1}^2 \hat{p}_{ij}(\mathbf{n}) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2n}} \left[\hat{h}_n(\eta) \exp(i\mathbf{n}\mathbf{x}) \hat{c}_{\mathbf{n}}^s + \hat{h}_n^*(\eta) \exp(-i\mathbf{n}\mathbf{x}) \hat{c}_{\mathbf{n}}^{s\dagger} \right], \quad (50)$$

где C — некоторая константа, которую мы обсудим ниже. Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют условиям

$$[\hat{c}_{\mathbf{n}}^s, \hat{c}_{\mathbf{m}}^{s\dagger}] = \delta_{s's} \delta^3(\mathbf{n} - \mathbf{m}), \quad \hat{c}_{\mathbf{n}}^s |0\rangle = 0,$$

где $|0\rangle$ (для каждого \mathbf{n} и s) — фиксированное начальное вакуумное состояние, обсуждающееся ниже. Волновое число n связано с волновым вектором \mathbf{n} соотношением $n = (\delta_{ij} n^i n^j)^{1/2}$. Два тензора поляризации $\hat{p}_{ij}(\mathbf{n})$ ($s = 1, 2$) подчиняются условиям

$$\hat{p}_{ij} n^j = 0, \quad \hat{p}_{ij} \delta^{ij} = 0, \quad \hat{p}_{ij}^s \hat{p}^{ij} = 2\delta_{ss'}, \quad \hat{p}_{ij}(-\mathbf{n}) = \hat{p}_{ij}(\mathbf{n}).$$

Временная эволюция, одна и та же для всех \mathbf{n} , принадлежащих данному n , представляется комплексной зависящей от времени функцией $\hat{h}_n(\eta)$. Эта эволюция определяется уравнениями Эйнштейна. Нелинейность уравнений Эйнштейна ведет к появлению связи между $\hat{h}_n(\eta)$ и полем накачки $a(\eta)$. Для каждого волнового числа n и каждой поляризации s функция $\hat{h}_n(\eta)$ имеет вид

$$\hat{h}_n(\eta) = \frac{1}{a(\eta)} [\hat{u}_n(\eta) + \hat{v}_n^*(\eta)], \quad (51)$$

где $\hat{u}_n(\eta)$ и $\hat{v}_n(\eta)$ могут быть выражены через действительные функции (поляризационный индекс s опущен) r_n — параметр сжатия, ϕ_n — угол сжатия, θ_n — угол поворота:

$$u_n = \exp(i\theta_n) \cosh r_n, \quad v_n = \exp[-i(\theta_n - 2\phi_n)] \sinh r_n. \quad (52)$$

Динамические уравнения для $u_n(\eta)$ и $v_n(\eta)$

$$i \frac{du_n}{d\eta} = nu_n + i \frac{a'}{a} v_n^*, \quad i \frac{dv_n}{d\eta} = nv_n + i \frac{a'}{a} u_n^* \quad (53)$$

приводят к динамическим уравнениям для функций $r_n(\eta)$, $\phi_n(\eta)$, $\theta_n(\eta)$ [129, 130]:

$$r'_n = \frac{a'}{a} \cos 2\phi_n, \quad \phi'_n = -n - \frac{a'}{a} \sin 2\phi_n \coth 2r_n, \\ \theta'_n = -n - \frac{a'}{a} \sin 2\phi_n \tanh r_n, \quad (54)$$

где $' \equiv d/d\eta$, а эволюция начинается с $r_n = 0$. Это значение r_n характеризует начальное вакуумное состояние $|0\rangle$, которое определено задолго до того, как взаимодействие с полем накачки стало эффективным, т.е. задолго до того, как член взаимодействия a'/a стал сравним с n . Константа C должна быть выбрана так, что $C = \sqrt{16\pi} l_{\text{Pl}}$, где $l_{\text{Pl}} = (G\hbar/c^3)^{1/2}$ — планковская длина. Этот конкретный выбор постоянной C гарантирует правильную квантовую нормировку поля: энергию $(1/2)\hbar\omega$ в каждой моде в начальном вакуумном состоянии. Динамические уравнения и их решения идентичны для обеих поляризаций s .

Уравнение (53) может быть преобразовано в более привычную форму дифференциального уравнения второго порядка для функции

$$\hat{\mu}_n(\eta) \equiv \hat{u}_n(\eta) + \hat{v}_n^*(\eta) \equiv a(\eta) \hat{h}_n(\eta)$$

(см. [9, 124, 125]):

$$\mu_n'' + \mu_n \left(n^2 - \frac{a''}{a} \right) = 0. \quad (55)$$

Очевидно, это уравнение для параметрически возбужденного осциллятора (ср. с уравнением (47)). При отсутствии гравитационного параметрического влияния, представленного слагаемым a''/a , частота осциллятора n , определенная в терминах η -времени, была бы постоянной. Всегда, когда слагаемым a''/a можно пренебречь, общее решение уравнения (55) имеет обычный для осциллятора вид

$$\mu_n(\eta) = A_n \exp(-in\eta) + B_n \exp(+in\eta), \quad (56)$$

где постоянные A_n , B_n определяются начальными условиями. С другой стороны, там, где слагаемое a''/a доминирует, общее решение уравнения (55) имеет вид

$$\mu_n(\eta) = C_n a + D_n a \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2}. \quad (57)$$

Более точно, приближенное решение (57) верно до тех пор, пока n мало по сравнению с $|a'/a|$. Это более отчетливо видно из эквивалентной формы уравнения (55), записанной для функции $h_n(\eta)$ [2]:

$$h_n'' + 2 \frac{a'}{a} h_n' + n^2 h_n = 0. \quad (58)$$

Для растущих функций $a(\eta)$, т.е. в расширяющихся вселенных, второе слагаемое в (57) обычно меньше первого (см. ниже), так что пока $n \ll a'/a$, доминирующим решением является растущая функция $\mu_n(\eta) = C_n a(\eta)$, и

$$h_n = \text{const}. \quad (59)$$

Уравнение (55) можно также рассматривать как уравнение Шрёдингера для частицы, движущейся в эффективном потенциале $U(\eta) = a''/a$. В обычно рассматриваемых ситуациях потенциал $U(\eta)$ имеет колокообразную форму и образует барьер (рис. 9). Когда данная мода n находится вне барьера, ее амплитуда h_n адиабатически уменьшается со временем: $h_n \propto \exp(\pm i n \eta)/a(\eta)$. Это показано на рис. 9 осциллирующей линией с уменьшающейся амплитудой колебаний. Достаточно высокочастотные моды не взаимодействуют с барьером, оставаясь над ним. Их амплитуды h_n ведут себя адиабатически со временем. Для этих высокочастотных мод начальное вакуумное состояние (в представлении Шрёдингера) остается всегда вакуумным. С другой стороны, моды, которые взаимодействуют с барьером, подвержены сверхадиабатическому усилению. Под барьером и до тех пор, пока $n < a'/a$, функция h_n остается постоянной вместо адиабатического уменьше-

ния. Для этих мод начальное вакуумное состояние эволюционирует в сжатое вакуумное состояние.

После формулирования начальных условий нам осталось, в сущности, найти только поведение величин r_n , ϕ_n , θ_n в настоящее время (или, эквивалентно, сегодняшнее поведение h_n). Среднее число частиц в двухмодовом сжатом состоянии есть $2 \sinh^2 r_n$ для каждой поляризации s . Это число определяет среднеквадратичную амплитуду гравитационно-волнового поля. Временное поведение угла сжатия ϕ_n определяет временную зависимость корреляционных функций поля. Усиление (т.е. рост величины r_n), определяемое уравнением (54), различно для разных волновых чисел n . Следовательно, современный результат зависит от современной частоты ν .

В космологии функция $H \equiv \dot{a}/a \equiv ca'/a^2$ является зависящим от времени параметром Хаббла. Функция $l \equiv c/H$ есть зависящий от времени хаббловский радиус. Зависящая от времени длина волны моды n равна $\lambda = 2\pi a/n$. Длина волны λ универсально определяется таким образом во всех режимах. Напротив, величина ν , определенная как $\nu = cn/2\pi a$, имеет обычный смысл частоты колебательного процесса только в коротковолновом (высокочастотном) режиме моды n , т.е. тогда, когда $\lambda \ll l$. Как мы видели выше, качественное поведение решений уравнений (55), (58) критически зависит от отношения величин n и a'/a , или, другими словами, от отношения значений $\lambda(\eta)$ и $l(\eta)$. Как мы сейчас увидим, это соотношение также критически важно для решений уравнений (54).

В коротковолновом режиме, т.е. в течение интервалов времени, когда длина волны $\lambda(\eta)$ короче хаббловского радиуса $l(\eta) = a^2/a'$, слагаемое n в (54) доминирует. Функции $\phi_n(\eta)$ и $\theta_n(\eta)$ равны $\phi_n = -n(\eta + \eta_n)$ и $\theta_n = \phi_n$, где η_n — постоянная. Фактор $\cos 2\phi_n$ является быстро осциллирующей функцией времени, поэтому параметр сжатия r_n остается практически постоянным. Это адиабатический режим для данной моды.

Напротив, в длинноволновом режиме слагаемым n можно пренебречь. Функция ϕ_n есть $\tan \phi_n(\eta) \approx \text{const}/a^2(\eta)$, и угол сжатия приближается к одному из двух значений: $\phi_n = 0$ или $\phi_n = \pi$ (аналог "фазовой бифуркации" [131, 132]). Параметр сжатия $r_n(\eta)$ растет со временем в соответствии с уравнением

$$r_n(\eta) \approx nl \frac{a(\eta)}{a_*}, \quad (60)$$

где a_* есть значение $a(\eta)$ при η_* , при котором начинается длинноволновой режим для данного n . Конечное значение r_n есть

$$r_n \approx nl \frac{a_{**}}{a_*}, \quad (61)$$

где a_{**} есть значение $a(\eta)$ при η_{**} , когда длинноволновой режим и усиление прекращаются. Важно подчеркнуть, что не "внезапный переход" от одной космологической эры к другой отвечает за усиление, но целый интервал длинноволнового (неадиабатического) режима.

После окончания усиления возросший (и типично большой по величине) параметр сжатия r_n остается практически постоянным. Мода вновь находится в адиабатическом режиме. В ходе эволюции комплексные функции $u_n^s(\eta) + v_n^{*s}(\eta)$ становятся практически действ-

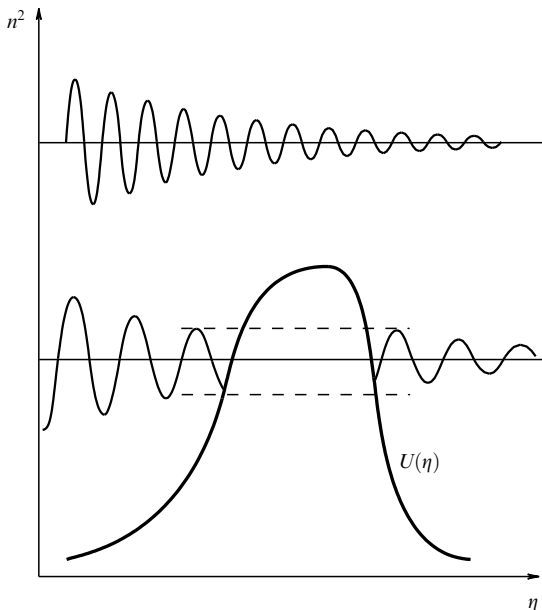


Рис. 9. Эффективный потенциал $U(\eta)$.

вительными, и мы имеем

$$h_n^s(\eta) \approx h_n^{*s}(\eta) \approx \frac{1}{a} \exp(r_n) \cos \phi_n(\eta).$$

Каждая усиленная мода n поля (50) принимает вид произведения некоторой функции от времени и (случайной операторной) функции пространственных координат; мода приобретает вид стоячей волны. Периодическая зависимость $\cos \phi_n(\eta)$ будет обсуждаться в дальнейшем (см. формулу (75)).

Из фундаментальных уравнений (54), (55), (58) ясно видно, что конечный результат зависит только от $a(\eta)$. Для уравнений неважно, как называются наши те или иные предпочтительные космологические модели, имеет значение только вид поля накачки $a(\eta)$. И обратно, из измерений реликтовых гравитационных волн мы можем определить поведение $a(\eta)$, что по сути дела и является целью детектирования реликтовых гравитонов.

6.2. Космологическое поле накачки

При выбранных начальных условиях конечный численный результат для реликтовых ГВ зависит от конкретного поведения поля накачки, представленного космологическим масштабным фактором $a(\eta)$. Нам многое известно про $a(\eta)$. Мы знаем, что $a(\eta)$ ведет себя как $a(\eta) \propto \eta^2$ на современной стадии доминантности вещества. Мы знаем, что этой стадии предшествовала радиационно-доминированная стадия, на которой $a(\eta) \propto \eta$. На этих двух стадиях эволюции функции $a(\eta)$ являются просто степенными функциями от времени η . А вот поведение $a(\eta)$, описывающее начальные стадии расширения очень ранней Вселенной, т.е. до эпохи первичного нуклеосинтеза, нам неизвестно. Удобно параметризовать поведение $a(\eta)$ на этой начальной стадии также степенными функциями от η . Во-первых, это достаточно широкий класс функций, который вдобавок позволяет нам найти точные решения наших фундаментальных уравнений. Во-вторых, известно (см. [9, 124, 125]), что поля накачки $a(\eta)$ со степенной зависимостью от времени η производят гравитационные волны с простыми степенными спектрами от частоты ν . Такие спектры легко анализировать и обсуждать в контексте детектирования.

Будем моделировать космологическое расширение последовательностью нескольких сменяющихся эр. Конкретно, возьмем $a(\eta)$ на начальной стадии расширения (i-стадии) в виде

$$a(\eta) = l_0 |\eta|^{1+\beta}, \quad (62)$$

где η растет от $-\infty$, а $1 + \beta < 0$. Мы покажем в разделе 6.4, как доступные наблюдательные данные ограничивают параметры l_0 и β . Упомянутая i-стадия длится до некоторого момента $\eta = \eta_1$, $\eta_1 < 0$. Для большей общности анализа предположим, что за i-стадией шел некоторый интервал z-стадии (z от "Зельдович"). Известно, что период эволюции, на котором господствовала наиболее "жесткая" материя (с эффективным уравнением состояния $p = \epsilon$), введенная Зельдовичем, приводит к относительно увеличению амплитуды гравитационных волн [9, 124, 125]. Также известно, что требование согласованности рождения гравитонов с современными наблюдательными ограничениями не допускает слишком длительного интервала господства "жесткой" материи [9, 124,

125, 133]. Однако мы хотим исследовать любой интервал космологической эволюции, который может быть согласованно включен в нашу схему. В действительности включенная нами z-стадия расширения имеет совершенно общий смысл. В эту эпоху может господствовать как "более жесткая, чем излучение" материя [134], так и "более мягкая, чем излучение" материя. Она также может быть просто частью радиационно-доминированной эры. Конкретно, мы берем $a(\eta)$ на интервале времени от η_1 до некоторого η_s (z-стадия) в виде

$$a(\eta) = l_0 a_z(\eta - \eta_p)^{1+\beta_s}, \quad (63)$$

где $1 + \beta_s > 0$. Для частного случая $\beta_s = 0$ z-стадия сводится просто к части периода расширения, определяемого радиационно-доминированным веществом. Начиная от η_s и до η_2 расширение Вселенной определялось излучением (e-стадия). Поэтому на данном интервале эволюции масштабный фактор записывается в виде

$$a(\eta) = l_0 a_e(\eta - \eta_e). \quad (64)$$

И наконец, начиная с момента $\eta = \eta_2$, расширение перешло в эру с доминантностью вещества (m-стадия):

$$a(\eta) = l_0 a_m(\eta - \eta_m)^2. \quad (65)$$

Связь между произвольными константами, входящими в (62)–(65), дается условиями непрерывности функций $a(\eta)$ и $a'(\eta)$ в переходных точках η_1 , η_s , η_2 .

Обозначим современный момент времени η_R (R от англ. recesption — прием). Этот момент времени определен известным из наблюдений значением современного параметра Хаббла $H(\eta_R)$ и хаббловским радиусом $l_H = c/H(\eta_R)$. Для численных оценок будем использовать $l_H \approx 2 \times 10^{28}$ см. Удобно выбрать $\eta_R - \eta_m = 1$, так что $a(\eta_R) = 2l_H$. Полагают, что отношение

$$\frac{a(\eta_R)}{a(\eta_2)} \equiv \zeta_2$$

должно быть порядка $\zeta_2 = 10^4$. Также обозначим

$$\frac{a(\eta_2)}{a(\eta_s)} \equiv \zeta_s, \quad \frac{a(\eta_s)}{a(\eta_1)} \equiv \zeta_1.$$

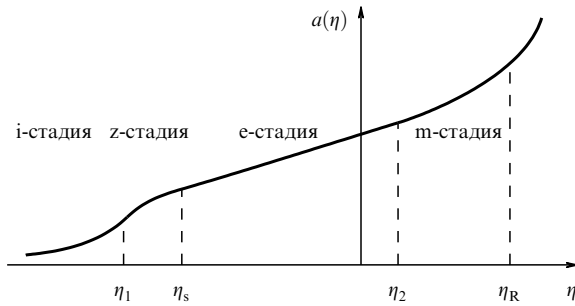
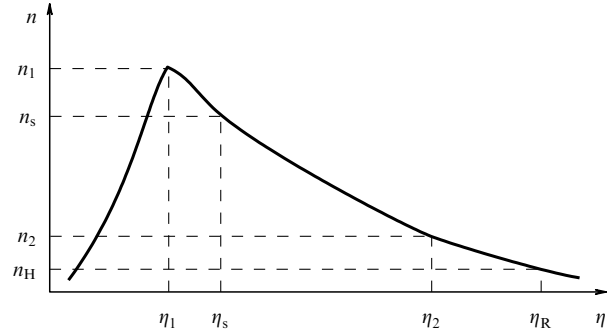
При таких определениях все константы, входящие в уравнения (62)–(65) (за исключением параметров β и β_s , которые следует выбрать из иных соображений), выражаются через величины l_H , ζ_2 , ζ_s и ζ_1 . Например,

$$|\eta_1| = \frac{|1 + \beta|}{2\zeta_2^{1/2}\zeta_s\zeta_1^{1/(1+\beta_s)}}.$$

Важная постоянная l_0 выражается как

$$l_0 = b l_H \zeta_2^{(\beta-1)/2} \zeta_s^\beta \zeta_1^{(\beta-\beta_s)/(1+\beta_s)}, \quad (66)$$

где $b \equiv 2^{2+\beta}/|1 + \beta|^{1+\beta}$. Заметим, что $b = 1$ при $\beta = -2$. (Это выражение для l_0 может быть использовано для связи между формулами, приведенными в настоящем обзоре, и теми, которые были получены при эквивалентном описании в [135], где использовались несколько другие обозначения.) Общая схема всей эволюции $a(\eta)$ представлена на рис. 10.

Рис. 10. Масштабный фактор $a(\eta)$.Рис. 11. Функция a'/a для масштабного фактора, изображенного на рис. 10.

Будем работать с пространственно-плоскими моделями (48). В каждый момент времени плотность энергии вещества $\epsilon(\eta)$, определяющего эволюцию, связана с хаббловским радиусом $l(\eta)$ соотношением

$$\kappa\epsilon(\eta) = \frac{3}{l^2(\eta)}, \quad (67)$$

где $\kappa = 8\pi G/c^4$. Для степенных масштабных факторов $a(\eta) \propto \eta^{1+\beta}$ эффективное давление $p(\eta)$ вещества связано с $\epsilon(\eta)$ через эффективное уравнение состояния

$$p = \frac{1-\beta}{3(1+\beta)} \epsilon. \quad (68)$$

Например, $p = 0$ при $\beta = 1$, $p = (1/3)\epsilon$ при $\beta = 0$, $p = -\epsilon$ при $\beta = -2$ и т.д. Каждый интервал эволюции (62)–(65) определяется одним из этих уравнений состояния.

В принципе, функция $a(\eta)$ могла бы иметь более сложный вид, чем рассматриваемые нами. Она могла бы даже включать эпизод раннего сжатия вместо расширения, ведущий к "отскоку" масштабного фактора. В случае уменьшающегося $a(\eta)$ уравнение для ГВ также можно анализировать, и усиление остается эффективным [9, 124, 125]. Однако уравнения Эйнштейна для пространственно-плоских моделей не допускают регулярного "отскока" $a(\eta)$ (если только ϵ не равно нулю в момент "отскока"). Возможно, решение с "отскоком" можно реализовать в альтернативных теориях, таких, как, например, струнная космология [136–138]. Недавнее обсуждение наклонов спектра ГВ в космологических моделях с "отскоком" можно найти в [139].

6.3. Решение уравнений для гравитационных волн

Эволюция масштабного фактора $a(\eta)$, заданная уравнениями (62)–(65) и изображенная на рис. 10, позволяет рассчитать функцию a'/a . Эта функция схематически показана на рис. 11. При всей теоретической общности левая часть барьера на рис. 11 также могла бы состоять из нескольких участков, однако мы не будем рассматривать здесь эту возможность. На этом графике также показаны важные волновые числа n_H , n_2 , n_s , n_1 . Число n_H отмечает волну, сегодняшняя длина которой $\lambda(\eta_R) = 2\pi a(\eta_R)/n_H$ равна значению сегодняшнего хаббловского радиуса l_H . При нашей параметризации $a(\eta_R) = 2l_H$ это волновое число есть $n_H = 4\pi$. Число n_2 отмечает волну, длина которой $\lambda(\eta_2) = 2\pi a(\eta_2)/n_2$ при $\eta = \eta_2$ равна хаббловскому радиусу $l(\eta_2)$ при $\eta = \eta_2$.

Поскольку

$$\frac{\lambda(\eta_R)}{\lambda(\eta_2)} = \frac{n_2}{n_H} \frac{a(\eta_R)}{a(\eta_2)}$$

и

$$\frac{l(\eta_R)}{l(\eta_2)} = \frac{a(\eta_R)}{a(\eta_2)} \left[\frac{a'(\eta_R)}{a(\eta_2)} \right]^{1/2},$$

это дает $n_2/n_H = [a(\eta_R)/a(\eta_2)]^{1/2} = \zeta_2^{1/2}$. Поступая аналогичным образом с другими соотношениями, находим

$$\frac{n_2}{n_H} = \zeta_2^{1/2}, \quad \frac{n_s}{n_2} = \zeta_s, \quad \frac{n_1}{n_s} = \zeta_1^{1/(1+\beta_s)}. \quad (69)$$

Решения уравнений для ГВ существуют для любого закона $a(\eta)$. В интервалах со степенной зависимостью $a(\eta)$ решения уравнения (55) имеют простой вид функций Бесселя. Мы могли бы найти точные кусочные решения уравнения (55) и сшить их в переходных точках. Однако мы будем использовать гораздо более простую трактовку, достаточную для наших целей. Мы знаем, что параметр сжатия r_n остается постоянным в коротковолновом режиме и растет согласно уравнению (60) в длинноволновом режиме. Все моды стартуют с вакуумного состояния, т.е. изначально $r_n = 0$. После завершения усиления возросшее значение (61) остается постоянным вплоть до настоящего времени. Чтобы найти сегодняшнее значение $\exp r_n$, надо вычислить значение отношения $a_{**}(n)/a_*(n)$. Для каждого данного n величина a_* определена условием $\lambda(\eta_*) = l(\eta_*)$, в то время как a_{**} определяется условием $\lambda(\eta_{**}) = l(\eta_{**})$.

Начнем с моды $n = n_1$. Для этого волнового числа имеем $a_* = a_{**} = a(\eta_1)$ и, следовательно, $r_{n_1} = 0$. Более высокочастотные моды $n > n_1$ (над барьером на рис. 11) никогда не попадают в режим усиления, так что можно записать

$$\exp r_n = 1, \quad n \geq n_1. \quad (70)$$

Теперь рассмотрим моды n в интервале $n_1 \geq n \geq n_s$. Для данного n нам нужно знать $a_*(n)$ и $a_{**}(n)$. Используя (62), находим $a_*(n)/a_*(n_1) = (n_1/n)^{1+\beta}$ и, используя (63), получаем $a_{**}(n)/a_{**}(n_s) = (n_s/n)^{1+\beta_s}$. Следовательно, имеем

$$\frac{a_{**}(n)}{a_*(n)} = \frac{a_{**}(n_s)}{a_*(n_1)} \left(\frac{n_s}{n} \right)^{1+\beta_s} \left(\frac{n}{n_1} \right)^{1+\beta}.$$

Поскольку $a_{**}(n_s) = a(\eta_s)$, $a_*(n_1) = a(\eta_1)$ и

$$\frac{a(\eta_s)}{a(\eta_1)} = \zeta_1 = \left(\frac{n_1}{n_s}\right)^{1+\beta_s},$$

приходим к

$$\frac{a_{**}(n)}{a_*(n)} = \left(\frac{n}{n_1}\right)^{\beta-\beta_s}.$$

Повторяя этот анализ для других интервалов уменьшающихся n , мы приходим к заключению, что

$$\begin{aligned} \exp r_n &= \left(\frac{n}{n_1}\right)^{\beta-\beta_s}, & n_1 \geq n \geq n_s, \\ \exp r_n &= \left(\frac{n}{n_s}\right)^{\beta} \left(\frac{n_s}{n_1}\right)^{\beta-\beta_s}, & n_s \geq n \geq n_2, \\ \exp r_n &= \left(\frac{n}{n_2}\right)^{\beta-1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\beta} \left(\frac{n_s}{n_1}\right)^{-\beta_s}, & n_2 \geq n \geq n_H. \end{aligned} \quad (71)$$

Мнемоническое правило построения $\exp r_n$ на последующих интервалах уменьшающихся n простое. Если интервал начинается при n_x , берем $(n/n_x)^{\beta_s-\beta_{**}}$ и умножаем на $\exp r_{n_x}$, т.е. на значение $\exp r_n$ из предыдущего интервала, вычисленное в конце интервала n_x . Для функции a'/a , с которой мы работаем, величина β_* всегда равна β , в то время как β_{**} принимает значения β_s , 0, 1 на последовательных интервалах.

Моды с $n < n_H$ все еще находятся в длинноволновом режиме. Для них мы должны взять $a(\eta_R)$ вместо $a_{**}(n)$. Комбинируя с $a_*(n)$, находим

$$\exp r_n = \left(\frac{n}{n_H}\right)^{\beta+1} \left(\frac{n_H}{n_2}\right)^{\beta-1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\beta} \left(\frac{n_s}{n_1}\right)^{-\beta_s}, \quad n \leq n_H. \quad (72)$$

Формулы (70)–(72) дают приближенные значения r_n для всех n . Фактор $\exp r_n \geq 1$ для $n \leq n_1$ и $\exp r_n \gg 1$ для $n \ll n_1$. Этот фактор определяет среднеквадратичную амплитуду ГВ.

Среднее значение поля h_{ij} равно нулю в любой момент времени η и в любой точке пространства \mathbf{x} : $\langle 0|h_{ij}(\eta, \mathbf{x})|0\rangle = 0$. Дисперсия

$$\langle 0|h_{ij}(\eta, \mathbf{x})h^{ij}(\eta, \mathbf{x})|0\rangle \equiv \langle h^2 \rangle$$

не равна нулю и определяет среднеквадратичное значение амплитуды сгенерированного поля — величину, которой мы интересуемся с экспериментальной точки зрения. Взяв произведение двух выражений (50), можно показать, что

$$\langle h^2 \rangle = \frac{C^2}{2\pi^2} \int_0^\infty n \sum_{s=1}^2 |h_n(\eta)|^2 dn \equiv \int_0^\infty h^2(n, \eta) \frac{dn}{n}. \quad (73)$$

Используя представления (51), (52) в уравнении (73), можно также записать

$$\langle h^2 \rangle = \frac{C^2}{\pi^2 a^2} \int_0^\infty n dn (\cosh 2r_n + \cos 2\phi_n \sinh 2r_n). \quad (74)$$

Теперь мы можем рассмотреть современную эру и воспользоваться тем фактом, что $\exp r_n$ являются большими числами для всех n из интересующего нас интер-

вала $n_1 \geq n \geq n_H$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} h(n, \eta) &\approx \frac{C}{\pi} \frac{1}{a(\eta_R)} n \exp r_n \cos \phi_n(\eta) = \\ &= 8\sqrt{\pi} \frac{l_{Pl}}{l_H} \frac{n}{n_H} \exp r_n \cos \phi_n(\eta). \end{aligned} \quad (75)$$

Величина $h(n, \eta)$ является безразмерной спектральной амплитудой поля, численное значение которой определяется вычисленным параметром сжатия r_n . Осциллирующий множитель $\cos \phi_n(\eta)$ отражает сжатие (вид стоячей волны), которое приобретают моды $n_1 > n > n_H$. Для мод с $n < n_H$ этот фактор приближенно равен 1. Для высокочастотных мод $n \gg n_H$ имеем $\phi_n(\eta) \sim n(\eta - \eta_n) \gg 1$, так что $h(n, \eta)$ совершает много колебаний, в то время как масштабный фактор $a(\eta)$ практически фиксирован на значении $a(\eta_R)$.

Интеграл (74) имеет формальные пределы от 0 до ∞ . Поскольку $r_n \approx 0$ для $n \geq n_1$, интеграл расходится на верхнем пределе. Это типичная ультрафиолетовая расходимость. Ее следует убрать (перенормировать на нуль), так как она происходит от мод, которые всегда находятся в вакуумном состоянии. На нижнем пределе интеграл расходится, если $\beta \leq -2$. Это инфракрасная расходимость, которая является следствием предположения, что процесс усиления начался в бесконечно удаленном прошлом. Эту расходимость можно убрать либо введя низкочастотное обрезание (что эквивалентно конечному времени усиления), либо рассматривая только параметры $\beta > -2$, при которых интеграл сходится на нижнем пределе. Оказывается, что вторая возможность более предпочтительна для имеющихся наблюдательных данных (см. раздел 6.4). Частный случай $\beta = -2$ соответствует де-ситтеровской эволюции $a(\eta) \propto |\eta|^{-1}$. В этом случае $h(n)$, получаемое из уравнений (72), (75), не зависит от n . Такой спектр известен как спектр Харрисона–Зельдовича, или масштабно-инвариантный спектр.

Спектральная амплитуда $h(n)$ также может быть получена другим способом, с использованием приближенных решений (56), (57) волнового уравнения (55). Этот метод дает в точности такие же численные значения $h(n)$, как в (70)–(72), (75), но не воспроизводит осциллирующий множитель $\cos \phi_n(\eta)$.

Рассмотрим начальную спектральную амплитуду $h_i(n)$, определяемую квантовой нормировкой $h_i(n) = 8\sqrt{\pi}(l_{Pl}/\lambda_i)$. Это амплитуда моды n в момент η_* входа в длинноволновый режим, т.е. тогда, когда длина волны моды λ_i равна хаббловскому радиусу $l(\eta_*)$. Для λ_i получаем

$$\lambda_i = \frac{1}{b} l_0 \left(\frac{n_H}{n}\right)^{2+\beta}. \quad (76)$$

Таким образом, имеем

$$h_i(n) = A \left(\frac{n}{n_H}\right)^{2+\beta}, \quad (77)$$

где A обозначает константу

$$A = b8\sqrt{\pi} \frac{l_{Pl}}{l_0}. \quad (78)$$

Числа $h_i(n)$ определены в начале длинноволнового режима. Другими словами, они даны вдоль левого склона барьера на рис. 11. Мы же хотим узнать конечные числа (спектральные амплитуды) $h(n)$, которые описывают волновое поле сегодня, при η_R .

Согласно доминирующему решению $h_n(\eta) = \text{const}$ для длинноволнового режима (см. формулу (59)), начальная амплитуда $h_i(n)$ остается практически постоянной вплоть до конца длинноволнового режима при η_{**} , т.е. вплоть до правого склона барьера. (Второе слагаемое в (57) могло бы быть важным только на z-стадии и только для параметров $\beta_s \leq -1/2$, которые соответствуют эффективным уравнениям состояния $p \geq \epsilon$. Для простоты анализа мы не рассматриваем эти случаи.) По завершении длинноволнового режима амплитуды падают адиабатически пропорционально $1/a(\eta)$ вплоть до настоящего времени. Таким образом, имеем

$$h(n) = A \left(\frac{n}{n_H} \right)^{2+\beta} \frac{a_{**}(n)}{a(\eta_R)}. \quad (79)$$

Начнем с нижнего конца спектра, $n \leq n_H$, и пойдем вверх по n . Адиабатическое уменьшение амплитуды мод с $n \leq n_H$ еще не началось, поэтому имеем

$$h(n) = A \left(\frac{n}{n_H} \right)^{2+\beta}, \quad n \leq n_H. \quad (80)$$

Теперь рассмотрим интервал $n_2 \geq n \geq n_H$. На этом интервале $a_{**}(n)/a(\eta_R)$ изменяется как $(n_H/n)^2$, так что имеем

$$h(n) = A \left(\frac{n}{n_H} \right)^\beta, \quad n_2 \geq n \geq n_H. \quad (81)$$

На интервале $n_s \geq n \geq n_2$ отношение

$$\frac{a_{**}(n)}{a(\eta_R)} = \frac{a_{**}(n)}{a(\eta_2)} \frac{a(\eta_2)}{a(\eta_R)}$$

изменяется как $(n_2/n)(n_H/n_2)^2$, и мы имеем

$$h(n) = A \left(\frac{n}{n_H} \right)^{1+\beta} \frac{n_H}{n_2}, \quad n_s \geq n \geq n_2. \quad (82)$$

Повторяя такой же анализ для интервала $n_1 \geq n \geq n_s$, находим

$$h(n) = A \left(\frac{n}{n_H} \right)^{1+\beta-\beta_s} \left(\frac{n_s}{n_H} \right)^{\beta_s} \frac{n_H}{n_2}, \quad n_1 \geq n \geq n_s. \quad (83)$$

Из формулы (83) видно, что промежуток z-стадии с $\beta_s < 0$ (уже наложенные ограничения требуют также выполнения неравенства $-1/2 < \beta_s$) загибает спектр $h(n)$ вверх по сравнению с (82) при больших n . Если вспомнить соотношение (66) между l_0 и l_H и воспользоваться (71), (72) в уравнении (75), получаем абсолютно те же уравнения (80)–(83) с точностью до осциллирующего множителя $\cos \phi_n(\eta)$.

Различные части барьера на рис. 11 отвечают за амплитуды и спектральные наклоны на различных интервалах n . Схематически получающийся спектр $h(n)$ в сочетании с барьером a'/a показан на рис. 12. Современная частота осциллирующих мод, измеренная в герцах, определяется как $\nu = cn/2\pi a(\eta_R)$. Самая низкая

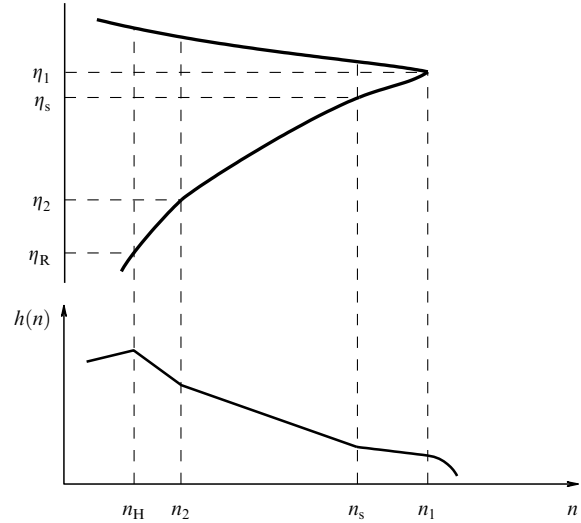


Рис. 12. Амплитуды и наклоны различных участков спектра $h(n)$ определяются различными частями барьера a'/a .

частота (хаббловская частота) есть $\nu_H = c/l_H$. Для численных оценок мы будем использовать $\nu_H \approx 10^{-18}$ Гц. Отношения волновых чисел n равны отношениям частот ν , так что, например, $n/n_H = \nu/\nu_H$. Для высокочастотных мод будем теперь использовать отношения ν вместо отношения n .

Кроме спектральной амплитуды $h(n)$, порожденное поле может также характеризоваться спектральной плотностью энергии $\Omega_{\text{gw}}(n)$. Плотность энергии ϵ_{gw} гравитационно-волнового поля есть

$$\kappa \epsilon_{\text{gw}} = \frac{1}{4} h^{ij}_{,0} h_{ij,0} = \frac{1}{4a^2} h'^{ij} h'_{ij}.$$

Среднее значение $\langle 0 | \epsilon_{\text{gw}}(\eta, \mathbf{x}) | 0 \rangle$ дается выражением

$$\kappa \langle \epsilon_{\text{gw}} \rangle = \frac{1}{4a^2} \frac{C^2}{2\pi^2} \int_0^\infty n \sum_{s=1}^2 \left| h'_n(\eta) \right|^2 dn. \quad (84)$$

Для высокочастотных мод нужно дифференцировать по η только сомножитель $\exp(\pm i n \eta)$. После усреднения по осциллирующим множителям получаем

$$\left| h'_n \right|^2 = n^2 \left| h_n \right|^2,$$

так что

$$\kappa \langle \epsilon_{\text{gw}} \rangle = \frac{1}{4a^2} \int_0^\infty n^2 h^2(n) \frac{dn}{n}. \quad (85)$$

На самом деле высокочастотное приближение, которое мы использовали, допускает интегрирование по малым n только до n_H . А верхний предел, как обсуждалось выше, практически равен n_1 , а не бесконечности. Параметр Ω_{gw} определяется как $\Omega_{\text{gw}} = \langle \epsilon_{\text{gw}} \rangle / \epsilon$, где ϵ дается уравнением (67) (критическая плотность). Таким образом, получаем

$$\Omega_{\text{gw}} = \int_{n_H}^{n_1} \Omega_{\text{gw}}(n) \frac{dn}{n} = \int_{\nu_H}^{\nu_1} \Omega_{\text{gw}}(\nu) \frac{d\nu}{\nu}$$

и

$$\Omega_{\text{gw}}(\nu) = \frac{\pi^2}{3} h^2(\nu) \left(\frac{\nu}{\nu_H} \right)^2. \quad (86)$$

Безразмерная величина $\Omega_{\text{gw}}(v)$ полезна, поскольку позволяет быстро оценивать влияние сгенерированного поля в заданном интервале частот. Однако первичной и более универсальной является величина $h(v)$, а не $\Omega_{\text{gw}}(v)$. Именно поле, а не его плотность энергии, непосредственно измеряется гравитационно-волновым детектором. Следует также заметить, что некоторые авторы используют сомнительное определение

$$\Omega_{\text{gw}}(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{gw}}}{d \ln f},$$

которое как бы предполагает дифференцирование плотности энергии ГВ по частоте. Это было бы неверно и привело бы к неправильному численному значению Ω_{gw} . Где бы мы ни использовали величину $\Omega_{\text{gw}}(v)$, мы подразумеваем соотношение (86), а для оценок по порядку величины можно пользоваться соотношением [9, 124, 125]

$$\Omega_{\text{gw}}(v) \approx h^2(v) \left(\frac{v}{v_H} \right)^2. \quad (87)$$

6.4. Теоретические и наблюдательные ограничения

Весь теоретический подход основан на предположении, что слабое квантованное гравитационно-волновое поле взаимодействует с классическим полем накачки. Мы должны оставаться в рамках этого приближения в ходе всего анализа. Поле накачки может рассматриваться как классическое гравитационное поле до тех пор, пока плотность энергии ϵ , задающая космологическое расширение, меньше планковской плотности энергии, или, другими словами, пока хаббловский радиус $l(\eta)$ превосходит планковскую длину l_{Pl} . Это ограничение на поле накачки, но оно также может быть использовано как ограничение на длину волны λ_i гравитационно-волновой моды n во время входа в длинноволновой режим. Если $l(\eta_*) > l_{\text{Pl}}$, то $\lambda_i > l_{\text{Pl}}$. Величина λ_i задается уравнением (76). Таким образом, нам надо обеспечить выполнение условия

$$b \frac{l_{\text{Pl}}}{l_0} \left(\frac{v}{v_H} \right)^{2+\beta} < 1.$$

На низкочастотном конце спектра $v = v_H$ это неравенство дает $b(l_{\text{Pl}}/l_0) < 1$. В действительности, наблюдательные данные (см. ниже) налагают более жесткое ограничение:

$$b \frac{l_{\text{Pl}}}{l_0} \approx 10^{-6}, \quad (88)$$

которое мы будем использовать. Тогда на высокочастотном конце $v = v_1$ должно удовлетворяться неравенство

$$\left(\frac{v_1}{v_H} \right)^{2+\beta} < 10^6. \quad (89)$$

Обратимся теперь к спектральным амплитудам $h(v)$. В соответствии с (80) имеем $h(v_H) \approx b8\sqrt{\pi}(l_{\text{Pl}}/l_0)$. Измеренная анизотропия микроволнового фона, которую мы будем обсуждать ниже в этом разделе, требует, чтобы это число было на уровне 10^{-5} , что дает уже упомянутое ограничение (88). Величина $h(v_1)$ на высоких

частотах v_1 дается формулой (83):

$$h(v_1) = b8\sqrt{\pi} \frac{l_{\text{Pl}}}{l_0} \left(\frac{v_1}{v_H} \right)^{1+\beta-\beta_s} \left(\frac{v_s}{v_H} \right)^{\beta_s} \frac{v_H}{v_2}.$$

Используя (66), это выражение для $h(v_1)$ можно переписать как

$$h(v_1) = 8\sqrt{\pi} \frac{l_{\text{Pl}}}{l_H} \frac{v_1}{v_H} = 8\sqrt{\pi} \frac{l_{\text{Pl}}}{\lambda_1}, \quad (90)$$

где $\lambda_1 = c/v_1$. Это последнее выражение для $h(v_1)$ не вызывает удивления: моды с $v \geq v_1$ все еще находятся в вакуумном состоянии, так что численное значение $h(v_1)$ определяется квантовой нормировкой.

Все усиленные моды изначально имели малые амплитуды h_i на уровне нулевых квантовых флуктуаций. Эти амплитуды также малы и сегодня, поскольку h_i могли только оставаться постоянными или уменьшаться. Однако даже эти относительно малые амплитуды должны подчиняться наблюдаемым ограничениям. Величина Ω_{gw} , заключенная в высокочастотных модах, которые могли бы повлиять на темп первичного нуклеосинтеза, не должна превосходить уровень 10^{-5} . Это означает, что $\Omega_{\text{gw}}(v_1)$ не может быть больше 10^{-6} или около того. Использование выражения (86) в сочетании с $\Omega_{\text{gw}}(v_1) \approx 10^{-6}$ и $h(v_1)$ из (90) дает максимально допустимую частоту $v_1 \approx 3 \times 10^{10}$ Гц. Мы будем использовать это значение v_1 в наших численных оценках. Возвращаясь с этим численным значением v_1 к (89), находим, что параметр β может быть только $\beta \leq -1,8$. Далее будем трактовать $\beta = -1,8$ как верхний предел допустимых значений β .

Теперь мы можем проверить, оставляют ли принятые значения параметров место для постулированной z-стадии с $\beta_s < 0$. Используя (66), можем переписать (88) в виде

$$10^{-6} \frac{l_H}{l_{\text{Pl}}} = \left(\frac{v_1}{v_H} \right)^{-\beta} \left(\frac{v_1}{v_s} \right)^{\beta_s} \frac{v_2}{v_H}. \quad (91)$$

Мы знаем, что $v_2/v_H = 10^2$ и v_1/v_s не меньше, чем 1. Подставляя все числа в (91), можно найти, что это соотношение не может выполняться для максимально возможного $\beta = -1,8$. В случае $\beta = -1,9$ соотношение (91) удовлетворяется лишь на пределе, в том смысле, что значительное отклонение от $\beta_s = 0$ в сторону отрицательных β_s может длиться только относительно короткое время. Например, можно согласовать $\beta_s = -0,4$ и $v_s = 10^8$ Гц. С другой стороны, если взять $\beta = -2$, то можно включить несколько больший интервал z-стадии с $\beta_s < 0$. Например, соотношение (91) удовлетворяется, если принять $v_s = 10^{-4}$ Гц и $\beta_s = -0,3$. Это позволяет несколько увеличить $h(v)$ в интервале $v_s < v < v_1$ по сравнению со значениями $h(v)$, достигаемыми в более традиционном случае $\beta = -2$, $\beta_s = 0$. В дальнейшем мы рассмотрим следствия, вытекающие из этого предположения, для перспектив детектирования реликтового гравитационно-волнового сигнала. Наконец, посмотрим, какие выводы о величине параметров β и l_0 можно сделать на основе современной информации об анизотропии микроволнового фона [140, 141].

Обычно космологи используют спектральный индекс n (не путать с волновым числом n) первичных космо-

гических возмущений. Принимая во внимание определение спектрального индекса n , можно связать величину n с показателем $\beta + 2$, который фигурирует в (80). Они связаны соотношением $n = 2\beta + 5$. Это соотношение выполняется независимо от природы космологических возмущений. В частности, оно верно для возмущений плотности, и тогда $h(n)$ из (80) есть безразмерная амплитуда возмущений метрики, связанных с возмущениями плотности. Если первичные ГВ и возмущения плотности были сгенерированы механизмом, который мы здесь обсуждаем (предположение, вероятно, правильное), тогда параметр β , который входит в спектральный индекс, является тем же самым параметром, который определяет поведение масштабного фактора в (62). Первичные ГВ и первичные возмущения плотности с тем же спектральным индексом $\beta + 2$ производят примерно те же численные значения мультиполей низших порядков в крупномасштабной анизотропии реликтового фона.

Оценка спектрального индекса n первичных возмущений дает $n = 1,2 \pm 0,3$ [141] или даже еще большее значение. Недавний анализ [142] всех имеющихся данных отдает предпочтение значению $n = 1,2$ и вкладу первичных ГВ в квадрупольную анизотропию, в два раза превышающему вклад от возмущений плотности. Можно интерпретировать эти оценки как указание на то, что истинное значение n находится где-то вблизи $n = 1,2$ (планируемые новые наблюдения, вероятно, определят этот индекс более точно). Это дает параметр β где-то около $\beta = -1,9$. Ниже мы будем использовать $\beta = -1,9$ в наших оценках как наиболее предпочтительное наблюдательное значение. Параметр β может быть несколько больше, чем $\beta = -1,9$. Однако, как уже обсуждалось, значение $\beta = -1,8$ ($n = 1,4$) является максимально допустимым, при котором весь подход хорошо обоснован. Спектральный индекс Харрисона–Зельдовича $n = 1$ соответствует $\beta = -2$.

Наблюдаемая квадрупольная анизотропия микроволнового реликтового фона находится на уровне $\delta T/T \sim 10^{-5}$. Квадрупольная анизотропия, создаваемая спектром (80)–(83), в основном получается из волновых чисел вблизи n_H . Таким образом, численное значение квадрупольной анизотропии, произведенной реликтовыми ГВ, примерно равно величине A (см. формулу (78)). Согласно общим физическим соображениям и детальным расчетам [143–145] амплитуды метрики от длинноволновых ГВ и возмущений плотности, образованных обсуждаемым механизмом усиления, оказываются одного порядка величины. Следовательно, они дают примерно равный вклад в анизотропию на низких гармониках. Это дает оценку $A \sim 10^{-5}$, которую мы уже использовали в (88). Пока не доказано наблюдениями, что существенная часть наблюдаемой анизотропии на низких мультиполях действительно произведена реликтовыми ГВ, но мы можем по крайней мере это предположить с некоторой степенью уверенности. Вероятно, будущие измерения микроволнового фона, особенно его поляризации, помогут проверить это теоретическое заключение.

Собирая вместе все оцененные параметры, на рис. 13 мы показываем ожидаемый спектр $h(v)$ для случая $\beta = -1,9$. Включен также небольшой допустимый интервал z -стадии. Интервалы спектра, доступные для наблюдений космическими и наземными интерферометрами, отмечены вертикальными линиями.

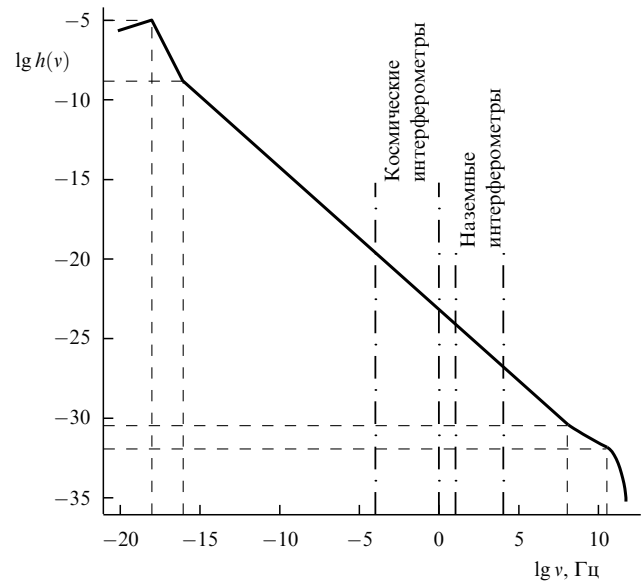


Рис. 13. Ожидаемый спектр $h(v)$ для случая $\beta = -1,9$.

Следует отметить [143–146], что подтверждение любого значения $n > 1$ ($\beta > -2$) будет означать, что динамика очень ранней Вселенной не определялась гипотетическим скалярным полем, лежащем в основе инфляционных теорий. В самом деле, $n > 1$ ($\beta > -2$) требует эффективного уравнения состояния на начальных стадиях расширения в виде $\epsilon + p < 0$ (см. (68)). Но это требование не может выполняться ни для какого скалярного поля $\phi(t)$ с любым потенциалом $V(\phi)$. Плотность энергии скалярного поля есть $\epsilon = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$, а его давление — $p = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi)$, так что $\epsilon + p$ не может быть отрицательным. Имеющиеся данные наблюдений еще не доказали, что $n > 1$, но такая возможность представляется вероятной.

Следует также прокомментировать определенный ущерб гравитационно-волновым исследованиям, который был нанесен так называемым "стандартным инфляционным результатом". "Стандартный инфляционный результат" предсказывает бесконечно большие амплитуды возмущений плотности $\delta\rho/\rho$ в интервале спектра с наклоном Харрисона–Зельдовича $n = 1$ ($\beta = -2$): $\delta\rho/\rho \propto V^{3/2}/V' \propto 1/\sqrt{1-n}$. Предсказывается, что возмущения метрики (кривизны) h_S , связанные с $\delta\rho/\rho$, также должны быть бесконечно большими, пропорциональными $1/\sqrt{1-n}$. Инфляционная литература скрывает эту предсказываемую бесконечность возмущений плотности, записывая отношение амплитуды ГВ h_T к скалярной метрической амплитуде h_S : $h_T/h_S \sim 7\sqrt{1-n}$ и декларируя, что вклад ГВ в анизотропию микроволнового реликтового фона должен быть равен нулю или близок к нулю при $n \approx 1$. Таким образом, "стандартная" инфляционная теория понижает на много порядков величины спектр реликтовых гравитационных волн, который по виду похож на спектр, изображенный на рис. 13. Это утверждение приводит к распространенному неверному пренебрежению ГВ при анализе данных по анизотропии реликтового фона. Хотя один из лучших анализов имеющихся данных указывает на присутствие вклада ГВ [147], этот анализ игнорируется. На протяжении многих лет "инфляционные" теоретики утверждали, что произвольно большие возмущения плотности в их

теориях "большим усилением на стадии вторичного разогрева". Теперь общепризнано, что это неправильное объяснение. Скалярные возмущения метрики, аналогично гравитационно-волновым возмущениям (см. (59)), остаются постоянными в течение длинноволнового режима, т.е. их численные значения не изменяются за время эволюции от первого "пересечения хаббловского радиуса" до второго "пересечения хаббловского радиуса". Этот факт также отражен в постоянстве так называемой "сохраняющейся" калибровочно-инвариантной величины ζ , которая является основной в инфляционном анализе (см., например, [148]). Поскольку "стандартная" инфляционная теория предсказывает произвольно большие численные значения для ζ , а эта величина "сохраняется" во время эволюции, это произвольно большое число должно быть постулировано с самого начала как квантовая нормировка. Так получается, если некорректно приписать квантовую нормировку флуктуациям одного только скалярного поля, как если бы они были свободным скалярным пробным полем в де-ситтеровском пространстве-времени. Тогда величина ζ , вычисленная из возмущенных уравнений Эйнштейна, получается произвольно большой уже при первом "пересечении хаббловского радиуса", и это число передается до второго "пересечения хаббловского радиуса". В действительности, однако, возмущения скалярного поля всегда связаны с метрическими (гравитационно-полевыми) возмущениями. Корректное квантование комбинированной степени свободы оставляет скалярные метрические возмущения h_s (возмущения кривизны) конечными и малыми, того же порядка величины, что и гравитационно-волновые возмущения h_t . Инфляционная формула для $\delta\rho/\rho$ ошибочна, поскольку она не содержит безразмерный фактор $(-\dot{H}/H^2)^{1/2}$. Этот фактор сокращает ноль в знаменателе и делает предсказываемые возмущения плотности конечными и малыми даже в интервале спектра с наклоном Харрисона–Зельдовича. "Стандартный инфляционный результат" находится в серьезном противоречии не только с теорией, но и с наблюдениями: когда наблюдатели редуцируют свои данные на случай $n = 1$ (постулируя это значение n при анализе данных), они получают конечные и малые флуктуации плотности вместо бесконечно больших, предсказываемых "инфляционными" теоретиками. (Аналитические выражения для "стандартного инфляционного результата" приведены в статьях по инфляции, включая недавние обзоры. Графическая иллюстрация расходящихся флуктуаций плотности и квадрупольной анизотропии, предсказываемых "инфляционными" теоретиками, приводится, например, в [149]. Критический анализ и несогласие со "стандартным инфляционным результатом" даны в [143–145].) Самые последние работы, касающиеся возмущений в квази-де-ситтеровских моделях, правильно подчеркивают большой ожидаемый вклад ГВ в крупномасштабную анизотропию реликтового фона [150]. Коротко говоря, общая теория относительности и квантовая теория поля не приводят к "стандартному инфляционному результату".

6.5. Детектируемость

реликтовых гравитационных волн

Теперь мы переходим от космологии к перспективам детектирования предсказанных ГВ. В фокусе нашего

внимания будут наземные [14, 15, 151] и космические [16, 152] лазерные интерферометры (см. также [153–155]). Будем использовать лабораторные частоты ν и интервалы лабораторного времени t ($c dt = a(\eta_R) d\eta$). Формулы (82) и (83) с $A = 10^{-5}$, $\nu_2/\nu_H = 10^2$ и с восстановленным осциллирующим множителем могут быть записаны как

$$h(\nu, t) \sim 10^{-7} \cos [2\pi\nu(t - t_\nu)] \left(\frac{\nu}{\nu_H}\right)^{\beta+1}, \quad \nu_2 \leq \nu \leq \nu_s \quad (92)$$

и

$$h(\nu, t) \sim 10^{-7} \cos [2\pi\nu(t - t_\nu)] \left(\frac{\nu}{\nu_H}\right)^{1+\beta-\beta_s} \left(\frac{\nu_s}{\nu_H}\right)^{\beta_s}, \quad \nu_s \leq \nu \leq \nu_1, \quad (93)$$

где детерминированная (не случайная) постоянная t_ν меняется незначительно от одной частоты к другой на интервалах $\Delta\nu \approx \nu$. Явная временная зависимость спектральной дисперсии $h^2(\nu, t)$ поля или, другими словами, явная зависимость от времени корреляционной функции (с нулевым временным сдвигом) поля на каждой заданной частоте показывает, что мы имеем дело с нестационарным процессом (следствие сжатия состояния и сильного уменьшения фазовой неопределенности). Сначала мы будем пренебрегать осциллирующим фактором и сравним предсказанные амплитуды с кривыми чувствительности детекторов второго поколения. Потенциальный резерв улучшения отношения сигнала к шуму путем использования свойств сжатых состояний будет обсуждаться в конце раздела 6.5.

Начнем с космического лазерного интерферометра LISA [16]. Этот инструмент будет иметь максимальную чувствительность в интервале частот примерно от 10^{-3} Гц до 10^{-1} Гц и будет достаточно чувствителен в более широком частотном диапазоне от 10^{-4} Гц до 1 Гц. Кривая чувствительности LISA к стохастическому фону обычно приводится в предположении непрерывных наблюдений в течение 1 года, т.е. среднеквадратичный инструментальный шум оценивается в частотных интервалах (бинах) $\Delta\nu = 3 \times 10^{-8}$ Гц вблизи данной частоты ν . Нам нужно пересчитать нашу предсказанную амплитуду $h(\nu)$ на эти частотные бины.

Среднеквадратичная амплитуда гравитационно-волнового поля дается интегралом (73). Таким образом, среднеквадратичная амплитуда в полосе $\Delta\nu$, центрированной на данной частоте ν , дается выражением

$$h(\nu, \Delta\nu) = h(\nu) \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\nu}}. \quad (94)$$

Будем использовать (92), (93) и вычислим выражение (94), предполагая $\Delta\nu = 3 \times 10^{-8}$ Гц. Результаты приведены на рис. 6. Формула (92) использовалась во всем частотном интервале для реалистического случая $\beta = -1,9$ и для экстремального случая $\beta = -1,8$. Линия с пометкой "z-фон" описывает сигнал, получающийся в составной модели с $\beta = -2$ до частоты $\nu_s = 10^{-4}$ Гц (формула (92)) и затем описывающийся формулой (93) с $\beta_s = -0,3$. В этой модели амплитуда сигнала на частоте $\nu = 10^{-3}$ Гц в 3 раза больше, чем в модели с $\beta = -2$, экстраполированной до этой частоты.

Несомненно, что сигнал с $\beta = -1,8$ мог бы быть легко зарегистрирован даже одним инструментом. Сигнал при $\beta = -1,9$ детектируется на пределе чувствительности при отношении сигнала к шуму около 3 в весьма узком интервале частот вблизи и выше частоты 3×10^{-3} Гц. Однако на более низких частотах требуется учет гравитационно-волнового фона от неразрешенных двойных звезд в нашей Галактике (см. раздел 5). Дополнительное улучшение чувствительности LISA в 3 раза может оказаться критически важным для уверенного детектирования предсказанного сигнала в модели с $\beta = -1,9$.

Теперь обратимся к наземным интерферометрам, работающим в интервале от 10 Гц до 10^4 Гц. Максимальная чувствительность достигается в полосе около $\nu = 10^2$ Гц. Мы рассмотрим предсказанный сигнал на этой характерной частоте. Будем работать непосредственно с безразмерной величиной $h(\nu)$. При необходимости среднеквадратичная амплитуда на Гц^{1/2} на данной частоте ν может быть легко посчитана как $h(\nu)/\sqrt{\nu}$. Инструментальный шум также будем приводить в терминах безразмерной величины $h_{\text{ex}}(\nu)$.

Чувствительность детекторов первой очереди на $\nu = 10^2$ Гц ожидается на уровне $h_{\text{ex}} = 10^{-21}$ или выше. Теоретическое предсказание на этой частоте, следующее из (92), (93) с $\beta_s = 0$, есть $h_{\text{th}} = 10^{-23}$ при $\beta = -1,8$, и $h_{\text{th}} = 10^{-25}$ при $\beta = -1,9$. Следовательно, разница в уровнях сигнала и шума составляет от 2 до 4 порядков величины. Ожидаемая чувствительность интерферометров второй очереди, таких как LIGO-II [17], может достичь $h_{\text{ex}} = 10^{-23}$. В этом случае разрыв исчезает в модели с $\beta = -1,8$ и сокращается до 2 порядков величины в случае сигнала с $\beta = -1,9$. Рисунок 14 иллюстрирует ожидаемый сигнал в сравнении с чувствительностью LIGO-II. Так как сигнал отложен в единицах $h(\nu)$, кривая чувствительности LISA (показанная для периодических источников) должна быть поднята и приведена в соответствие с рис. 6.

Сигнал с уровнем ниже уровня шума может быть зарегистрирован, если произвести кросс-корреляцию выходных сигналов от двух или более детекторов. (Первые оценки возможности такого детектирования реликтовых гравитационных волн см. в [156].) Кросс-

корреляция будет возможна для некоторых из наземных интерферометров, строящихся в настоящее время. Для детектирования сигнала ниже уровня шума требуется достаточно длительное время наблюдений τ . Оно зависит от того, известны ли заранее какие-либо временные характеристики сигнала или нет. Начнем с предположения, что никакие временные характеристики сигнала не известны заранее. Другими словами, сначала будем игнорировать сжатую природу реликтового фона и работать в предположении, что сжатие не может быть использовано для повышения S/N .

Отклик детектора на падающее излучение есть $s(t) = F_{ij}h^{ij}$, где F_{ij} зависит от положения и ориентации инструмента. Поскольку h^{ij} представляет собой квантовомеханический оператор (см. формулу (50)), требуется вычислить среднее значение квадратичной величины. Среднее значение кросс-корреляции сигналов от двух инструментов $\langle 0|s_1(t)s_2(t)|0 \rangle$ будет содержать функцию перекрытия [157–160], которая по нашему предположению ненамного меньше единицы [159]. Отношение сигнала к шуму S/N при измерении амплитуды сигнала с неизвестными временными свойствами возрастает как $(\tau\nu)^{1/4}$, где ν есть некоторая характеристическая центральная частота (детальнее см. раздел 8).

Применим это соотношение $(\tau\nu)^{1/4}$ к начальным и улучшенным инструментам на характерной частоте $\nu = 10^2$ Гц. При таком законе требуется разумно короткое время $\tau = 10^6$ с для улучшения S/N в инструментах первой очереди на два порядка величины и, следовательно, достижения уровня сигнала с экстремальным спектральным индексом $\beta = -1,8$. Большее время накопления или более высокая чувствительность сделают S/N больше 1. В случае реалистического спектрального индекса $\beta = -1,9$ разрыв в 4 порядка величины может быть покрыт путем сочетания значительно более высокой чувствительности и более длительного времени наблюдений (при этом не обязательно за один непрерывный сеанс). Чувствительности лазерных интерферометров второй очереди, таких как LIGO-II, на уровне $h_{\text{ex}} = 10^{-23}$ за то же время наблюдений $\tau = 10^6$ с было бы достаточно для детектирования предсказанного сигнала в модели с $\beta = -1,9$.

Дополнительного роста отношения S/N можно достичь, правильно используя статистические свойства сигнала. Сжатие автоматически присутствует на всех частотах от ν_H до ν_L . Параметр сжатия r больше в ГВ космологических масштабах, и поэтому периодическая структура в решении (75) возможно будет лучше видна на этих масштабах. Однако нам более интересны частоты, которые можно исследовать с помощью наземных интерферометров, скажем, интервал 30–100 Гц. Если бы нашей целью было следить за волной данной частоты ν от начала ее осцилляционного режима и до настоящего времени, то во избежание деструктивной интерференции от соседних мод в течение всего этого периода нам потребовалось бы невероятно высокое частотное разрешение порядка 10^{-18} Гц. Разумеется, мы не можем и не хотим этого делать. Хотя амплитуды волн адиабатически уменьшились, а их частоты испытали красное смещение с начала их входа в осцилляционный режим, общие статистические свойства обсуждаемого сигнала в основном остаются сейчас такими же, какими они были спустя 10 лет после Большого Взрыва или будут через 1 миллион лет.

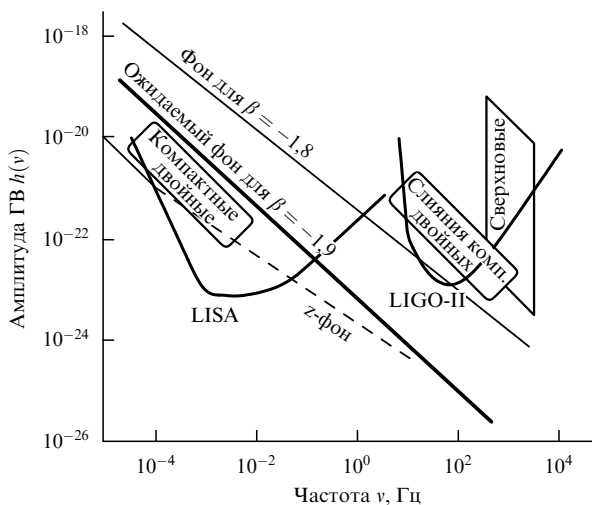


Рис. 14. Спектр $h(\nu)$ в интервалах, доступных наземным и космическим интерферометрам.

Периодическая структура (92) может сохраниться на некотором уровне в окне чувствительности инструмента от ν_{\min} (минимальная частота) до ν_{\max} (максимальная частота). Средний квадрат поля в этом окне есть

$$\int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} h^2(\nu, t) \frac{d\nu}{\nu} = 10^{-14} \frac{1}{\nu_H^{2\beta+2}} \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} \cos^2 [2\pi\nu(t - t_\nu)] \nu^{2\beta+1} d\nu. \quad (95)$$

Из-за сильной зависимости подынтегрального выражения от частоты, $\nu^{-2.6}$ или $\nu^{-2.8}$, значение интеграла (95) определяется его нижним пределом. По-видимому, поиск сигнала в шуме должен быть основан на периодической структуре, которая могла бы сохраниться на $\nu = \nu_{\min}$. В качестве иллюстрации можно рассмотреть столь узкий интервал частот $\Delta\nu = \nu_{\max} - \nu_{\min}$, что интеграл (95) может быть приближен формулой

$$\int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} h^2(\nu, t) \frac{d\nu}{\nu} \sim 10^{-14} \left(\frac{\nu_{\min}}{\nu_H} \right)^{2\beta+2} \frac{\Delta\nu}{\nu_{\min}} \cos^2 [2\pi\nu_{\min}(t - t_{\min})].$$

Очевидно, что корреляционная функция строго периодична и ее структура известна заранее, в отличие от остальных возможных сигналов. Это типичный пример использования априорной информации. В идеальном случае выигрыш в отношении S/N может расти как $(\tau\nu_{\min})^{1/2}$. Это значительно сократило бы требуемое время наблюдений τ . Для больших $\Delta\nu$ даже промежуточный выигрыш между гарантированным ростом $(\tau\nu)^{1/4}$ и законом $(\tau\nu)^{1/2}$, как в случае оптимальной фильтрации сигнала, был бы очень полезен. Это потенциально могло бы позволить регистрировать сигнал в модели с $\beta = -1.9$ даже интерферометрами первой очереди. Непосредственное применение выражения (95) для использования свойств сжатых состояний может оказаться невозможным, как обсуждается в недавней работе [161], однако не исключено использование более утонченных методов.

Для частотных интервалов, которые покрываются твердотельными антеннами и электромагнитными детекторами, ожидаемые результаты следуют из тех же формул (92), (93) и обсуждались в [135, 156].

6.6. Краткие итоги

Будет странно, если предсказанный сигнал на уровне, соответствующем $\beta = -1.9$, не будет обнаружен инструментами, которые способны его зарегистрировать. При расчете этого сигнала использовалось не так много космологических предположений, которые могли бы оказаться неверными и тем самым сделали бы неправильными наши предсказания. С другой стороны, будет еще более странным (и даже более интересным), если реликтовые ГВ будут зарегистрированы на уровне, превышающем тот, который дает предельная модель с $\beta = -1.8$. Это будет означать, что имеется некая фундаментальная ошибка в наших основных космологических постулатах. Подводя итог, следует сказать, что в наиболее благоприятном случае детектирование реликтовых ГВ может быть осуществлено при взаимной корреляции сигналов с лазерных интерферометров

первой очереди LIGO, VIRGO, GEO600. В более реалистическом случае потребуется чувствительность космических интерферометров и наземных детекторов второй очереди. Специфические статистические свойства реликтовых ГВ, связанные с явлением сжатых квантовых состояний, являются потенциальным резервом для дальнейшего улучшения отношения сигнала к шуму.

7. Гравитационно-волновые детекторы и их чувствительность

7.1. Современный статус гравитационно-волновых антенн

В настоящее время работает несколько твердотельных антенн — некоторые при комнатной температуре, другие при низких температурах. Твердотельные детекторы могут регистрировать сигналы с амплитудой $h \sim 10^{-20}$ в полосе частот 10–20 Гц вокруг центральной частоты ~ 1 кГц. Асимметричные вспышки сверхновых в нашей Галактике считаются лучшими возможными источниками для этих детекторов. С их помощью можно также наблюдать непрерывное излучение от нейтронных звезд, если частота попадает в полосу чувствительности.

Интерферометрические детекторы, которые в настоящее время строятся, увеличат нашу способность наблюдать ГВ. Как упоминалось во введении, в Токио уже построен детектор ТАМА [162]. Строительство других детекторов приближается к заключительной стадии: британо-германская группа строит интерферометр GEO600 в Германии около Ганновера [13, 163], франко-итальянская группа строит детектор VIRGO в Италии близ Пизы [14, 164], а американцы строят две антенны LIGO — одну в Ливингстоне, другую в Хэнфорде [15] в США. Все эти детекторы начнут работать между 2001 и 2003 гг. Самые большие из этих детекторов, LIGO и VIRGO, вероятно, будут в дальнейшем (2005 г.) усовершенствованы по чувствительности на порядок величины, особенно в области низких частот. Эти наземные интерферометры в конечном счете будут иметь достаточную чувствительность для наблюдения источников в диапазоне частот от 10 Гц до нескольких кГц. Как мы уже отмечали, кроме строительства этих наземных антенн, есть проект вывести интерферометр в космос к концу этого десятилетия [16]. Космическая лазерная интерферометрическая антенна LISA будет состоять из трех свободных спутников, образующих равносторонний треугольник со стороной 5 млн км на гелиоцентрической орбите с отставанием от положения Земли на 20° . Антенна LISA будет чувствительна к низкочастотным ГВ в интервале $10^{-4} - 10^{-1}$ Гц.

7.2. Чувствительность гравитационно-волновой антенны

Всякий гравитационно-волновой детектор характеризуется *спектральной мощностью* (СМ) его шума. Можно построить СМ шума следующим образом. Пусть детектор выдает ряд безразмерных отсчетов, скажем $x(t)$, которые в случае интерферометра представляют собой относительное изменение длины двух его плеч. В отсутствие какого-либо гравитационно-волнового сигнала на выходе детектора есть только шум $n(t)$, т.е. $x(t) = n(t)$. Автокорреляционная функция шума χ определяется

как ⁵:

$$\kappa(t_1, t_2) \equiv \overline{n(t_1)n(t_2)}, \quad (96)$$

где черта сверху указывает на усреднение по ансамблю реализаций шума. В общем случае κ зависит как от t_1 , так и от t_2 . Однако если выходные данные детектора представляют собой стационарный шумовой процесс, т.е. его работа, говоря на языке статистики, не зависит от времени, то κ зависит только от разницы $\tau \equiv t_2 - t_1$. В дальнейшем будем полагать, что $\kappa(\tau) = \kappa(-\tau)$. Для данных от реальных детекторов среднее по ансамблю можно заменить средним по времени, предполагая эргодичность:

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t)n(t-\tau) dt. \quad (97)$$

Следует заметить, что реальные шумы детекторов не исчерпываются тепловыми шумами. В частности, могут присутствовать избыточные (надтепловые) шумы (связанные со свойствами подвесок, зеркал и т.п., см., например, [165, 166]), к которым данные рассуждения не применимы.

Предположение о стационарности не выполняется строго для реальных гравитационно-волновых детекторов, однако если их функционирование слабо изменяется на временах, много больших типичного времени наблюдения, стационарность может быть принята как рабочая гипотеза. Это может быть достаточно хорошим предположением для поиска сигналов от сливающихся двойных звезд, но становится предметом беспокойства при наблюдении непрерывных или стохастических сигналов. В настоящем обзоре мы для простоты будем полагать шум детектора стационарным. В этом случае *односторонняя* СМ шума, определенная только по положительным частотам, есть преобразование Фурье автокорреляционной функции шума:

$$S_n(f) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\tau) \exp(2\pi i f \tau) d\tau, & f \geq 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases} \quad (98)$$

где фактор 1/2 включен для удобства. Так как мы предположили, что $\kappa(\tau)$ — четная функция, то из этого уравнения немедленно следует, что $S_n(f)$ является действительной функцией. Легко показать, что

$$\tilde{n}(f)\tilde{n}^*(f') = S_n(f)\delta(f-f'), \quad (99)$$

где $\tilde{n}(f)$ — преобразование Фурье от $n(t)$, а $\tilde{n}^*(f)$ обозначает комплексно-сопряженное с $\tilde{n}(f)$. Равенство (99) означает, что $S_n(f)$ положительно определена. Это равенство выводится путем выражения фурье-образов в левой части через соответствующие временные функции, т.е. $\tilde{n}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} n(t) \exp(2\pi i f t) dt$, а также с помощью (96) и (98). Автокорреляционная функция $\kappa(\tau)$ при $\tau = 0$ может быть выражена через интеграл от $S_n(f)$. В самом деле,

легко видеть, что

$$\overline{n^2(t)} = 2 \int_0^{\infty} S_n(f) df. \quad (100)$$

Это уравнение обосновывает название "спектральная мощность", данное величине $S_n(f)$.

Очевидно, что $S_n(f)$ имеет размерность времени, но удобно использовать размерность Гц^{-1} , поскольку это величина, определенная в частотной области. Квадратный корень из $S_n(f)$ есть амплитуда шума, $\sqrt{S_n(f)}$, и имеет размерность $\text{Гц}^{-1/2}$. Часто полезно использовать безразмерную величину $h_n^2(f) \equiv f S_n(f)$, называемую *эффективным шумом*. В литературе по гравитационно-волновым интерферометрам также можно встретить величину "шум смещения", или "шум натяжения", определенную как $h_\ell(f) \equiv \ell h_n(f)$, и соответствующий спектр шума $S_\ell(f) \equiv \ell^2 S_n(f)$, где ℓ — длина плеча интерферометра. Шум смещения определяет минимальное относительное изменение длины плеч интерферометра $\delta\ell/\ell$, которое может быть измерено на данной частоте.

7.3. Амплитуды источников и чувствительность детекторов

Гравитационно-волновые амплитуды астрономических источников сравнивают с инструментальной чувствительностью и делают вывод о возможности наблюдения тех или иных источников следующим образом. Во-первых, так как сравнения почти всегда производят в частотной области, важно заметить, что компонента Фурье $\tilde{h}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt h(t) \exp(2\pi i f t)$ детерминированного сигнала $h(t)$ имеет размерность Гц^{-1} , а величина $f|\tilde{h}(f)|$ безразмерна. Именно эта последняя величина должна сравниваться с $h_n(f)$ для того, чтобы определить силу источника относительно шума детектора. Во-вторых, общепринято также сравнивать спектральную амплитуду источника в логарифмическом интервале частот $\sqrt{f}|\tilde{h}(f)|$ со спектральной амплитудой шума $\sqrt{S_n(f)}$, причем обе эти величины имеют размерность $\text{Гц}^{-1/2}$. Обоснование таких сравнений приводится в разделе 8. Наконец, для монохроматических источников сравнивают эффективный шум за время накопления с ожидаемыми "мгновенными" амплитудами следующим образом. Монохроматическая волна с частотой f_0 , наблюдаемая в течение интервала времени T , есть просто узкая линия в частотном интервале шириной $\Delta f \equiv 1/T$ вблизи f_0 . Шум в этом интервале (бине) есть $S_n(f)\Delta f = S_n(f)/T$. Таким образом, отношение сигнала к шуму ρ за время наблюдения T

$$\rho = \frac{h_0}{\sqrt{S_n(f_0)/T}}. \quad (101)$$

Следовательно, чтобы оценить возможность детектирования периодического источника ГВ, нужно знать этот безразмерный шум за данное время наблюдений, $S_n(f)/T$.

Разумеется, если время наблюдений равно T , то полная энергия (т.е. проинтегрированный спектр мощности) как сигнала, так и шума возрастают пропорционально T^2 . Тогда как же улучшается отношение сигнала к шуму с ростом времени наблюдений? Дело в том, что хотя вся энергия сигнала сконцентрирована в одном бине, шум распределен по всей полосе частот. С ростом T частотное разрешение улучшается как $1/T$ и число

⁵ Заметим, что в предыдущих разделах мы использовали угловые скобки для обозначения усреднения по ансамблю или квантовому состоянию. В этом разделе, однако, мы будем пользоваться чертой сверху для обозначения усреднения по ансамблю, а угловые скобки оставим для обозначения скалярного произведения функций.

независимых частотных интервалов возрастает пропорционально T . Следовательно, интенсивность шума на частотный интервал убывает как $1/T$. С другой стороны, интенсивность сигнала концентрируется только в одном бине, поскольку сигнал предполагается монохроматическим. Следовательно, S/N по мощности возрастает как T , а по амплитуде — как \sqrt{T} .

7.4. Спектральная мощность шума интерферометров первого поколения

Как упоминалось в разделе 7.2, работа гравитационно-волнового детектора характеризуется односторонней спектральной плотностью мощности шума. Спектральная мощность шума играет важную роль при анализе сигнала. Мы будем обсуждать только СМ шума интерферометрических детекторов ГВ, поскольку оба класса наиболее перспективных источников для детектирования, обсуждаемых в этом обзоре, могут быть уверенно обнаружены только широкополосными детекторами. Интерферометры имеют очень широкую полосу чувствительности и, следовательно, идеально подходят для регистрации таких источников. Поскольку наша цель состоит в указании первых возможных источников, мы сосредоточимся главным образом на начальных интерферометрах (первого поколения) GEO, LIGO-I, TAMA и VIRGO, упоминая будущие наземные и космические детекторы там, где это необходимо. Чувствительность наземных детекторов ограничена на частотах ниже 1 Гц переменным во времени локальным гравитационным полем, обусловленным различными источниками шумов, например низкочастотными сейсмическими вариациями, изменяющейся плотностью атмосферы из-за ветров, и т.д. Таким образом, для целей анализа данных СМ шума предполагается бесконечно большой ниже некоторого нижнего предела f_s . В таблице 5 приводится СМ шума $S_n(f)$ для различных интерферометров выше этого предела, т.е. на частотах $f \geq f_s$. Эффективный шум $h_n(f) = \sqrt{f} S_n(f)$, ожидаемый в этих детекторах, изображен на рис. 15. Кривая шума интерферометра GEO несколько отличается от остальных, так как в этом детекторе используется техника усиления сигнала, называемая "рециклированием сигнала" [167]. Именно по этой причине его чувствительность близка к LIGO и VIRGO, хотя длина плеч GEO составляет 1/5–1/6 от таковой для больших интерферометров.

Для детектора LISA в табл. 5 приведены только внутренние инструментальные шумы. Однако в диапазоне частот $10^{-4} - 3 \times 10^{-3}$ Гц чувствительность LISA будет ограничена фоном от нескольких популяций двой-

Таблица 5. Спектральная мощность шума интерферометров первого поколения $S_n(f)$. Для каждого детектора СМ шума приводится для безразмерной частоты $x = f/f_0$ и круто возрастает за нижним пределом f_s (см. также рис. 15 и 16)

Детектор	f_s , Гц	f_0 , Гц	$10^{46} \times S_n(x)$, Гц $^{-1}$
GEO	40	150	$(3,4x)^{-30} + 34x^{-1} + 20(1 - x^2 + x^4/2)/(1 + x^2/2)$
LIGO-I	40	150	$9,00[(4,49x)^{-56} + 0,16x^{-4,52} + 0,52 + 0,32x^2]$
TAMA	75	400	$75[x^{-5} + 13x^{-1} + 9(1 + x^2)]$
VIRGO	20	500	$3,24[(6,23x)^{-5} + 2x^{-1} + 1 + x^2]$
LISA	10^{-5}	10^{-3}	$420[(x/5,62)^{-14/3} + 10^3 + x^2]$

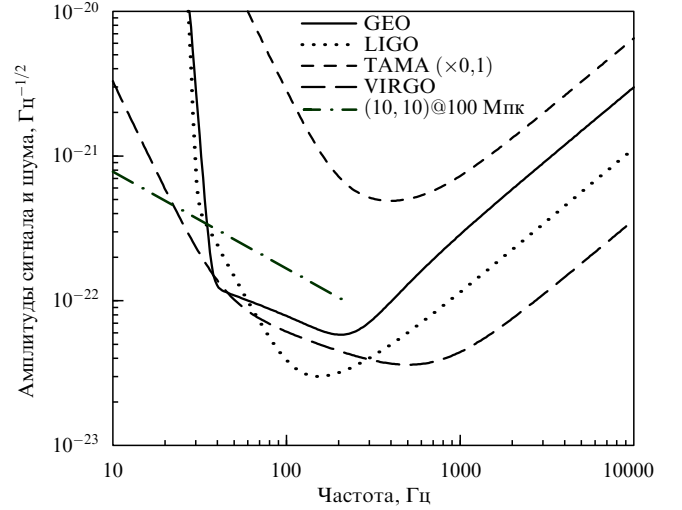


Рис. 15. Спектральная плотность шума $\sqrt{S_n(f)}$ в интерферометрах первого поколения. Здесь же показана амплитуда сигнала $\sqrt{f}|h(f)|$ от сближающихся черных дыр, находящихся на расстоянии 100 Мпк. Масса каждой из черных дыр полагалась равной $10M_\odot$ (см. обсуждение в разделе 8.2). Зависимость для TAMA умножена на 0,1.

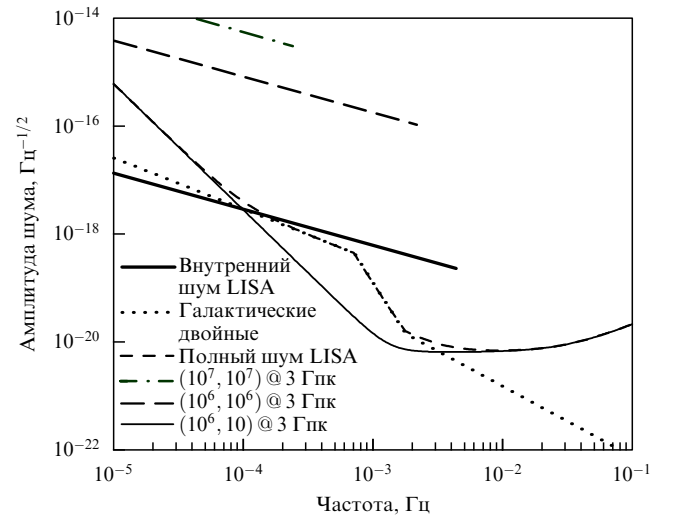


Рис. 16. То же, что и на рис. 15, для детектора LISA. Отметим, что на этом графике, в отличие от рис. 6, отложены амплитуды в единицах Гц $^{-1/2}$. Также показан сигнал от пары сверхмассивных черных дыр, находящихся на красном смещении $z = 1$. LISA сможет обнаруживать подобные источники с хорошим S/N практически в любом месте Вселенной.

ных систем Галактики, таких как двойные белые карлики, катаклизмические двойные звезды и т.д. Этот шум от двойных систем хорошо промоделирован (см. [16] и раздел 5) и может быть приближенно описан как "внешний" шум LISA $S_{ex}(x)$:

$$10^{46} S_{ex}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{5,56 \times 10^4} \right)^{-1,9}, & x < 10^{-0,15}, \\ \left(\frac{x}{12,3} \right)^{-7,5}, & 10^{-0,15} < x < 10^{0,25}, \\ \left(\frac{x}{471} \right)^{-2,6}, & 10^{0,25} < x, \end{cases} \quad (102)$$

где $x = f/f_0$ и $f_0 = 10^{-3}$ Гц.

7.5. Ложные события и порог детектирования

Темп регистрации событий первыми гравитационно-волновыми интерферометрами ожидается довольно низким — всего несколько событий в год. Следовательно, требуется установить высокий порог для того, чтобы отсеять шумовые события, которые можно было бы принять за сигнал.

Для сигнала с выхода детектора, собираемого с частотой 1 кГц и пропускаемого через большое количество (скажем, 10^3) фильтров, получим $\sim 3 \times 10^{13}$ реализаций шума в год. Если этот шум гауссов, то для того, чтобы не более чем одно ложное событие происходило за год наблюдений, порог детектирования должен быть около 7,5 стандартных отклонений шума. Значит, источник детектируется, только если его амплитуда значительно выше, чем эффективная амплитуда шума, т.е. $f\hat{h}(f) \gg h_n(f)$. Причина для отбора лишь таких сильных сигналов состоит в том, что ожидаемая частота появления транзиентных источников, т.е. источников с длительностью от нескольких секунд до минут, может быть очень малой, всего несколько событий в год, а число ложных шумовых событий на низком уровне $S/N \sim 3-4$ за год может быть достаточно большим. Установка большого порога детектирования позволяет отсекал такие случайные шумовые события. Однако техника фильтрации (см. раздел 8) позволяет детектировать сигнал с относительно малой амплитудой при условии, что регистрируется большое число колебаний волны и ее вид точно известен.

7.6. Диаграмма направленности детектора

Детекторы ГВ чувствительны к волнам, приходящим практически из любой точки на небе, хотя степень чувствительности все же зависит от истинного направления на источник. Чувствительность детектора к направлению на источник описывается *функцией диаграммы направленности*, которую также называют "диаграммой антенны" [4]. Гравитационно-волновая антенна имеет максимальную чувствительность к волнам, падающим под прямым углом к главной оси детектора в случае цилиндрического твердотельного приемника, или к главной плоскости детектора в случае интерферометра. Для волн, падающих с любого другого направления, ответ будет изменяться на тригонометрический множитель, различный для разных поляризаций h_+ и h_\times .

Обозначая две функции диаграммы направленности как F_+ и F_\times , запишем отклик C антенны на ГВ с поляризационными амплитудами:

$$C = [F_+^2(\theta, \varphi, \psi)h_+^2 + F_\times^2(\theta, \varphi, \psi)h_\times^2]^{1/2}, \quad (103)$$

где углы (θ, φ) определяют направление на источник, а ψ есть угол поляризации. Для твердотельной резонансной антенны с осью цилиндра, направленной вдоль оси z , отклик есть

$$F_+ = \sin^2 \theta \cos 2\psi, \quad F_\times = \sin^2 \theta \sin 2\psi, \quad (104)$$

а для интерферометра с перпендикулярно направленными плечами, образующими плоскость (x, y) с осью x вдоль биссектрисы между ними, имеем [4, 168]

$$F_+(\theta, \varphi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\varphi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\varphi \sin 2\psi,$$

$$F_\times(\theta, \varphi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\varphi \sin 2\psi + \cos \theta \sin 2\varphi \cos 2\psi. \quad (105)$$

Если ГВ длится достаточно долго, то движение детектора относительно источника приведет к тому, что детектор будет регистрировать различные поляризации в различные моменты времени (т.е. C будет функцией времени). Таким образом, длительные наблюдения могут быть полезными для разрешения двух поляризаций волны. Однако это будет практически невозможно при наблюдениях сигналов от сливающихся двойных звезд, поскольку сам сигнал в полосе чувствительности приемника будет иметь длительность несколько минут, в течение которого C в целом остается постоянной. В этом случае интерферометрическая антенна будет регистрировать только определенную комбинацию двух поляризаций, и информация о направлении на источник и поляризации волны может быть получена только при наблюдении одного и того же источника несколькими антеннами, разнесенными на достаточно большое расстояние.

8. Анализ данных

Наблюдения ГВ требуют привлечения специальной стратегии анализа данных, которая во многом отличается от обычного анализа астрономических данных. Для этого есть несколько причин:

— Гравитационно-волновые антенны являются практически всенаправленными со средней чувствительностью более 50 % на 75 % небесной сферы. Следовательно, системы анализа данных должны искать источники по всему небу.

— Типичные интерферометры являются широкополосными приборами, покрывающими 3–4 порядка величины по частоте. Хотя этот факт является очевидным преимуществом, так как позволяет следить за источниками с быстроизменяющейся частотой, требуется проводить поиски источников в очень широкой полосе частот.

— В отличие от электромагнитного излучения, большинство астрофизических гравитационно-волновых сигналов сохраняют фазу, и поэтому отношение сигнала к шуму S/N определяется суперпозицией многих колебаний сигнала от источника. Следовательно, S/N пропорционально амплитуде и спадает с расстоянием от источника r , как $1/r$. Значит, число источников при заданном отношении S/N возрастает как r^3 для однородного распределения источников в плоской вселенной, а для источников электромагнитного излучения это число возрастает только как $r^{3/2}$.

— Наконец, гравитационно-волновая антенна непрерывно получает данные в течение многих лет с темпом несколько мегабайт в секунду. Ожидается, что примерно сотая часть этих данных должна пройти через систему анализа данных. Только использование одновременной обработки данных может дать надежду на успех поиска сигнала. Это обстоятельство требует высокого быстродействия компьютеров для обработки данных и тщательной разработки поисковых алгоритмов с целью сделать их наиболее оптимальными (максимальное S/N) и эффективными (минимальное время поиска).

Сначала поясним обозначения, которые мы будем использовать в этом разделе, и напомним две важные теоремы. Будем обозначать через $x(t)$ сигнал на выходе детектора, который предположительно состоит из шума $n(t)$ и полезного сигнала $h(t)$. Преобразование Фурье от функции $x(t)$ обозначим $\tilde{x}(f)$ и определим как

$$\tilde{x}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(2\pi i f t) dt. \quad (106)$$

При таком определении обратное преобразование Фурье есть $x(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) \exp(-2\pi i f t) df$. Преобразование Фурье от действительной функции $x(t)$ подчиняется закону $\tilde{x}(-f) = \tilde{x}^*(f)$. Сдвиг по времени во временном представлении функции проявляется просто как постоянный фазовый сдвиг в ее частотном представлении, т.е. если $\tilde{x}(f)$ есть фурье-образ функции $x(t)$, то фурье-образ от $x(t - t_a)$ будет $\exp(2\pi i f t_a) \tilde{x}(f)$.

В разделе 8 всюду используется система единиц, в которой $G = c = 1$. Так, например, $1 M_{\odot} = 4,925 \times 10^{-5}$ с и $1 \text{ Мпк} = 1,08 \times 10^{14}$ с. Хотелось бы напомнить читателю, что $h(f)$ обозначает безразмерную амплитуду гравитационной волны, а $\tilde{h}(f)$ обозначает фурье-представление функции $h(t)$ и имеет размерность Гц^{-1} .

8.1. Оптимальная фильтрация и оптимальное отношение сигнала к шуму

Техника оптимальной фильтрации используется при анализе данных для эффективного поиска сигнала с известной формой на фоне шума [169]. Суть метода состоит в коррелировании выходных данных от детектора с заранее заданным образцом или фильтром. При заданном сигнале $h(t)$, находящемся ниже уровня шума $n(t)$, задача состоит в нахождении "оптимального" фильтра $q(t)$, который бы в среднем давал наилучшее отношение сигнала к шуму. В этом обзоре мы будем трактовать проблему оптимальной фильтрации на уровне практического поиска сигнала. Однако эта интуитивная картина имеет солидное обоснование в математической теории проверки гипотез. Заинтересованный читатель может обратиться за подробным описанием к любому стандартному учебнику по анализу данных (см., например, монографию Хельстрёма [169]).

Оптимальный фильтр. Пусть $x(t)$ означает выходной ряд данных с детектора. Если сигнала нет, то $x(t)$ является только реализацией шума $n(t)$, т.е. $x(t) = n(t)$, а при наличии определенного сигнала $h(t)$ выходные данные можно записать как

$$x(t) = h(t - t_a) + n(t), \quad (107)$$

где t_a — временная задержка относительно начала отсчета. В случае сигналов $h(t)$ с изменяющейся во времени частотой различные моменты t_a соответствуют различным частотам в момент $t = 0$. Так как детектор волн может регистрировать сигналы лишь в определенной полосе частот, t_a можно понимать как время входа сигнала в полосу чувствительности детектора. По этой причине t_a называют "временем прихода". Для заданного времени прихода момент, когда сигнал покидает полосу чувствительности детектора, определяется параметрами, характеризующими сигнал, такими как массы компонент в случае сливающихся двойных звезд. Время прихода сигнала является важным параметром при анализе данных, поскольку оно, как правило, неизвестно

и должно определяться из наблюдений. Измерение времени прихода сетью детекторов также помогает определить направление на источник.

Корреляция c фильтра $q(t)$ с выходными данными детектора определяется как

$$c \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) q(t) dt. \quad (108)$$

Назначение корреляционного интеграла (108) состоит в улучшении выделения сигнала на фоне шума. Анализ, приводимый ниже, показывает, как эта цель достигается. При этом мы получим *оптимальный* фильтр $q(t)$, который максимизирует статистическое среднее от коррелятора c при наличии сигнала $h(t)$ в выходном потоке данных детектора. Сначала запишем корреляционный интеграл в фурье-области, подставляя в интеграл вместо величин $x(t)$, $q(t)$ их фурье-образы $\tilde{x}(f)$ и $\tilde{q}(f)$, т.е.

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) \exp(-2\pi i f t) df$$

и

$$q(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(f) \exp(-2\pi i f t) df,$$

соответственно. После некоторых алгебраических преобразований получаем

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) \tilde{q}^*(f) df, \quad (109)$$

где $\tilde{q}^*(f)$ обозначает комплексно-сопряженное с $\tilde{q}(f)$. В общем случае c состоит из суммы двух слагаемых — профильтрованного сигнала S и профильтрованного шума N :

$$c = S + N, \quad (110)$$

где

$$S \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) \tilde{q}^*(f) \exp(2\pi i f t_a) df,$$

$$N \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}(f) \tilde{q}^*(f) df.$$

Поскольку n представляет собой действительный случайный процесс, c также является действительным случайным процессом. Если n представляется гауссовым случайным процессом с нулевым средним, то c будет также описываться функцией распределения Гаусса, хотя ее среднее значение и дисперсия будут, вообще говоря, отличаться от этих параметров для n . Среднее значение c , очевидно, равно S — корреляции фильтра q с сигналом h , поскольку среднее значение n равно нулю:

$$\bar{c} = S = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f) \tilde{q}^*(f) \exp(2\pi i f t_a) df. \quad (111)$$

Дисперсия c , т.е. $\overline{(c - \bar{c})^2}$, оказывается равной

$$\overline{(c - \bar{c})^2} = \overline{N^2} = \int_0^{\infty} S_n(f) |\tilde{q}(f)|^2 df, \quad (112)$$

где $S_n(f)$ — спектральная мощность шума, определенная в (98). Теперь определим отношение сигнала к шуму по

мощности как $\rho^2 \equiv S^2/\bar{N}^2$ и по амплитуде как ρ . Вид интегралов в (111) и (112) напоминает скалярное произведение функций, которыми могут быть либо фильтры, либо сигналы. Для двух заданных функций $a(t)$ и $b(t)$ определим их скалярное произведение $\langle a, b \rangle$ как

$$\langle a, b \rangle \equiv 2 \int_0^\infty \frac{df}{S_n(f)} [\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f) + \tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)]. \quad (113)$$

Вспомним, что $S_n(f)$ — действительная положительно определенная величина (ср. с (99)), следовательно, это скалярное произведение задает положительно определенную норму. Норма a , обозначаемая как $\|a\|$, дается выражением

$$\|a\| = 2 \left[\int_0^\infty \frac{df}{S_n(f)} |\tilde{a}(f)|^2 \right]^{1/2}. \quad (114)$$

Учитывая действительность функции $h(t)$ и используя введенное выше скалярное произведение, можем записать S/N как

$$\rho^2 = \frac{\langle h \exp(2\pi i f t_a), S_n q \rangle^2}{\langle S_n q, S_n q \rangle}. \quad (115)$$

Далее, скалярное произведение двух функций $\langle a, b \rangle$ достигает максимума при $a = b$. Применяя это условие к (115), находим, что фильтр q , максимизирующий ρ и потому называемый *оптимальным фильтром* и обозначаемый $\tilde{q}_{\text{opt}}(f)$, есть просто

$$\tilde{q}_{\text{opt}}(f) = \gamma \frac{\tilde{h}(f) \exp(2\pi i f t_a)}{S_n(f)}, \quad (116)$$

где γ — произвольная постоянная. Обратное преобразование Фурье от уравнения (116) дает оптимальный фильтр $q_{\text{opt}}(t)$ во временном представлении. Можно видеть, что $q_{\text{opt}}(t)$ является сверткой *сдвинутого по времени* сигнала $h(t)$ с обратным фурье-преобразованием от величины $1/S_n(f)$. Заметим, что для достижения максимального S/N оптимальный фильтр должен не только учитывать вид сигнала, но и время его прибытия t_a (см. фактор $\exp(2\pi i f t_a)$ в выражении для оптимального фильтра). Так как время прихода сигнала не известно заранее, требуется построить корреляцию выходных данных детектора с различными временными сдвигами относительно фильтра. Иными словами, строится корреляционная функция $c(t')$:

$$\begin{aligned} c(t') &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) q(t - t') dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) \tilde{q}^*(f) \exp(-2\pi i f t') df, \end{aligned} \quad (117)$$

где t' называется параметром задержки.

Оптимальное отношение сигнала к шуму. Теперь мы можем выписать максимальное или оптимальное отношение сигнала к шуму, подставляя выражение (116) для оптимального фильтра в (115):

$$\rho_{\text{opt}} = \langle h, h \rangle^{1/2} = 2 \left[\int_0^\infty df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \right]^{1/2}. \quad (118)$$

Заметим, что оптимальное S/N пропорционально не полной энергии сигнала, которая определяется как $4 \int_0^\infty df |\tilde{h}(f)|^2$, а скорее проинтегрированной мощности сигнала, взвешенной с СМ шума. Это обстоятельство находится в согласии с интуитивным представлением: вклад в S/N от частотных интервалов, где велика мощность шума, и, следовательно, сигнал менее значим, должен быть меньше, чем от частотных интервалов, где мощность шума ниже. Таким образом, оптимальная фильтрация автоматически учитывает природу СМ шума. В конечном выражении для оптимального S/N параметр t_a не появляется, поскольку оптимальный фильтр по времени прихода согласован с сигналом, и поэтому t_a выпадает из скалярного произведения.

Выражение для оптимального S/N (118) показывает, как следует сравнивать сигнал с шумом приемника. Заметим, что нельзя прямо сравнивать $|\tilde{h}(f)|^2$ с $S_n(f)$, так как эти величины имеют различные физические размерности. В литературе часто записывают оптимальное S/N одним из следующих эквивалентных способов:

$$\rho_{\text{opt}} = 2 \left[\int_0^\infty df \frac{|\sqrt{f} \tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \right]^{1/2} = 2 \left[\int_0^\infty df \frac{|f \tilde{h}(f)|^2}{f S_n(f)} \right]^{1/2}, \quad (119)$$

что облегчает сравнение сигнала с шумами детектора. Как видно из (119), можно сравнивать безразмерные величины $f|\tilde{h}(f)|$ и $[f S_n(f)]^{1/2}$ или размерные величины $\sqrt{f}|\tilde{h}(f)|$ и $[S_n(f)]^{1/2}$.

Интересующие нас сигналы характеризуются несколькими (априори неизвестными) параметрами, такими как массы компонент двойной системы, их собственные угловые моменты и т.д., и оптимальный фильтр должен согласовываться как с общим видом сигнала, так и с его параметрами. Фильтр, параметры которого слегка расходятся с сигналом, может сильно ухудшить S/N .

Каково же улучшение отношения сигнала к шуму, если параметры фильтра и его вид точно совпадают с видом и параметрами сигнала, по сравнению со случаем, когда о сигнале ничего неизвестно? Оптимальная фильтрация улучшает S/N пропорционально квадратному корню из числа периодов сигнала, в течение которых источник находился в полосе чувствительности детектора, по сравнению со случаем, когда форма сигнала неизвестна и единственное, что можно сделать — это выполнить фурье-преобразование выходных данных детектора и сравнить энергию от сигнала в данной полосе частот с энергией шума в том же интервале (доказательство см., например, в [170]).

Оптимальная фильтрация непрерывного гравитационно-волнового сигнала. Применим теорему об оптимальной фильтрации для наблюдений источников непрерывных монохроматических ГВ. Пусть источник наблюдается на частоте f_0 , т.е. $h(t) = h_0 \cos(2\pi f_0 t)$, в течение времени T . Тогда фурье-образ сигнала имеет вид функции $\text{sinc } x$ ($\text{sinc } x \equiv \sin x/x$):

$$\tilde{h}(f) = \frac{h_0 T}{2} \text{sinc} [2\pi(f - f_0)T]. \quad (120)$$

В этом выражении опущена функция sinc для $f = -f_0$; она не дает вклад в S/N , так как интеграл в (118) берется только по положительным частотам. Поскольку функ-

ция sinc имеет резкий максимум вблизи $f = f_0$, а СМ шума является медленно меняющейся функцией в полосе частот 100–1000 Гц, то можно рассматривать спектр мощности в подынтегральном выражении для S/N в (118) как постоянную величину и записать оптимальный S/N как

$$\rho_{\text{opt}}^{\text{CW}} = \frac{2}{\sqrt{S_n(f_0)}} \left[\int_0^\infty |\tilde{h}(f)|^2 df \right]^{1/2} = \frac{h_0}{\sqrt{S_n(f_0)/T}}, \quad (121)$$

где мы воспользовались тождеством $\int_0^\infty \text{sinc}^2(2\pi f T) df = 1/4T$. Формула (121) обосновывает выражение (101), выведенное ранее эвристически.

8.2. Оптимальный фильтр для сигналов от сливающихся компактных двойных систем

Как отмечалось в предыдущих разделах, последние несколько минут эволюции компактных двойных звезд (NS+NS, NS+BH, BH+BH) являются многообещающими источниками ГВ для интерферометров первой очереди. Форма сигнала от этих источников известна с высокой степенью точности, а потому техника оптимальной фильтрации как нельзя лучше подходит для их детектирования. Метод оптимальной фильтрации очень чувствителен к фазе волнового сигнала. Поэтому важно точно знать фазу в фильтрах, используемых для поиска сигнала, в то время как амплитуда может быть взята из низшего порядка постньютоновской теории. Такое приближение, которое учитывает фазовые коррекции, но пренебрегает поправками к амплитуде, называется *ограниченным постньютоновским приближением* [171].

Точные фильтры для поиска источника на фазе спирального сближения. Для расчета формы сигнала необходимо знать эволюцию его фазы и амплитуды, что требует вычисления относительной скорости $v_A(t)$ двух звезд и фазы $\phi_A(t)$ двойной системы. Индекс A (который мы будем в дальнейшем опускать в обозначениях величины v_A) указывает порядок постньютоновского приближения. В ограниченном постньютоновском приближении форма сигнала от двойной звезды на стадии спирального сближения дается выражением (см., например, [172])

$$h^A(t) = h_0 v_A^2(t) \cos \phi_A[v_A(t)]. \quad (122)$$

Амплитуда h_0 зависит от масс M_1 и M_2 компонент системы, расстояния r и ориентации источника относительно антенны. Более точно,

$$h_0 = \frac{4\eta M}{r} C(i, \theta, \varphi, \psi). \quad (123)$$

Здесь $M = M_1 + M_2$ есть полная масса двойной системы, $\eta = M_1 M_2 / M^2$ — безразмерное (симметричное по компонентам) отношение масс, принимающее максимальное значение 1/4 для равных масс $M_1 = M_2$. Величина η может рассматриваться как мера того, насколько геометрия отличается от шварцшильдовской, и часто называется *параметром деформации*. C есть функция от различных углов, описывающих поляризацию волны и ориентацию источника относительно антенны. Для двойной системы, круговая орбита которой наклонена

под углом i к лучу зрения, C имеет вид

$$C(i, \theta, \varphi, \psi) = \sqrt{A^2 + B^2}, \\ A = \frac{1}{2} F_+(\theta, \varphi, \psi)(1 + \cos^2 i), \quad B = F_\times(\theta, \varphi, \psi) \cos i. \quad (124)$$

В этом уравнении углы θ , φ и ψ параметризуют как направление распространения, так и поляризацию ГВ относительно детектора, а F_+ и F_\times являются функциями диаграммы направленности детектора и задаются выражениями (105).

Для вычисления S/N от сливающихся двойных звезд мы можем либо предположить *идеальную* ориентацию источника

$$i = \theta = \varphi = \psi = 0, \quad F_+ = 1, \quad F_\times = 0, \quad C = 1, \quad (125)$$

которая дает наибольшее возможное S/N , ρ_{ideal} , либо рассчитать среднеквадратичное S/N , ρ_{rms} , усредняя по всем углам. В последнем случае имеем среднеквадратичные значения

$$\langle F_+^2 \rangle_{\theta, \varphi, \psi}^{1/2} = \langle F_\times^2 \rangle_{\theta, \varphi, \psi}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \langle C^2 \rangle_{i, \theta, \varphi, \psi}^{1/2} = \frac{2}{5}, \quad (126)$$

которые и будут использованы в следующем параграфе для вычисления различных отношений сигнала к шуму.

Относительную скорость $v_A(t)$ и фазу ГВ $\phi_A(t) \equiv 2\varphi_A(t)$ в (122) можно найти из следующих обыкновенных дифференциальных уравнений [173]:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mathcal{F}_A(v)}{ME'_A(v)} = 0, \quad \frac{d\phi_A}{dt} - \frac{2v^3}{M} = 0, \quad (127)$$

где $E_A(v)$ — полная релятивистская энергия на единицу массы, т.е. $E = (E_{\text{total}} - M)/M$, причем $E'_A(v) \equiv dE_A/dv$, а $\mathcal{F}_A \equiv -dE_A/dt$ есть поток ГВ, уходящий из системы в данном приближении⁶. Эти дифференциальные уравнения допускают формальное решение

$$t_A = t_0 - M \int_{v_0}^v dv \frac{E'_A(v)}{\mathcal{F}_A(v)}, \quad \phi_A = \phi_0 - 2 \int_{v_0}^v dv v^3 \frac{E'_A(v)}{\mathcal{F}_A(v)}. \quad (128)$$

Вообще говоря, эти интегралы не берутся в замкнутом виде. Однако в рамках постньютоновского приближения можно разложить выражения для энергии и потока ГВ в ряд Тейлора, а следовательно, можно взять эти интегралы и получить явные выражения для $t_A = t_A(v)$ и $\phi_A = \phi_A(v)$ в последовательных приближениях, из которых, в свою очередь, могут быть найдены $v_A = v_A(t)$ и $\phi_A = \phi_A(t)$. Однако в литературе дискутируется вопрос о том, что является наилучшим представлением точного сигнала, излучаемого двойной системой на стадии спирального сближения. Некоторые авторы работают с постньютоновскими разложениями потока и энергии и полными решениями [174], другие предпочитают использовать обыкновенные дифференциальные уравнения (127) или, что эквивалентно, интегралы (128) [173, 175], а третьи используют более точные представления для энергии и потока, называемые аппроксимациями

⁶ В приложении III приводятся постньютоновские разложения энергии и потока.

Паде, или Р-аппроксимациями [172, 176]. Было показано, что Р-аппроксимации очень точны в пределе пробной массы (т.е. при $\eta \rightarrow 0$) и, как ожидается, будут хорошо работать при $\eta \neq 0$ [172, 173, 176].

В низшем порядке постньютоновской теории, т.е. в квадрупольном приближении, для круговых орбит имеем

$$E_N(v) = -\frac{\eta v^2}{2}, \quad \mathcal{F}_N(v) = -\frac{32\eta^2 v^{10}}{5}, \quad (129)$$

где индекс N используется для обозначения величин в самом низшем, т.е. ньютоновском, порядке постньютоновской теории. Подставляя эти выражения в (128) и обращая получающиеся уравнения, имеем следующую форму сигнала:

$$t(v) = t_0 + \frac{5M}{256\eta} (v_0^{-8} - v^{-8}), \quad (130)$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{1}{16\eta} (v_0^{-5} - v^{-5}), \quad (131)$$

$$h(t) = h_0 v^2(t) \cos \phi(t). \quad (132)$$

Здесь мы опустили индекс N для краткости; v_0 и ϕ_0 — соответственно относительная скорость двух звезд и фаза волн в момент t_0 . Величину v в уравнениях (131), (132) находим путем обращения уравнения (130).

Отношение сигнала к шуму для сигналов от сливающихся двойных звезд. Оптимальное S/N (118) записано через фурье-преобразование сигнала. Для сигналов от сливающихся тесных двойных звезд оптимальное S/N может быть найдено в приближении стационарной фазы в фурье-образе сигнала [177]. В этом приближении модуль преобразования фурье-сигнала в (122) есть [176]

$$|\tilde{h}(f)| = h_0 \left(\frac{5}{384\eta} \right)^{1/2} \frac{f^{-7/6}}{\pi^{2/3} M^{1/6}}. \quad (133)$$

Заменяя h_0 величиной C из (123) и используя получаемое выражение в (118), находим следующее оптимальное S/N :

$$\rho_{\text{opt}} = C \frac{M^{5/6}}{r\pi^{2/3}} \left(\frac{5\eta}{6} \right)^{1/2} \left[\int_{f_s}^{f_{\text{LSO}}} df \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} \right]^{1/2}, \quad (134)$$

где мы ввели конкретные пределы интегрирования. Нижний предел обусловлен СМ шума, которая резко возрастает ниже определенной частоты f_s . Едва ли улучшение S/N может быть достигнуто при использовании фильтра ниже этого предела. Для наземных интерферометров f_s лежит в пределах 1–50 Гц, а для космической антенны LISA f_s слегка меньше 0,1 мГц. Верхний предел f_{LSO} определяется положением последней устойчивой орбиты двойной системы. В пределе пробной массы (т.е. при $\eta \rightarrow 0$) сигнал от слияния закончится, когда пробная масса будет находиться на расстоянии $R_{\text{LSO}} = 6M$ от центрального тела. Это соответствует следующей частоте ГВ f_{LSO} :

$$f_{\text{LSO}}^2 = \frac{M}{\pi^2 R_{\text{LSO}}^3} = \frac{1}{6^3 \pi^2 M^2}, \quad (135)$$

где первое равенство является просто выражением третьего закона Кеплера, а во втором мы использовали

$R_{\text{LSO}} = 6M$. Этот верхний предел⁷ важен, поскольку именно он ограничивает сигнал от двойной на стадии спирального сближения, который может регистрироваться наземным интерферометром. Например, наземный интерферометр не сможет зарегистрировать слияние массивных двойных черных дыр с массами $\sim 10^6 - 10^9 M_\odot$, так как этот сигнал обрывается еще в области миллигерцовых частот, на которых наземные интерферометры слишком зашумлены. Однако космическая антенна типа LISA будет чувствительна к слияниям массивных двойных черных дыр, происходящим в любом месте Вселенной.

Наконец, мы в состоянии записать среднеквадратичное и идеальное S/N . Для двойной системы, находящейся на расстоянии r от Земли с массами компонент M_1 и M_2 , полной массой M и симметричным отношением масс η , среднеквадратичное и идеальное S/N получаются при подстановке среднеквадратичного и идеального значений C из (126) и (125), соответственно, в (134):

$$\rho_{\text{rms}} = \frac{M^{5/6}}{r\pi^{2/3}} \left(\frac{2\eta}{15} \right)^{1/2} \left[\int_{f_s}^{f_{\text{LSO}}} df \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} \right]^{1/2}, \quad \rho_{\text{ideal}} = \frac{5}{2} \rho_{\text{rms}}. \quad (136)$$

Заметим, что S/N зависит только от комбинации $\mathcal{M} = M\eta^{3/5}$ двух масс, называемой чирп-массой [178] и от интеграла, значение которого существенно зависит от верхнего предела. Для наземных детекторов верхний предел не слишком важен, если f_{LSO} превышает примерно 300 Гц, в случае более низких частот f_{LSO} этот интеграл начинает уменьшаться.

Хотя S/N зависит только от чирп-массы, это не означает, что из наблюдений мы не можем измерить обе массы. Вспомним, что оптимальное S/N получается только тогда, когда фаза сигнала точно совпадает с фазой фильтра. Подбор фазы снимает вырождение по двум массам. Постньютоновская теория дает возможность измерить более двух параметров, хотя в общей теории относительности каждый из этих параметров в пределе точечных частиц (т.е. в пренебрежении собственным вращением тел) зависит только от масс компонент двойной системы. Это обстоятельство можно использовать для проверки общей теории относительности в сильно нелинейном режиме (см. подробнее [179, 180]).

Чувствительность детектора иногда выражается через расстояние $r_s^{(1,4,1,4)}$ до идеально ориентированной системы из двух нейтронных звезд равной массы $1.4M_\odot$, сигнал от которой принимается детектором на уровне $S/N=5$. Для детектора GEO $r_s^{(1,4,1,4)} = 30$ Мпк, для LIGO — 45 Мпк, для TAMA — 1,8 Мпк и для VIRGO — 50 Мпк.

Интеграл в выражении для S/N (136) зависит от конкретного детектора через его СМ шума $S_n(f)$ и может быть найден (численно) с использованием выражений для СМ шумов, приведенных в табл. 5. Полученные таким способом S/N изображены на рис. 17 в зависимости от полной массы двойной системы из одинаковых компонент (т.е. для $\eta = 1/4$) и приведены в табл. 6 для трех типов двойных на расстоянии 100 Мпк, а

⁷ Использование верхнего предела в частотном представлении на основании верхнего предела во временном представлении есть технический вопрос. Заинтересованный читатель может обратиться к статье [171] и ссылкам в ней.

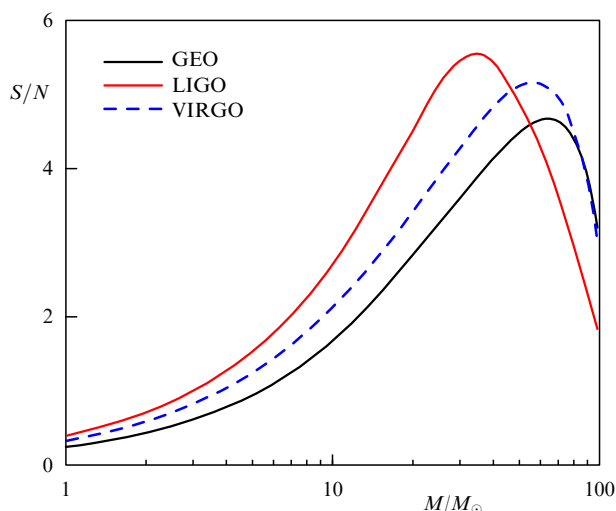


Рис. 17. Отношение сигнала к шуму для наземных интерферометров первого поколения как функция полной массы сливающейся двойной системы на расстоянии 100 Мпк. Величина усреднена по положению источника на небесной сфере и наклонению орбиты двойной. (Интерферометр ТАМА имеет слишком низкую чувствительность по отношению к этим источникам и не показан на графике.)

Таблица 6. Отношение сигнала к шуму для типичных двойных, состоящих из двух одинаковых нейтронных звезд равной массы $1.4M_{\odot}$ и/или черных дыр с массами $10M_{\odot}$ и $15M_{\odot}$ на расстоянии 100 Мпк, а также для гипотетических первичных двойных черных дыр (МАСНО ВН) с массами $0.5M_{\odot}$ на расстоянии 1 Мпк

Детектор\Двойная	(0,5, 0,5)	(1,4, 1,4)	(1,4, 10)	(10, 10)	(15, 15)
GEO	2,6	0,58	1,2	2,8	3,6
LIGO	3,8	0,95	2,0	4,6	5,5
VIRGO	3,5	0,78	1,5	3,4	4,3

также для гипотетических двойных МАСНО, которые могли бы населять гало Галактики на расстоянии 1 Мпк. Мы отмечаем, что фаза сближения двойной черной дыры будет наблюдаться с расстояния 100 Мпк с достаточно хорошим S/N для всех трех больших интерферометров первой очереди GEO, LIGO и VIRGO. Поиск совпадений событий на этих детекторах может однозначно выделить такие сигналы. Мы полагаем, что первые зарегистрированные сигналы будут именно от сливающихся двойных черных дыр на стадии спирального сближения.

Сигналы от черных дыр больших масс (около 100 солнечных) регистрировались бы на VIRGO и GEO с превосходным отношением сигнала к шуму. Пока нет убедительных свидетельств существования черных дыр такой массы и двойных систем из них, однако будущие измерения ГВ должны дать ответ на вопрос об их существовании.

Как уже упоминалось, интерферометры второй очереди будут иметь чувствительность на порядок выше и в более широкой полосе частот, а значит, смогут регистрировать источники с указанным S/N с расстояния 1 Гпк. Как мы видели в разделе 3, в таких объемах пространства темп событий увеличивается до нескольких событий в неделю. Таким образом, интерферометры второй очереди сделают регистрацию слияний компактных звезд обычным делом и без сомнений откроют новое направление в изучении гравитации.

Отношения сигнала к шуму, достижимые при наблюдениях источников на интерферометре LISA, совершенно

Таблица 7. Отношение сигнала к шуму на детекторе LISA для сигналов с космологического расстояния 3 Гпк от сверхмассивных двойных черных дыр и компактных объектов звездной массы, падающих в сверхмассивную черную дыру

M_1/M_{\odot}	M_2/M_{\odot}	f_1 , Гц	f_{LSO} , Гц	S/N
10^7	10^7	$1,08 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-4}$	1900
10^6	10^6	$4,54 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-3}$	4900
10^5	10^5	$1,92 \times 10^{-4}$	$2,2 \times 10^{-2}$	1700
10^6	10	$2,75 \times 10^{-3}$	$4,4 \times 10^{-3}$	21
10^5	10	$5,55 \times 10^{-3}$	$4,4 \times 10^{-2}$	11
10^6	1,4	$3,93 \times 10^{-3}$	$4,4 \times 10^{-3}$	3,8
10^5	1,4	$1,15 \times 10^{-2}$	$4,4 \times 10^{-2}$	2,2

феноменальные и приводятся в табл. 7. Детектор LISA будет способен регистрировать слияния двойных черных дыр с массой примерно в миллион солнечных практически из любого места Вселенной. Время, проводимое двойной внутри полосы чувствительности LISA, может превосходить время жизни детектора. По этой причине мы записали интеграл для S/N для частотного диапазона (f_1, f_2) , внутри которого сигнал извлекается в процессе наблюдений. При заданной длительности наблюдений сигнал от слияния двойной системы будет максимальным, если наблюдения начинаются по возможности ближе к моменту слияния и, следовательно, мы будем полагать $f_2 = f_{\text{LSO}}$.

8.3. Чувствительность

к стохастическим гравитационным волнам

В разделах 5 и 6 мы рассмотрели, как астрофизические процессы могут создавать стохастический фон ГВ и какие физические взаимодействия в ранней вселенной приводят к формированию фона реликтовых ГВ. Стохастический фон легко детектируется, если уровень инструментальных и внешних шумов на детекторе много меньше уровня самого фона ГВ, и особенно если статистические свойства фона ГВ или его спектральные характеристики отличаются от шумовых.

Даже когда фон ГВ много меньше по сравнению с инструментальным шумом, методика оптимальной фильтрации детерминированного сигнала, описанная в разделе 8.2, может быть обобщена на случай стохастического фона гравитационных волн. В отличие от детерминированного сигнала, мы не располагаем возможностью использовать заранее рассчитанные фильтры. Теперь идея заключается в том, чтобы использовать сами (зашумленные) данные с выхода одного детектора в качестве фильтра для (зашумленных) данных с другого детектора. Другими словами, мы можем воспользоваться "шумовым фильтром" с одного детектора для оптимальной фильтрации сигнала с другого детектора. Так как используемый фильтр зашумлен, увеличение S/N будет не таким хорошим, как в случае оптимальной фильтрации детерминированного сигнала. Однако, поскольку полезный фон ГВ все время присутствует, при корреляции достаточно длительных выходных сигналов двух независимых детекторов фон можно будет выделить из нескоррелированных шумов.

Идея использовать выходной сигнал с одного детектора как фильтр для увеличения обнаружимости фона ГВ на втором детекторе подразумевает, что 1) оба детектора подвержены действию одного и того же гравитационно-

волнового сигнала и 2) инструментальные шумы обоих детекторов нескоррелированы. В действительности ни одно из этих предположений не выполняется абсолютно точно. Пара достаточно близко расположенных наземных детекторов принимает почти идентичные сигналы, но шумовые воздействия со стороны окружающей среды (сейсмическая активность, ветры, штормы и т.д.) также могут оказаться похожими, так что записи на выходе детекторов могут содержать корреляции, не имеющие отношения к фону ГВ. Если детекторы расположены далеко друг от друга, внешние шумы нескоррелированы, но воздействующие гравитационно-волновые сигналы могут отличаться по поляризации и по фазе, так что их кросс-корреляция может оказаться незначительной. Ясно, что требуется некоторый компромисс: два далеко расположенных друг от друга детектора предпочтительны для устранения корреляции шумов, в то время как два близких детектора лучше выделяют полезный фоновый сигнал. Выведем выражение для увеличения S/N при кросс-корреляции данных с двух идентичных детекторов, расположенных в одном месте. Приводимый вывод является эвристическим, он предназначен для того, чтобы показать, как работает кросс-корреляция (более строгий вывод в случае детекторов с различной ориентацией см. в [159, 160]).

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ означают сигналы с двух одинаково ориентированных интерферометрических антенн, расположенных близко друг к другу. Оба детектора принимают стохастический сигнал $h(t)$. Будем предполагать, что внутренние шумы интерферометров $n_1(t)$ и $n_2(t)$ нескоррелированы. Будем также предполагать, что среднеквадратичные значения внутренних шумов много больше среднеквадратичной амплитуды стохастического сигнала, который мы хотим зарегистрировать. Таким образом, можно записать

$$x_1(t) = n_1(t) + h(t), \quad x_2(t) = n_2(t) + h(t), \quad \overline{n_1^2} = \overline{n_2^2} \gg \overline{h^2}, \quad (137)$$

где черта сверху означает усреднение по ансамблю и предполагается, что средние по ансамблю от $n_1(t)$, $n_2(t)$ и $h(t)$ равны нулю. Для извлечения стохастического сигнала мы строим кросс-корреляционный интеграл C . Кросс-корреляция выходных сигналов от двух детекторов длительностью T дается выражением

$$C^2 \equiv \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) dt \equiv (x_1, x_2), \quad (138)$$

в котором скобки означают кросс-корреляцию двух наборов данных x_1 и x_2 . Кросс-корреляционный интеграл обозначен как C^2 , поскольку он квадратичен по полезному сигналу h . Используя (137), выражение для C^2 можно записать в виде

$$C^2 = (n_1, n_2) + (n_1, h) + (h, n_2) + (h, h). \quad (139)$$

C^2 есть случайный процесс, среднее значение которого в предположении, что собственные шумы детекторов нескоррелированы, дает полезный сигнал S^2 :

$$S^2 = \overline{C^2} = \overline{(h, h)}. \quad (140)$$

Из этого соотношения мы заключаем, что полезная компонента сигнала C^2 растет пропорционально вре-

мени интегрирования T , т.е. $S^2 \propto T$. Это, конечно, только статистическое среднее от C^2 , и чтобы оценить его значимость, это значение следует сравнивать с флуктуациями C^2 . Обозначим шумовую компоненту C^2 через

$$N^2 \equiv C^2 - \overline{C^2} = (n_1, n_2). \quad (141)$$

N^2 также представляет собой случайную величину и ее среднеквадратичное значение будет содержать СМ шумов (ср. формулы (98), (100)) $S_{n_1}(f)$ и $S_{n_2}(f)$ двух детекторов. Если предположить, что шумы обоих детекторов имеют идентичные спектры, скажем, $S_n(f)$, среднеквадратичное значение N^2 оказывается равным

$$\overline{N^4} \propto T \int_{-\infty}^{\infty} df S_n^2(f). \quad (142)$$

Из формул (140), (142) видно, что S/N для стохастического фона растет как $T^{1/4}$. Следовательно, в принципе можно измерять стохастический фон с уровнем ниже собственного фона детекторов путем накопления сигнала в течение достаточно долгого времени. И наоборот, то обстоятельство, что мы получаем наборы данных с определенной длительностью T на фоне шума со спектральной мощностью $S_n(f)$, позволяет оценить минимальный уровень стохастического фона, который можно извлечь из наблюдений. Эти оценки показывают, что интерферометры первой очереди будут способны зарегистрировать стохастический сигнал на уровне $h(f) \approx 2 \times 10^{-23}$, или $\Omega_{\text{gw}} \sim 5 \times 10^{-6}$ (см. раздел 6) на уровне значимости 90 % за три месяца наблюдений [160]. Наземные интерферометры второй очереди будут способны регистрировать сигналы с уровнем, на пять порядков величины более низким (в терминах Ω_{gw}). Космическая антенна LISA будет иметь чувствительность к реликтовому фону ГВ на уровне наземных детекторов, но в частотном интервале $\sim 10^{-4} - 10^{-1}$ Гц, в котором реликтовый фон имеет большую спектральную амплитуду $h(f)$. Поскольку вполне вероятно, что LISA вступит в строй примерно в то же время, что и третье поколение наземных интерферометров, открывается захватывающая перспектива обнаружить первичный фон ГВ, как обсуждалось в разделе 6, в течение ближайших 10 лет. Эти наблюдения также помогут понять природу стохастических фонов от астрофизических источников, которые рассматривались в разделе 5.

8.4. Требования к вычислительным мощностям

Метод оптимальной фильтрации налагает жесткие требования на априорное знание эволюции фазы сигнала. Необходимо 1) уметь точно моделировать сигнал и 2) знать параметры, характеризующие сигнал. Если наш модельный сигнал неточен или параметры сигнала неизвестны, возможны потери в получаемом отношении сигнала к шуму. Например, в случае сигнала от сливающихся двойных звезд несовпадение в один цикл, накапливаемое за 10^4 циклов, понижает S/N в два раза, что уменьшает в 8 раз число потенциально регистрируемых источников. (Вспомним, что S/N обратно пропорционально расстоянию до источника; потеря в S/N в a раз уменьшит максимальное расстояние до самого слабого источника в то же число раз, уменьшая доступный для наблюдений объем пространства и число событий на фактор a^3 .) Кроме того, если параметры сигнала не-

известны, необходимо фильтровать данные с набором фильтров, расположенных в различных точках пространства параметров, например в узлах выбранной решетки, так, чтобы любой сигнал мог лежать достаточно близко по крайней мере к одному из фильтров, давая хорошую кросс-корреляцию с этим фильтром. Число таких фильтров, как правило, очень велико. Это предъявляет жесткие требования к используемым вычислительным мощностям, необходимым для проведения обработки данных непосредственно по мере их поступления. Далее в разделе 8.4 мы обсудим методику определения числа фильтров и вычислительных ресурсов, требуемых для анализа сигнала в реальном времени.

Функция неоднозначности. Функция неоднозначности, хорошо известная в статистической теории детектирования сигналов [169], является мощным средством обработки наблюдений. Она помогает оценивать дисперсии и ковариации при измерении различных параметров, определять систематические отклонения, вносимые совокупностью фильтров с характеристиками, отличающимися от детектируемых сигналов, определять число фильтров, требуемых для покрытия пространства параметров и т.д. В этом разделе мы обсудим процедуру оценки параметров, а в следующем — требования, предъявляемые к вычислительным мощностям.

Начнем с определения *нормированного* фильтра или сигнала. (Большинство приводимых ниже определений относится как к сигналам, так и к их моделям (фильтрам).) Фильтр a называется нормированным, если обладает единичной нормой: $\|a\| \equiv \langle a, a \rangle^{1/2} = 1$. Норма h_0 сигнала h есть также его оптимальное S/N : $\rho_{\text{opt}} = \langle h, h \rangle^{1/2} = \|h\| = h_0$. По этой причине норму сигнала также называют силой сигнала.

Функция неоднозначности определяется как скалярное произведение двух нормированных фильтров, максимизированное по начальной фазе одного из фильтров. Точнее, это есть абсолютная величина скалярного произведения двух нормированных фильтров⁸.

Пусть $a(t; \alpha)$ есть нормированный фильтр. Заметим, что мы используем символ a для обозначения набора фильтров, которые имеют одну и ту же функциональную форму, но различаются значениями параметров. В самом деле, $\alpha = \{\alpha^A | A = 0, \dots, p\}$ обозначает вектор параметров, имеющий $p + 1$ компонент. За параметр α^0 удобно принять временной сдвиг t' , который соответствует времени события и, следовательно, называется *внешним* параметром, в то время как остальные p параметров α^k , $k = 1, \dots, p$, называются *внутренними* параметрами и характеризуют источник ГВ. Для двух заданных фильтров $a(t; \alpha_1)$ и $a(t; \alpha_2)$, векторы параметров которых не обязательно совпадают, функция неоднозначности \mathcal{A} по определению есть

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \max_{\alpha^0} |\langle a(\alpha_1), a(\alpha_2) \rangle|. \quad (143)$$

Поскольку фильтры нормированы, имеем $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_1) = 1$ и, если α_1 не равно α_2 , то $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$.

Важно отметить, что в определении функции неоднозначности не требуется, чтобы функциональные формы фильтра и сигнала были одинаковыми. Это определение можно также применять для любой пары сигнал–фильтр. Более того, число параметров фильтра не обязательно должно совпадать (как оно обычно и бывает) с числом параметров сигнала. Например, двойная система может характеризоваться большим числом параметров, такими как массы, моменты вращения, эксцентриситет орбиты и т.д., тогда как модельный фильтр может характеризоваться только массами. Для фазы спирального сближения $a(t; \alpha_2)$ может представлять собой точный общерелятивистский сигнал от двойной системы, в то время как набор фильтров для его обнаружения рассчитывается в постньютоновском или ином приближении. В качестве другого примера можно взять сигнал от вращающейся нейтронной звезды, изолированной или входящей в состав двойной системы, временная зависимость которого неизвестна либо по причине невозможности учесть все физические эффекты, либо потому, что пространство параметров слишком обширно. Конечно, в таком случае нельзя построить функцию неоднозначности, поскольку один из ее аргументов неизвестен. Эти вопросы являются серьезными проблемами, требующими решения. Для целей же нашего обзора достаточно предположить, что сигнал и фильтр имеют одинаковый вид и характеризуются одними и теми же параметрами.

В определении функции неоднозначности (143) α_1 может быть интерпретировано в качестве параметров (нормированного) фильтра, а α_2 — сигнала. При фиксированных параметрах α_1 функция неоднозначности является функцией p параметров сигнала α_2^k , $k = 1, \dots, p$, давая S/N от фильтра при различных сигналах. Однако функцию неоднозначности можно с тем же успехом интерпретировать как S/N , получаемое для данного сигнала при применении фильтров с различными значениями параметров. Далее, область пространства параметров сигнала, для которой фильтр дает S/N выше заданного, называется *областью минимальной подгонки* [181] и является *областью охвата* фильтра. Фильтры должны быть выбраны таким образом, чтобы в совокупности они покрывали все пространство параметров интересующего нас сигнала с минимальным перекрытием областей охвата друг друга.

Метрика на пространстве сигналов. Вычислительные затраты на поиск сигнала и оценку его параметров могут быть определены с использованием ясной геометрической картины [181, 182]. Начнем с пространства сигналов. Сигнал $e(t; \alpha)$ с данным набором параметров может рассматриваться как единичный *вектор*. (При дальнейшем обсуждении мы будем иметь дело по большей части с единичными векторами сигналов и фильтров.) Выборка значений сигнала $h = \{h_k | k = 0, \dots, N - 1\}$ в моменты времени t_k , $k = 0, \dots, N - 1$ может рассматриваться как N -мерный вектор сигнала, однако не обязательно с единичной нормой. Выходные значения детектора, снятые подобным образом, также могут рассматриваться как N -мерный вектор. Множество всех таких выходных векторов детектора сигнала образует векторное пространство. Вернемся вновь к вектору сигнала. При изменении его параметров он покрывает некоторую область в N -мерном векторном пространстве выходных данных детектора. Размерность этого подпространства равна

⁸ Заметим, что при работе с сигналом в аналитической форме $h(t) = a(t) \exp[i\phi(t) + \phi_0]$, где $a(t)$ и $\phi(t)$ — переменные во времени амплитуда и фаза соответственно, начальная фаза ϕ_0 сигнала просто превращается в постоянную фазу в фурье-представлении, и максимизацию по этой начальной фазе можно проводить, взяв абсолютное значение скалярного произведения фильтра с сигналом.

числу параметров сигнала, и оно называется *пространством сигналов*.

Это пространство сигналов, образующее подпространство в полном векторном пространстве, обладает структурой многообразия, в котором параметры волны задают координатную систему, а размерность равна числу параметров. Определив многообразие, мы можем поставить вопрос: возможно ли ввести на нем разумную метрику? В действительности мы уже имеем необходимые средства для введения метрики, а именно функцию неоднозначности.

Зафиксируем параметры фильтра α_1 ; в этом случае функция неоднозначности имеет в качестве аргументов $p + 1$ параметр сигнала $\alpha_2^k, k = 0, \dots, p$. Разлагая $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2)$ в ряд вблизи ее максимума $\alpha_2 = \alpha_1$ и удерживая квадратичные члены, получаем

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \gamma_{AB} \Delta\alpha^A \Delta\alpha^B + O[(\Delta\alpha)^3], \quad (144)$$

где $\Delta\alpha \equiv \alpha_2 - \alpha_1$ и γ_{AB} есть метрика на пространстве сигналов:

$$\gamma_{AB}(\alpha_1) \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2^A \partial \alpha_2^B} \Big|_{\alpha_2=\alpha_1}. \quad (145)$$

Это метрика в точке α_1 на многообразии. Далее мы будем опускать индекс 1 у параметров α , так как в действительности это произвольная точка многообразия, на котором находится фильтр. Поскольку можно легко найти максимум относительно параметра задержки α^0 , желательно работать с метрикой g_{ij} , которая является ортогональной проекцией к α^0 , а именно

$$g_{ij} \equiv \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{i0}\gamma_{j0}}{\gamma^{00}}, \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (146)$$

Предположим, что требуется выбрать некоторый банк фильтров. Под банком фильтров мы подразумеваем дискретное семейство фильтров, выбранных в заданной области пространства параметров сигнала. Ни один из фильтров этого банка не совпадает идеально с принимаемым сигналом, но если плотность фильтров достаточно высока, то можно извлекать любой сигнал с S/N выше некоторой доли от оптимального S/N . Большая часть ранних статей по анализу данных по ГВ касалась изучения эффективных алгоритмов выбора такого банка фильтров, который минимизировал бы вычислительные затраты на поиски сигнала. Плотность фильтров в банке зависит от максимальной доли оптимального отношения сигнала к шуму, которой можно пожертвовать при поиске сигнала: чем меньше эта доля, тем больше плотность фильтров. Желательно выбрать этот банк так, чтобы любой возможный сигнал имел *максимизированное перекрытие* больше, чем определенное *минимальное совпадение* \mathfrak{M} , по крайней мере, с одним из фильтров банка. Под перекрытием мы подразумеваем скалярное произведение (нормированного) сигнала с (нормированным) фильтром, а максимизация производится на всем пространстве параметров фильтров. Максимизированное перекрытие, иногда называемое *совпадением*, всегда меньше или равно единице. Требуя, чтобы собственное расстояние между фильтрами, а именно $g_{ij} \Delta\alpha^i \Delta\alpha^j$, было бы максимально большим, для данного минимального совпадения \mathfrak{M} можно получить следующую формулу для расстояния

между фильтрами:

$$\Delta\alpha^k = \sqrt{\frac{2(1 - \mathfrak{M})}{g_{kk}}}, \quad (147)$$

где использована формула (144). Фактор 2 в числителе возникает потому, что собственное расстояние $(1 - \mathfrak{M})$ между наименее похожими сигналом и фильтром подразумевает вдвое большее собственное расстояние между фильтрами, выбранными на квадратичной решетке.

Расстояние между фильтрами может также быть вычислено более точно с использованием численных методов, как это сделано в [177] (см. также [183]). Сравнение результатов, полученных вышеизложенным метрическим методом и с помощью численного расчета, показывает, что квадратичная аппроксимация (147), как правило, хорошо работает для $\mathcal{A} \geq 0,95$. Таким образом, формула (147) может быть использована для выбора фильтров в пределе малого расстояния между фильтрами.

Обратимся теперь к использованию метрики для определения числа фильтров, необходимых для поиска сигнала. Если число фильтров \mathcal{N} , нужное для покрытия интересующей нас области, велико, хорошее приближение для \mathcal{N} получается делением собственного объема интересующей нас области в многообразии сигналов на собственный объем одного фильтра. Эта последняя величина ΔV зависит от используемого упаковочного алгоритма, который в свою очередь зависит от размерности p пространства параметров. Для $p = 2$ оптимальная упаковка осуществляется на гексагональной решетке и, таким образом,

$$\Delta V = \frac{3\sqrt{3}}{2} (1 - \mathfrak{M}). \quad (148)$$

Не существует схемы упаковки, оптимальной для всех p , но всегда можно воспользоваться гиперкубической решеткой (хотя это и неэффективно), для которой

$$\Delta V = \left(2\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{M}}{p}} \right)^p, \quad (149)$$

где p , как обычно, означает размерность пространства параметров. Поскольку область охвата фильтра известна, полное число фильтров легко рассчитать, используя выражение

$$\mathcal{N} = \frac{\int d^p \alpha \sqrt{\det \|g_{ij}\|}}{\Delta V}. \quad (150)$$

Вычислительные затраты на поиск сигналов от сливающихся двойных звезд. В работе [183] было рассчитано число фильтров для поиска сигналов от сливающихся двойных звезд для постньютоновских сигналов и характеристик наземных интерферометров, описанных выше (см. раздел 7.4). Требуемое число фильтров при большом минимальном совпадении $\mathfrak{M} = 0,97$ достигает сотен тысяч (табл. 8) и означает огромные вычислительные затраты. Например, для поиска ГВ от слияний в режиме прямой обработки данных потребовался бы специальный компьютер, способный выполнять 10^{10} операций с плавающей запятой в секунду (т.е. с быстродействием 10 гигафлоп). Разработка экономичных компьютеров

Таблица 8. Число фильтров, необходимых для поиска сигналов от сливающихся двойных звезд с массами $m_1, m_2 \geq 0,2M_\odot$ при минимальном совпадении 0,97. Числа приведены для различных семейств постнейтоновских сигналов

Интерферометр	1PN	1,5PN	2PN
LIGO-I	$2,5 \times 10^5$	$5,3 \times 10^5$	$4,7 \times 10^5$
VIRGO	$1,4 \times 10^7$	$1,4 \times 10^7$	$1,3 \times 10^7$
GEO600	$4,3 \times 10^5$	$8,5 \times 10^5$	$7,5 \times 10^5$

такого класса является в настоящий момент одной из главных проблем для различных групп, занимающихся анализом данных.

Вычислительные затраты для поиска непрерывных сигналов. Проблема поиска непрерывного сигнала от вращающихся нейтронных звезд требует использования очень мощных быстродействующих компьютеров. Сегодня мало надежды провести поиск сигнала по всему небу за время наблюдений с длительностью год и более. Легко видеть, почему это так. Во-первых, данные должны непрерывно накапливаться с хорошей чувствительностью в течение месяцев. Пока еще никому не удавалось поддерживать работу интерферометров в столь длительном режиме и неизвестно, удастся ли в будущем. Во-вторых, несмотря на то, что нейтронная звезда излучает монохроматический сигнал в своей системе отсчета (если не учитывать замедления собственного вращения, вносящего модуляцию в форму сигнала), из-за ускоренного движения Земли по отношению к источнику детектор не воспринимает сигнал как чисто периодическую волну. Волна оказывается промодулированной как по амплитуде, так и по частоте. К счастью, можно демодулировать этот эффект, так как движение Земли известно с хорошей точностью, а значит, можно и восстановить исходный периодический сигнал. Но для демодуляции необходимо знать положение источника на небе и его частоты, которые неизвестны при поисках вслепую. Угловое разрешение, которое получается за год накопления сигнала, есть $\Delta\theta = \lambda/D$, где λ — длина волны и D — база детектора за время наблюдений 1 год, т.е. 1 а.е. Таким образом, на частоте $f = 100$ Гц имеем $\Delta\theta = 10^{-5}$ рад, или около двух угловых секунд. Предполагая, что источник может находиться на небе в одной из областей площадью 4 квадратных секунды дуги, число площадок, для которых требуется провести демодуляцию, будет $4\pi/(\Delta\theta)^2 = 4\pi \times 10^{10}$. Разумеется, совершенно невозможно произвести доплеровскую демодуляцию выходного сигнала детектора для каждой из этих $\sim 10^{11}$ площадок и произвести такое число фурье-преобразований.

Поэтому возникает вопрос, какой наиболее эффективный поиск сигнала можно предпринять при заданной компьютерной мощности? Есть ли преимущества в переходе от одношагового к двух- и многошаговым схемам иерархического поиска? Можно ли осуществлять поиск лишь в определенных направлениях? Вот некоторые проблемы, на которые есть только частичные ответы. Однако необходима огромная работа по улучшению и оптимизации поисковых алгоритмов, и такая работа проводится. Далее обсуждается сегодняшнее состояние дел в этой области.

Геометрический формализм, рассмотренный в этом разделе, использовался в работе [184] для вычисления времени наблюдений, в течение которого компьютер терафлопного класса мог бы обрабатывать данные в

режиме реального времени (т.е. анализировать T часов данных за T часов) и проводить поиски сигнала вслепую, когда неизвестно ни направление на источник, ни его частота, ни темп ее изменения. К сожалению, максимальная длительность серии данных, которую можно обрабатывать в прямом режиме, для сигнала от вращающихся нейтронных звезд с частотой $f \leq 100$ Гц и временем замедления периода вращения короче 1000 лет, оказывается около 18 сут. При этом отношение S/N уменьшается в 5 раз по сравнению с годичным периодом наблюдений. Поиски в прямом режиме сигналов от нейтронных звезд с частотой $f \leq 500$ Гц (максимально наблюдаемые частоты вращения миллисекундных пульсаров) и темпами замедления периодов около 40 лет (самые короткие времена торможения) могут производиться в течение интервалов времени, составляющих 20 ч или меньше. Если координаты источника с неизвестной частотой определены заранее, то поиск сигнала в прямом режиме с использованием компьютера терафлопного класса может осуществляться в данных 3-месячной длительности. Это обнадеживающая оценка, поскольку на небе известно много пульсаров и рентгеновских двойных звезд, которые могут быть потенциальными источниками гравитационно-волнового излучения. Кроме того, очевидным направлением для поиска таких сигналов должен быть галактический центр и шаровые скопления.

Предпринимались попытки (см. [185, 186]) оценить эффективность двухшагового иерархического метода при поисках сигнала вслепую. Основная идея метода состоит в построении фурье-преобразований от наборов данных с длительностью, меньшей промежутка времени, в котором будут сказываться доплеровские модуляции сигнала, и сложении спектров мощности, полученных таким способом. Это некогерентный способ построения сигнала, так как складываются спектральные плотности без информации о фазе. Следовательно, получается меньшее отношение S/N , чем достижимое при оптимальной фильтрации. Однако это не так важно, поскольку: 1) S/N обсуждаемых источников довольно велико (~ 10) и 2) отобранные кандидаты могут далее наблюдаться с использованием метода когерентного накопления. Эти методы позволяют проводить в прямом режиме поиски вслепую (т.е. без использования предположений о параметрах источника) непрерывных гравитационно-волновых сигналов в течение приблизительно 4 месяцев при наличии 20-гигафлопного компьютера. Такие компьютеры предполагается построить для поиска непрерывных гравитационно-волновых сигналов в ближайшем будущем.

8.5. Ковариационная матрица и оценка параметров

Следующим шагом после детектирования источника, сигнал от которого, например, превысил требуемое отношение сигнала к шуму, является оценка параметров источника и определение их доверительных интервалов. Отметим, во-первых, что никогда нет абсолютной уверенности, что сигнал действительно присутствует в наборе данных. Можно дать только уровень значимости его наличия, который может быть близок к 100 % для высоких значений отношения S/N . Уровень значимости определяет вероятность того, что наблюдение события, такого как высокий пик в коррелированном выходном сигнале, произведен действительно гравитационной вол-

ной, а не каким-либо посторонним случайным волновым процессом. Во-вторых, следует заметить, что как бы ни был высок S/N , не может быть абсолютной уверенности в истинных параметрах сигнала. В лучшем случае можно рассчитать диапазон значений, в котором с наибольшей вероятностью находятся истинные параметры сигнала. Ширина этого интервала зависит от требуемого уровня значимости и возрастает для высоких значений этого уровня.

При поиске сигнала в выходных данных детектора мы используем дискретный, а не непрерывный набор фильтров. Каждому фильтру соответствует определенный набор параметров и все фильтры вместе покрывают интересующую нас область пространства параметров. Расстояние между фильтрами в пространстве параметров будет в общем случае довольно малым. За оценку параметров источника обычно принимают параметры фильтра, который дает максимальное отношение сигнала к шуму. Такая оценка называется "максимально правдоподобной оценкой", так как параметры этого фильтра максимизируют величину, называемую *отношением правдоподобия* [169]. Максимально правдоподобные оценки не всегда являются оценками с минимальной неопределенностью, что было в частности продемонстрировано для сигналов от сливающихся двойных звезд [182]. Байесовские оценки, которые учитывают всякое априорное знание о распределении параметров источника, а также информацию о корреляции выходного сигнала со всем набором фильтров, часто оказываются гораздо надежнее [187]. Причина этого в том, что байесовские оценки используют имеющуюся информацию на количественном уровне.

Любая оценка параметров, как бы она ни была эффективна, надежна и аккуратна, не даст истинных значений параметров сигнала, поскольку при любом конечном S/N шум влияет на сигнал. На геометрическом языке вектор сигнала искажается вектором шума, приводя к вектору, лежащему вне пространства сигналов. Техника оптимальной фильтрации используется для вычисления проекции этого измененного вектора на пространство параметров сигнала. Ожидается, что истинные параметры сигнала будут находиться внутри некоторого p -мерного эллипсоида на определенном уровне значимости, причем объем эллипсоида возрастает с увеличением этого уровня. Оси эллипсоида представляют собой неопределенности в 1σ в оценке величины параметров. Уровень значимости для неопределенности в 1σ составляет $0,67^p$, для неопределенности в 2σ — $0,95^p$ и т.д.

Тема оценки параметров заслуживает гораздо более детального обсуждения, чем приведенное выше. Однако наша цель состояла лишь в перечислении всех средств математической теории оценки параметров, необходимых для практического применения. Заинтересованный читатель может обратиться к постоянно увеличивающейся литературе на эту тему (теорию оценки параметров см. в [169], а ее применение к наблюдениям ГВ — в [182, 188, 189]).

Ковариационная матрица. Скалярное произведение в (113) индуцирует метрику на многообразии сигналов [182]:

$$G_{ij} = \left\langle \frac{\partial a(\alpha)}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial a(\alpha)}{\partial \alpha^j} \right\rangle, \quad (151)$$

где $a(\alpha)$ — единичный вектор сигнала и α^i — координаты. Метрика G_{ij} определена на многообразии всех параметров, включая задержку t' и начальную фазу ϕ_0 волны. Легко показать, что метрика G , ортогонально спроектированная на начальную фазу ϕ_0 , порождает метрику γ в (145). Метрика (151) в пространстве сигналов называется также информационной матрицей Фишера [169]. В самом деле, она содержит "информацию" о том, насколько похожи или непохожи формы сигнала в малой окрестности параметра α . Большие значения метрики означают, что даже малые изменения в параметрах сигнала и фильтра могут сильно повлиять на их перекрытия; противоположное утверждение верно в случае малых значений метрических коэффициентов.

Матрица, обратная по отношению к информационной, называется *ковариационной матрицей* C_{ij} . Ее диагональные и недиагональные элементы являются, в пределе большого S/N , дисперсиями измеренных значений параметров и коэффициентами корреляции между параметрами, соответственно [169]:

$$C_{ij} = (G)_{ij}^{-1}. \quad (152)$$

Ошибки в оценке полной массы, приведенной массы и момента слияния t_{coal} двойной системы были рассчитаны с помощью ковариационной матрицы Пуассоном и Виллом [189] для фильтров во втором постньютоновском приближении. Они приведены в табл. 9 для типичных двойных систем. Относительные ошибки при заданном отношении S/N меньше для систем меньшей массы. Это связано с тем, что сигнал от таких систем, в отличие от массивных систем, длится дольше, и они проводят большее время внутри полосы чувствительности детектора, что облегчает различение сигналов с разными параметрами.

Таблица 9. Ошибки в оценке момента слияния Δt_{coal} , фазы слияния $\Delta \phi_{\text{coal}}$, чирп-массы $\Delta M/M$ и симметричного отношения масс $\Delta \eta/\eta$, а также процентные смещения в оценках полной массы $B_m = 100(1 - m^T/m^X)$ и отношения масс $B_\eta = 100(1 - \eta^T/\eta^X)$ (T — параметр фильтра, X — параметр точного сигнала) для фильтра, рассчитанного во втором постньютоновском приближении в пренебрежении эффектами собственного вращения. Значения приведены для трех типичных типов сливающихся двойных систем, состоящих из двух равных нейтронных звезд с массами по $1,4M_\odot$ (система NS+NS), нейтронной звезды с массой $1,4M_\odot$ и черной дыры с массой $10M_\odot$ (система NS+BH) и двух равных черных дыр с массами по $10M_\odot$ (система BH+BH)

Система	Δt_{coal} , мс	$\Delta \phi_{\text{coal}}$, рад	$\Delta M/M \times 10^{-3}$	$\Delta \eta/\eta$	B_m	B_η
NS+NS	1,07	2,94	0,36	0,28	0,214	0,211
NS+BH	1,72	2,27	2,20	0,50	-6,96	12,2
BH+BH	1,50	2,19	5,40	1,50	1,40	0,282

Смещенные оценки. Ошибки при оценке параметров сигнала возникают двумя способами. Во-первых, из-за внутренних шумов детектора, которые изменяют сигнал, а значит, в процессе максимизации отношения S/N мы ошибаемся в оценке параметра на величину, зависящую от S/N . Эта ошибка называется *случайной ошибкой* и обычно она уменьшается обратно пропорционально S/N . В пределе бесконечно большого ансамбля измерений оцененные значения сходятся к истинным значениям параметров сигнала. Во-вторых, наша оценка может быть *смещенной* оценкой в том смысле, что среднее значение по ансамблю измерений сходится к значениям,

отличающимся от истинных значений параметра. Это может произойти по одной или обеим из следующих причин. Фильтр, используемый в нашем поисковом алгоритме, может быть только приближением к истинному сигналу, как в случае использования фильтра в постньютоновском приближении для поиска точного релятивистского сигнала от сливающейся двойной системы. Такой поиск приведет к смещению в оценке параметров, которое мы назовем смещением *первого рода*. С другой стороны, величина, по которой производится оценка, с самого начала может быть смещенной и может приводить к ошибочным оценкам даже в случае использования точных фильтров; такое смещение назовем смещением *второго рода*. Приведем пример смещения второго рода. В методе максимального правдоподобия мы всегда стремимся достичь максимального значения отношения правдоподобия. Это приводит к завышению оценки амплитуды сигнала, как показано в [182]. Для сигналов от сливающихся двойных звезд это значило бы, что расстояние до источника недооценено.

Смещения оценок параметров сигналов от сливающихся двойных систем обсуждались в работе [190]. Смещения в оценке полной массы и симметричного отношения масс при использовании стандартного постньютоновского приближения приведены в табл. 9 и детально обсуждаются в [172]. Эти исследования показали, что при использовании стандартных постньютоновских фильтров смещение может быть достаточно большим, в то время как Р-аппроксимации сигнала резко уменьшают это смещение.

9. Заключение

Техника оптимальной фильтрации сигналов в сети наземных интерферометров первого поколения, включающей инструменты GEO, LIGO и VIRGO, должна позволить наблюдать сливающиеся двойные черные дыры на уровне отношения сигнала к шуму $S/N \sim 3$ из объема 3×10^6 Мпк³. Консервативные оценки числа слияний в этом объеме предсказывают несколько таких событий в год. Таким образом, двойные черные дыры будут, вероятно, первыми событиями, которые регистрируют эти детекторы.

Интерферометры первого поколения также смогут регистрировать реликтовый фон ГВ на уровне $\Omega_{\text{gw}} \sim 5 \times 10^{-6}$ при кросс-корреляции данных от близкой пары интерферометров (LIGO–LIGO или GEO–VIRGO). Однако этот уровень слишком мал с теоретической точки зрения. Новые алгоритмы анализа данных, использующие специфические статистические свойства первичного гравитационно-волнового фона, могли бы помочь в детектировании этого фона на гораздо более низком уровне, однако в настоящее время неясно, как это реализовать.

Интерферометры первого поколения смогут также регистрировать непрерывные ГВ от молодых или быстро вращающихся нейтронных звезд при условии, что их амплитуда $h \geq 10^{-26}$ и длительность сигнала больше нескольких месяцев. При этом подразумевается, конечно, что нам известна фазовая эволюция излучаемого сигнала, который в случае старых нейтронных звезд есть просто синусоида. Однако в случае ГВ, излучаемых одной из неустойчивостей быстро вращающейся нейтронной звезды, точная форма сигнала неизвестна. То же

относится к всплескам излучения во время вспышек сверхновых или на заключительной фазе слияния черных дыр. Таким образом, остается много работы по описанию источников ГВ. Однако вполне может оказаться, что уже первое поколение гравитационно-волновых антенн откроет новое окно для наблюдения Вселенной, которое поможет в изучении и понимании процессов в сильных и нелинейных гравитационных полях.

Авторы благодарят К. Торна, В.Б. Брагинского и Б. Шутца за полезные обсуждения. Работа частично поддержана грантом Лондонского Королевского общества.

10. Приложения

Здесь мы приводим некоторые основные формулы, относящиеся к описанию эволюции массивных двойных.

1. Кеплеровские двойные системы

и обратная реакция гравитационного излучения

Двойные звезды — одна из главных тем данного обзора, поэтому необходимо напомнить читателю основные факты о кеплеровском движении в двойной системе. Масса звезды сосредоточена вблизи ее центра, поэтому рассмотрение звезд как точечных масс обычно оказывается адекватным для описания их взаимодействия в двойной системе. Далее, в этих системах действует ньютоновская механика до тех пор, пока орбитальные скорости малы по сравнению со скоростью света c . Систематическое изменение параметров орбит под действием излучения ГВ будет рассмотрено далее в этом разделе.

Кеплеровское движение. Рассмотрим две точечные массы M_1 и M_2 , обращающиеся друг вокруг друга под действием сил гравитации. Хорошо известно (см. [191]), что эта задача эквивалентна задаче о движении одиночного тела с массой μ во внешнем гравитационном потенциале. Величина внешнего потенциала определяется суммарной массой M . Она равна

$$M = M_1 + M_2, \quad (\text{П.1})$$

а приведенная масса μ есть

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M}. \quad (\text{П.2})$$

Тело массы μ движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e и большой полуосью a . Орбитальный период P и орбитальная частота $\Omega = 2\pi/P$ связаны с M и a третьим законом Кеплера:

$$\Omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = \frac{GM}{a^3}. \quad (\text{П.3})$$

Это соотношение верно для любого эксцентриситета e .

Индивидуальные тела M_1 и M_2 движутся вокруг центра масс системы по эллиптическим орбитам с тем же самым эксцентриситетом e . Полуоси этих эллипсов обратно пропорциональны массам тел:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1}. \quad (\text{П.4})$$

и удовлетворяют соотношению $a = a_1 + a_2$. Радиус-векторы тел относительно барицентра системы равны

$\mathbf{r}_1 = M_2 \mathbf{r} / (M_1 + M_2)$ и $\mathbf{r}_2 = -M_1 \mathbf{r} / (M_1 + M_2)$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ есть относительный радиус-вектор. Следовательно, скорости тел относительно центра масс системы связаны соотношением

$$-\frac{\mathbf{V}_1}{V_2} = \frac{M_2}{M_1}, \quad (\text{П.5})$$

а их относительная скорость равна $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$.

Сохраняющаяся полная энергия двойной равна

$$\begin{aligned} E &= \frac{M_1 V_1^2}{2} + \frac{M_2 V_2^2}{2} - \frac{GM_1 M_2}{r} = \\ &= \frac{\mu V^2}{2} - \frac{GM_1 M_2}{r} = -\frac{GM_1 M_2}{2a}, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где r — расстояние между телами. Вектор орбитального углового момента перпендикулярен к плоскости орбиты и может быть записан, как

$$\mathbf{J}_{\text{orb}} = M_1 \mathbf{V}_1 \times \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{V}_2 \times \mathbf{r}_2 = \mu \mathbf{V} \times \mathbf{r}. \quad (\text{П.7})$$

Его абсолютная величина равна

$$|\mathbf{J}_{\text{orb}}| = \mu \sqrt{GMa(1 - e^2)}. \quad (\text{П.8})$$

Для двойных с круговой орбитой ($e = 0$) расстояние между телами не зависит от времени:

$$r(t, e = 0) = a,$$

и его часто называют орбитальным расстоянием. В этом случае скорости тел также не зависят от времени:

$$V \equiv |\mathbf{V}| = \Omega a = \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad (\text{П.9})$$

а орбитальный момент равен

$$|\mathbf{J}_{\text{orb}}| = \mu V a = \mu \Omega a^2. \quad (\text{П.10})$$

Гравитационное излучение от двойной системы. Положение плоскости орбиты определяется вектором углового момента \mathbf{J}_{orb} , луч зрения — единичным вектором \mathbf{n} , а наклонение двойной i — соотношением $\cos i = (\mathbf{n}, \mathbf{J}_{\text{orb}} / J_{\text{orb}})$ так, что при $i = 90^\circ$ мы смотрим на систему "с ребра".

Рассмотрим сначала две точечные массы M_1 и M_2 на круговой орбите. В квадрупольном приближении [2], амплитуды двух поляризаций ГВ на расстоянии r от источника будут равны

$$h_+ = \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{1}{r} 2(1 + \cos^2 i) (\pi f M)^{2/3} \mu \cos(2\pi f t), \quad (\text{П.11})$$

$$h_\times = \pm \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{1}{r} 4 \cos i (\pi f M)^{2/3} \mu \sin(2\pi f t). \quad (\text{П.12})$$

Здесь M — полная масса системы, μ — приведенная масса, $f = \Omega / \pi$ — частота излучаемой ГВ (удвоенная орбитальная частота). Заметим, что на данном расстоянии r и при заданной частоте f амплитуда волн полностью определяется комбинацией $\mu M^{2/3} = \mathcal{M}^{5/3}$. Величина

$$\mathcal{M} \equiv \mu^{3/5} M^{2/5}$$

называется чирп-массой. После усреднения по орбитальному периоду (которое сводится к замене квадратов

периодических функций на $1/2$) и по ориентациям орбитальной плоскости мы получаем среднюю (характерную) амплитуду волны

$$h(f, \mathcal{M}, r) = (\langle h_+^2 \rangle + \langle h_\times^2 \rangle)^{1/2} = \left(\frac{32}{5} \right)^{1/2} \frac{G^{5/3}}{c^4} \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{r} (\pi f)^{2/3}. \quad (\text{П.13})$$

Потеря энергии и углового момента. В том приближении и в той системе координат, в которой мы работаем, достаточно использовать псевдотензор Ландау–Лифшица [2] для описания энергии и потока ГВ. Применение псевдотензора Ландау–Лифшица в этой ситуации можно обосновать с помощью совершенно строгого и удовлетворительного гравитационного тензора энергии–импульса, который выводится в теоретико-полевой формулировке общей теории относительности [192]. Энергия dE , переносимая гравитационной волной в направлении ее распространения через площадку dA за время dt , равна

$$\frac{dE}{dA dt} \equiv F = \frac{c^3}{16\pi G} \left[\left(\frac{\partial h_+}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_\times}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (\text{П.14})$$

Энерговыведение dE/dt локализованного источника во всех направлениях задается интегралом

$$\frac{dE}{dt} = \int F(\theta, \phi) r^2 d\Omega. \quad (\text{П.15})$$

Делая подстановку

$$\left(\frac{\partial h_+}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_\times}{\partial t} \right)^2 = 4\pi^2 f^2 h^2(\theta, \phi)$$

и вводя

$$h^2 = \frac{1}{4\pi} \int h^2(\theta, \phi) d\Omega,$$

можно записать (П.15) в виде

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3}{G} (\pi f)^2 h^2 r^2. \quad (\text{П.16})$$

Для случая двойной системы на круговой орбите можно найти *потерю* энергии (на это указывает знак минус) с помощью (П.16) и (П.13):

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^{7/3}}{c^5} (\mathcal{M} \pi f)^{10/3}. \quad (\text{П.17})$$

Это в точности то же самое выражение, что и полученное напрямую из квадрупольной формулы [2]:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M_1^2 M_2^2 M}{a^5} \quad (\text{П.18})$$

и переписанное с использованием чирп-массы и закона Кеплера. Поскольку энергия и угловой момент непрерывно уносятся гравитационным излучением, две массы по спирали приближаются друг к другу, а их орбитальная частота Ω постепенно возрастает. Частота гравитационных волн $f = \Omega / \pi$ и их амплитуда h также являются растущими функциями времени. Темп изменения

частоты⁹ есть

$$\dot{f} = \frac{96}{5} \frac{G^{5/3}}{c^5} \pi^{8/3} \mathcal{M}^{5/3} f^{11/3}. \quad (\text{П.19})$$

В спектральном представлении поток энергии через единичную площадку в единичном интервале частот задается правой частью выражения

$$\frac{dE}{dA df} = \frac{c^3}{G} \frac{\pi f^2}{2} (|\tilde{h}(f)_+|^2 + |\tilde{h}(f)_\times|^2) \equiv \frac{c^3}{G} \frac{\pi f^2}{2} S_h^2(f), \quad (\text{П.20})$$

где мы ввели спектральную плотность $S_h^2(f)$ поля гравитационных волн h . В случае двойной системы значение S_h^2 вычисляется из (П.11) и (П.12):

$$S_h^2 = \frac{G^{5/3}}{c^3} \frac{\pi}{12} \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{r^2} \frac{1}{(\pi f)^{7/3}}. \quad (\text{П.21})$$

Длительность слияния двойной. Двойная система с круговой орбитой теряет энергию согласно (П.17). Для орбит с ненулевым эксцентриситетом e правая часть этой формулы должна быть умножена на фактор

$$f(e) = \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) (1 - e^2)^{-7/2}$$

(см. [193]). Начальная полуось a_0 уменьшается и (в предположении, что соотношение (П.18) всегда выполняется) обращается в нуль в момент

$$t_0 = \frac{c^5}{G^3} \frac{5a_0^4}{256M^2\mu} = \frac{5c^5}{256} \frac{(P_0/2\pi)^{8/3}}{(G\mathcal{M})^{5/3}} \approx \approx (9,8 \times 10^6 \text{ лет}) \left(\frac{P_0}{1 \text{ ч}}\right)^{8/3} \left(\frac{\mathcal{M}}{M_\odot}\right)^{-5/3}. \quad (\text{П.22})$$

Как отмечалось выше, гравитационное излучение двойной зависит только от чирп-массы \mathcal{M} , которая также может быть записана, как $\mathcal{M} \equiv M\eta^{3/5}$, где η — безразмерное отношение $\eta = \mu/M$. Поскольку $\eta \leq 1/4$, мы имеем $\mathcal{M} \leq 0,435M$. Например, для двух NS с равными массами $M_1 = M_2 = 1,4M_\odot$ чирп-масса будет равна $\mathcal{M} \approx 1,22M_\odot$. Это объясняет выбор нормировки в (П.22).

Время слияния системы с начальным эксцентриситетом $e_0 \neq 0$ и полуосью a_0 короче, чем для круговой орбиты с той же начальной полуосью a_0 [193]:

$$t_{\text{coal}}(e_0) = t_0 f(e_0), \quad (\text{П.23})$$

где поправочный множитель $f(e_0)$ равен

$$f(e_0) = \frac{48}{19} \frac{(1 - e_0^2)^4}{e_0^{48/19} [1 + (121/304)e_0^2]^{3480/2299}} \times \times \int_0^{e_0} \frac{[1 + (121/304)e^2]^{1181/2299}}{(1 - e^2)^{3/2}} e^{29/19} de. \quad (\text{П.24})$$

Для того чтобы слиться за время меньше хаббловского ($t_H \approx 10^{10}$ лет), двойная должна иметь достаточно корот-

кий начальный орбитальный период $P_0 \leq P_{\text{cr}}(e_0, \mathcal{M})$ и, соответственно, достаточно малую начальную полуось $a_0 \leq a_{\text{cr}}(e_0, \mathcal{M})$. Эти критические орбитальные периоды и полуоси в зависимости от начального эксцентриситета e_0 показаны на рис. 18 и 19, соответственно. Линии проведены для трех типичных значений масс: две нейтронные звезды с равными массами ($1,4M_\odot + 1,4M_\odot$), черная дыра с нейтронной звездой ($10M_\odot + 1,4M_\odot$) и две черные дыры равных масс ($10M_\odot + 10M_\odot$). Отметим, что для заметного укорочения времени слияния начальный эксцентриситет орбиты должен быть велик, $e_0 \gtrsim 0,6$.

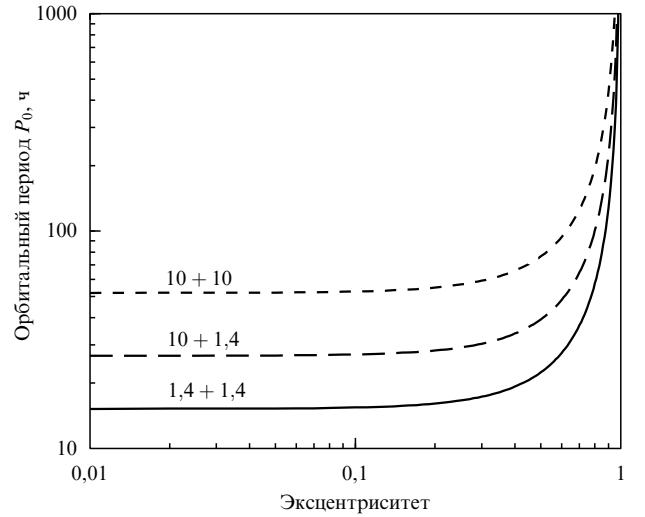


Рис. 18. Начальный орбитальный период P_0 (в часах) двух точечных масс на эксцентричной орбите (которые сольются из-за излучения ГВ за время 10^{10} лет) как функция начального эксцентриситета орбиты e_0 . Показаны кривые для слияния $10M_\odot + 10M_\odot$ (BH+BH), $10M_\odot + 1,4M_\odot$ (BH+NS) и $1,4M_\odot + 1,4M_\odot$ (NS+NS). Двойная система с меньшим (большим) периодом сольется за меньшее (большее) время.

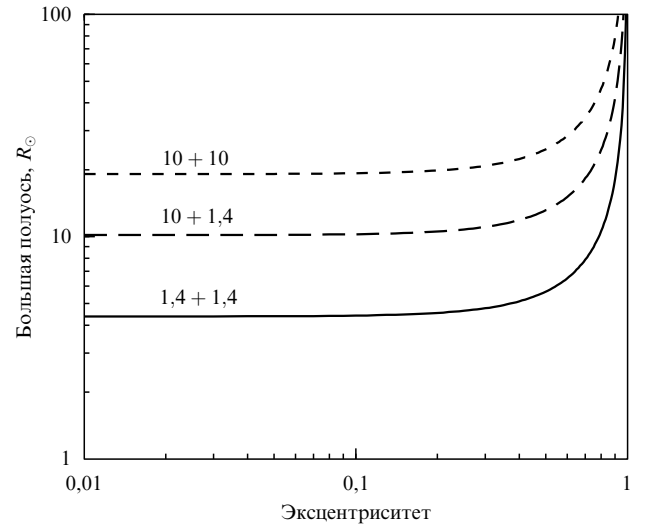


Рис. 19. Начальная большая полуось a_0 (в радиусах Солнца) двух точечных масс на эксцентричной орбите (которые сольются из-за излучения ГВ за время 10^{10} лет) как функция начального эксцентриситета орбиты e_0 . Показаны кривые для слияния $10M_\odot + 10M_\odot$ (BH+BH), $10M_\odot + 1,4M_\odot$ (BH+NS) и $1,4M_\odot + 1,4M_\odot$ (NS+NS). Двойная система с меньшей (большой) полуосью сольется за меньшее (большее) время.

⁹ Сигнал с такой возрастающей частотой напоминает вскрик птицы. Это объясняет возникновение термина "чирп-масса" (от англ. chirp — чирикание, щебет) для параметра \mathcal{M} , который полностью определяет поведение частоты и амплитуды ГВ.

II. Режимы переноса массы и потери вещества в двойных системах

Излучение гравитационных волн — единственный процесс, ответственный за изменение орбитальных параметров двойных компактных (вырожденных) звезд. Однако на ранних этапах эволюции двойной главную роль играют перенос массы между компонентами и унос вещества из системы. Строго говоря, эти процессы должны рассматриваться гидродинамически, что требует сложнейших численных расчетов, но эволюцию двойной можно рассматривать и качественно, упрощенно представляя звезды как точечные тела. Изменение их интегральных физических параметров, таких как массы, угловой орбитальный момент и т.д., определяет эволюцию орбиты системы. Такое описание способно воспроизвести результаты гораздо более трудоемких численных экспериментов (см. в качестве обзора [41]). В данном подходе ключевая роль отдается полному угловому моменту двойной системы J_{orb} .

Пусть звезда 2 теряет вещество со скоростью $\dot{M}_2 < 0$ и пусть β , где $0 \leq \beta \leq 1$, — доля этого вещества, покидающая систему (остальное захватывается первой звездой), т.е. $\dot{M}_1 = -(1 - \beta)\dot{M}_2 \geq 0$. Рассмотрим круговую орбиту с угловым моментом, задаваемым формулой (П.10). Продифференцируем обе части (П.10) по времени t и исключим $d\Omega/dt$ с помощью третьего закона Кеплера. Это преобразование дает нам скорость изменения полуоси:

$$\frac{\dot{a}}{a} = -2 \left[1 + (\beta - 1) \frac{M_2}{M_1} - \frac{\beta}{2} \frac{M_2}{M} \right] \frac{\dot{M}_2}{M_2} + 2 \frac{J_{\text{orb}}}{J_{\text{orb}}} . \quad (\text{П.25})$$

Будем называть перенос массы консервативным, когда $\beta = 0$ и $J_{\text{orb}} = 0$. Если хотя бы одно из этих условий нарушено, перенос вещества будет неконсервативным.

Для массивных двойных, которые наиболее интересны для нас, важно различать отдельные режимы (моды) переноса. Мы будем выделять следующие моды: 1) консервативная аккреция, 2) неконсервативная джинсовская мода (или режим быстрого ветра), 3) неконсервативное изотропное переизпускание, 4) внезапная потеря массы одного из компонентов при вспышке сверхновой и 5) стадия с общей оболочкой. Эволюция орбиты под действием излучения ГВ, которое становится основным фактором эволюции для короткопериодических компактных двойных, была рассмотрена в конце приложения I. Для неконсервативных режимов можно ввести дополнительные подклассы, например, кольцеобразную моду, при которой вокруг двойной системы образуется кольцо выброшенного вещества (см. [194]). Здесь мы не будем углубляться в подобные детали классификации.

1. Консервативная аккреция. В случае консервативной аккреции вещество с M_2 полностью попадает на M_1 . В процессе переноса сохраняется как полная масса, $M = \text{const}$ ($\beta = 0$), так и орбитальный угловой момент, $J_{\text{orb}} = \text{const}$, системы. Из уравнения (П.25) сразу же получаем

$$M_1 M_2 \sqrt{a} = \text{const} ,$$

так что начальная и конечная полуоси связаны соотношением

$$\frac{a_f}{a_i} = \left(\frac{M_{1i} M_{2i}}{M_{1f} M_{2f}} \right)^2 . \quad (\text{П.26})$$

Хорошо известное "железное правило" в этом случае говорит, что орбита сжимается, когда вещество теряет более массивный компонент, и расширяется в противоположном случае. В ходе такого перетекания полуось орбиты проходит через минимум, когда массы компонентов становятся равными.

2. Джинсовская мода (быстрый ветер). В этом режиме выбрасываемое вещество покидает систему полностью, т.е. $\beta = 1$. Вещество может уходить либо в виде сферически симметричного звездного ветра, либо в форме биполярных джетов, движущихся с высокой скоростью относительно системы. В обоих случаях вещество уносит с собой угловой момент, пропорциональный угловому моменту теряющего массу компонента $J_2 = (M_1/M)J_{\text{orb}}$ (мы пренебрегаем возможным осевым вращением самой звезды, см. [195]). В качестве оценки потери орбитального углового момента разумно взять

$$\dot{J}_{\text{orb}} = \frac{\dot{M}_2}{M_2} J_2 . \quad (\text{П.27})$$

В случае $\beta = 1$ уравнение (П.25) может быть записано как

$$\frac{(\Omega a^2)}{\Omega a^2} = \frac{\dot{J}_{\text{orb}}}{J_{\text{orb}}} - \frac{M_1 \dot{M}_2}{M M_2} . \quad (\text{П.28})$$

Тогда уравнение (П.28) в сочетании с (П.27) дает $\Omega a^2 = \text{const}$, т.е. $\sqrt{G a M} = \text{const}$. Поэтому при данном режиме потери массы полуось изменяется следующим образом:

$$\frac{a_f}{a_i} = \frac{M_i}{M_f} . \quad (\text{П.29})$$

Поскольку суммарная масса системы убывает, орбита всегда расширяется.

3. Изотропное переизпускание. Вещество, теряемое второй звездой, может сначала захватиться первой, а затем доля β этой материи может быть выброшена из системы. Подобное происходит, когда массивная звезда перетекает на компактную в тепловой шкале времени ($< 10^6$ лет). Аккреционная светимость может превысить эддингтоновский предел, и давление излучения станет выталкивать падающее вещество прочь из системы, примерно так, как это эффектно происходит в двойной системе SS 433. При данном режиме переноса массы угловой орбитальный момент, уносимый выброшенным веществом, определяется орбитальным моментом аккрецирующей звезды M_1 , а не моментом звезды-донора M_2 . Потеря орбитального момента может быть записана как

$$\dot{J}_{\text{orb}} = \beta \frac{\dot{M}_2}{M_1} J_1 , \quad (\text{П.30})$$

где $J_1 = (M_2/M)J_{\text{orb}}$ — орбитальный угловой момент звезды M_1 . В предельном случае, когда все вещество, притянутое M_1 , затем выталкивается наружу ($\beta = 1$), формула (П.30) превращается в уравнение

$$\frac{\dot{J}_{\text{orb}}}{J_{\text{orb}}} = \frac{\dot{M}_2 M_2}{M_1 M} . \quad (\text{П.31})$$

После подстановки этого выражения в (П.25) и интегрирования по времени приходим к выражению

$$\frac{a_f}{a_i} = \frac{M_i}{M_f} \left(\frac{M_{2i}}{M_{2f}} \right)^2 \exp \left(-2 \frac{M_{2i} - M_{2f}}{M_1} \right) . \quad (\text{П.32})$$

Экспоненциальный член делает данный режим перетекания чрезвычайно чувствительным к отношению масс компонент. Если $M_1/M_2 \ll 1$, то расстояние a между звездами может уменьшиться столь сильно, что приближение точечных масс станет неприемлемым. Может наступить приливная (дарвиновская) орбитальная неустойчивость, и компактная звезда начнет по спирали приближаться к центру невырожденного компаньона (это стадия с общей оболочкой, которая рассматривается в п. 5).

4. Взрывы сверхновых. Взрыв сверхновой в двойной системе происходит за гораздо более короткое время, чем орбитальный период, поэтому потеря массы в данном процессе происходит практически мгновенно. Эта задача может быть решена аналитически (см., например, [79, 196, 197]). В общем случае вещество и излучение могут уноситься несимметрично, так что остаток сверхновой (нейтронная звезда или черная дыра) приобретает некоторую дополнительную скорость, называемую скоростью отдачи (kick velocity) \mathbf{w} . В двойной системе эта скорость будет складываться с орбитальной скоростью предсверхновой.

Обычная трактовка данного процесса выглядит следующим образом. Рассмотрим двойную систему с массами компонент M_1 и M_2 , первый компонент которой является предсверхновой. Звезды движутся по круговой орбите с полуосью a_i и относительной скоростью V_i . Звезда M_1 взрывается, оставляя после себя компактный остаток массы M_c . Полная масса двойной уменьшается на $\Delta M = M_1 - M_c$. Кроме того, компактная звезда приобретает некоторую дополнительную скорость \mathbf{w} . Если при взрыве двойная не распадается, то ее новая орбита будет обладать эксцентриситетом e и полуосью a_f и будет повернута на угол θ относительно старой. В общем случае центр масс новой системы также приобретет некоторую скорость (этот параметр мы далее рассматривать не будем). Наша задача — найти значения параметров a_f , e и θ .

Введем удобную систему отсчета, центр которой совпадает с M_2 в момент взрыва. Ось x направим от M_2 к M_1 , ось y — в направлении орбитального движения \mathbf{V}_i , а ось z — перпендикулярно орбитальной плоскости. В этой системе относительная скорость предсверхновой равна $\mathbf{V}_i = (0, V_i, 0)$, где $V_i = [G(M_1 + M_2)/a_i]^{1/2}$ (см. формулу (П.9)). Начальный полный орбитальный момент равен $\mathbf{J}_i = \mu_i a_i (0, 0, -V_i)$. Взрыв считается мгновенным. Сразу же после взрыва положение взорвавшейся звезды M_1 не изменяется: $\mathbf{r} = (a_i, 0, 0)$. Однако другие параметры испытывают скачок:

$$\mathbf{V}_f = (w_x, V_i + w_y, w_z)$$

и

$$\mathbf{J}_f = \mu_f a_i (0, w_z, -(V_i + w_y)),$$

где $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ — дополнительная скорость, а $\mu_f = M_c M_2 / (M_c + M_2)$ — приведенная масса системы после взрыва. Оба параметра, a_f и e , могут быть найдены путем приравнивания полной энергии и модуля углового момента после взрыва на круговой орбите их значениям на результирующей эллиптической орбите (см. (П.6), (П.8) и (П.10)):

$$\mu_f \frac{V_f^2}{2} - \frac{G M_c M_2}{a_i} = -\frac{G M_c M_2}{2a_f}, \quad (\text{П.33})$$

$$\mu_f a_i \sqrt{w_z^2 + (V_i + w_y)^2} = \mu_f \sqrt{G(M_c + M_2) a_f (1 - e^2)}. \quad (\text{П.34})$$

Таким образом, для a_f и e получаем

$$\frac{a_f}{a_i} = \left\{ 2 - \chi \left[\frac{w_x^2 + w_z^2 + (V_i + w_y)^2}{V_i^2} \right] \right\}^{-1} \quad (\text{П.35})$$

и

$$1 - e^2 = \chi \frac{a_i}{a_f} \left[\frac{w_z^2 + (V_i + w_y)^2}{V_i^2} \right], \quad (\text{П.36})$$

где $\chi \equiv (M_1 + M_2)/(M_c + M_2) \geq 1$. Угол θ определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{J}_i}{|\mathbf{J}_f| |\mathbf{J}_i|},$$

откуда вытекает

$$\cos \theta = \frac{V_i + w_y}{\sqrt{w_z^2 + (V_i + w_y)^2}}. \quad (\text{П.37})$$

Условие распада двойной зависит от модуля скорости после взрыва V_f и параметра χ . Двойная распадается, если ее полная энергия, определяемая левой частью (П.33), становится положительной или, эквивалентно, если эксцентриситет e , определяемый (П.36), становится ≥ 1 . Из любого из этих требований можно вывести условие распада:

$$\frac{V_f}{V_i} \geq \sqrt{\frac{2}{\chi}}. \quad (\text{П.38})$$

Система остается связанной при выполнении противоположного условия. Условие (П.38) может также быть записано в терминах скорости убегания (параболической скорости) V_c , определяемой соотношением

$$\mu_f \frac{V_c^2}{2} - \frac{G M_c M_2}{a_i} = 0.$$

Поскольку $\chi = M/(M - \Delta M)$ и $V_c^2 = 2G(M - \Delta M)/a_i = 2V_i^2/\chi$, то (П.38) можно записать в виде

$$V_f \geq V_c. \quad (\text{П.39})$$

Условие распада упрощается в случае сферически симметричного взрыва сверхновой, когда нет дополнительной скорости $\mathbf{w} = 0$ и, следовательно, $V_f = V_i$. В этом случае формула (П.38) читается как $\chi \geq 2$, что эквивалентно $\Delta M \geq M/2$. Таким образом, система распадается, если теряется более половины массы двойной. Эксцентриситет после взрыва при этом будет равен

$$e = \frac{M_1 - M_c}{M_c + M_2} \quad (\text{П.40})$$

(что вытекает из (П.35), (П.36) и условия $\mathbf{w} = 0$), т.е. он становится больше 1 при $\Delta M > M/2$. До сих пор мы предполагали круговые начальные орбиты. Если же предсверхновая движется по эллиптической орбите, то условие распада системы при симметричном взрыве

приобретает вид

$$\Delta M = M_1 - M_c > \frac{1}{2} \frac{r}{a_i},$$

где r — расстояние между компонентами в момент взрыва.

5. Стадия с общей оболочкой. Это очень важная стадия в эволюции двойной. Возможность ее существования была впервые рассмотрена в [198]. В общем случае она возникает, когда в двойной системе один из компаньонов теряет вещество в очень высоком темпе, а второй не может целиком принять его. Наблюдательные факты позволяют заключить, что существование стадии с общей оболочкой, по-видимому, неизбежно. Указания на впечатляющее уменьшение орбитального углового момента на некоторых предшествующих стадиях эволюции вытекают из наблюдений определенных типов тесных двойных звезд. К ним относятся катаклизмические переменные, в которых белый карлик аккрецирует вещество красного карлика главной последовательности, а также планетарные туманности с двойными ядрами, маломассивные рентгеновские двойные и транзиенты (нейтронные звезды и черные дыры, аккрецирующие вещество маломассивных звезд главной последовательности). Радиусы предшественников компактных звезд в этих системах лежат в интервале 100–1000 радиусов Солнца, что много больше наблюдаемых в этих системах полуосей. Приведенные факты свидетельствуют о драматическом уменьшении орбитального углового момента на более ранних стадиях эволюции и о его возможном уносе рассеивающейся общей оболочкой.

Четкого критерия наступления стадии с общей оболочкой нет. Однако высокий темп перетекания вещества с нормальной звезды на компактную ожидается всегда, когда нормальная звезда покидает главную последовательность и у нее возникает конвективная оболочка. Критическое отношение масс для неустойчивого заполнения полости Роша зависит от особенностей звезд, но всегда близко к 1. Другой путь образования общей оболочки — прямое проникновение компактной звезды в плотные внешние слои компаньона. Это может произойти в результате дарвиновской приливной неустойчивости орбиты двойной [199, 200] или при таком направлении дополнительной скорости, приобретаемой компактным объектом, что периастр $a_f(1-e)$ его эллиптической орбиты оказывается меньше радиуса компаньона.

Упрощенное описание стадии с общей оболочкой таково [201]. Орбитальная эволюция компактной звезды M_c внутри оболочки нормальной звезды M_1 определяется силами динамического трения. Они приводят к постепенному приближению компактной звезды к центру. Высвобождающаяся орбитальная энергия ΔE_{orb} или некоторая ее доля передается оболочке. Обычно предполагают, что равенство этой энергии и энергии связи оболочке E_{bind} обеспечивает условие сброса общей оболочки. После этого от нормальной звезды M_1 остается ее ядро с массой M_{sc} . Конечные параметры орбиты могут быть получены из условия $E_{\text{bind}} = \alpha_{\text{CE}} \Delta E_{\text{orb}}$, где α_{CE} есть параметр эффективности общей оболочки, меньший или равный 1. Это условие можно записать как

$$\frac{GM_1(M_1 - M_{\text{sc}})}{\lambda R_L} = \alpha_{\text{CE}} \left(\frac{GM_c M_{\text{sc}}}{2a_f} - \frac{GM_1 M_c}{2a_i} \right), \quad (\text{П.41})$$

где a_i и a_f — начальная и конечная полуоси, λ — численный коэффициент порядка 1; R_L есть радиус полости Роша нормальной звезды, приближенно равный [202]

$$\frac{R_L}{a_i} = \frac{0,49}{0,6 + q^{2/3} \ln(1 + q^{-1/3})}, \quad (\text{П.42})$$

и $q \equiv M_1/M_2$. Из формулы (П.41) можно получить

$$\frac{a_f}{a_i} = \frac{M_{\text{sc}}}{M_1} \left(1 + \frac{2a_i}{\lambda \alpha_{\text{CE}} R_L} \frac{M_1 - M_{\text{sc}}}{M_c} \right)^{-1} \approx \frac{M_{\text{sc}}}{M_1} \frac{M_c}{\Delta M}, \quad (\text{П.43})$$

где $\Delta M = M_1 - M_{\text{sc}}$. Последние исследования (например, [70, 203]) показывают, что $\alpha_{\text{CE}} \lambda$ попадает в интервал от 0,5 до 2. Масса гелиевого ядра M_{sc} у массивных звезд равна (см. [204])

$$M_{\text{He}} \approx 0,073 \left(\frac{M_1}{M_{\odot}} \right)^{1,42}, \quad (\text{П.44})$$

так что полуось орбиты в ходе стадии с общей оболочкой может уменьшиться в 30–60 раз.

III. Постньютоновское приближение для потока и энергии гравитационных волн

Поток ГВ, испускаемых системой из двух компактных звезд на квазикруговой орбите с орбитальной частотой f_{orb} (основная частота ГВ составляет $f = 2f_{\text{orb}}$), согласно [205–208], равен

$$\mathcal{F}(v) = \frac{32\eta^2 v^{10}}{5} \left[1 - \left(\frac{1247}{336} + \frac{35\eta}{12} \right) v^2 + 4\pi v^3 - \left(\frac{44711}{9072} + \frac{9271\eta}{504} + \frac{65\eta^2}{18} \right) v^4 - \left(\frac{8191}{672} + \frac{535\eta}{24} \right) \pi v^5 \right], \quad (\text{П.45})$$

где $v = (\pi M f)^{1/3}$ — относительная скорость двух звезд, а $\eta = M_1 M_2 / M^2$ — симметричное отношение масс. Параметр η имеет максимум, равный 1/4 при равных массах. Релятивистская энергия $E(v)$ системы равна

$$E(v) = -\frac{\eta v^2}{2} \left[1 - \left(\frac{9+\eta}{12} \right) v^2 - \left(\frac{81-57\eta+\eta^2}{24} \right) v^4 \right]. \quad (\text{П.46})$$

Решая дифференциальные уравнения (127) для времени и фазы относительно v , получаем следующие уравнения:

$$t(v) = -\frac{5m}{256\eta v^8} \left[1 + \left(\frac{743}{252} + \frac{11\eta}{3} \right) v^2 - \frac{32\pi}{5} v^3 + \left(\frac{3058673}{508032} + \frac{5429\eta}{504} + \frac{617\eta^2}{72} \right) v^4 - \left(\frac{7729}{252} + \eta \right) \pi v^5 \right], \quad (\text{П.47})$$

$$\phi(v) = -\frac{1}{16\eta v^5} \left[1 + \left(\frac{3715}{1008} + \frac{55\eta}{12} \right) v^2 - 10\pi v^3 + \left(\frac{15293365}{1016064} + \frac{27145\eta}{1008} + \frac{3085\eta^2}{144} \right) v^4 + \left(\frac{38645}{672} + \frac{15\eta}{8} \right) \pi \ln \left(\frac{v}{v_{\text{LSO}}} \right) v^5 \right]. \quad (\text{П.48})$$

Можно обратить уравнение (П.47) в постньютоновское разложение v от t и затем использовать это выражение в

уравнении (П.48) для получения явной зависимости фазы от времени. Вводя новый временной параметр θ , определенный как $\theta = [\eta(t_{\text{LSO}} - t)/(5m)]^{-1/8}$ (t_{LSO} — координатное время, выбранное так, чтобы частота ГВ равнялась удвоенной орбитальной частоте на последней устойчивой круговой орбите), можно также получить

$$\begin{aligned} \phi(\theta) = & -\frac{2}{\eta\theta^5} \left[1 + \left(\frac{3715}{8064} + \frac{55\eta}{96} \right) \theta^2 - \frac{3\pi}{4} \theta^3 + \right. \\ & + \left(\frac{9275495}{14450688} + \frac{284875\eta}{258048} + \frac{1855\eta^2}{2048} \right) \theta^4 + \\ & \left. + \left(\frac{38645}{21504} + \frac{15\eta}{256} \right) \pi \ln \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{LSO}}} \right) \theta^5 \right]. \quad (\text{П.49}) \end{aligned}$$

Список литературы

- Weber J *General Relativity and Gravitational Waves* (New York: Interscience Publ., 1961)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
- Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973)
- Thorne K S, in *Three Hundred Years of Gravitation* (Eds S W Hawking, W Israel) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987) p. 330
- Thorne K S, in *Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology in the Next Millenium* (Eds E W Kolb, R D Peccei) (Singapore: World Scientific, 1995) p. 160
- Schutz B F *Classical Quant. Grav.* **16** A131 (1999)
- Брагинский В Б, Руденко В Н *УФН* **100** 395 (1970)
- Гришук Л П *УФН* **121** 629 (1977)
- Гришук Л П *УФН* **156** 297 (1988)
- Вилл К М *УФН* **164** 765 (1994)
- King A R, in *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation: Proc. of the Les Houches School of Physics, 1995* (Eds J-A Marck, J-P Lasota) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997) p. 105
- Taylor J *Rev. Mod. Phys.* **66** 711 (1994)
- Danzmann K et al., in *First Edoardo Amaldi Conf. on Gravitational Wave Experiments* (Edoardo Amaldi Foundation Ser., Vol. 1, Eds E Coccia, G Pizzella, F Ronga) (Singapore: World Scientific, 1995) p. 100
- Bradaschia C et al. *Nucl. Instrum. Meth. A* **289** 518 (1990)
- Abramovici A et al. *Science* **256** 325 (1992)
- Bender P et al. *LISA: Pre-Phase a Report* 2nd ed. (Garching, 1998)
- LIGO II Conceptual Project Book* (LIGO-M990288-00-M, 1999)
- Taylor J H, Manchester R N, Lyne A G *Astrophys. J. Suppl.* **88** 529 (1993)
- D'Amico N et al., astro-ph/9911482
- Camilo F et al., in *Pulsar Astronomy — 2000 and Beyond: IAU Colloq. 177* (ASP Conf. Ser., Vol. 202, Eds M Kramer, N Wex, R Wielebinski) (San Francisco, Calif.: Astron. Soc. Pacific, 2000) p. 3
- Черепашук А М *УФН* **166** 809 (1996)
- Thorsett S E, Chakrabarty D *Astrophys. J.* **512** 288 (1999)
- Nice D J, Sayer R W, Taylor J H *Astrophys. J. Lett.* **466** L87 (1996)
- Phinney E S *Astrophys. J. Lett.* **380** L17 (1991)
- Narayan R, Piran T, Shemi A *Astrophys. J. Lett.* **379** L17 (1991)
- Curran S J, Lorimer D R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **276** 347 (1995)
- Van den Heuvel E P J, Lorimer D R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **283** L37 (1996)
- Bailes M, in *Compact Stars in Binaries: Proc. of the 165th Symp. of Inst. Astron. Union, The Netherlands, 1994* (Eds J Van Paradijs, E P J Van den Heuvel, E Kuulkers) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996) p. 213
- Arzoumanian Z, Cordes J M, Wasserman I *Astrophys. J.* **520** 696 (1999)
- Stairs I H et al. *Astrophys. J.* **505** 352 (1998)
- Kalogera V, Lorimer D R *Astrophys. J.* **530** 890 (2000)
- Clark J P A, Van den Heuvel E P J, Sutantyo W *Astron. Astrophys.* **72** 120 (1979)
- Lipunov V M, Postnov K A, Prokhorov M E *Astron. Astrophys.* **176** L1 (1987)
- Hils D, Bender P L, Webbink R F *Astrophys. J.* **360** 75 (1990)
- Тутуков А В, Юнгельсон Л Р *Астрон. журн.* **70** 812 (1993)
- Lipunov V M et al. *Astron. Astrophys.* **298** 677 (1995)
- Portegies Zwart S F, Spreeuw H N *Astron. Astrophys.* **312** 670 (1996)
- Lipunov V M, Postnov K A, Prokhorov M E *Astrophys. Scape Phys. Rev.* **9** 1 (1996)
- Portegies Zwart S F, Yungelson L R *Astron. Astrophys.* **332** 173 (1998)
- Bethe H A, Brown G E *Astrophys. J.* **517** 318 (1999)
- Van den Heuvel E P J, in *Interacting Binaries* (Saas-Fee Advanced Course 22 Lecture Notes, 1992, Eds H Nussbaumer, A Orr) (Berlin: Springer-Verlag, 1994) p. 263
- Abt H A *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **21** 343 (1983)
- Salpeter E E *Astrophys. J.* **121** 161 (1955)
- Popova E I, Tutukov A V, Yungelson L R *Astrophys. Space Sci.* **88** 55 (1982)
- Trimble V *Nature* **303** 137 (1983)
- Lipunov V M, Postnov K A, Prokhorov M E *Astron. Astrophys.* **310** 489 (1996)
- Kaspi V M et al. *Nature* **381** 584 (1996)
- Прохоров М Е, Постнов К А *Письма в Астрон. журн.* **23** 503 (1997)
- Karastergiou A et al., in *Pulsar Astronomy — 2000 and Beyond: IAU Colloq. 177* (ASP Conf. Ser., Vol. 202, Eds M Kramer, N Wex, R Wielebinski) (San Francisco, Calif.: Astron. Soc. Pacific, 2000) p. 125
- Karastergiou A et al., astro-ph/0002099
- Iben I, Jr., Tutukov A V *Astrophys. J.* **456** 738 (1996)
- Portegies Zwart S F, Van den Heuvel E P J *New Astron.* **4** 355 (1999)
- Van den Heuvel E P J, Van Paradijs J *Astrophys. J.* **483** 399 (1997)
- Tauris T M, Van den Heuvel E P J, in *Pulsar Astronomy — 2000 and Beyond: IAU Colloq. 177* (ASP Conf. Ser., Vol. 202, Eds M Kramer, N Wex, R Wielebinski) (San Francisco, Calif.: Astron. Soc. Pacific, 2000) p. 595
- Tauris T M, Van den Heuvel E P J, astro-ph/0001015
- Lai D, astro-ph/9912522
- Дорофеев О Ф, Родионов В Н, Тернов И М *Письма в Астрон. журн.* **11** 302 (1985)
- Bisnovatyi-Kogan G S *Astron. Astrophys. Trans.* **3** 287 (1993)
- Lyne A G, Lorimer D R *Nature* **369** 127 (1994)
- Blaauw A, Ramachandran R J *Astron. Astrophys.* **19** 19 (1998)
- Frail D A, Goss W M, Whiteoak J B Z *Astrophys. J.* **437** 781 (1994)
- Lorimer D R (to be published)
- Hansen B M S, Phinney E S *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **291** 569 (1997)
- Lipunov V M, Postnov K A, Prokhorov M E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **288** 245 (1997)
- Belczynski K, Bulik T *Astron. Astrophys.* **346** 91 (1999)
- Bagot P *Astron. Astrophys.* **322** 533 (1997)
- Wettig T, Brown G E *New Astron.* **1** 17 (1996)
- Terman J L, Taam R E, Savage C O *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **281** 552 (1996)
- Rasio F A, Livio M *Astrophys. J.* **471** 366 (1996)
- Van den Heuvel E P J, Habets G M H J *Nature* **309** 598 (1984)
- Woosley S E, Langer N, Weaver T A *Astrophys. J.* **448** 315 (1995)
- Portegies Zwart S F, Verbunt F, Ergma E *Astron. Astrophys.* **321** 207 (1997)
- Timmes F X, Woosley S E, Weaver T A *Astrophys. J.* **457** 834 (1996)
- Fryer C L *Astrophys. J.* **522** 413 (1999)
- Fryer C L, Kalogera V, astro-ph/9911312; submitted to *Astrophys. J.*
- Nelemans G, Tauris T M, Van den Heuvel E P J *Astron. Astrophys.* **352** L87 (1999)
- Куранов А Г, Постнов К А, Прохоров М Е *Астрон. журн.* (в печати)
- Schaller G et al. *Astron. Astrophys. Suppl.* **96** 269 (1992)
- Yamaoka H, Shigeyama T, Nomoto K *Astron. Astrophys.* **267** 433 (1993)
- Brandt N, Podsiadlowski P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **274** 461 (1995)

81. Липунов В М, Постнов К А, Прохоров М Е *Письма в Астрон. журн.* **23** 563 (1997)
82. Tutukov A V, Yungelson L R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **260** 675 (1993)
83. Fukugita M, Hogan C J, Peebles P J E *Astrophys. J.* **503** 518 (1998)
84. Edmunds M G, in *The Low Surface Brightness Universe: IAU Colloquium 171* (ASP Conf. Ser., Vol. 170, Eds J I Davies, C Impey, S Philipps) (San Francisco: Astron. Soc. Pacific, 1999) p. 383
85. Olive K A *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **80** 79 (2000)
86. Lipunov V M et al. *Astrophys. J.* **454** 593 (1995)
87. Vanbeveren D et al. *New Astron.* **3** 443 (1998)
88. Flanagan É É, Hughes S A *Phys. Rev. D* **57** 4535 (1998)
89. Postnov K A, Prokhorov M E, astro-ph/9903193
90. Kalogera V, astro-ph/9911417; *Astrophys. J.* **541** 319 (2000)
91. Müller E *Classical Quant. Grav.* **14** 1455 (1997)
92. Palomba C, astro-ph/0003321; submitted to the *Int. J. Mod. Phys. D*
93. Burrows A, Hayes J C *Am. Astron. Soc. Meeting* **187** 1704 (1995)
94. Nazin S N, Postnov K A *Astron. Astrophys.* **317** L79 (1997)
95. Брагинский В Б, Грищук Л П *ЖЭТФ* **89** 744 (1985)
96. Braginskii V B, Thorne K S *Nature* **327** 123 (1987)
97. Bonnell I A, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **273** L12 (1995)
98. Schutz B F, gr-qc/9802020
99. Burrows A, Hayes J *Phys. Rev. Lett.* **76** 352 (1996)
100. Müller E, Janka H-T *Astron. Astrophys.* **317** 140 (1997)
101. Buonanno A, Damour T, gr-qc/0001013; *Phys. Rev. D* **62** 064015 (2000)
102. Alcock C et al. *Astrophys. J.* **486** 697 (1997)
103. Nakamura T et al. *Astrophys. J. Lett.* **487** L139 (1997)
104. Echeverria F *Phys. Rev. D* **40** 3194 (1989)
105. Chandrasekhar S *Phys. Rev. Lett.* **24** 611 (1970)
106. Friedman J L, Schutz B F *Astrophys. J.* **222** 281 (1978)
107. Andersson N *Astrophys. J.* **502** 708 (1998)
108. Andersson N, Kokkotas K, Schutz B F *Astrophys. J.* **510** 846 (1999)
109. Owen B J et al. *Phys. Rev. D* **58** 14834 (1998)
110. Bildsten L *Astrophys. J. Lett.* **501** L89 (1998)
111. Kulkarni S R et al., in *X-ray Binaries and Recycled Pulsars* (NATO ASI Series, Ser. C, Vol. 377, Eds E P J van den Heuvel, S A Rappaport) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992) p. 99
112. Caron B et al. *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* **54** 167 (1997)
113. Giampieri G, Polnarev A G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **291** 149 (1997)
114. Липунов В М, Постнов К А *Астрон. журн.* **64** 438 (1987)
115. Schneider R et al., astro-ph/0002055; submitted to *Mon. Not. R. Astron. Soc.*
116. Marsh T R, Dhillon V S, Duck S R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** 828 (1995)
117. Iben J, Tutukov A V *Astrophys. J. Suppl.* **54** 335 (1984)
118. Branch D et al. *Publ. Astron. Soc. Pac.* **107** 1019 (1995)
119. Tammann G A, Löffler W, Schröder A *Astrophys. J. Suppl.* **92** 487 (1994)
120. Van den Bergh S, McClure R D *Astrophys. J.* **425** 205 (1994)
121. Postnov K A, Prokhorov M E *Astrophys. J.* **494** 674 (1998)
122. Kosenko D I, Postnov K A *Astron. Astrophys.* **336** 786 (1998)
123. Kosenko D I, Postnov K A *Astron. Astrophys.* **355** 1209 (2000)
124. Грищук Л П *ЖЭТФ* **67** 825 (1974)
125. Grishchuk L P *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **302** 439 (1977)
126. Knight P L, in *Quantum Fluctuations: Les Houches, Session LXIII, 1995* (Eds S Reynaud, E Giacobino, J Zinn-Justin) (Amsterdam: Elsevier, 1997) p. 5
127. Grishchuk L P, Sidorov Yu V *Classical Quant. Grav.* **6** L161 (1989)
128. Grishchuk L P, Sidorov Y V *Phys. Rev. D* **42** 3413 (1990)
129. Grishchuk L P, in *Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations* (NASA Conf. Ser., No. 3135) (New York: NASA Conf. Publ., 1992) p. 329
130. Grishchuk L P, in *Quantum Fluctuations: Less Houches, Session LXIII, 1995* (Eds S Reynaud, E Giacobino, J Zinn-Justin) (Amsterdam: Elsevier, 1997) p. 541
131. Schleich W, Wheeler J A *J. Opt. Soc. Am. B* **4** 1715 (1987)
132. Schleich W, Horowicz R J, Varro S *Phys. Rev. A* **40** 7405 (1989)
133. Zeldovich Y B, Novikov I D *Relativistic Astrophysics. The Structure and Evolution of the Universe* Vol. 2 (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1983)
134. Giovannini M *Phys. Rev. D* **58** 14630 (1998)
135. Grishchuk L P, gr-qc/9810055
136. Veneziano G *Phys. Lett. B* **265** 287 (1991)
137. Gasperini M, Veneziano G *Astropart. Phys.* **1** 317 (1993)
138. Gasperini M, Giovannini M *Phys. Rev. D* **47** 1519 (1993)
139. Creighton T, gr-qc/9907045
140. Smoot G F et al. *Astrophys. J. Lett.* **396** L1 (1992)
141. Bennett C L et al. *Astrophys. J. Lett.* **464** L1 (1996)
142. Melchiorri A et al. *Astrophys. J.* **518** 562 (1999)
143. Grishchuk L P *Phys. Rev. D* **50** 7154 (1994)
144. Grishchuk L P, in *Current Topics in Astrofundamental Physics: Primordial Cosmology* (NATO ASI Series, Ser. C, Vol. 511, Eds N Sanchez, A Zichichi) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998) p. 539
145. Grishchuk L P, gr-qc/9801011
146. Grishchuk L P *Classical Quant. Grav.* **14** 1445 (1997)
147. Tegmark M, Zaldarriaga M, astro-ph/0002091
148. Kolb E W, Turner M *The Early Universe* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1990)
149. Martin J, Schwarz D, astro-ph/9911225; *Phys. Rev. D* **62** 103520 (2000)
150. Hawking S W, Hertog T, Reall H S *Phys. Rev. D* **62** 901 (2000)
151. Hough J et al. *GEO600 Proposal*, 1994
152. Larson S L, Hiscock W A, Hellings R W *Phys. Rev. D* **62** 231 (2000)
153. *First Edoardo Amaldi Conf. on Gravitational Wave Experiments* (Edoardo Amaldi Foundation Ser., Vol. 1, Eds E Coccia, G Pizzella, F Ronga) (Singapore: World Scientific, 1995)
154. *Gravitational Waves: Sources and Detection* (Eds I Giufolini, F Fidecaro) (Singapore: World Scientific, 1997)
155. *Laser Interferometer Space Antenna* (AIP Conf. Proc., Vol. 456, Ed. W M Folkner) (Woodbury, N.Y.: AIP, 1998)
156. Грищук Л П *Письма в ЖЭТФ* **23** 293 (1976)
157. Michelson P F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **227** 933 (1987)
158. Christensen N *Phys. Rev. D* **46** 5250 (1992)
159. Flanagan É É *Phys. Rev. D* **48** 2389 (1993)
160. Allen B, in *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation: Proc. of the Les Houches School of Physics, 1995* (Eds J-A Marck, J-P Lasota) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997) p. 373
161. Allen B, Flanagan É É, Papa M A *Phys. Rev. D* **61** 024024 (2000)
162. Tsubono K, in *First Edoardo Amaldi Conf. on Gravitational Wave Experiments* (Edoardo Amaldi Foundation Ser., Vol. 1, Eds E Coccia, G Pizzella, F Ronga) (Singapore: World Scientific, 1995) p. 112
163. Lück H et al. *Classical Quant. Grav.* **14** 1471 (1997)
164. Caron B et al. *Classical Quant. Grav.* **14** 1461 (1997)
165. Ageev A Yu et al. *Phys. Lett. A* **227** 159 (1997)
166. Ageev A Yu, Bilenko I A, Braginsky V B *Phys. Lett. A* **246** 479 (1998)
167. Meers B, MacDonald N *Phys. Rev. A* **40** 3754 (1989)
168. Dhurandhar S V, Tinto M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **234** 663 (1988)
169. Helstrom C W *Statistical Theory of Signal Detection* 2nd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1968)
170. Schutz B F, in *The Detection of Gravitational Waves* (Ed. D G Blair) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991) p. 406
171. Cutler C et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** 2984 (1993)
172. Damour T, Iyer B R, Sathyaprakash B S *Phys. Rev. D* **57** 885 (1998)
173. Damour T, Iyer B R, Sathyaprakash B S (unpublished)
174. Allen B et al. *GRASP Software Package* (<http://www.lsc-group.phys.uwm.edu/~ballen/grasp-distribution/>)
175. Poisson E *Phys. Rev. D* **52** 5719 (1995)
176. Damour T, Iyer B R, Sathyaprakash B S (to be published)
177. Sathyaprakash B S, Dhurandhar S V *Phys. Rev. D* **44** 3819 (1991)
178. Schutz B F *Nature* **323** 310 (1986)
179. Blanchet L, Sathyaprakash B S *Classical Quant. Grav.* **11** 2807 (1994)
180. Blanchet L, Sathyaprakash B S *Phys. Rev. Lett.* **74** 1067 (1995)
181. Owen B J *Phys. Rev. D* **53** 6749 (1996)
182. Balasubramanian R, Sathyaprakash B S, Dhurandhar S V *Phys. Rev. D* **53** 3033 (1996)
183. Owen B J, Sathyaprakash B S *Phys. Rev. D* **60** 022002 (1999)
184. Brady P R et al. *Phys. Rev. D* **57** 2101 (1998)
185. Brady P R, Creighton T (to be published)
186. Schutz B F, Papa M A, gr-qc/9905018

187. Nicholson D, Vecchio A *Phys. Rev. D* **57** 4588 (1998)
188. Cutler C, Flanagan É É *Phys. Rev. D* **49** 2658 (1994)
189. Poisson E, Will C M *Phys. Rev. D* **52** 848 (1995)
190. Sathyaprakash B S, in *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation: Proc. of the Les Houches School of Physics, 1995* (Eds J-A Marck, J-P Lasota) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997) p. 361
191. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1972)
192. Babak S V, Grishchuk L P *Phys. Rev. D* **61** 024038 (1999)
193. Peters P C *Phys. Rev. B* **136** 1224 (1964)
194. Soberman G E, Phinney E S, Van den Heuvel E P J *Astron. Astrophys.* **327** 620 (1997)
195. Van den Heuvel E P J, in *Formation and Evolution of X-ray Binaries* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983) p. 303
196. Blaauw A *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **15** 265 (1961)
197. Flannery B P, Van den Heuvel E P J *Astron. Astrophys.* **39** 61 (1975)
198. Paczynski B *IAU Symp.* **73** 75 (1976)
199. Counselman C C *Astrophys. J.* **180** 307 (1973)
200. Bagot P *Astron. Astrophys.* **314** 576 (1996)
201. Webbink R F *Astrophys. J.* **277** 355 (1984)
202. Eggleton P P *Astrophys. J.* **268** 368 (1983)
203. Van den Heuvel E P J *Astron. Astrophys.* **291** L39 (1994)
204. Iben J, Tutukov A V *Astrophys. J. Suppl.* **58** 661 (1985)
205. Blanchet L et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 3515 (1995)
206. Blanchet L, Damour T, Iyer B R *Phys. Rev. D* **51** 5360 (1995)
207. Will C M, Wiseman A G *Phys. Rev. D* **54** 4813 (1996)
208. Blanchet L et al. *Classical Quant. Grav.* **13** 575 (1996)

Gravitational wave astronomy: in anticipation of first sources to be detected

L.P. Grishchuk, V.M. Lipunov, K.A. Postnov, M.E. Prokhorov

*Sternberg Astronomical Institute, Moscow University,
Universtetskii prosp. 13, 119899 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 939-50 06. Fax (7-095) 932-88 41
E-mail: pk@sai.msu.ru*

V.M. Lipunov, K.A. Postnov

*M.V. Lomonosov Moscow State University, Physical Department,
Vorob'evy Gory, 119899 Moscow, Russian Federation*

L.P. Grishchuk, B.S. Sathyaprakash

*Cardiff University, P.O. Box 913, Cardiff, CF2 3YB, Great Britain
E-mail: grishchuk@astro.cf.ac.uk*

The first generation of long-baseline laser interferometric detectors of gravitational waves will start collecting data in 2001–2003. We carefully analyse their planned performance and compare it with the expected strengths of astrophysical sources. The scientific importance of the anticipated discovery of various gravitational wave signals and the reliability of theoretical predictions are taken into account in our analysis. We try to be conservative both in evaluating the theoretical uncertainties about a source and the prospects of its detection. After having considered many possible sources, we place our emphasis on (i) inspiraling binaries consisting of stellar mass black holes and (ii) relic gravitational waves. We draw the conclusion that inspiraling binary black holes are likely to be detected first by the initial ground-based interferometers. We estimate that the initial interferometers will see 2–3 events per year from black hole binaries with component masses $10–15M_{\odot}$, with a signal-to-noise ratio of around 3, in each of a network of detectors consisting of GEO, VIRGO and the two LIGOs. It appears that other possible sources, including coalescing neutron stars, are unlikely to be detected by the initial instruments. We also argue that relic gravitational waves may be discovered by the space-based interferometers in the frequency interval $2 \times 10^{-3}–10^{-2}$ Hz, at the signal-to-noise ratio level around 3.

PACS numbers: **04.30. – w**, 04.80.Nn, 95.55.Jm, 95.85.Sz

Bibliography — 208 references

Received 28 August 2000