

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Квазидвумерная турбулентность

С.Д. Данилов, Д. Гурарий

В работе анализируются результаты численных и экспериментальных исследований характеристик квазидвумерной турбулентности. Показано, что ситуации, в которых наблюдаются теоретические спектры энергии с наклонами $-5/3$ и -3 , возможны, однако возникают при специальных условиях. Придонное трение, бета-эффект, конечность радиуса Россби–Обухова, вертикальная расслоенность жидкости, отличающие геофизическую квазидвумерную турбулентность от строго двумерной, определяют организацию квазидвумерного течения на больших масштабах. Поскольку поток энергии в двумерной турбулентности направлен в сторону больших масштабов, придонное трение выполняет особую роль — без него энергия течения аккумулируется на максимальном разрешаемом масштабе, а стабилизация течения невозможна.

PACS numbers: 47.27.Ak, 47.27.Eq, 92.10.–с, 92.90.+х

Содержание

1. Введение (921).
 2. Строго двумерная турбулентность (922).
 - 2.1. Спектры энергии двумерной турбулентности. 2.2. Структурные функции.
 3. Неуниверсальность спектров двумерной турбулентности (925).
 - 3.1. Стационарная вынужденная турбулентность. Спектры в интервале энтропии. 3.2. Стационарная вынужденная турбулентность. Спектры в интервале энергии. 3.3. Затухающая турбулентность.
 4. Квазидвумерная турбулентность (937).
 - 4.1. Слой вращающейся жидкости, придонное трение, бета-эффект. 4.2. Роль придонного трения. 4.3. Масштаб Райнса. 4.4. Конечность радиуса Россби–Обухова. 4.5. Турбулентность в течении, описываемом уравнениями мелкой воды.
 5. Геоострофическая турбулентность (950).
 - 5.1. Квазигеоострофическая потенциальная завихренность в расслоенной жидкости. 5.2. Послойные модели.
 6. Натурные и лабораторные измерения (957).
 - 6.1. Натурные измерения. 6.2. Лабораторные эксперименты.
 7. Заключение (966).
- Список литературы (967).

1. Введение

В природе и технике встречаются ситуации, когда движения жидкости происходят в одной плоскости благодаря быстрому вращению или действию сильного

поперечного магнитного поля (если жидкость является проводящей). Сильно закритические стадии таких движений, когда интенсивность вынуждающего воздействия во много раз превосходит критические значения, соответствующие потере устойчивости, обычно характеризуются большим набором возбужденных пространственных и временных масштабов. Это позволяет говорить о них как о двумерной турбулентности. Поскольку крупномасштабные движения атмосферы и океана почти двумерны (из-за быстрого вращения Земли) и демонстрируют изменчивость в широком диапазоне пространственных и временных масштабов, не случаен интерес к двумерной турбулентности в геофизической гидродинамике. Наше изложение будет в основном касаться задач, существующих в этой области. Мы будем различать далее строго двумерную турбулентность, описываемую двумерными уравнениями гидродинамики, и квазидвумерную турбулентность, в которой движения являются приближенно двумерными и описываются уравнениями, содержащими дополнительные слагаемые. Эти слагаемые в свою очередь приводят к новым физическим закономерностям (см. далее). Строго двумерная турбулентность является математической идеализацией и представляет скорее академический, чем практический интерес. Причина состоит в том, что редко возможно указать ситуации, где двумерность сохраняется в достаточно большом диапазоне масштабов и где можно исключить действие специфических (например, в рамках геофизической гидродинамики) факторов. Тем не менее строго двумерный случай наиболее прост, и понимание его закономерностей служит основой для понимания более сложных ситуаций. Теория колмогоровского типа для строго двумерной турбулентности была сформулирована в работах [1–4]. Их результаты широко известны в настоящее время, и тот факт, что энергия в двумерном случае переносится к большим, а не к малым (как в трехмерном случае) масштабам, уже почти не нуждается в дополнительных комментариях.

С.Д. Данилов. Институт физики атмосферы РАН им. А.М. Обухова, Москва 109017, Пыжевский пер. 3, Российская Федерация
Тел. (095) 951-84-80. E-mail: danilov@omega.ifaran.ru

Д. Гурарий. Math. Department, CWRU,
Cleveland OH, 44106-7044, USA
E-mail: dxg5@po.cwru.edu

Статья поступила 22 мая 2000 г., после переработки 20 июня 2000 г.

Для адекватного описания крупномасштабных движений жидкости в геофизической гидродинамике важны наличие градиента планетарного вихря (бета-эффект, или изменение с широтой проекции угловой скорости вращения на вертикаль), ответственного за появление волн Россби и анизотропии, наличие наклона изопокических (океан) или изэнтропических (атмосфера) поверхностей, вследствие чего жидкость обладает доступной потенциальной энергией, и, наконец, наличие придонного трения, радиационного выхолаживания или орографии, приводящих к стоку энергии турбулентных движений, которые вместе с источниками энергии определяют равновесные (в статистическом смысле) состояния турбулентных течений. На очень больших масштабах важна "горизонтальная сжимаемость" — конечность радиуса Россби — Обухова, что приводит к своеобразной экранировке движений жидкости в пределах этого масштаба. Подробные разъяснения и оценки, касающиеся указанных факторов, можно найти в руководствах по геофизической гидродинамике [5–7].

На наш взгляд, наиболее важным следствием этих дополнительных факторов является появление внешних масштабов, ограничивающих распространение энергии в сторону все более крупномасштабных движений или определяющих типичные размеры наблюдаемых структур. Мы посвятим этому значительное место в данном обзоре. Здесь, пожалуй, наиболее известным является результат Райнса [8] о том, что при наличии градиента планетарного вихря существует масштаб, ограничивающий обратный каскад энергии. Однако менее известно, что к появлению ограничивающего масштаба приводит внешнее (придонное) трение [9–11] или совместное влияние внешнего трения и бета-эффекта [12]. При включении в рассмотрение бароклинных эффектов внешний масштаб квазидвумерной турбулентности определяется сложным взаимодействием многих факторов [13–15], и возникает вопрос о его параметризации в терминах внешних параметров задачи.

Начнем же мы с описания стандартной феноменологии и результатов, полученных для строго двумерной турбулентности. Здесь с самого начала мы хотели бы отметить, что в настоящее время имеется значительное количество обзорных работ и монографий, посвященных двумерной турбулентности (см., например, [16–21]). По этой причине настоящий обзор не претендует на то, чтобы воссоздать историческую перспективу. Наша цель, скорее, обсудить, какие механизмы ограничивают обратный каскад энергии в реальной квазидвумерной турбулентности. Наряду с этим мы приведем описание новых результатов, полученных за последнее время при изучении двумерной турбулентности, которые, на наш взгляд, еще не достаточно хорошо известны, но в то же время меняют традиционный взгляд на двумерную турбулентность.

2. Строго двумерная турбулентность

2.1. Спектры энергии двумерной турбулентности

Двумерные движения несжимаемой однородной жидкости описываются уравнением эволюции завихренности

$$\partial_t \xi + [\psi, \xi] = D + F, \quad (1)$$

где ψ — функция тока, связанная с компонентами поля скорости следующими соотношениями:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$\xi = \Delta \psi$ — завихренность и через D и F обозначены слагаемые, ответственные за диссипацию и накачку соответственно. В строго двумерном случае $D = \nu \Delta \xi$, где ν — коэффициент кинематической вязкости (ньютоновская вязкость). Разумеется, уравнение (1) должно быть дополнено соответствующими граничными условиями.

В отсутствие диссипации и накачки движения, подчиняющиеся уравнению (1), сохраняют два интеграла — полную энергию (полагаем плотность жидкости единичной)

$$E = \frac{1}{2} \int (v_x^2 + v_y^2) dx dy = -\frac{1}{2} \int \psi \xi dx dy$$

и полную энтрофию (квадрат завихренности)

$$H = \frac{1}{2} \int \xi^2 dx dy.$$

(Более строго: сохранение завихренности для жидких частиц, выражаемое уравнением (1) в отсутствие диссипации и накачки, порождает бесконечное семейство интегралов сохранения.) Если интервалы накачки и диссипации достаточно спектрально разнесены, существование двух интегралов порождает два инерционных интервала в развитой однородной и изотропной турбулентности — интервал энергии и интервал энтропии [1–3]. Пожалуй, наиболее известным результатом теории двумерной турбулентности является вывод о том, что каскад энергии направлен в сторону больших масштабов, а в сторону малых масштабов направлен каскад энтропии. Рассуждения, приводящие к этому выводу, повторяются повсеместно, в частности в монографиях [6, 22]. Они восходят к интегральным оценкам поведения "центров тяжести" спектров энергии и энтропии по модулю волнового числа $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ [23, 24]

$$k_1 = \frac{\int_0^\infty k E(k) dk}{\int_0^\infty E(k) dk}, \quad k_2 = \frac{\int_0^\infty k^3 E(k) dk}{\int_0^\infty k^2 E(k) dk},$$

для которых, воспользовавшись законами сохранения и неравенствами Коши — Буняковского, можно получить

$$k_1 \leq k^*, \quad k_2 \geq k^* = \left(\frac{\Omega}{E} \right)^{1/2}.$$

Здесь E и Ω обозначают соответственно среднюю энергию и энтрофию.

В предположении, что каскадные процессы являются локальными в спектральном представлении (т.е. поток энергии или энтропии по спектру зависит от волнового числа k , спектральной плотности энергии $E(k)$ на волновом числе k и локальной скорости растяжения), простые соображения теории размерностей дают следующие выражения для изотропного спектра энергии $E(k)$ по модулю волнового числа k :

$$E(k) \sim C_1 \eta^{2/3} k^{-3}$$

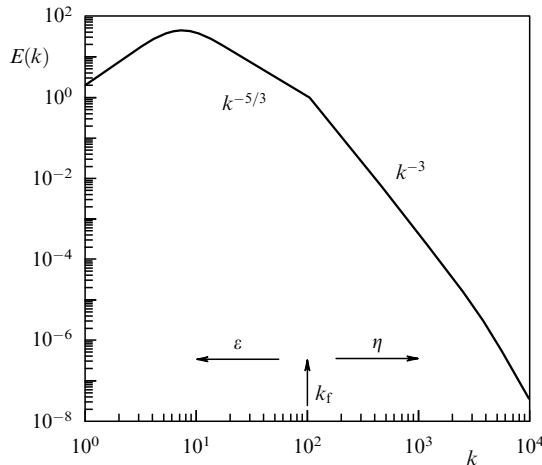


Рис. 1. Схематическое представление спектра кинетической энергии двумерной турбулентности. k_f — волновое число накачки; справа от k_f находится интервал энтропии, характеризующийся потоком энтропии η и переходящий при больших $k_d = (\eta/\nu^3)^{1/6}$ в интервал диссипации энтропии; слева от k_f находится интервал энергии, характеризующийся потоком энергии ε .

в интервале энтропии и

$$E(k) \sim C_2 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

в интервале энергии. Здесь $\eta = \text{const}$ и $\varepsilon = \text{const}$ — скорости диссипации энергии и энтропии соответственно. Поскольку энергия и энтропия производятся в интервале накачки и передаются в интервалы диссипации, скорости диссипации совпадают в стационарном случае с соответствующими спектральными потоками. На рисунке 1 представлен стационарный спектр энергии двумерной турбулентности в схематическом виде. Как отмечается в работе [25], при написании такого рода спектров речь фактически идет о выборе гипотезы замыкания для связи третьих моментов (спектральные потоки энергии и энтропии) со вторыми моментами (спектральная плотность энергии или энтропии), и в силу локальности устанавливается их определенная связь. Спектр в интервале энергии является локальным: скорость деформации на масштабе $1/k$

$$s_k = \left(\int_0^k (k')^2 E(k') dk' \right)^{1/2}$$

определяется вкладом на верхнем пределе интеграла от k' . Спектр в интервале энтропии предположение о локальности нарушает, поскольку каждая октава вносит одинаковый вклад в интеграл, и, строго говоря, спектральный поток энтропии, оцениваемый как $Z_k = s_k k \Omega(k)$, где $\Omega(k) = k^2 E(k)$ — спектр энтропии, логарифмически расходится. Разумеется, нижний предел в интеграле для s_k можно заменить на некоторое значение k_1 , начиная с которого спектральный закон -3 имеет место. В этом случае получим $Z_k \sim \ln(k/k_1)$, т.е. спектральный поток должен логарифмически нарастать. Крэйчнан [2] предложил логарифмическую коррекцию к спектру -3 $E(k) \propto k^{-3} (\ln(k/k_1))^{-1/3}$, которая решает проблему непостоянства потока энтропии, но не делает спектр локальным (хотя бы потому, что содержит зависимость от внешнего параметра k_1). О наклоне -3

можно говорить как о предельном, разделяющем локальные и нелокальные спектры. Как только предположение о локальности перестает использоваться, возможно бесконечное количество нелокальных спектров, тогда как физические критерии, по которым один спектр предпочтительнее другого, отсутствуют.

Поскольку каскад энергии в двумерной турбулентности направлен в сторону больших масштабов, где, строго говоря, диссипация отсутствует, существует формальная проблема: при рассмотрении вынужденной двумерной турбулентности следует ожидать конденсации энергии на максимальном доступном масштабе. Избежать этого можно, либо вводя длинноволновую диссипацию (при этом мы выходим за рамки строго двумерных уравнений), либо рассматривая квазистационарные режимы [26, 27], либо рассматривая затухающую турбулентность [4]. В последнем случае в пределе малой вязкости энергия практически сохраняется, а диссипирует энтропия. Это следует из уравнения (1) при учете вязкости (но без накачки). Умножая его на функцию тока и осредняя по пространству, получаем тенденцию

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -2\nu\Omega = -\varepsilon,$$

а умножая на завихренность и осредняя, находим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\nu |\nabla \xi|^2.$$

Отсюда следует, что энтропия только затухает. Правая часть уравнения затухания энергии, следовательно, ограничена. Поэтому в пределе малой вязкости скоростью затухания энергии можно пренебречь и считать, что энергия постоянна.

Для такого предельного режима, согласно Бэтчелору, спектр энергии вырождающейся двумерной турбулентности должен иметь следующую форму:

$$E(k, t) = E^{3/2} t f(E^{1/2} k t),$$

где t — время, E — полная (сохраняющаяся) энергия и f — некоторая функция, поскольку в нашем распоряжении кроме времени имеется только одна константа с размерностью скорости — $E^{1/2}$. Из этих же соображений получается закон затухания для полной энтропии

$$H \propto t^{-2}.$$

Соображения размерности дают значение -3 для наклона спектра энергии при больших значениях волнового числа k .

В отличие от трехмерной турбулентности экспериментальная проверка спектральных законов для двумерной турбулентности затруднена (см. раздел 6.2), поскольку трудно найти систему, которую можно считать двумерной в достаточном диапазоне масштабов. По этой причине основной объем исследований двумерной турбулентности выполнен численно, тогда как натурные и лабораторные измерения достаточно редки. (Известны также и аналитические подходы, см., например, [19, 28, 29], которых мы будем касаться в меньшей степени. Хотя им и уделялось много внимания прежде, они используют определенные замыкания, о надежности которых трудно судить априори.)

Прежде чем переходить к изложению основных результатов, мы остановимся на другом языке, который используется при изучении турбулентности, — языке структурных функций. Он менее распространен при изучении двумерной турбулентности, однако оригинальная теория Колмогорова сформулирована именно на этом языке. Он оказывается полезным при анализе экспериментальных результатов [30, 31] и перемежаемости в двумерной турбулентности [27, 32, 33].

2.2. Структурные функции

Краеугольным соотношением колмогоровской теории турбулентности в трехмерном случае является закон 4/5 для структурной функции скорости третьего порядка, связывающий эту функцию в инерционном интервале со скоростью диссипации турбулентной кинетической энергии [36],

$$\langle \delta u_L \delta u_L \delta u_L \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r, \quad (2)$$

где $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$ — разность скоростей между точками $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Угловые скобки означают осреднение по ансамблю реализаций. Индексы L и далее T означают, что берутся соответственно продольная и поперечная компоненты скорости. Вывод этого закона можно найти, в частности, в [34, 35]. Этот закон отражает наличие положительного потока энергии в инерционном интервале [35] в пространстве Фурье и является точным результатом для однородной изотропной турбулентности.

Подобное соотношение имеет место и для двумерной турбулентности. Его вывод подробно изложен в [31], хотя соответствующие расчеты выполнялись и ранее другими авторами (см., например, [30]). Мы будем в основном следовать работе [31]. Двумерное уравнение движения несжимаемой жидкости имеет вид

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (3)$$

где $\mathbf{f}$ — сила, возбуждающая движение. Для того чтобы вывести уравнение для двухточечной корреляционной функции $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \mathbf{u}'(\mathbf{r}') \rangle$, складывают уравнение для $\mathbf{u}$, умноженное на $\mathbf{u}'$, с уравнением для $\mathbf{u}'$, умноженным на $\mathbf{u}$. После преобразований, аналогичных преобразованиям в трехмерном случае [34, 35], получают

$$\partial_t \langle \mathbf{u} \mathbf{u}' \rangle = \frac{1}{2} \nabla \langle \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \rangle + 2\nu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \mathbf{u}' \rangle + \langle \mathbf{u} \mathbf{f}' \rangle + \langle \mathbf{f} \mathbf{u}' \rangle. \quad (4)$$

Здесь все корреляционные функции зависят от времени и разнесения между точками $\mathbf{r}$. Применив оператор Лапласа к обеим частям выписанного уравнения, получим уравнение для эволюции корреляционной функции завихренности $\xi = (\nabla \times \mathbf{u})_z$

$$-\partial_t \langle \xi \xi' \rangle = \frac{1}{2} \nabla^2 (\nabla \langle \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \rangle) + 2\nu \nabla^4 \langle \mathbf{u} \mathbf{u}' \rangle + \nabla^2 \langle \mathbf{u} \mathbf{f}' \rangle + \nabla^2 \langle \mathbf{f} \mathbf{u}' \rangle. \quad (5)$$

Отсюда в одноточечном пределе получается уравнение для энтропии $\Omega = \langle \xi \xi \rangle / 2$

$$\partial_t \Omega = -\eta + Q, \quad \eta = \nu \langle \nabla \xi \cdot \nabla \xi \rangle, \quad Q = -\nabla^2 \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \rangle, \quad (6)$$

где η — скорость диссипации энтропии и Q — скорость производства энтропии. В статистически стационарном случае эти две величины совпадают. Вычитая удвоенное уравнение энтропии из уравнения эволюции корреляционной функции завихренности, пренебрегая временными производными и обращая оператор Лапласа (при этом используется предположение об изотропии), получаем [31]

$$\nabla \langle \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \rangle = (\eta - Q)r^2 + 4P - 2\langle \mathbf{u} \mathbf{f}' \rangle - 2\langle \mathbf{f} \mathbf{u}' \rangle - 2\nu \langle \delta \xi \delta \xi \rangle. \quad (7)$$

Здесь $P = \langle \mathbf{u} \mathbf{f} \rangle$ — скорость производства энергии. Первое слагаемое справа (поскольку отброшены временные производные) равно нулю, но его удобно оставить в таком виде для дальнейших преобразований. Если сила, прикладываемая к течению, характеризуется неким промежуточным масштабом l_f , малым по сравнению с внешним размером системы и большим по сравнению с масштабом диссипации l_d , то при удалениях r таких, что $l_f \gg r \gg l_d$, в последнем уравнении имеем

$$-Qr^2 + 4P \approx 2\langle \mathbf{u} \mathbf{f}' \rangle + 2\langle \mathbf{f} \mathbf{u}' \rangle$$

(поскольку левая часть в этом соотношении представляет два первых члена разложения правой части в ряд Тейлора) и $\eta r^2 \gg 2\nu \langle \delta \xi \delta \xi \rangle$. В этом пределе

$$\nabla \langle \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \rangle = \eta r^2, \quad (8)$$

откуда для компонентных структурных функций следует

$$\langle \delta u_L \delta u_L \delta u_L \rangle = \langle \delta u_T \delta u_T \delta u_L \rangle = \frac{1}{8} \eta r^3. \quad (9)$$

Интервал масштабов $l_f \gg r \gg l_d$ называют *интервалом энтропии*. Здесь структурные функции третьего порядка пропорциональны скорости диссипации энтропии, или, что то же самое, скорости производства энтропии Q .

В другом предельном случае $l_f \ll r$ в правой части уравнения (7) можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме P . Для структурных функций в этом случае получаем

$$\langle \delta u_L \delta u_L \delta u_L \rangle = 3\langle \delta u_T \delta u_T \delta u_L \rangle = \frac{3}{2} Pr. \quad (10)$$

Эти соотношения работают в интервале энергии. Отметим, что по сравнению с трехмерным случаем знак правой части изменился. Это есть отражение обратного направления каскада энергии в двумерном случае. Здесь, однако, следует сделать одно замечание. Поскольку интервал энергии в двумерной турбулентности отделен от интервала диссипации, диссипация энергии практически отсутствует. Таким образом, последнее соотношение должно интерпретироваться как квазистационарное, имеющее силу до тех пор, пока в течении не возбудятся компоненты с масштабом, близким к внешнему размеру. То, что квазистационарное поведение в течение ограниченного времени возможно, подтверждается численными экспериментами, выполненными в [27].

Другая интерпретация полученного соотношения выходит за рамки строго двумерной турбулентности. Она требует включения искусственной крупномасштаб-

ной диссипации. В этом случае возможно достижение стационарного состояния. Если интервал крупномасштабной диссипации энергии отстоит далеко от интервала накачки, то последнее соотношение сохраняет силу (его можно получить непосредственно из уравнения (4), к которому добавлено крупномасштабное трение), но вместо P в него будет входить равная ему скорость диссипации энергии.

Структурная функция третьего порядка имеет особое значение, поскольку она пропорциональна потоку энергии (энтрофии), причем коэффициент пропорциональности вычисляется аналитически. Гипотеза подобия Колмогорова [37] формулируется для структурных функций любого порядка. Для продольных структурных функций в интервале энергии она записывается как

$$\langle \delta u_L^n \rangle \sim (Pr)^{\zeta_n}, \quad \zeta_n = \frac{n}{3}. \quad (11)$$

Это соотношение можно получить и из соображений размерности, если предположить, что турбулентность является локальной, однородной и изотропной. В этом случае структурная функция может зависеть от потока энергии по спектру и масштаба r . Если не требовать локальности, коэффициент пропорциональности может быть функцией отношений r/l_f , r/l_{ext} . Наличие таких функций означает сохранение зависимостей от внешних параметров, что противоречит идее локальности.

Структурные функции второго порядка в интервале энтрофии обсуждаются в работах [31, 38]. Если исходить из соображений размерности, можно записать

$$\langle \delta u_L^2 \rangle \sim \eta^{2/3} r^2 f\left(\frac{r}{l_d}\right),$$

где $f(r/l_d)$ — некоторая функция. Напомним, что масштаб диссипации для двумерной турбулентности строится по скорости диссипации энтрофии η :

$$l_d = (\nu \eta^{-1/3})^{1/2}.$$

Поскольку в пределах инерционного интервала отношение r/l_d велико, обычно считается, что функцию f можно заменить ее предельным значением при стремлении аргумента к бесконечности. В рассматриваемом нами случае такой предел отсутствует, поскольку для получения спектра k^{-3} необходимо, чтобы

$$f\left(\frac{r}{l_d}\right) = \ln\left(\frac{r}{l_d}\right).$$

В работе [31] отмечается, что с этим может быть связано отличие спектров, наблюдаемых в численных экспериментах (см. далее), от закона -3 .

Спектры энергии и корреляционные функции второго порядка связаны преобразованием Фурье. В частности, спектр по модулю волнового числа $E(k)$ выражается как

$$E(k) = \pi k \langle \widehat{\mathbf{u}\mathbf{u}'} \rangle, \quad (12)$$

где

$$\langle \widehat{\mathbf{u}\mathbf{u}'} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle \mathbf{u}\mathbf{u}' \rangle \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Отсюда следует связь со структурными функциями, если учесть, что в двумерном случае

$$\langle \mathbf{u}\mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u}' \rangle.$$

Нетрудно убедиться, что закон $2/3$ для структурных функций в интервале энергии соответствует закону $-5/3$ в спектральном представлении. Для нелокальных спектров в каскаде энтрофии связь между спектром и структурной функцией не определяется поведением спектра в каскаде энтрофии [38]. В этом случае все диктуется наличием инфракрасной границы у инерционного интервала и, как показано в [38], все нелокальные спектры будут приводить к структурным функциям с зависимостью от r , близкой к r^2 .

Мы вернемся к вопросу о структурных функциях двумерной турбулентности ниже при обсуждении соответствующих результатов.

3. Неуниверсальность спектров двумерной турбулентности

Интегрирование уравнения (1) обычно осуществляется псевдоспектральным методом (ранние работы использовали конечно-разностные уравнения; см., например, [9, 39, 40]) в двоякопериодической области. Другая часто используемая геометрия — сфера. В плоской геометрии от самих полей переходят к их представлениям Фурье

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi^2} \int \xi \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(для других полей используются аналогичные формулы). Здесь и далее $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный волновой вектор. Поскольку поля задаются на некоторой регулярной сетке, при вычислениях, естественно, речь идет о дискретном преобразовании Фурье, в котором интегралы заменяются суммированием. Если размеры области интегрирования составляют $2\pi \times 2\pi$ и содержат N точек по каждому измерению, волновые числа пробегают ряд значений от $-N/2$ до $N/2$. Если не оговорено противное, мы будем считать это соглашение выполненным. В представлении Фурье уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \xi_{\mathbf{k}} + J_{\mathbf{k}} = D_{\mathbf{k}} + F_{\mathbf{k}}. \quad (14)$$

Здесь $J_{\mathbf{k}}$ — образ Фурье якобиана $[\psi, \xi]$, для вычисления которого производится преобразование производных функции тока и завихренности в $\mathbf{x}$ -пространство, где затем вычисляются произведения, формирующие якобиан, и после этого осуществляется возврат в пространство Фурье. Для теоретического анализа удобно записать $J_{\mathbf{k}}$ в явном виде:

$$J_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} a_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{p}}^* \psi_{\mathbf{q}}^*, \quad (15)$$

где

$$a_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (q^2 - p^2) (p_x q_y - p_y q_x) \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0}$$

и звездочка означает комплексное сопряжение. Стационарное в статистическом смысле состояние двумерной

вынужденной турбулентности возможно при обеспечении диссипации энергии и энтропии, вносимых в систему. Хотя обычная вязкость в принципе обеспечивает диссипацию энтропии, в численных исследованиях обычно используют более коротковолновую диссипацию (гипервязкость) вида $D = (-1)^{n+1} v_n \Delta^n \xi$, $n > 0$, для того, чтобы расширить инерционный интервал энтропии. В ряде работ исследуется влияние вида коротковолновой (ультрафиолетовой) диссипации на спектральный закон в интервале энтропии и другие статистические характеристики турбулентного течения (см., например, [41, 42]). Общее заключение состоит в том, что спектральный наклон и ширина инерционного интервала чувствительны к закону коротковолновой диссипации, однако в не очень сильной степени. Качественно различия во многих случаях могут быть объяснены тем, что изменение закона диссипации изменяет эффективное число Рейнольдса при данной накачке и пространственном разрешении.

Для подавления каскада энергии в вынужденной двумерной турбулентности необходимо включение искусственной длинноволновой (инфракрасной) диссипации (она отсутствует в строго двумерном случае). В численных расчетах это делается несколькими способами. Первый из них состоит во включении сильного рэлеевского трения на малых волновых числах (см., например, [41, 43]). При численном моделировании псевдоспектральным методом эта операция легко осуществима. Согласно второму способу в оператор D включают слагаемое, подобное гипервязкости, но с $n < 0$ (см., например, [44–46]). Существуют работы, в которых авторы отказываются от введения длинноволновой диссипации и рассматривают вместо стационарной турбулентности неустойчивую, квазистационарную турбулентность [26, 27, 47].

Накачка в экспериментах с вынужденной турбулентностью обычно (следуя Лилли [9]) моделируется случайным марковским процессом для некоторого (спектрально узкого) набора волновых компонент. В работе [41] для компонент накачки используется следующее представление:

$$F_{k,n+1} = A_k(1 - r^2)^{1/2} \exp(i\theta) + rF_{k,n},$$

где A_k — безразмерная амплитуда, r — величина, определяющая время корреляции, и θ — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 2\pi)$. Индекс n нумерует последовательные моменты времени в процессе численного интегрирования. В работах [44, 48, 49] и некоторых других сила представляет собой гауссов белый шум.

Пространственное разрешение меняется от 64×64 точек в ранних экспериментах [39] до 4096×4096 в экспериментах [28, 48, 50]. Типичные значения в экспериментах, где исследуются статистические характеристики турбулентности в широком диапазоне параметров, составляют 256 или 512 точек по каждому измерению, хотя в последнее время наблюдается естественная тенденция к увеличению разрешения.

На рисунке 2 в качестве иллюстрации мы приводим распределения завихренности и спектры для стационарной (а, б) и затухающей (в, г) турбулентности. Вычисления проведены на сетке 256×256 . Для стационарной турбулентности накачка заключена в интервале

$k \in [58, 62]$, для затухающей турбулентности начальный спектр энергии сосредоточен вокруг волнового числа 45. В стационарной турбулентности можно заметить локальные экстремумы завихренности (вихри), однако их размер порядка масштаба накачки (рис. 2а); структуры, соответствующие пику спектра энергии (рис. 2б), в поле завихренности не выделяются. Поле функции тока (не приведено) показывает протяженные циркуляционные зоны, размеры которых много больше масштаба накачки. Стационарное состояние достигнуто за счет включения рэлеевского (линейного) трения $-\lambda \xi$ в правую часть уравнения (1) с $\lambda = 0,03$. Накачка имеет единичную амплитуду для всех мод в интервале $k \in [58, 62]$, что при выбранном шаге временного интегрирования соответствует потоку энергии 0,0009. Спектр имеет наклон приблизительно $-5/3$ слева от k_f и круче -3 справа.

Затухающая турбулентность эволюционирует к состоянию с хорошо выраженными вихрями, время жизни которых велико по сравнению со временем одного оборота. Энергия турбулентности меняется мало за время эволюции, а энтропия уменьшается сильно. Наклон спектра при больших волновых числах круче -3 после некоторого начального периода. Начальная энергия в представленном эксперименте составляет 1. Поле завихренности на рис. 2в реализуется для безразмерного времени $t_v = 124$, где

$$t_v = \int_0^t \Omega(t')^{1/2} dt'.$$

Это время измеряет количество оборотов вихрей. Спектры, представленные на рис. 2г, приведены для безразмерного времени $t_v = 0,5; 40; 70; 124$. Они демонстрируют смещение спектрального пика по мере эволюции течения.

3.1. Стационарная вынужденная турбулентность.

Спектры в интервале энтропии

Как правило, наблюдаемый наклон спектров в интервале энтропии является более крутым, чем теоретически предсказываемый наклон -3 . Ранние работы сообщали о наклоне -3 , однако и спектральное разрешение, и числа Рейнольдса в них не были достаточно большими. Краткий обзор этих работ можно найти в монографии [22]. В работах [41, 51, 52] сообщается о заметных отклонениях от закона -3 для стационарной двумерной турбулентности в сторону более крутых спектров.

Спектры с наклонами круче, чем -3 , являются нелокальными. Нелокальные спектры могут быть чувствительны и к спектральной ширине интервала энтропии, и к деталям накачки и диссипации и, следовательно, могут быть неуниверсальными. На спектральном языке локальность означала бы, что резонансные триады $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, формирующие существенную часть нелинейного переноса энтропии по спектру, происходят от компонент с $p \sim q \sim k$. Принципиально важным для понимания поведения турбулентности в интервале энтропии является, таким образом, ответ на вопрос о характере нелинейных взаимодействий и о причинах, приводящих к отклонениям от локальности взаимодействий. Анализ структуры нелинейных взаимодействий в интервале энтропии посвящены работы [25, 43, 48, 53]. Вывод, который следует из этих работ, состоит в том, что

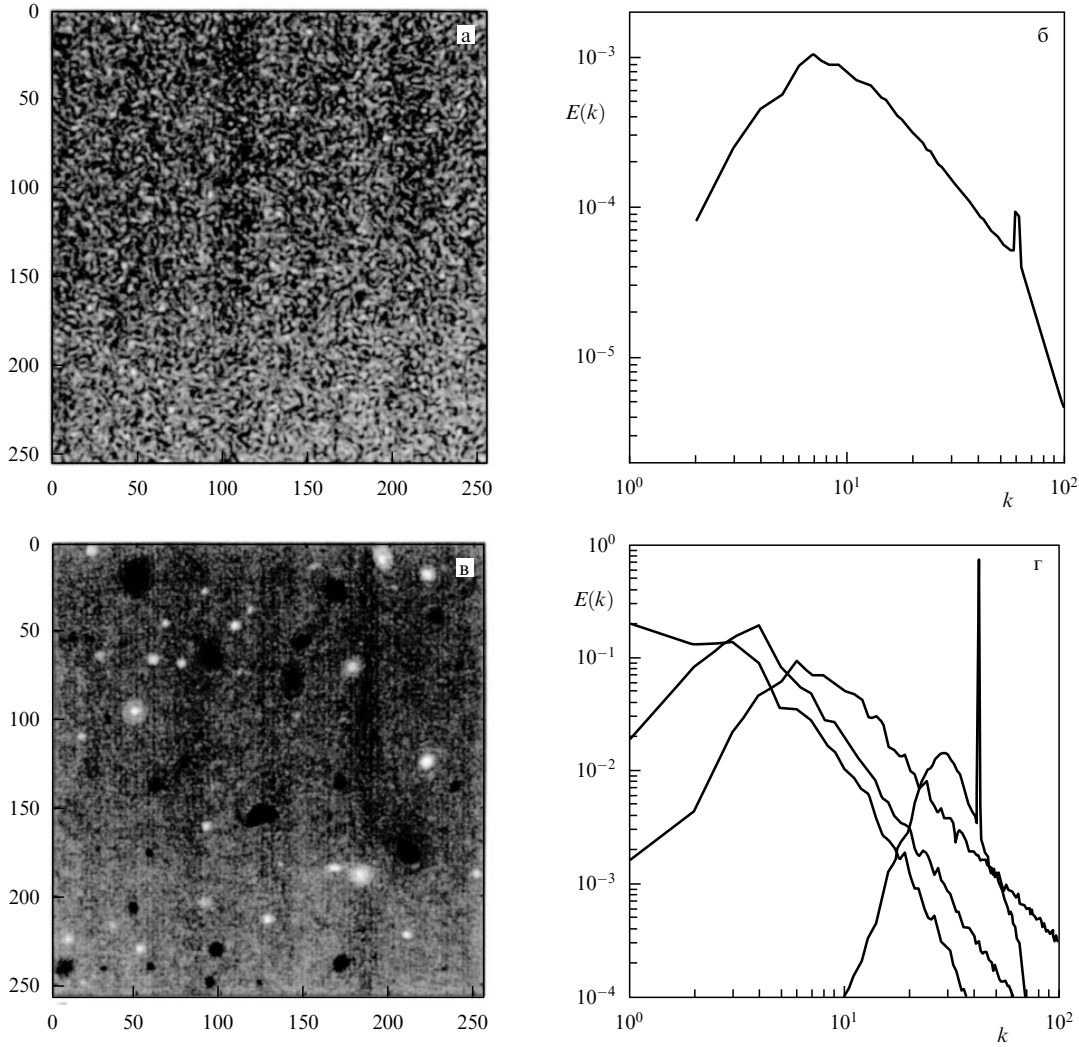


Рис. 2. Завихренность и спектры энергии в стационарной (а, б) и затухающей (в, г) турбулентности. (а) Реализация поля завихренности на квазистационарной стадии эволюции. (б) Средний (по времени) спектр энергии. Накачка на волновых числах $k \in [-58, 62]$, стабилизация за счет придонного трения. (в) Реализация поля завихренности на поздней стадии эволюции затухающей турбулентности при $t_v = 124$. (г) Эволюция спектра энергии при затухании ($t_v \approx 0,5; 40; 70; 124$). Максимум начального спектра энергии находится при $k \approx 45$, начальная энергия равна 1.

определяющая часть нелинейного переноса энтропии действительно осуществляется сильно нелокальными триадами, в которых две волны имеют близкие волновые числа из интервала энтропии, тогда как волновое число третьей волны лежит вблизи спектрального максимума энергии. Форма этих триад не универсальна в пределах инерционного интервала энтропии. Мы остановимся на этих результатах более подробно, в основном придерживаясь результатов работы [43].

Умножая уравнение (14) на ψ_k^* , мы получим для изменения энергии в отдельной моде Фурье уравнение

$$\frac{d}{dt} E_k = T_k + \mathcal{F}_k + \mathcal{D}_k, \quad (16)$$

где $E_k = -(1/2)\psi_k^* \zeta_k$ — энергия моды с волновым числом k , $\mathcal{F}_k = -\mathcal{R}(\psi_k^* F_k)$, $\mathcal{D}_k = -\mathcal{R}(\psi_k^* D_k)$, $\mathcal{R}$ означает взятие действительной части и

$$T_k = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} T_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}, \quad T_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} = \mathcal{R}(a_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} \psi_k \psi_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{q}}), \quad (17)$$

означает перенос энергии в моду $\mathbf{k}$. Энергия поступает в моду, если эта величина положительна, и уходит из моды, если эта величина отрицательна. Величина $T_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}$ означает перенос энергии в моду $\mathbf{k}$ за счет взаимодействия с модами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Перенос энтропии получается умножением на k^2 :

$$S_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}} = k^2 T_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}, \quad S_k = k^2 T_k.$$

На рисунке 3 мы воспроизводим результаты, приведенные на рис. 2а работы [43]. На этом рисунке представлено поведение функции переноса энтропии $S_{\mathbf{k}\mathbf{p}}$, просуммированной по значениям вектора $\mathbf{q}$ и направлениям векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$. Эти результаты получены для экспериментов с разрешением 512^2 и накачкой на волновых числах в диапазоне 10–14. Значение волнового числа $k = 70$, для которого представлена функция переноса, находится внутри инерционного интервала энтропии. Сплошная линия иллюстрирует поведение осредненной по времени функции, точечные линии показывают стандартные отклонения от среднего. Авторы работы [43]

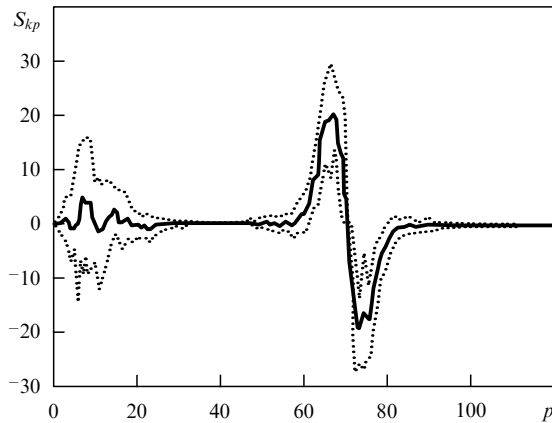


Рис. 3. Поведение средней функции переноса энтропии S_{kp} (сумма по вектору $\mathbf{q}$ и по направлениям векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$) в зависимости от p для $k = 70$ (сплошная линия) и стандартные отклонения (точечные линии) [43].

отмечают следующее. Во-первых, перенос энтропии выглядит почти локальным в p -пространстве, поскольку основной вклад в S_{kp} происходит от $p \approx k$ (это означает, что волновое число q должно быть малым). Во-вторых, оказывается, что форма и амплитуда зависимостей меняются незначительно при изменении k (мы не приводим здесь соответствующие иллюстрации). Наконец, площадь под кривой S_{pk} приблизительно равна нулю, откуда следует, что среднего переноса энтропии в моды с волновым числом k не происходит, как и должно быть в инерционном интервале. Таким образом, основной обмен энтропией идет между модами с близкими волновыми числами k и p , но триплет при этом должен замыкаться волной с малым волновым числом. Для иллюстрации структуры триад в работе [43] приводится карта

$$S_{kp} = \sum_{\mathbf{q}} S_{kpq}$$

для заданного $\mathbf{k}$ на плоскости $\mathbf{p}$, которая также показывает, что основной вклад в S_{kp} происходит от $\mathbf{p} \approx -\mathbf{k}$. Рисунок 4 повторяет рис. 4b из [43]. На этом рисунке

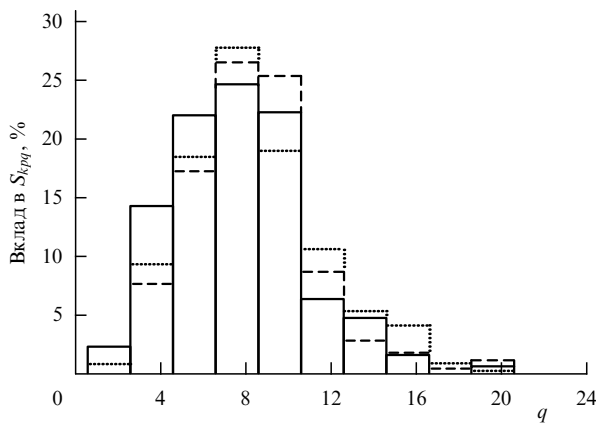


Рис. 4. Гистограмма относительных вкладов в функцию переноса энтропии S_{kpq} от всех $p < k$ для $k = 50$ (сплошные линии), $k = 70$ (пунктирные линии) и $k = 90$ (штриховые линии) [43].

представлено распределение в зависимости от q относительных вкладов в функцию S_{kpq} (функция S_{kpq} , просуммированная по направлениям всех трех векторов) от всех $p < k$ для $k = 50$ (сплошные линии), $k = 70$ (пунктирные линии) и $k = 90$ (штриховые линии). Поскольку суммарный перенос в моды с волновым числом k равен нулю в статистически стационарном состоянии, условие $p < k$ выделяет положительные вклады (см. рис. 3). Рисунок 4 показывает, что максимальные вклады в перенос происходят от q , меньших волнового числа накачки (в численных экспериментах работы [43] накачка лежит в области $k = 10 - 14$, т.е. на склоне приведенного распределения) и лежащих в области максимума спектра энергии.

Из представленных данных следует, что нелинейные взаимодействия, ведущие к переносу энтропии, сильно нелокальны: в них обязательно участвует мода с волновым числом, принадлежащим окрестности максимума спектра энергии. Сам же перенос при этом почти локализован, поскольку его основная часть приходится на моды с близкими значениями волнового числа. Мода с малым волновым числом служит как бы катализатором переноса энтропии.

Понятно, что перенос S_{kpq} симметричен к перестановке векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Поэтому существенные вклады в перенос будут происходить и от комбинаций $q \sim k \gg p$. Отражением этого факта является часть зависимости на рис. 3, относящаяся к малым значениям p . Эти значения лежат как раз в диапазоне максимума спектра энергии, и им соответствуют значения $q \sim k$.

В физическом пространстве причины неуниверсальности поведения двумерной вынужденной турбулентности в интервале энтропии связывают с появлением когерентных структур — вихрей с размерами порядка масштаба накачки. Примером типичной реализации поля завихренности может быть распределение, приведенное на рис. 1a работы [41] (каскад энтропии плохо разрешен в эксперименте, представленном на рис. 2a, б настоящей работы). Когерентные структуры в вынужденной турбулентности не следует путать с когерентными вихрями в затухающей турбулентности, внимание к которым было привлечено работой МакВильямса [54]. В вынужденной стационарной турбулентности вихри, как правило, имеют размеры порядка масштаба накачки (и не проникают в интервал энергии; исключение составляет результат работы [44], см. далее), а не увеличиваются в размерах, как в затухающей турбулентности. Малтруд и Валлис отмечают [41], что появления вихрей можно избежать при специальных условиях, например, если длинноволновая диссипация сильна в интервале накачки. Вихри ответственны за перемежаемость и за нелокальность взаимодействий, поскольку оказывается, что сдвиг, осуществляющий растяжение мелкомасштабных компонент поля завихренности, т.е. каскадный процесс, в результате которого энтропия передается в сторону все меньших и меньших масштабов, в значительной мере формируется этими крупномасштабными вихрями.

Простое и наглядное физическое рассмотрение влияния когерентных структур (основанное на модели ансамбля однородных эллиптических вихрей и фонового поля) на спектральные характеристики двумерной турбулентности в интервале энтропии было предложено в работе [25]. Если завихренность ξ вихря достаточно велика, он "выживает" в поле сдвига. Сдвиг

определяется по симметричной компоненте тензора скоростей деформаций как

$$s^2 = -\det\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Сдвиг характеризует локальную скорость растяжения. Антисимметричная компонента тензора скоростей деформаций дает завихренность, т.е. описывает локальную скорость вращения жидкого элемента как целого. Если же ξ меньше некоторого критического значения (при заданном сдвиге), вихрь растягивается, причем его размер в направлении, перпендикулярном оси растяжения, экспоненциально уменьшается во времени (однородный эллиптический вихрь в однородном поле сдвига неустойчив, если $s/\xi > \gamma \approx 0,15$). Поле сдвига, в котором находится рассматриваемый вихрь, формируется за счет вкладов как от фонового течения, так и от других когерентных вихрей. Поскольку интенсивность вихрей в типичной ситуации уменьшается вместе с их размером, только вихри большого масштаба могут "выжить". Мелкомасштабные вихри не могут сохраниться под действием поля сдвига и не могут существовать в виде когерентных структур. Таким образом, должна существовать резкая граница между вихрями и фоновым течением и спектр энтропии должен иметь два участка с переходной зоной между ними. Крупномасштабные вихри блокируют процесс передачи энтропии в сторону малых масштабов [55, 56] (они сохраняются в течение длительного времени, поэтому спектральный поток энтропии при заданной энтропии будет меньше, чем в отсутствие вихрей), поэтому спектры энтропии в интервале, где наблюдаются когерентные вихри, спадают круче с ростом волнового числа, чем в стандартной теории. Это означает, что при достаточной спектральной ширине поле сдвигов, в котором находится фоновое течение, будет формироваться в основном за счет этих вихрей и фоновое течение будет вести себя как пассивная примесь. Согласно теоретическим представлениям спектр пассивного скаляра в случайном поле сдвига имеет наклон -1 (см., например, [57]). Поэтому следует ожидать, что спектр энтропии для достаточно больших волновых чисел также будет вести себя, как k^{-1} (наклон -1 для спектра энтропии соответствует наклону -3 для спектра энергии).

Это замечание относительно аналогии между спектральным переносом энтропии при больших волновых числах и спектральным переносом пассивного скаляра было сформулировано еще в [2], где указывалось, что в каскаде энтропии доминирующий вклад в растяжение структур вносят вклады от масштабов, много больших, чем сами структуры.

Теория, развитая в работе [25], формулируется в терминах обратного масштаба вихрей α и предсказывает спектры энтропии α^{-1} как для когерентных вихрей, так и для фонового течения (с разными амплитудами), с резким переходом между этими двумя участками. Спектр k^{-1} в диапазоне когерентных вихрей, происходящий от распределения вихрей по размерам α^{-1} , будет маскироваться более крутым спектром k^{-2} , происходящим из-за формы вихрей. Поскольку в реальных численных экспериментах когерентные вихри занимают лишь небольшую часть диапазона масштабов вблизи масштаба накачки, истинный спектр в этом диапазоне будет круче, чем k^{-1} .

Предсказания модели, предложенной в работе [25], качественно согласуются с численными результатами, представленными там же, и с результатами работы [48], где показано, что спектральный наклон -1 для спектра энтропии (-3 для спектра энергии) является в некотором смысле асимптотическим: наклон спектров приближается к этому значению по мере увеличения разрешения (и, автоматически, числа Рейнольдса, поскольку при увеличении разрешения уменьшают коэффициент гипервязкости). При недостаточном спектральном разрешении область в спектре энтропии с наклоном, близким к -1 , может просто отсутствовать. Константа C_1 , входящая в закон -3 в интервале энтропии, согласно экспериментам [48] заключена между 1,5 и 1,7.

Для того чтобы охарактеризовать роль когерентных вихрей, в работе [25] вводится параметр, равный отношению потока энтропии по спектру η к произведению энтропии на масштабе накачки и среднего сдвига. Если этот параметр стремится к нулю, система находится в состоянии с очень малым потоком энтропии по спектру, т.е. значительная часть энтропии в ней сосредоточена в когерентных вихрях. В этом случае следует ожидать сильной перемежаемости и значительных отклонений от закона -3 для спектра энергии (такая ситуация в пределе малых η соответствует затухающей турбулентности). То, каков этот параметр в конкретном эксперименте, зависит от деталей накачки, диссипации и пространственного разрешения.

В работе [58] используется подход, основанный на разделении двумерной турбулентности на крупномасштабную и мелкомасштабную составляющие. Последняя движется как пассивная примесь, и ее динамика может быть представлена как динамика волновых пакетов — квазичастиц во внешнем крупномасштабном поле скорости. Это позволяет существенно расширить эффективное пространственное разрешение каскада энтропии, хотя, строго говоря, разделение на мелкомасштабную и крупномасштабную компоненты не является оправданным для реальной турбулентности, где возбуждены все масштабы. Фактически же этот подход использует ту же физическую идею, что и модель [25].

Заключая этот раздел, мы повторим, что согласно изложенным выше результатам спектр энергии в интервале энтропии формируется сильно нелокальными взаимодействиями, причем волновое число одной из волн, входящих в резонансную триаду, находится в окрестности энергетического максимума спектра энергии. Этот факт соответствует физическому представлению о каскаде энтропии как о происходящем за счет растяжения мелкомасштабных вихревых структур в крупномасштабном поле сдвига, порождаемом вихрями с размерами в окрестности масштаба накачки. Информация о накачке в таком случае не исчезает, и, как отмечается в работе [43], само понятие инерционного интервала находится в противоречии с этим фактом. Спектр с наклоном -3 следует рассматривать как предельный, достижимый для достаточно больших волновых чисел при достаточном пространственном разрешении и числах Рейнольдса. Этот спектр соответствует динамике мелкомасштабных компонент как пассивного скаляра во внешнем поле сдвига. Вклад в сдвиг от мелкомасштабных компонент увеличивается логарифмически с ростом k (если спектр близок к k^{-3}) и при достаточно большом пространственном разрешении

станет определяющим в асимптотическом пределе. В таком случае можно получить логарифмически скорректированный спектр [48], предсказанный в [2].

Эксперименты в [48], как и в [25, 43], однако, выполнены с гипервязкостью. Для обычной вязкости влияние диссипации сказывается на большом интервале волновых чисел, и можно предположить, что представленная выше картина возможна при намного большем пространственном разрешении. В [59] на основе теоретического анализа и численных экспериментов на решетках вплоть до 4096×4096 показано, что спектр энергии стремится к

$$E(k) = C_1 \eta^{2/3} k^{-3} \left(\frac{k}{k_d} \right)^{-\delta} \left[\ln \left(\frac{k}{k_f} \right) \right]^{-(2-\delta)/(6-\delta)},$$

где $k_d = (v^3/\eta)^{1/6}$ — волновое число, характеризующее масштаб диссипации, k_f — волновое число накачки, а δ — малый параметр, медленно уменьшающийся при увеличении числа Рейнольдса. Для максимального значения числа Рейнольдса в экспериментах [59]

$$\text{Re} = \frac{u_0}{\nu k_f} = 9,2 \times 10^4, \quad k_d = 414, \quad \delta = 0,355$$

и отклонения от спектра [2] еще значительны. Линдборг [60], однако, выполнил численные эксперименты с таким же разрешением, как и в [59], но отклонений от закона -3 не обнаружил. Он также утверждает, что нет указаний на необходимость введения логарифмической поправки, предложенной в [2]. Причина расхождения между результатами работ [59] и [60] неясна, но накачка в последней распределена в более широком интервале волновых чисел.

3.2. Стационарная вынужденная турбулентность.

Спектры в интервале энергии

Для вынужденной стационарной турбулентности спектры энергии в интервале энергии, согласно результатам большинства численных исследований, близки к теоретическому закону $k^{-5/3}$ в пределах инерционного интервала (см., например, [41, 55, 61]). Разные авторы приводят разные значения для константы Колмогорова в законе $-5/3$, группирующиеся вокруг значения 6 (5,8–7,0). Анализ структуры нелинейных взаимодействий в интервале энергии выполнен в уже цитированной работе [43]. Результаты этого анализа показывают, что представления об обратном каскаде энергии в стационарной двумерной турбулентности как о процессе укрупнения вихрей за счет спаривания вихрей меньшего масштаба далеки от реальности. Оказывается, что основные триады, участвующие в переносе энергии в интервале энергии, нелокальны, как и в интервале энтропии. Функция переноса энергии T_{kp} для k , принадлежащего интервалу энергии, выглядит похожей на функцию переноса энтропии S_{kp} на рис. 3 с экстремумами вблизи $p \approx k$. Энергия поступает в моду k при $p < k$ и передается в моду p при $p > k$. Таким образом, основная часть переноса происходит в сторону увеличения волнового числа. Этот факт находится в кажущемся противоречии с идеей обратного каскада энергии, которое разрешается вычислением потока энергии по спектру: за счет суммирования вкладов разных знаков поток на малые масштабы оказывается меньше потока на большие масштабы. Если построить гистограмму относительной роли

волновых чисел q , просуммировав вклады от T_{kpq} для $p > k$ и k , лежащего в интервале энергии, то оказывается, что основной вклад вносят малые значения q , приходящиеся на максимум энергетического спектра. Однако, в отличие от аналогичной зависимости для переноса энтропии в каскаде энтропии (см. рис. 4), здесь относительно велики вклады больших q , находящихся в интервале энтропии. Компоненты с малыми q входят в триады с $k \sim p$, которые отвечают за перенос энергии на малые масштабы. Наоборот, триплеты с большими q и p переносят энергию на большие масштабы. Эти триплеты вносят большой (по абсолютной величине) вклад в спектральный поток в инерционном интервале энергии и делают его отрицательным.

Анализ в [43] показывает, что спектральный поток формируется переносом за счет сильно удлинённых триад, причем оказывается, что волновое число одной из волн находится вблизи масштаба накачки, но превышает его (т.е. попадает в интервал энтропии). Такая структура нелинейных взаимодействий означает, что в стационарном (статистически) состоянии перенос энергии на большие масштабы происходит скорее непосредственно с малых масштабов, чем в результате каскадного процесса. Согласно [43] спаривание вихрей может играть определенную роль, однако это еще предстоит уточнить. Вследствие нелокальности спектрального переноса и спектрального потока наблюдение универсального наклона $-5/3$ в большинстве численных экспериментов довольно неожиданно.

Подчеркнем, что эти результаты касаются стационарной турбулентности и не относятся к нестационарному случаю. Как показано в [27], триплеты, вносящие основной вклад в спектральный поток энергии, локальны в нестационарном случае (без длинноволновой диссипации). Локальность здесь понимается как тот факт, что перенос через k в основном происходит от компонент, волновые числа p и q которых удовлетворяют условию

$$k < p, \quad q \leq 4k.$$

Это требует весьма подробного пространственного разрешения.

Представление об универсальности спектров энергии стационарной двумерной турбулентности в интервале энергии изменилось с появлением работы [44], где сообщается о возможности спектральных законов с наклоном, близким к -3 в интервале энергии (заметим, что в силу нелокальности взаимодействий в интервале энергии можно предположить, что спектры энергии будут чувствительны к организации движения на больших масштабах, в частности к виду используемой длинноволновой диссипации и ширине интервала энергии). Вычисления в этой работе выполнялись с пространственным разрешением 512^2 (накачка на волновых числах $k_f = 100-102$) и 1024^2 (два эксперимента — с $k_f = 250-252$ и $k_f = 350-352$) и длинноволновой диссипацией вида

$$D_k = -\nu_i k^{-16} \xi_k;$$

они проводились в течение весьма длительного времени до достижения статистически стационарного состояния. В работе сообщается, что во всех трех экспериментах спектры $k^{-5/3}$ наблюдались на промежуточной стадии

интегрирования. Далее они заменялись на более крутые спектры, наклон которых близок к -3 в пределах инерционного интервала. Изменение спектрального наклона сопровождалось генерацией когерентных вихрей различных размеров и интенсивностей. Если наблюдаемые поля завихренности разделить на собственно вихри и фон (в работе использовался критерий $\xi > 2\xi_{\text{rms}}$ для выделения вихрей), то фоновая компонента имеет спектр с наклоном $-5/3$. Вихревая компонента, на которую приходится более чем 80 % энергии, имеет существенно более крутой спектр. Статистическое распределение вихрей по масштабам и интенсивностям таково, что соответствует спектру с наклоном -3 . Таким образом, именно генерация вихрей на больших масштабах ответственна за отклонение спектрального закона от теоретического.

В работе [44] также сообщается, что перенос энергии между вихрями происходит за счет слияния вихрей одного знака и что наибольшее количество процессов слияния соответствует взаимодействию больших вихрей с малыми, хотя исследования нелинейного переноса не приводятся. Условием формирования вихрей, согласно [44], является достаточное время интегрирования для того, чтобы возникли достаточно сильные флуктуации в фоновом поле завихренности, устойчивые к фоновому полю сдвига. Если общее время интегрирования недостаточно велико и длинноволновая и/или коротковолновая диссипация слишком сильна, такие флуктуации могут и не возникнуть и спектр не будет отклоняться от классического закона $-5/3$, как в большинстве выполненных исследований.

Вопрос о том, какова роль используемого вида длинноволновой диссипации в формировании когерентных вихрей, в работе [44] не обсуждается, хотя высказывается мнение, что явление должно иметь место при любом законе диссипации, в том числе и при законе типа рэлеевского трения $D = -\lambda\xi$, но при соответствующем увеличении спектрального разрешения.

Результаты работы [44] ставят дополнительные вопросы о структуре нелинейных взаимодействий и их универсальности. Является формирование когерентных вихрей в интервале энергии внутренней характеристикой двумерной турбулентности или же это следствие специфической формы ограничения обратного каскада (в совокупности со сравнительно большим значением спектрального потока), используемой в этой работе? Некоторая ясность возникает в результате анализа, выполненного в работах [26, 27] и в недавней работе [62]. В первых двух работах изучается эволюция вынужденной турбулентности в системе без длинноволновой диссипации. Разрешение составляет 512×512 и 2048×2048 мод Фурье. До тех пор пока максимум спектра энергии далек от минимального волнового числа $k = 1$, спектральный наклон в интервале энергии близок к $-5/3$, когерентные вихревые структуры не формируются и нормированные четные структурные функции поля скорости близки к гауссовым значениям. Как только каскад энергии достигает масштаба системы, формируются два вихря (конденсация) и спектр энергии сильно отклоняется от теоретического. Нормированные четные структурные функции также сильно отклоняются от гауссовых значений в области больших масштабов. Это отклонение интерпретируется в работе [62] как следствие ограничения обратного каскада. До тех пор

пока обратный каскад не ограничен, нет и отклонения спектрального закона от теоретического предсказания.

Длинноволновое трение также выступает как ограничитель обратного каскада, и поэтому спектр может отклоняться от классического колмогоровского спектра с наклоном $-5/3$. Этот спектральный наклон должен, строго говоря, наблюдаться при включении "поглотителя" особого вида, который принимает поток энергии на большие масштабы со стороны волновых чисел, больших некоторого k_{ls} , но не оказывает обратного влияния на малые масштабы. Идея состоит в записи коэффициента длинноволновой диссипации в виде [62]

$$v_{ls}(k_{ls}|k) = -\frac{S_k(k_{ls}|k)}{2k^2\Omega_k}, \quad (18)$$

где суммирование в выражении для функции переноса энтропии производится по тройкам $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, удовлетворяющим условиям

$$|k - p| < q < k + p, \quad p, q < k_{ls}.$$

Для вычисления самой функции переноса энтропии используется квазинормальное приближение, а расчеты времени релаксации триад выполняются при помощи ренормгрупповой теории турбулентности. Такой подход дает

$$v_{ls}(k_{ls}|k) = 0,0974e^{2/3}k_{ls}^{-4/3}F\left(\frac{k}{k_{ls}}\right), \quad (19)$$

где $F(1) = 1$, а форма этой функции при остальных значениях аргумента может быть приближена (по методу наименьших квадратов) зависимостью

$$F(x) \approx x^{-2,58}.$$

Величина $2k^2$ включена в знаменатель выражения для $v_{ls}(k_{ls}|k)$ (18) для обеспечения аналогии с обычным коэффициентом вязкости. По сравнению с рэлеевским трением закон (19) соответствует коэффициенту трения

$$\lambda \propto \left(\frac{k}{k_{ls}}\right)^{-0,58}:$$

трение увеличивается по мере увеличения масштаба, однако это происходит по сравнительно медленному закону. По сравнению с гипервязкостью, использованной в работе [44] ($D_k \propto k^{-16}\xi_k$), закон (19) является существенно более плавным. Следует, однако, отметить, что наше сравнение является условным в том смысле, что при использовании трения (18) при вычислении нелинейного слагаемого T_k необходимо исключить слагаемые с $p, q < k_{ls}$.

Численные эксперименты в [62] выполнены при разрешении 1024×1024 мод, накачка заключена между $k = 215$ и $k = 222$, используется гипервязкость $\propto k^{14}$ для подавления каскада энтропии. Были выполнены три эксперимента. В первом из них длинноволновое трение отсутствует, а амплитуды мод с $k < 8$ устанавливаются на нуль на каждом временном шаге. Во втором используется гиповязкость $D_k \propto k^{-10}\xi_k$ и, наконец, в третьем — трение вида (19) с $k_{ls} = 8$ и с условием обращения в нуль амплитуд мод при $k < 8$, как и в первом случае.

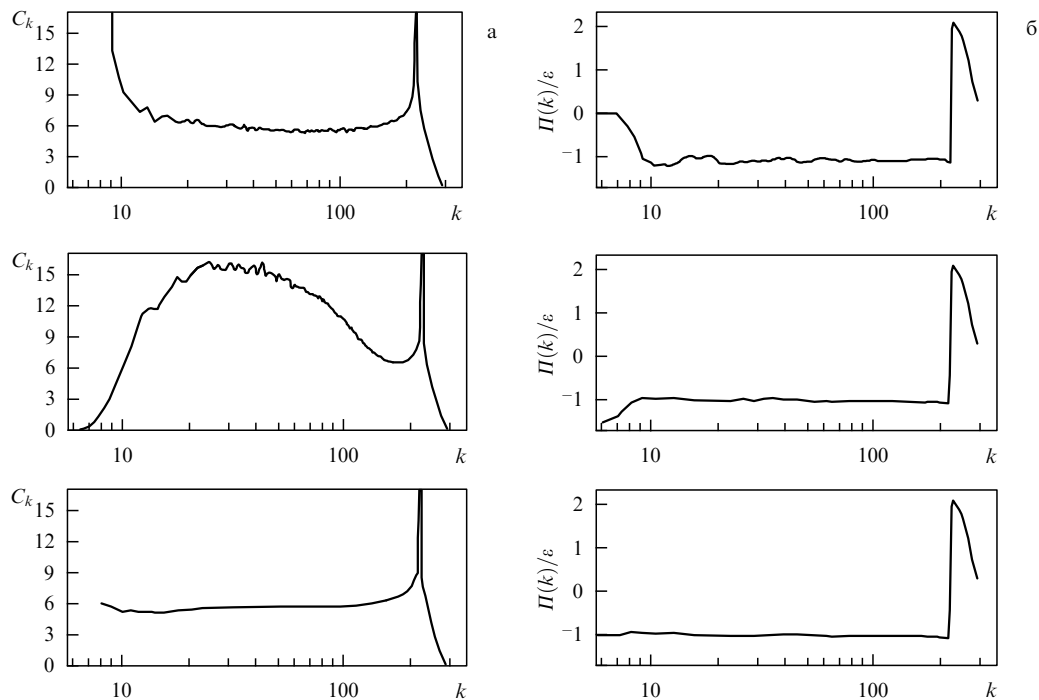


Рис. 5. (а) Поведение константы Колмогорова в зависимости от волнового числа в трех экспериментах с различными длинноволновыми диссипациями: амплитуды мод с $k \leq 8$ приравниваются к нулю на каждом временном шаге (верхний график); гипервязкость (средний график); вязкость с законом (19) (нижний график). (б) Нормированные потоки энергии по спектру для тех же экспериментов [62].

Рисунок 5а, воспроизводимый из [62], показывает поведение константы Колмогорова

$$C_k = E(k)k^{5/3}\varepsilon^{-2/3}$$

(или компенсированных спектров) во всех трех случаях. Отклонения от колмогоровского спектра являются наименьшими в последнем случае и наиболее заметны в случае с гиповязкостью. Помимо этого, в первых двух случаях спектры устанавливаются очень медленно, и рисунок воспроизводит неустановившиеся спектры. Во втором случае наблюдается формирование и рост вихрей, тогда как они полностью отсутствуют в установившемся течении в третьем эксперименте. Рисунок 5б показывает поведение нормированных потоков энергии для указанных трех случаев. Видно, что во всех трех случаях течение характеризуется достаточно протяженным инерционным интервалом, однако система с гипертрением демонстрирует локальное увеличение амплитуды спектрального переноса при малых волновых числах (перенос стремится к нулю при стремлении к нулю волнового числа, поэтому указанное поведение имеет локальный характер).

Результаты работы [62], таким образом, свидетельствуют о том, что отклонение спектрального закона от колмогоровского (и, следовательно, появление когерентных вихрей в интервале энергии) действительно связано с видом длинноволновой диссипации. При использовании гиповязкости с большой степенью оператора $1/\Delta$ низшие волновые числа как будто бы исключаются из взаимодействия, а длинноволновая диссипация при k , больших некоторого k_i , мала. Предельным случаем этой ситуации является полное отсутствие длинноволнового трения и обращение в нуль амплитуд компонент с волновыми числами $k < k_i$ на каждом временном шаге. Согласно

результатам [27], это приводит при достаточно большом времени наблюдения к конденсации энергии на максимальном разрешенном масштабе, или к "кристаллизации" — образованию регулярной решетки вихрей чередующихся знаков с пространственным шагом π/k_i . В случае с гиповязкостью оценку k_i можно получить, сравнивая временной масштаб $(\varepsilon k_i^2)^{-1/3}$ с k_i^{2n}/ν_{-n} . При больших n он слабо зависит от скорости диссипации (или спектрального потока энергии). После того как спектральный перенос энергии достигает этого масштаба, энергия конденсируется вблизи него и весь спектр модифицируется. Мы подчеркнем еще раз, что последнее не удивительно в свете отмечавшегося выше нелокального характера триад в интервале энергии и того факта, что в двумерном случае в области диссипации энергии сосредоточена значительная часть кинетической энергии течения. От того, как организовано течение на таких масштабах, может зависеть его структура и на меньших масштабах. С практической точки зрения это означает, что вид длинноволновой диссипации может иметь определяющее значение и требует особого внимания.

В нестационарных задачах (без диссипации на больших масштабах) в тех случаях, когда максимум спектра энергии еще далек от минимального волнового числа $k = 1$, спектр энергии близок к $-5/3$ [27]. В таких случаях крупномасштабные вихри не наблюдаются, а крупномасштабные поля завихренности близки к гауссовым (по крайней мере для нескольких низших моментов). Яхот [63] предлагает теорию, объясняющую такое поведение в случае нестационарной турбулентности. Он показывает, что двухточечная характеристическая функция

$$Z = \langle \exp(i\delta u) \rangle$$

(угловые скобки означают осреднение по ансамблю реализаций и δu — разность скоростей между двумя точками) для поперечных разностей (определяются выбором вектора $\mathbf{l}$ по отношению к вектору разности координат точек) подчиняется уравнению ланжевеновского типа со случайной гауссовой силой. Решение для продольных структурных функций строится с учетом факта малости потока энергии в двумерном случае. Эти функции отклоняются от гауссовых, но эти отклонения слишком малы для их непосредственных измерений.

Если длинноволновая диссипация "плавно" останавливает обратный каскад энергии (рэлеевское трение на больших масштабах), стационарные спектры также имеют наклон, близкий к $-5/3$. Однако при рассмотрении структурных функций может оказаться, что отклонения показателей ζ_p в законах

$$\langle \delta u^p \rangle \sim r^{\zeta_p}$$

от колмогоровских значений достаточно велики [32], что свидетельствует о перемежаемости. В этом случае оказывается, что более адекватное описание дает предположение о расширенной автомодельности

$$\langle \delta u^p \rangle \sim \langle \delta v^s \rangle r^{\zeta_p/\zeta_s}$$

(см. также [33]). Естественно, что особую роль играет $s = 3$, поскольку третья структурная функция пропорциональна скорости диссипации энергии. Относительные экспоненты для низших структурных функций принимают постоянные значения даже там, где абсолютные экспоненты изменяются при изменении разнесения r . Мы вернемся к этому вопросу еще раз при обсуждении лабораторных экспериментов. Здесь же отметим, что присутствие длинноволновой диссипации может "искажать" обратный каскад и результаты работ [32, 33] относительно перемежаемости могут не иметь универсального характера. Об этом свидетельствуют численные эксперименты в [64], где отклонений от колмогоровского скейлинга не обнаружено.

Работа [64] посвящена изучению нечетных структурных функций поля скорости в интервале обратного каскада энергии. В ней расчеты выполнены при разрешении 2048×2048 точек, а обратный каскад энергии по спектру останавливается линейным трением. Трение выбрано таким образом, что каскад останавливается на масштабе, существенно меньшем масштаба системы. Спектры энергии демонстрируют практически идеальный наклон $-5/3$ на спектральном интервале почти в две декады. В работе показано, что статистика приращений продольной компоненты скорости (функция плотности вероятности) имеет малую, но заметную асимметрию. Симметричная часть функции плотности вероятности почти гауссова. Измеренная структурная функция третьего порядка для продольной компоненты скорости, компенсированная зависимостью $1/(re)$, имеет (в соответствии с законом Колмогорова для двумерной турбулентности) плато, где она приблизительно равна $3/2$. В работе также измерены пятая и седьмая нечетные структурные функции продольной компоненты скорости. Эти функции имеют участок, описываемый колмогоровским скейлингом

$$\langle \delta u_L^n \rangle = C^{(n)}(er)^{n/3}$$

с $C^{(5)} \approx 130$ и $C^{(7)} \approx 14000$.

Таким образом, поведение нечетных структурных функций свидетельствует о том, что перемежаемость если и имеет место для обратного каскада энергии, то находится в пределах экспериментальных ошибок.

Из-за действия линейного трения спектральный поток энергии в рассматриваемых экспериментах постоянен, тогда как выполнения колмогоровского скейлинга следовало бы ожидать для случая постоянного потока. Авторы утверждают, что поток приблизительно постоянен в пределах декады (однако его изменчивость в действительности существенно больше, чем изменчивость в пределах плато у нормированной третьей структурной функции).

3.3. Затухающая турбулентность

Затухающей двумерной турбулентности (по крайней мере в прошлом) было посвящено наибольшее количество работ: в некотором смысле такая турбулентность яснее концептуально, поскольку не требует искусственной диссипации на больших масштабах. МакВильямс [54] показал, что при эволюции затухающей турбулентности образуются когерентные вихри, время жизни которых велико по сравнению со временем, за которое такие вихри совершают полный оборот. Примеры формирования когерентных вихрей в затухающей турбулентности можно найти в ранних работах [65, 66], однако именно МакВильямсу принадлежит систематическая демонстрация того, что в затухающей турбулентности вихри возникают при различных начальных условиях и в различных системах. Пример поля завихренности в эксперименте с затухающей турбулентностью приведен на рис. 2в.

В работе [54] в качестве исходного берется течение, спектр энергии которого имеет наклон -3 при больших k . Пространственное разрешение составляет 256^2 . По мере эволюции течения и формирования когерентных вихрей наклон спектра делается более крутым (до -5) и перенос энтропии по спектру уменьшается. Одновременно пологость поля завихренности сильно возрастает от начального гауссова значения 3 до значения в несколько десятков. Вихри формируются на промежуточных масштабах (между максимальным масштабом в системе и масштабом начального поля скорости) и переносятся более крупномасштабными компонентами поля скорости.

Вихри приводят к замедлению каскадных процессов [56], поскольку образование филаментов и их растяжение, за счет которых энтропия переносится на малые масштабы, невозможны внутри вихрей, тогда как именно в вихрях сосредоточена основная доля энтропии.

В работе [67] вопрос о спектрах затухающей турбулентности обсуждается в связи с тем, что разные исследователи сообщают о различных спектральных наклонах. Для анализа причины этого в работе выполняется интегрирование турбулентного поля скорости в течение длительного промежутка времени при пространственном разрешении 1024×1024 точек. Начальное поле гауссово с нулевым средним и спектром энергии

$$E_0(k) \sim k \left[1 + \left(\frac{k}{k_0} \right)^{\gamma+1} \right]^{-1}$$

при $\gamma = 6$ и $k_0 = 6$. На начальных этапах интегрирования в течении образуются растягивающиеся под действием

крупномасштабной компоненты поля скорости вихревые слои. Мелкомасштабная компонента завихренности переносится ими как пассивная примесь. Соответственно мелкомасштабная компонента поля скорости имеет спектр энергии с наклоном -3 . Затем по прошествии некоторого времени формируются когерентные вихри большого размера, которые можно связать с экстремумами завихренности в начальном поле скорости. Только после этого постепенно появляются вихри малого масштаба из-за фрагментации вихревых слоев. Вследствие существования двух разных механизмов формирования когерентных вихрей не наблюдается универсального распределения их по размерам, что также отражается и на спектре. В спектре энергии различаются области больших вихрей (с более крутым наклоном) и малых вихрей (где наклон ближе к -3). Энергия остается практически постоянной на протяжении всего времени интегрирования. Энтрофия, хотя и уменьшается, не показывает отчетливой тенденции стремления к нулю. Причина состоит в том, что значительная часть энтрофии сосредоточена в вихрях большого масштаба и не подвержена растяжению в поле сдвига.

Вывод работы состоит в том, что в затухающей турбулентности спектр с наклоном -3 наблюдается только как промежуточный. Появление когерентных вихрей нарушает масштабную инвариантность и приводит к формированию более крутых спектров. Помимо этого утверждается, что поведение спектров при большом времени сильно зависит от начальных условий. В частности, если начальный спектр достаточно крут, вихри появляются на масштабе π/k_0 и определяют всю последующую эволюцию затухающей турбулентности. Если спектр более пологий, как в работах [54, 68] (начальный наклон спектра -3), сразу возникают вихри с набором масштабов. Согласно [67] граница между наклонными начальными спектрами проходит между -3 и -6 .

Тот факт, что по прошествии некоторого времени после начала эволюции затухающая турбулентность в численных моделях с гипервязкостью выглядит как ансамбль взаимодействующих вихрей, привел к появлению работ, где изучаются характеристики этих вихрей. Статистика вихрей в затухающей двумерной турбулентности рассматривалась в [68–72]. Выделение вихрей на фоне мелкомасштабной турбулентности может быть выполнено многими способами. Простейший алгоритм состоит в том, что с вихрями отождествляют области, где завихренность больше некоторого порогового значения. Согласно другому алгоритму анализируются области, где детерминант градиента скорости отрицателен. В [68] сообщается, что оба подхода дают близкие результаты. Распределение вихрей по размерам в работе [68] подчиняется зависимости

$$P(R) \sim R^{-\alpha}$$

с $\alpha \approx 1,9$. Наблюдаемые вихри имеют одинаковую форму

$$\xi(r) = \xi_0 f\left(\frac{r}{R}\right)$$

с приблизительно одинаковыми ξ_0 . Начальный спектр энергии спадает как k^{-3} (пространственное разрешение 512×512), спектр, наблюдаемый в конце эволюции, —

как $k^{-4,3}$. Авторы показывают, что в случае, когда основной вклад в энергию происходит от вихрей, наклон спектра энергии связан с параметром α как $-6 + \alpha$. Отсюда получается значение $-4,1$, что близко к наблюдаемому значению. Динамика ансамбля точечных вихрей, которыми на окончательной стадии эволюции заменяются реальные вихри, близка к динамике последних. Характеристики вихрей двумерной турбулентности рассматривались в работе [69]. Здесь основное внимание уделено временной эволюции вихрей. Начальный спектр выбран в виде

$$E(k) = \frac{k^6}{(k + 2k_0)^{18}},$$

пространственное разрешение составляет 450×450 . Для выделения вихрей используется специальный алгоритм, согласно которому *вихрями* называются области завихренности, форма которых соответствует форме некоторого идеального вихря. Количество вихрей затухает по закону

$$N_v \sim t^{-0,71}.$$

Максимум завихренности убывает во времени, но его среднее по вихрям значение остается приблизительно постоянным. Средний размер вихрей увеличивается как $t^{0,2}$, а среднее расстояние между вихрями — как $t^{0,4}$. Форма вихрей приблизительно гауссова, но она не универсальна, в отличие от экспериментов работы [68]. Такое различие в поведении может быть отнесено к разнице в начальных условиях. Энтрофия убывает приблизительно как $t^{-0,4}$, что сильно отличается от предсказаний из работы [4].

Определяющая роль когерентных вихрей в динамике затухающей двумерной турбулентности привела к формулировке вихревых моделей [70–72]. В таких моделях вихри движутся как точечные, за исключением случаев, когда два вихря подходят достаточно близко друг к другу. С каждым вихрем ассоциированы два параметра — радиус вихря и однородная завихренность в нем. Близко подошедшие вихри (если расстояние между ними меньше, чем $1,7(R_1 + R_2)$) заменяются одним с радиусом, вычисляемым как $(R_1^4 + R_2^4)^{1/4}$. При такой замене энергия сохраняется, но энтрофия убывает. Убывание энтропии можно интерпретировать как эффект филаментации на границах вихрей, присутствующий в реальной динамике. В работах используются различные начальные условия и соответственно получаются разные результаты. В [71] вихри распределены по размерам по закону R^{-3} , так что начальный спектр энергии соответствует спектру -3 численного эксперимента [68]. На окончательной стадии эволюции распределение вихрей по размерам близко к R^{-2} , что дает наклон -4 для спектра энергии ($-4,1$ в [68]). Найдено, что количество вихрей убывает во времени как $t^{-0,6}$, что отличается от законов $t^{-0,71}$ в [69], $t^{-0,75}$ в [70] и $t^{-0,72}$ в [72].

Динамика "точечных" вихрей в [70] и [72] дает временные законы для количества вихрей, их размера, расстояния между вихрями, энтропии течения, согласующиеся с псевдоспектральными расчетами в [69]. Вывод работы [69] о том, что осредненная по вихрям завихренность приблизительно постоянна в процессе затухания, позволил авторам [70] выдвинуть гипотезу о

поведении затухающей турбулентности, которая хорошо согласуется с численными результатами.

Дополнительно к предположению Бэтчелора о постоянстве энергии в ходе затухания считается, что сохраняется экстремум завихренности. Это предположение является естественным следствием представления о затухании турбулентности как о процессе слияния вихрей. Диссипация энтропии происходит только на границах вихрей за счет филаментации, но не затрагивает ядра вихрей. Если считать, что ξ_{ext} сохраняется, появляются параметры с размерностью длины и времени:

$$l = \frac{\sqrt{E}}{\xi_{\text{ext}}}, \quad \tau = \frac{1}{\xi_{\text{ext}}}.$$

Если дополнительно предположить, что количество вихрей N_v убывает по степенному закону с показателем $-\zeta$, и считать, что энергия и энтропия в основном связаны с вихрями как

$$E \sim N_v R^4 \xi_{\text{ext}}^2, \quad \Omega \sim N_v R^2 \xi_{\text{ext}}^2,$$

то получается, что средний размер ведет себя как

$$l \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\zeta/4}$$

(это следует из постоянства энергии), расстояние между вихрями — как

$$l \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\zeta/2},$$

а энтропия течения убывает как

$$\Omega(t) \sim \tau^{-2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-\zeta/2}.$$

Эти выводы находятся в хорошем соответствии с численными результатами.

Предложенный скейлинг отличается не только от классического результата Бэтчелора, но также и от предсказаний другой теории, известной как теория избирательного затухания (см., например, [7]), основывающейся на предположении, что в процессе затухания достигается минимум энтропии при постоянной энергии [75]. Эта теория используется для описания окончательного состояния затухающей турбулентности в работах [73, 74] и ряде других. Авторы [75] показывают, что теория избирательного затухания предсказывает более быстрое затухание, чем наблюдаемое в численных экспериментах. Причина состоит в неучете образования когерентных вихревых структур, замедляющих процесс затухания.

Дритчел [76] ставит под сомнение надежность результатов, полученных псевдоспектральным методом для турбулентности, доминируемой вихрями. Его аргументы сводятся к тому, что псевдоспектральный метод вносит существенную численную диссипацию на границах вихрей и поэтому неправильно описывает процессы слияния вихрей и поведение тонких филаментов завихренности, вытягивающихся из вихрей в процессе их взаимодействия [77]. В работе [78] показано, что образование тонких вихревых слоев на периферии вихря в

сочетании с гипердиффузией приводит к резкому увеличению скорости диссипации завихренности. Гипердиффузия сама по себе приводит к осцилляциям профиля завихренности вихрей у края вихря.

Как альтернативу Дритчел [76] предлагает использовать метод контурной динамики в сочетании с методом контурной хирургии (Contour Dynamics/Surgery). Этот метод позволяет разрешать существенно меньшие масштабы, чем псевдоспектральный метод, а значит, и исследовать эволюцию турбулентности в намного более широком спектральном интервале, чем возможно при использовании псевдоспектрального метода. Расчеты в работе [76] выполняются для сферической геометрии. Начальное поле завихренности представляет собой ансамбль из 200 вихрей с однородным распределением завихренности внутри вихря (суммарная завихренность равна нулю) и распределением по размерам $n(A) \sim A^{-p}$, где A — площадь вихря. Масштаб диссипации (отрезаются структуры тоньше этого масштаба) таков, что соответствует разрешению в 7000 волновых чисел в псевдоспектральных расчетах. В работе найдено, что распределение вихрей по размерам не является автомодельным, оно делается круче и круче в процессе затухания. Соответствующий спектр энергии меняется от приблизительно k^{-5} на больших масштабах до k^{-3} на малых масштабах. Отмечается, что ряд характеристик (таких, как скорость роста размера больших вихрей и скорость затухания энтропии) существенно отличается от результатов предыдущих псевдоспектральных расчетов.

Причина этого может состоять не только в намного меньшей диссипации, как утверждает автор работы [76], но и в совершенно другом ее характере, равно как и в использовании вихрей с резкой границей (требование метода контурной динамики). Здесь следует отметить, что все поведение затухающей турбулентности определяется наличием коротковолновой диссипации энтропии (если такая диссипация отсутствует, система должна в пределе стремиться к статистическому стационару со спектром энергии k^{-1} ; см., например, [29]). Можно предположить, что тип диссипации, вносимой используемым численным методом, является важным. Так, понятно, что процесс слияния вихрей определяется диссипацией, а это ключевой процесс при формировании вихрей большого масштаба в теориях и численных экспериментах, рассматривающих двумерную турбулентность как процесс слияния вихрей. Критика псевдоспектральных методов в [76] существенно использует представление о вихре как об образовании с резкой границей. В расчетах псевдоспектральными методами вихри возникают из гладких начальных полей завихренности и не содержат скачков завихренности. В какой степени уместно моделирование таких вихрей вихрями с резкой границей, до конца неясно. С другой стороны, разница в поведении затухающей турбулентности при рассмотрении методом контурной динамики/хирургии и псевдоспектральным методом может быть интерпретирована как разница в начальных условиях в духе результата [67].

Представление о зависимости характеристик затухания от закона диссипации, используемого для подавления каскада энтропии, можно получить из недавних работ [50, 79, 80]. В первой из них решается вопрос о временной эволюции плотности распределения вероят-

ностей значений завихренности в затухающей турбулентности. Если исходить из аргументов Бэтчелора, плотность вероятности должна записываться как

$$p(\xi) = tf(\xi t),$$

поскольку размерность завихренности не содержит длины. Численные результаты свидетельствуют о том, что это соотношение приближенно выполняется в окрестности максимума функции распределения, однако оно нарушается на ее хвостах. В [79] показано, что $p(\xi)$ резко спадает при больших ξ , так что ее можно считать равной нулю при $|\xi| > \xi_m(t)$. Крылья функции распределения имеют степенную форму

$$p(\xi) \sim \frac{c}{|\xi t|^{1+q_c}},$$

где c, q_c — универсальные константы, определяемые по результатам численных экспериментов (предположение об универсальности не соответствует результатам [80]).

В силу такой формы функции распределения временная эволюция моментов завихренности $|\xi|^q$ зависит от степени q . Если эта степень меньше q_c , момент определяется поведением функции распределения в окрестности нуля и имеет временную зависимость t^{-q} , что соответствует результатам теории Бэтчелора. В противном случае ($q > q_c$) находим

$$\langle |\xi|^q \rangle \sim (q - q_c)^{-1} \xi_m^{q-q_c} t^{-q_c},$$

т.е. временная зависимость перестает зависеть от порядка момента, как это предсказывается в теории [70].

Последнее утверждение, однако, оказывается неточным. Численные эксперименты [79] показывают, что истинная зависимость моментов завихренности от времени есть

$$\langle |\xi|^q \rangle \sim t^{-a_q}$$

с $a_q \approx 0,4$ в экспериментах с гипервязкостью $-\nu_8 \Delta^8 \xi$ и $a_q \approx 0,2 + 0,5q$ в экспериментах с обычной ньютоновской вязкостью $\nu \Delta \xi$. (Последний результат согласуется с универсальностью c и q_c , если принять, что вследствие конечности числа Рейнольдса ξ_m является степенной функцией времени.) Одновременно это означает, что экспоненты, описывающие процесс затухания, есть функции числа Рейнольдса.

В работе [50] выполнены расчеты поведения затухающей турбулентности в течении с ньютоновской вязкостью. Выбранное пространственное разрешение (4096×4096) таково, что разрешается каскад энтрофии и в то же время масштаб максимума энергии остается далеким от внешнего размера течения. Здесь изучаются законы затухания энергии и энтрофии в зависимости от числа Рейнольдса. Последнее определяется по начальному спектру как

$$\text{Re} = \frac{E}{\Omega^{1/2} \nu}.$$

Показано, что существует критическое начальное число Рейнольдса такое, что для всех $\text{Re}(0) < \text{Re}_c$ число Рейнольдса при эволюции уменьшается. При $\text{Re}(0) = \text{Re}_c$

число Рейнольдса остается постоянным при $t \rightarrow \infty$ и равным некоторому Re'_c , энергия затухает как t^{-1} , а энтрофия — как t^{-2} . При таком значении числа Рейнольдса можно ожидать, что процесс затухания будет автомодельным, и это наблюдается в действительности: спектр энергии во время затухания принимает форму

$$E(k, t) = u^2 l \hat{E}(kl), \quad u^2(t) = \langle u^2(t) \rangle, \quad l(t) = \frac{u(t)}{\langle \xi^2 \rangle^{1/2}}.$$

Наблюдаемые в этом случае значения экспонент могут быть получены следующим образом. Предполагая

$$\langle u^2 \rangle = bt^n, \quad \langle \xi^2 \rangle = ct^m,$$

из постоянства числа Рейнольдса ($\text{Re} = \text{Re}'_c$) получаем $n = m/2$, а из уравнения

$$\frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial t} = -2\nu \langle \xi^2 \rangle$$

получаем $n - m = 1$ и $nb = -2\nu c$. Это сразу дает $n = 1$, $m = 2$ и значения для констант

$$b = \nu \frac{\text{Re}_c'^2}{2}, \quad c = \frac{\text{Re}_c'^2}{4}.$$

Если $\text{Re}(0) > \text{Re}_c$, число Рейнольдса растет в процессе затухания, и несмотря на то, что оно стремится к бесконечному пределу, автомодельный режим не реализуется. Законы затухания энергии и энтрофии зависят от числа Рейнольдса. При достаточно больших числах Рейнольдса (> 1000), однако, энергия остается почти постоянной, а энтрофия затухает по предельному закону $t^{-0,8}$. Затухание происходит быстрее при меньших значениях числа Рейнольдса, и случай, рассмотренный в [79] ($t^{-1,2}$), попадает в эту область. В отличие от законов затухания, спектры энергии почти автомодельны, хотя их наклон при больших волновых числах круче, чем -3 .

Тщательные численные эксперименты (разрешение 4096×4096 , осреднение по не менее чем 64 реализациям) и теоретический анализ в [80] уточняют и обобщают предыдущие результаты [79] и [50]. В этой работе предлагается различать полную и неполную автомодельности затухания двумерной турбулентности. Полная автомодельность требует наряду с автомодельным поведением спектра энергии постоянства отношения масштаба l и масштаба

$$\mu = \frac{\langle \xi^2 \rangle^{1/2}}{\langle (\nabla \xi)^2 \rangle^{1/2}}.$$

Первый из них может быть назван внешним масштабом, а второй — внутренним, или масштабом диссипации. Согласно анализу в [80] предположение о полной автомодельности приводит к выводу, что энтрофия затухает как t^{-1} в пределе больших чисел Рейнольдса. В этом случае вязкость входит явно в закон затухания.

Неполная автомодельность возникает, если вязкость не существенна на тех волновых числах, где энергия имеет автомодельную форму. Это приводит к закону t^{-2} затухания энтрофии, предложенному Бэтчелором.

Численные эксперименты в [80] дают уточненный закон $t^{-0,9}$ для затухания энтропии ($t^{-0,8}$ в [50]), что близко к теоретическому предсказанию.

Аналогичные рассуждения для затухающей турбулентности с гипервязкостью приводят к закону затухания $t^{-1/n}$, где n — степень оператора Лапласа. Предположение о неполной автомодельности опять приводит к закону t^{-2} . Численные результаты в [80] для наибольшего числа $Re(0) = 8192$ и бигармонической вязкости ($n = 2$) свидетельствуют о том, что показатель в законе затухания энтропии после прохождения минимального значения $-0,8$ достигает $-0,66$ при

$$\tau = \int_0^t \langle \xi^2 \rangle^{1/2} dt = 70.$$

Это должно быть сопоставлено с теоретическим результатом $-0,5$. При сравнении численного результата из [79] ($-0,4$ при $n = 8$) с теоретической оценкой $-1/n = 0,125$ наблюдается значительное расхождение.

Расчеты плотности вероятности значений завихренности как с обычной вязкостью, так и с бигармонической вязкостью, подтверждают вывод работы [79] о форме крыльев функции распределения. Для обычной вязкости и $Re(0) = 1024$ в [80] получено $q_c = 1$, а для бигармонической вязкости — $q_c = 0,5$ в полном соответствии с найденными законами затухания. Заключение работы [79] об универсальности q_c , таким образом, не оправдывается. В остальном, как показано в [80], предположение о полной автомодельности согласуется с выводами [79]. Параметр $\xi_m(t)$ из [79] получается как функция коэффициента вязкости, отношения внешнего и внутреннего масштабов и энергии.

С учетом этих результатов вряд ли можно ожидать, что статистические характеристики когерентных вихрей затухающей двумерной турбулентности универсальны. Они должны зависеть от типа вязкости и числа Рейнольдса (если последнее недостаточно велико).

4. Квазидвумерная турбулентность

4.1. Слой вращающейся жидкости, придонное трение, бета-эффект

В руководствах по геофизической гидродинамике указывается, что для двумерных движений слоя несжимаемой жидкости глубины H в отсутствие диссипации и накачки сохраняется потенциальная завихренность (ПЗ), определяемая как

$$\omega = \frac{\xi + f}{H}, \quad (20)$$

где $\xi = \Delta\psi$ — относительная завихренность. Наиболее простой способ прийти к этому заключению состоит в записи уравнений вращающейся мелкой воды:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + g \nabla h &= 0, \\ \partial_t H + \operatorname{div}(H \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный по вертикали, f — параметр Кориолиса, т.е. удвоенная угловая скорость вращения, h — возвышение свободной поверхности 2 УФН, т. 170, № 9

ности, g — ускорение свободного падения, $\mathbf{v}$ — горизонтальная скорость и H — полная глубина.

Применяя операцию rot к первому уравнению и исключая $\operatorname{div} \mathbf{v}$ из него при помощи второго уравнения, получаем уравнение эволюции относительной завихренности. Комбинируя его со вторым уравнением, получаем искомый закон сохранения ПЗ

$$D_t \omega = 0, \quad D_t = \partial_t + (\mathbf{v} \nabla). \quad (22)$$

Крупномасштабные движения в атмосфере и океане происходят в условиях быстрого вращения, характеризующегося малостью числа Россби:

$$Ro = \frac{U}{Lf} \ll 1,$$

где U — типичная скорость и L — пространственный масштаб. Малость числа Россби означает, что ускорение Кориолиса существенно превышает локальное ускорение в уравнениях движения. По этой причине течения в условиях быстрого вращения приближенно находятся в условиях геострофического баланса

$$f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + g \nabla h \approx 0.$$

Из этого условия следует, что крупномасштабное поле скорости описывается геострофической функцией тока

$$\psi = \frac{gh}{f}.$$

Условие геострофического баланса является вырожденным в том смысле, что не описывает динамики течений.

Динамическое уравнение получается при учете слагаемых первого порядка по числу Россби в уравнениях движения, или в квазигеострофическом приближении. Простейший способ получения такого уравнения состоит в использовании уравнения сохранения ПЗ (22). Для этого представим знаменатель выражения для ПЗ в виде

$$H = H_0 + h - h_b,$$

где h_b — возвышение дна и H_0 — некоторая базовая глубина. Предполагая далее, что отношения h/H_0 , h_b/H_0 по порядку величины не превосходят числа Россби, в первом порядке по этому числу можем записать

$$\omega_q = \xi + f - \frac{\psi}{L_0^2} + \frac{f h_b}{H_0} = \omega H_0 + O(Ro^2). \quad (23)$$

Величина ω_q называется квазигеострофической потенциальной завихренностью, $L_0 = (gH_0)^{1/2}/f$ — радиус Россби–Обухова. Из уравнения сохранения ПЗ следует уравнение сохранения квазигеострофической ПЗ

$$D_t \omega_q = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\xi - \frac{\psi}{L_0^2} \right) + \left[\psi, \xi - \frac{\psi}{L_0^2} + f \frac{h_b}{H_0} \right] = 0. \quad (24)$$

В общем случае в правую часть должны быть включены источники и диссипативные слагаемые. Основная часть диссипации происходит благодаря появлению тонкого экмановского пограничного слоя на жестком дне, в пределах вертикальной протяженности которого горизонтальная скорость меняется от нуля до геострофической скорости. Воздействие этого пограничного слоя на жидкость описывается добавлением слагаемого $-\lambda\zeta$ [5] в правую часть уравнения (24), где $\lambda = \nu/(H_0\delta_E)$, ν — коэффициент кинематической вязкости или соответствующей турбулентной вязкости для крупномасштабных атмосферных течений, $\delta_E = (2\nu/f)^{1/2}$ — толщина экмановского пограничного слоя. Диссипация, вносимая экмановским пограничным слоем, превосходит горизонтальную диссипацию $\nu\Delta\zeta$ для движений с горизонтальными размерами, большими толщины пограничного слоя Стюартсона–Праудмена

$$H_S = (H_0\delta_E)^{1/2}.$$

Как показывается в специальных исследованиях вопроса (см., например, [81]), движения с горизонтальными масштабами меньше слоя Стюартсона–Праудмена трехмерны, поэтому можно считать, что диссипация за счет придонного трения превалирует на всех масштабах, где движения двумерны.

Если рассматриваются движения, масштаб которых мал по сравнению с радиусом Россби–Обухова, слагаемым, пропорциональным L_0^{-2} , можно пренебречь. Мы будем считать это предположение выполненным в двух последующих разделах. Если, далее, $h_b = 0$ и $f = \text{const}$, уравнение (24) совпадает с уравнением трансформации завихренности для движений несжимаемой двумерной жидкости. Далее в этом разделе мы будем говорить только о квазигеострофической ПЗ, называя ее просто ПЗ.

Реальные квазидвумерные течения в атмосфере или океане имеют сферическую геометрию, в силу чего проекция угловой скорости вращения на местную вертикаль меняется с широтой. Для ограниченного пояса широт это изменение можно аппроксимировать линейной зависимостью параметра Кориолиса f от координаты в направлении юг–север: $f = f_0 + \beta y$. О такой зависимости говорят как о бета-эффекте, а использование линейной аппроксимации называют *приближением бета-плоскости*. Наличие бета-эффекта приводит к существенным изменениям поведения жидкости. Действительно, частицы жидкости, имеющие различные значения широтной координаты y , имеют также разные значения ПЗ. Поскольку последняя сохраняется на лагранжевых траекториях, то при смещении жидкой частицы, например, на север, она будет иметь недостаток ПЗ по сравнению с фоновыми значениями. Наоборот, при смещении к югу жидкая частица будет характеризоваться избытком ПЗ. Если представить волну со смещениями частиц вдоль оси y , она будет распространяться на запад вследствие поля скорости, наведенного дефицитами и избытками ПЗ. Такие движения называют *волнами Россби*. Дисперсионное уравнение для волн Россби получается, если искать решение в виде элементарной волны

$$\psi = A \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y).$$

После подстановки этого выражения в уравнение (24) получаем дисперсионное соотношение вида

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k^2}. \quad (25)$$

Волны Россби играют существенную роль в крупномасштабной динамике. Вопрос, который будет нас интересоваться в контексте данного обзора, таков: как изменяется двумерная турбулентность в системе с бета-эффектом?

4.2. Роль придонного трения

Мы уже указывали выше, что при исследовании стационарной двумерной турбулентности в уравнении приходится вводить искусственную длинноволновую диссипацию и что во многих случаях диссипация — линейное по завихренности трение $D_\lambda = -\lambda\zeta$, отличное от нуля для нескольких компонент с наименьшими волновыми числами. В геофизических приложениях такое трение возникает естественным образом из-за влияния подстилающей поверхности (экмановское трение), однако его действие не ограничено только длинноволновыми компонентами, а его величина определяется физическими параметрами конкретной задачи [5, 82]. Придонное трение (мы также будем использовать термины *внешнее трение*, *линейное трение*, *рэлееское трение*) не избирательно к масштабу возмущения. По мере того как энергия переносится на все большие масштабы в обратном каскаде, из-за действия придонного трения поток энергии по спектру уменьшается и инерционный интервал разрушается. При достаточном пространственном размере изучаемой системы максимум энергии будет достигаться на некотором промежуточном масштабе, лежащем между масштабом накачки и размером системы. Поэтому физической задачей при наличии придонного трения является не столько задача об инерционном интервале энергии, его характеристиках и спектрах, сколько задача о масштабе, за который турбулентная энергия проникает слабо.

Лилли [9], по-видимому, первым обратил внимание на указанную роль придонного трения. Он ввел масштаб

$$L_D = \frac{(2E)^{3/2}}{\varepsilon} = \frac{(2E)^{1/2}}{\lambda},$$

где E — средняя кинетическая энергия в течении (как обычно, на единицу массы), а ε — скорость диссипации энергии из-за придонного трения. Согласно предсказаниям Лилли волновое число максимума спектра энергии оценивается как $35L_D^{-1}$ (что соответствует $L_{\max} = (2\pi/35)L_D \sim 0,5E^{3/2}/\varepsilon$), что удовлетворительно согласуется с результатами его численных расчетов, выполненных с пространственным разрешением 64^2 точки (максимальное волновое число $k_{\max} = 32$) и накачкой на волновом числе 8. Лилли предлагает модифицировать спектры в интервале энергии и интервале энтропии с учетом того факта, что скорость передачи энергии (и энтропии) по спектру изменяется при действии трения. Он записывает для интервала энергии (в пренебрежении вкладом от внутренней вязкости)

$$E(k) = \alpha \left[2 \int_0^k \lambda E(k) dk \right]^{2/3} k^{-5/3},$$

что приводит к спектру

$$E(k) = \alpha^3 k^{-5/3} [\lambda(k_c^{-2/3} - k^{-2/3})]^2.$$

Здесь k_c — некоторое предельное малое волновое число (cut-off wave number), на котором спектр обращается в нуль. Последняя формула описывает плавный переход к спектру $-5/3$ при стремлении волнового числа к бесконечности. Это, однако, не единственно возможная формула.

Следующее упоминание о роли внешнего трения можно найти в работе [83]. Здесь масштаб вводится через скорость диссипации турбулентной кинетической энергии:

$$L_D = \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^3}\right)^{1/2}. \quad (26)$$

Если, однако, для оценки ε использовать соотношение $\varepsilon \sim E\lambda$, как это сделано в работе [83], получается такая же оценка для масштаба, как и предложенная Лилли.

Впоследствии упоминания о придонном трении как о факторе, ограничивающем обратный каскад энергии, приводились неоднократно различными авторами (см., например, [84, 85]). Манин [10] пришел к выводу о существовании ограничивающего масштаба (26), рассматривая задачи устойчивости квазидвумерных течений с придонным трением. Зависимость (26) может быть переписана в терминах числа Рейнольдса по накачке и придонному трению. Для того чтобы сделать это, безразмерим уравнение (1) с $D = -\lambda\xi + D_u$, где второе слагаемое обозначает коротковолновую (ультрафиолетовую) часть диссипации, вводя масштаб времени λ^{-1} , масштаб завихренности λ , масштаб накачки l и амплитуду накачки F_0 . Тогда уравнение (1) переписется в виде

$$\partial_t' \xi' + [\psi', \xi'] = -\xi' + \frac{D_u}{\lambda^2} + \text{Re}_\lambda F'. \quad (27)$$

Здесь штрихи относятся к безразмерным величинам, а $\text{Re}_\lambda = F_0/\lambda^2$ есть число Рейнольдса по накачке и придонному трению. В терминах этого числа

$$L_D \sim l \text{Re}_\lambda^{3/4},$$

и мы получаем теоретическое предсказание для роста масштаба энергосодержащих движений с ростом накачки.

Понятно, что внешний масштаб, подобный L_D , можно построить и для других видов длинноволнового трения. Так, для атмосферных приложений представляет интерес квадратичное придонное трение. Если воспользоваться простейшей моделью этого трения вида $D_i = -\alpha v|v|$ в уравнении Навье – Стокса, где α — некоторый обратный масштаб, определяемый параметрами пограничного слоя (см. [86]), то величина накачки не будет являться существенным параметром: от нее будет зависеть только время выхода системы на статистически стационарный режим. В этом случае удобнее пользоваться естественным числом Рейнольдса, измеряющим отношение инерционного слагаемого к квадратичному трению. Это число Рейнольдса на масштабе накачки дается величиной $1/(l\alpha)$. Естественно потребовать,

чтобы на внешнем масштабе число Рейнольдса равнялось единице. Отсюда находим

$$L_D \sim \alpha^{-1} = l \text{Re}.$$

Закритичность системы в случае квадратичного трения определяется, таким образом, отношением масштабов и дается величиной числа Рейнольдса на масштабе накачки. Подробнее случай квадратичного трения рассмотрен в [87].

Вернемся к линейному придонному трению. Недостатком приведенных выше оценок внешнего масштаба является неявно используемое предположение о существовании инерционного интервала, в пределах которого поток энергии по спектру остается постоянным. Придонное трение экмановского типа, равно как выписанное выше квадратичное трение, нечувствительно к масштабу, и спектральный поток энергии уменьшается по мере переноса энергии на все большие и большие масштабы. Это означает, что инерционный интервал энергии оказывается разрушенным, как мы уже отмечали выше. Об инерционном интервале можно говорить только для узкого поддиапазона волновых чисел, в пределах которого поток энергии по спектру меняется несильно.

Проверка зависимости масштаба максимума спектра энергии от числа Рейнольдса выполнялась в работе [11]. В этой работе было показано, что масштаб максимума спектра растет с увеличением числа Рейнольдса медленнее, чем теоретическая зависимость $\text{Re}^{3/4}$. Расчеты в [11] выполнялись с разрешением 256^2 , придонное трение сохранялось на всех масштабах. Найденная зависимость близка к $\text{Re}^{0.4}$ в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса. Причина замедления роста масштаба действительно связана с тем, что поток энергии по спектру не является постоянным.

На рисунке 6а приведены спектры энергии, полученные в наших численных экспериментах для разных значений λ (0,05; 0,03; 0,02 и 0,015). Разрешение составляет 512^2 . Мощность источника накачки одинакова во всех случаях, как видно из рис. 6б, где приведены соответствующие этим спектрам потоки энергии. Поток энергии вычисляется как сумма

$$\Pi_\varepsilon(k) = - \sum_{k'=0}^k T_{k'}. \quad (28)$$

Поскольку эта сумма, взятая по всем волновым числам, обращается в нуль, суммирование может быть выполнено и от текущего волнового числа до максимального, с обращением знака перед суммой. Поток энергии — это суммарный перенос через волновое число k из диапазона $0, k$. Если эта величина отрицательна, энергия переносится против направления возрастания волнового числа. Из рисунка 6а видно, что в диапазоне от нуля до волнового числа накачки k_F энергия действительно переносится в сторону малых волновых чисел, однако поток энергии нигде не остается постоянным из-за влияния придонного трения. С уменьшением λ (или увеличением накачки) в исследованном диапазоне зависимость потока энергии от волнового числа делается более пологой в окрестности k_F . Понятно, что при увеличении накачки придонное трение может оказаться недостаточно сильным для того, чтобы остановить

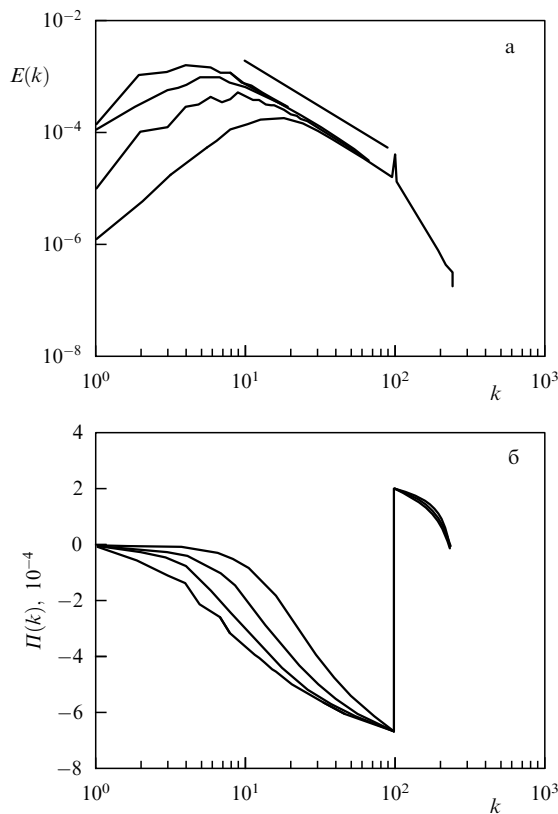


Рис. 6. Спектры энергии (а) и потока энергии (б) для разных значений коэффициента придонного трения $\lambda = 0,05; 0,03; 0,02; 0,015$ при неизменной мощности накачки. Прямая линия на верхнем рисунке соответствует спектральному наклону $-5/3$.

обратный поток энергии. В таком случае энергия будет конденсироваться на максимально допустимом масштабе в системе и характеристики турбулентности станут заведомо неуниверсальными — они будут зависеть от этого масштаба.

Зависимость потока энергии от волнового числа означает, что внешний масштаб турбулентности должен определяться не полной скоростью диссипации ε , а только той частью спектрального потока, которая поступает на большие масштабы. Так, для спектров на рис. 6а ε одинаково и оценка (26), если бы она была применима, дает изменение масштаба в 6,1 раза, тогда как наблюдаемое изменение составляет около 3 раз. Вряд ли можно надеяться на то, что существует универсальная зависимость внешнего масштаба от управляющего параметра (числа Рейнольдса по накачке и придонному трению). Мы лишь отметим, что аппроксимация спектрального потока линейной функцией в диапазоне $0 \leq k \leq k_F$ приводит к зависимости $L_D \sim \text{Re}_\lambda^{1/2}$, что достаточно близко к наклону 0,4 в [11].

В [11] отмечается, что наклон спектров в интервале энергии в области волновых чисел, прилегающих к k_F , оказывается близким к $-5/3$. Это же видно из рис. 6а (проведенная на этом рисунке прямая линия соответствует наклону $-5/3$). Этот факт является неожиданным в свете непостоянства потока энергии по спектру (рис. 6б). Заключение, что наклон спектра в интервале, примыкающем к k_F , слабо чувствителен к присутствию придонного трения, можно сделать и по результатам некоторых

других работ (см., например, [64]). Наоборот, включение гипотезы [44] хотя и приводит к практически постоянному спектральному потоку энергии, может приводить к спектру, наклон которого далек от $-5/3$.

Итак, роль придонного трения сводится к формированию внешнего масштаба турбулентности. Ранние оценки этого масштаба, основанные на предположении о постоянстве энергии по спектру, дают для него несогласующиеся с численным экспериментом зависимости. В силу неизбирательности придонного трения к масштабам мы имеем дело с системой, где инерционный интервал энергии, строго говоря, разрушен, но перенос энергии все равно осуществляется в сторону возрастания масштаба. Внешнему масштабу может быть дана следующая физическая интерпретация. Характерное время, связанное с вихрями масштаба $1/k = L_D$, есть

$$(k^2 \Pi(k))^{-1/3}.$$

Если это время больше, чем $1/\lambda$, вихри затухают, так и не совершив полного оборота. Более медленные компоненты поля скорости должны совсем отсутствовать.

Смит и Яхот [27] утверждают, что при наличии придонного трения в интервале энергии должен наблюдаться спектр k^{-3} , получающийся в предположении баланса между нелинейным переносом энергии и диссипацией из-за трения. Их рассуждения выглядят следующим образом. Предположим, что

$$\Delta v = v_i(\mathbf{r} + \mathbf{i}\mathbf{r}) - v_i(\mathbf{x}) \sim r^q.$$

Тогда из баланса λv_i и $v_j \partial v_i / \partial x_j$ следует, что $q = 1$ и

$$E(k) \sim k^{-2q-1} = k^{-3}.$$

Нетрудно, однако, видеть, что такой баланс эквивалентен приравнению λ и градиента скорости на масштабе $1/k$. Последний как раз характеризует обратное время для движений с масштабом $1/k$. Таким образом, указанный баланс соответствует условию прекращения переноса через волновое число k в сторону малых волновых чисел (см. предыдущий абзац). Баланс, имеющий место в действительности, выполняется между диссипацией энергии $\lambda E(k)$ на волновом числе k и транспортом энергии в это волновое число $-\partial \Pi(k) / \partial k$. Он дает только связь между спектром энергии и потоком энергии.

4.3. Масштаб Райнса

Райнс [8] первым рассмотрел влияние бета-эффекта на поведение двумерной турбулентности. Его рассуждения выглядят следующим образом. Граница раздела между волновой и турбулентной динамикой проходит там, где сравниваются слагаемые

$$[\psi, \beta y] = \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и $[\psi, \xi]$ в уравнении для ПЗ, т.е. там, где крутизна волн Россби равна единице. Если рассматривать ансамбль вихрей со спектром, сосредоточенным вокруг волнового числа $k = k_0$, средняя фазовая скорость будет $c_p = \beta / (2k_0^2)$ для случайной ориентации волновых гребней (возможно только распространение на запад). Тогда

мера нелинейности может быть оценена как

$$\epsilon = \frac{U}{c_p} = \frac{2k_0^2 U}{\beta},$$

где U — среднеквадратичное значение скорости турбулентных пульсаций. Если этот параметр мал по сравнению с единицей, нелинейное слагаемое мало и динамика должна определяться волнами Россби. Волны распространяются и поэтому Райнс делает предположение, что нелинейный каскад энергии на большие масштабы будет подавлен (компоненты, образующие триплет, должны находиться в резонансе по частоте). Таким образом, существует масштаб, задаваемый волновым числом

$$k_\beta^R = \left(\frac{\beta}{2U}\right)^{1/2},$$

ограничивающий каскад турбулентной энергии в сторону малых волновых чисел. Этот масштаб носит название *масштаба Райнса*. Коэффициент 2 в знаменателе дроби в этой формуле в силу ее качественного характера можно не учитывать.

Второе замечание, которое сделано в работе [8], касается вида спектров энергии в области малых волновых чисел. Поскольку перенос энергии в турбулентном течении в область малых волновых чисел означает также уменьшение частоты (с турбулентными движениями можно ассоциировать дисперсионное соотношение вида $\omega = kU$), а для волн Россби характерно уменьшение частоты при росте волнового числа, обе тенденции могут быть согласованы, если энергия поступает в направлении юг–север (в $\mathbf{k}$ -пространстве). Это означает формирование струй в западном и восточном направлениях.

Численные расчеты затухающей турбулентности, выполненные Райнсом при разрешении 64×64 (конечные разности) и 128×128 и 64×64 (псевдоспектральный метод) подтвердили его оценки и показали, что действительно в присутствии бета-эффекта происходит формирование течения с зональной структурой.

Рассуждения Райнса, положенные в основу теории двумерной турбулентности на бета-плоскости, повторялись затем многими авторами, хотя они и не являются строгими, если их понимать буквально. Это видно хотя бы из того соображения, что фазовая скорость волны и среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций по-разному преобразуются при обращении времени. Истинная причина влияния бета-эффекта состоит в уменьшении эффективности нелинейного переноса в области, где бета-эффект существен (см. далее), и масштаб Райнса — одна из возможных оценок границы этой области.

Известны и другие оценки. Так, Холловей и Хендершотт выполнили численные эксперименты с затухающей двумерной турбулентностью на бета-плоскости [88] для проверки используемого ими статистического замыкания (модель пробного поля). Они обнаружили, что течение имеет сильную анизотропию в диапазоне волновых чисел

$$k \leq k_\beta^H = \frac{\beta}{Z},$$

где Z — среднеквадратичное значение завихренности течения. Эта оценка имеет другую зависимость от параметра β , чем оценка Райнса.

Анализ возможных масштабов и физическая картина поведения двумерной турбулентности на бета-плоскости даны в работе [12], и мы далее кратко изложим полученные там результаты.

Рассмотрим турбулентность, возбуждаемую изотропным источником на достаточно большом волновом числе k_f . Пусть поток энергии на большие масштабы характеризуется скоростью передачи энергии ε . Тогда время обращения вихря может быть оценено как

$$\tau_t(k) = \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}.$$

Обратная величина может служить оценкой сдвига или же частоты турбулентности. Совпадение ее с частотой волн Россби и определяет границу между волнами и турбулентностью (в рассуждениях такого типа должны сравниваться модули величин). Если анизотропия в формуле (25) не учитывается, т.е. k_x заменяется на k , получается следующее выражение для волнового числа перехода:

$$k_\beta = \left(\frac{\beta^3}{\varepsilon}\right)^{1/5}.$$

Все три волновых числа k_β^R , k_β^H , k_β различны. Валлис и Малтруд поясняют связь между масштабами так. Если сдвиг оценить как

$$s(k) = \left[\int_{k_0}^k (k')^2 E(k') dk' \right]^{1/2},$$

где k_0 — наименьшее волновое число, ограничивающее энергосодержащие движения, то стандартный спектр $-5/3$ ведет к выписанной выше оценке для τ_t (с множителем $(3C_2/4)^{-1/2} \approx 0,46$, если принять для константы Колмогорова $C_2 = 6$) и, следовательно, к оценке k_β . Если спектр таков, что участок, определяющий энергию, узок, сдвиг будет определяться полной энтропией и будет иметь место оценка для переходного масштаба, предложенная в работе [88]. Оценка Райнса получается при выборе оценки для сдвига

$$s(k) = k^3 E(k).$$

Для степенного спектра эта оценка отличается от k_β только множителем.

Приравнивание частоты $1/\tau_t$ к абсолютному значению частоты волны Россби (25) приводит к следующим выражениям для граничной кривой:

$$\begin{aligned} k_x &= \pm k_\beta \cos^{8/5} \theta, \\ k_y &= k_\beta \sin \theta \cos^{3/5} \theta, \end{aligned} \quad (29)$$

где θ — полярный угол, характеризующий направление вектора $\mathbf{k}$ и изменяющийся в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Эта зависимость показана на рис. 7. Она должна характеризовать форму спектра двумерной турбулентности на бета-плоскости.

В работе [12] проверка предсказаний относительно формы спектра проводится двумя путями. Первый состоит в использовании так называемого EDQNM (Eddy-Damped Quasi Normal Markovian) замыкания

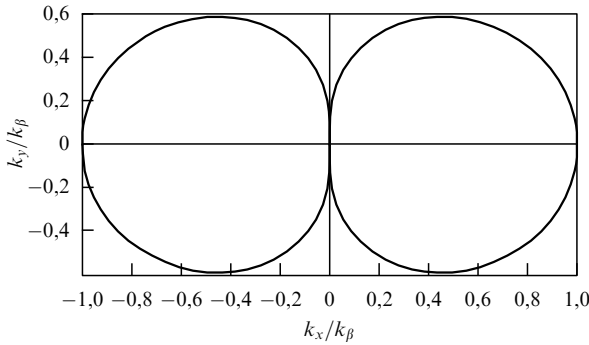


Рис. 7. Граничная кривая в пространстве волновых чисел, соответствующая выражениям (29).

(элементарный вывод этого замыкания содержится в [7], более подробное описание аналитических статистических теорий содержится в [19]). Диссипация и накачка при этом не учитываются (хотя в принципе это возможно). Вычисления показывают, что по мере эволюции начальный изотропный двумерный спектр энергии приобретает характерную ∞ -образную форму. Эта форма, однако, не является стационарной. Статистически стационарное состояние в отсутствие диссипации и накачки определяется интегралами сохранения и является изотропным. Поэтому при увеличении времени интегрирования анизотропия будет утеряна. Укажем здесь, что аналогичные результаты получаются и при рассмотрении поведения ансамбля волн Россби в рамках кинетического уравнения. Соответствующее изложение вопроса можно найти в обзоре Резника в книге [89].

EDQNM замыкание, однако, имеет то преимущество перед прямыми численными расчетами, что позволяет наглядно показать, к каким последствиям приводит добавление слагаемого $\beta \partial \psi / \partial x$, ответственного за бета-эффект, в уравнение трансформации квазигеострофической ПЗ. Теория, использующая это замыкание, формулируется в представлении Фурье для спектральных плотностей энергии или энтропии. В рамках этого замыкания спектральная плотность энергии подчиняется уравнению

$$\left(\partial_t + d(k) - \frac{i\beta k_x}{k^2} \right) E_{\mathbf{k}}(t) = \text{Re} \{ T_{\mathbf{k}}(t) \} + F_{\mathbf{k}}(t),$$

$$T_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{0}} \theta_{\mathbf{kpq}} a_{\mathbf{kpq}} (E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{k}}),$$

$$a_{\mathbf{kpq}} = \frac{2(\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2}{k^2 p^2 q^2} (p^2 - q^2)(k^2 - p^2),$$

где $\theta_{\mathbf{kpq}}$ — время релаксации триады $\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $d(k)$ обозначает часть линейного оператора, связанную с диссипацией, $F(k)$ — мощность источника энтропии.

При наличии бета-эффекта времена релаксации записываются как (см. также [88])

$$\theta_{\mathbf{kpq}}^{-1} = i(\omega_{-\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}}) + \mu_{-\mathbf{k}} + \mu_{\mathbf{p}} + \mu_{\mathbf{q}},$$

где

$$\mu_{\mathbf{k}} = a \left(\int_0^k l^2 E(l) dl \right)^{1/2}$$

— вихревая скорость релаксации (a — константа порядка единицы) и $\omega_{\mathbf{k}}$ — частота волны Россби с волновым вектором $\mathbf{k}$; $\mu_{\mathbf{k}}$ представляет собой сдвиг, растягивающий компоненты с волновым числом k . При уменьшении волнового числа частота волны Россби увеличивается по абсолютному значению и начинает превосходить $\mu_{\mathbf{k}}$. Это приводит к уменьшению времени релаксации, а значит, и веса, с которым триада входит в нелинейное слагаемое. Таким образом, триады, в которые входят компоненты с большими (по абсолютной величине) значениями частот волн Россби, оказываются "выключенными". Соответственно нелинейный перенос сильно подавлен для тех k , которым соответствуют большие частоты. Основным механизмом, по которому бета-эффект действует на квазидвумерную турбулентность, не излучение волн, а подавление нелинейного переноса за счет сильного уменьшения времени когерентности третьих моментов. Условие $|\omega_{\mathbf{k}}| = \mu_{\mathbf{k}}$ или эквивалентное ему $k = k_{\beta}$ служит естественной границей, разделяющей (в $\mathbf{k}$ -пространстве) две области с существенно различными структурами нелинейных взаимодействий. Там, где анизотропия существенна, взаимодействия оказываются малоэффективными из-за того, что времена релаксации третьих моментов малы. То же самое можно сформулировать на языке триад. Если линейное слагаемое, пропорциональное β в уравнении трансформации ПЗ, существенно, нелинейные взаимодействия носят резонансный характер только при выполнении условия синхронизма для частот. Последнее выполнено автоматически в отсутствие бета-эффекта (моды имеют нулевую частоту).

Численные расчеты в работе [12] выполнены для сетки 256×256 точек с изотропной накачкой в окрестности волнового числа 80. Валлис и Малтруд отмечают, что для достижения стационарного состояния придонное трение должно присутствовать на всех масштабах.

Число k_{β} определяется потоком энергии и остается постоянным в тех случаях, когда источник поддерживает этот поток на заданном постоянном уровне (например, если накачка — дельта-коррелированный по времени гауссов процесс; см. [27, 44, 49]). Если длинноволновая диссипация сосредоточена при $k < k_{\beta}$, энергия медленно проникает за барьер k_{β} , и это волновое число, таким образом, перестает соответствовать масштабу, на котором поток энергии остановлен [49]. Волновое число k_{β}^R (или k_{β}^H для быстро убывающего спектра), тем не менее, может оставаться адекватным и в этой ситуации. Следствием проникновения энергии через k_{β} является уменьшение волнового числа k_{β}^R до тех пор, пока оно не попадет в область диссипации, поскольку накопление энергии при стационарной накачке означает увеличение среднеквадратичной скорости. Таким образом, мы приходим к выводу, что числа k_{β} и k_{β}^R имеют различный смысл, что, очевидно, связано с появлением анизотропии и отклонением спектров от степенного закона $-5/3$. Мы вернемся к этому вопросу несколько ниже. Здесь же мы заметим, что для вынужденной турбулентности в стационарном состоянии волновое число Райнса k_{β}^R , число k_{β} и волновое число внешнего масштаба, задаваемого придонным трением, должны быть взаимосвязаны. Вопрос о том, насколько хорошо k_{β}^R параметризует волновое число максимума спектральной плотности энергии при наличии придонного трения, на настоящий момент остается неисследованным.

Стационарный двумерный спектр энергии, приведенный в [12] для $k_\beta = 10$, имеет характерную ∞ -образную форму. При k , несколько превышающем k_β , спектр близок к изотропному. Плотность энергии внутри "волновых" ∞ -образных областей мала. Эта ситуация типична и для других экспериментов (см., например, [49]). Поэтому о k_β действительно не следует говорить как о волновом числе, отделяющем волны от турбулентности. В экспериментах [12] это волновое число приближенно оценивает и положение пика энергии, и границу между изотропной и анизотропной турбулентностью. В общем случае k_β соответствует скорее последней границе. Это так или иначе отмечается многими авторами.

В качестве иллюстрации характеристик стационарной турбулентности на бета-плоскости мы приводим на рис. 8 результаты наших расчетов, выполненных на сетке 256×256 точек с накачкой на волновом числе $k \in [78, 82]$, при придонном трении с $\lambda = 0,01$ и $\beta = 60$. В стационарном режиме это значение β приводит к $k_\beta^R \approx 18$ и $k_\beta \approx 50$. Рисунок 8а представляет реализацию функции тока при $t = 520$. Палитра дважды меняется от черного к белому. Видно, что турбулентность органи-

зуется в систему струй, ориентированных вдоль оси y (широтных кругов). Эти струи медленно меняются во времени, и рис. 8в воспроизводит карту осредненной по x -направлению x -компоненты скорости (зонально усредненной зональной скорости) за все время эксперимента. Суммарная средняя энергия, запасенная в течении, остается практически постоянной после $t = 120$, однако спектр энергии продолжает изменяться и после этого момента времени. Причина состоит в том, что процесс формирования струй является медленным. Западные струи (их скорость отрицательна и они имеют белую границу) более широки, чем восточные, и волнообразные движения в их пределах выражены сильнее. Согласно [12] струи линейно устойчивы, и поэтому высказываемая в ряде работ точка зрения о том, что размер струи неустойчивого течения на бета-плоскости определяется условием критической устойчивости, не подтверждается.

Рисунок 8б представляет реализацию спектра энергии для $t = 520$, приведенного к положительным волновым числам и умноженного на $k^{5/3}$ для компенсации наклона теоретического спектра и на k для учета цилиндрической расходимости. Такой спектр вдоль каждого луча может

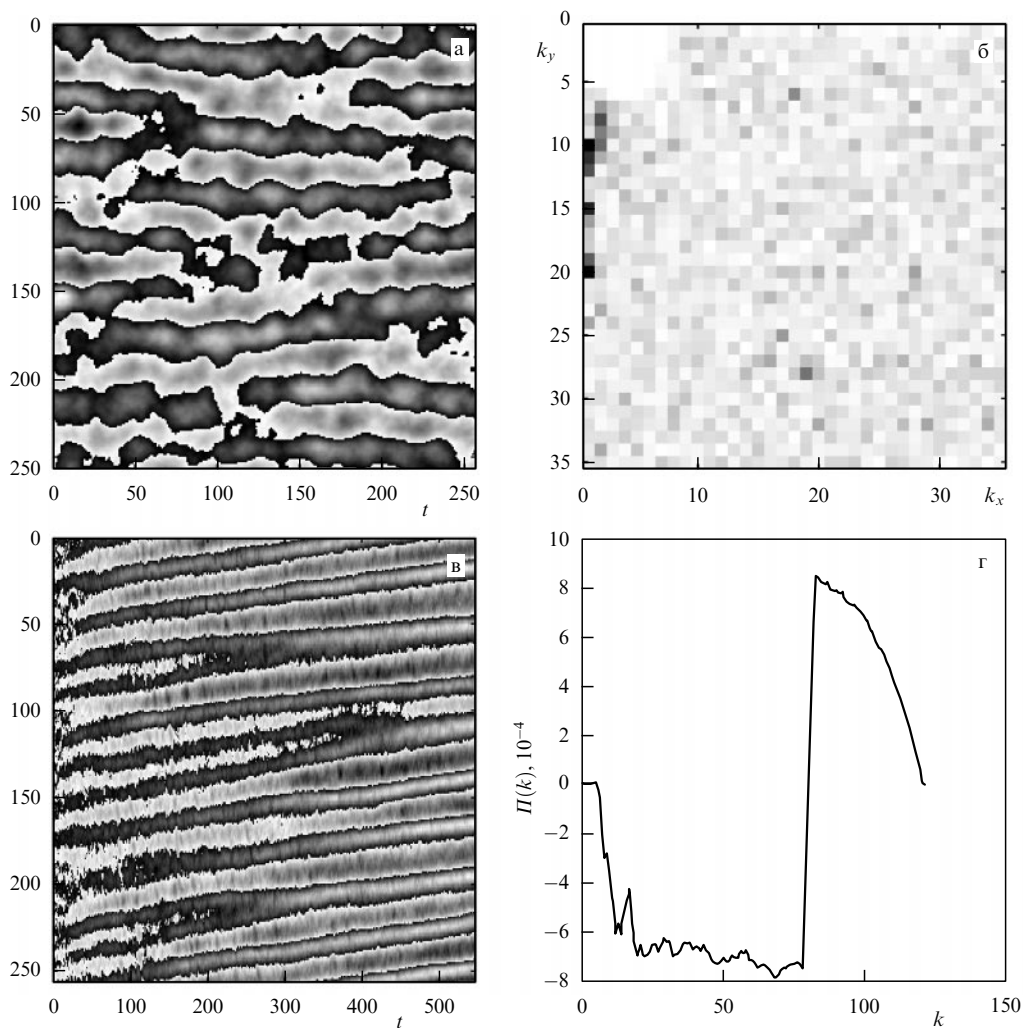


Рис. 8. Двумерная турбулентность на бета-плоскости. (а) Функция тока реализации поля скорости при $t = 195$ (палитра дважды меняется от черного к белому); (б) соответствующий ей спектр энергии $kE(k_x, k_y)$, приведенный к положительным значениям k_x, k_y ; (в) поведение во времени зонально усредненного поля зональной скорости (палитра дважды меняется от черного к белому); (г) поток энергии по спектру. Стабилизация придонным трением с $\lambda = 0,01$, время интегрирования — $t = 195$, $\beta = 60$, $k_\beta^R \approx 18$, $k_\beta \approx 50$.

быть сопоставлен с компенсированным изотропным спектром. Для лучшей визуализации амплитуды компонент с волновыми числами (0, 10) и (1, 8) уменьшены в 4 и 2 раза соответственно. Спектр также имеет резкую границу со стороны малых волновых чисел, показывающую, что энергия в компоненты с малыми волновыми числами не проникает. Максимум спектра достигается при $\mathbf{k} = (0, 10)$ и соответствует движениям, ориентированным вдоль широтных кругов. Это зональные струи чередующихся направлений, наблюдающиеся в поле течения в физическом пространстве (полный зональный поток, естественно, обращается в нуль). Максимум незональной части энергии наблюдается на волновом числе (1, 8) и имеет несколько меньшую амплитуду, чем максимум зональной компоненты. Оба этих волновых числа меньше, чем теоретические оценки, причем k_β переоценивает масштаб остановки обратного каскада приблизительно в 5 раз. Вне области максимумов спектр энергии практически изотропен и близок к спектру с наклоном $-5/3$.

Рисунок 8г показывает проинтегрированный по углу поток энергии по спектру в зависимости от волнового числа, осредненный по последним 10 единицам времени. Поток энергии не является постоянным и слабо уменьшается при уменьшении волнового числа приблизительно до $k = 15$, что соответствует волновому числу k_β^R . Непостоянство стационарного потока энергии связано с ее диссипацией за счет придонного трения, а сильное уменьшение потока из-за действия придонного трения происходит там, где плотность энергии велика. Появление барьера k_β^R , таким образом, взаимосвязано с конкретным механизмом диссипации на малых волновых числах. Понятно также, что при увеличении коэффициента придонного трения поток энергии будет убывать сильнее с волновым числом и наступление равновесия между переносом энергии и диссипацией будет достигаться при большем волновом числе. Поскольку k_β не зависит от коэффициента придонного трения (пока оно не слишком велико на масштабе накачки), то, увеличивая придонное трение, можно прийти к ситуации, когда k_β действительно близко к волновому числу пика спектра энергии.

Форма двумерного спектра, представленного в работе [12], ближе к ∞ -образной, чем форма спектра на рис. 8в. Для того чтобы точнее охарактеризовать стабилизирующее действие бета-эффекта, в [12] вводится оценка барьера как волнового числа максимума спектра энергии, осредненного по углу $(-\pi/6, \pi/6)$ вокруг направления k_x . Для него будем использовать обозначение k_β^* . Волновое число k_{jet} , соответствующее абсолютному максимуму спектра, всегда меньше так определенного барьерного волнового числа k_β^* (поскольку бета-эффект оказывает незначительное влияние на компоненты с волновыми векторами, ориентированными в направлении север–юг, и энергия проникает в этом направлении), хотя и отличается от него несильно (отличие может быть заметным при специальном выборе длинноволнового трения; см. ниже). Для эксперимента, представленного на рис. 8, $k_\beta^* \approx 12$, а $k_{jet} = 10$, и отличие также не слишком велико.

В [12] поведение волновых чисел k_β^* и k_{jet} в зависимости от параметра β , найденное в численных экспериментах, сравнивается с теоретическими оценками. Авторы отмечают, что все теоретические оценки переоценивают

указанные волновые числа, хотя и остаются достаточно близкими к ним. В качестве возможной причины этого несовпадения они указывают на придонное трение. Как мы уже поясняли выше, придонное трение действительно определяет степень соответствия между спектральным пиком энергии и теоретическими оценками.

В работе [49] длинноволновое трение выбирается в виде

$$D_i = \nu_i (-1)^{n+1} \Delta^{-n}$$

с $n = 5$. Пространственное разрешение 512×512 и накачка обеспечивают постоянный поток энергии. Рассматриваются три случая: $\beta = 0$, $k_\beta = 56$ и $k_\beta = 158$. Накачка находится в диапазоне $k \in [100, 105]$. Выбор трения приводит к тому, что k_β не может быть ограничивающим масштабом, поскольку длинноволновая диссипация сосредоточена на существенно меньших волновых числах. Авторы утверждают, что спектр $-5/3$ наблюдается в изучаемых ими случаях почти всюду, за исключением малой окрестности углов вблизи направления k_y (см. рис. 8в, где спектр ведет себя таким же образом). В этом направлении спектр существенно круче и характеризуется спектральным наклоном -5 (спектры, о которых идет речь, получаются осреднением по малому интервалу углов $\pm\pi/12$ вокруг заданных направлений). Авторы называют спектр с таким спектральным наклоном спектром Райнса, что, однако, неточно. Райнс в работе [8] действительно приводит соотношение

$$E(k) = c_1 \beta^2 k^{-5},$$

однако это не спектр, а уравнение кривой, отделяющей волны от турбулентности (в терминологии Райнса). В самом деле, делая замену

$$E(k)k = \frac{1}{2} U(k)^2,$$

получаем соотношение для волнового числа Райнса k_β^R . Еще более простое соображение сводится к тому, что в выражение $E(k) = c_1 \beta^2 k^{-5}$ не входят никакие характеристики потока энергии по спектру, что вряд ли возможно. Почему наблюдается спектр с наклоном -5 , остается без объяснения. Не исключено, что определенную роль в этом играет выбранный в [49] закон длинноволнового трения и ширина углового интервала, по которому производится усреднение.

Появление зональных струй в турбулентности на бета-плоскости имеет принципиальное значение: струйные течения являются неотъемлемой частью глобальной циркуляции атмосферы Земли и Юпитера, и простые модели могут дать идею о механизме формирования этих струй. Такая мотивация привела к появлению расчетов для более реальной, сферической геометрии.

Вильямс [90], по-видимому, первым выполнил расчеты вынужденной двумерной турбулентности на сфере и обнаружил формирование зональной структуры. Расчетная область, однако, составляла 1/16 часть поверхности сферы в силу наложенных условий симметрии и использовался спектр возбуждающей силы специального вида. Расчеты для сферической геометрии в работе [66] не показывают столь отчетливой зональной структуры, по-видимому, из-за влияния диссипации.

Из последних работ, посвященных этой тематике, мы упомянем статьи [42, 47, 91]. В [47] изучается вынужденная турбулентность в системе без придонного трения (коротковолновая диссипация присутствует). Авторы отмечают, что длинноволновая диссипация не включается специально, поскольку она может воздействовать на динамику течения. В принципе статистически стационарное состояние возможно и в этом случае, поскольку существует (пусть малый) прямой каскад энергии вследствие наличия диссипации при больших волновых числах и, следовательно, диссипация энергии. Авторы, однако, замечают, что исследование статистически стационарных состояний в отсутствие длинноволновой диссипации вряд ли возможно в современных численных экспериментах.

Вместо стационарных режимов в работе изучается состояние турбулентности по прошествии 1000 юпитерианских дней. Исследуется зависимость количества струй от угловой скорости вращения в экспериментах с накачкой на разных сферических гармониках. Для сферической геометрии рассуждения, подобные рассуждениям Райнса, дают следующую оценку для граничного волнового числа (номера сферической гармоники):

$$n_{\beta}^R(1 + n_{\beta}^R) = \frac{\Omega R}{U}, \quad (30)$$

где Ω — угловая скорость вращения и R — радиус сферы; U , как и в работе Райнса, — среднеквадратичная скорость вихревых движений.

Модель [47] имеет пространственное разрешение 600×300 точек с обрезанием Т199 (треугольная схема обрезания высших гармоник, оставляются сферические гармоники с $n \leq 199$). Полученная в этой работе зависимость количества струй от частоты вращения воспроизведена на рис. 9. Тенденция к монотонной зависимости прослеживается лишь в эксперименте с накачкой на полном волновом числе $n_f = 79$, когда волновое число накачки и количество струй существенно различны, тогда как в остальных случаях $n_f = 20$ и $n_f = 40$ количество струй изменяется немонотонно. Когда волновое

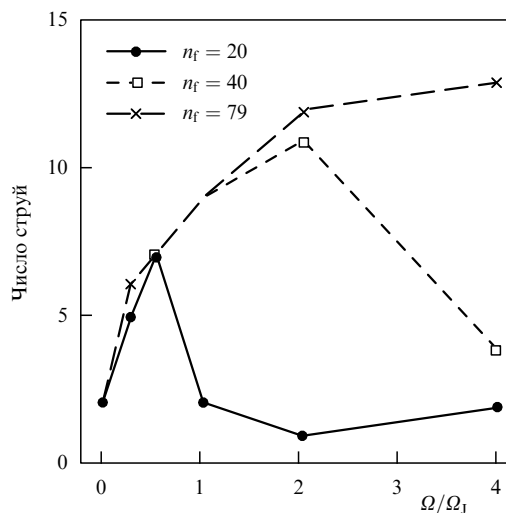


Рис. 9. Число струй в зависимости от угловой скорости вращения для нестационарного турбулентного течения на сфере по прошествии 1000 юпитерианских дней [47].

число накачки сравнительно мало, а скорость вращения велика, струйная структура наблюдается только в высоких широтах, где возникает циркумпольный вихрь, ограниченный сильной восточной струей. На остальных широтах присутствуют лишь волнообразные движения. По-видимому, это связано с недостаточной спектральной шириной интервала энергии, приводящей к тому, что масштаб системы и масштаб струи оказываются слишком близкими.

Чо и Полвани [42] рассматривают затухающую турбулентность на сфере, подчиняющуюся уравнениям мелкой воды. О дополнительных эффектах, связанных с использованием этих, более общих уравнений, мы будем говорить далее. Здесь же остановимся на влиянии вращения. В работе используется модель с треугольным обрезанием в пространстве сферических гармоник Т170 (применяется сетка 512×256 для выполнения преобразований).

Поведение затухающей турбулентности характеризуется поведением центроида энергии

$$\bar{n}(t) = \frac{\sum_n n E(n, t)}{\sum_n E(n, t)},$$

где n — номер сферической гармоники. Центроид представляет меру масштаба, на котором обратный каскад остановлен из-за бета-эффекта. Во всех экспериментах при быстром вращении $\bar{n} < n_{\beta}^R$ (последнее число определяется по β на экваторе). Отсюда делается заключение, что масштаб Райнса является плохой мерой количества меридиональных струй (заметим, что буквального совпадения этих величин и не следует ожидать, имея в виду результаты для плоской геометрии). При увеличении угловой скорости вращения на начальном этапе эволюции наблюдается укручение спектров энергии, что может быть проинтерпретировано как влияние остановки обратного каскада. Однако при большом времени интегрирования эта тенденция делается плохо различимой. При малых числах Россби эволюция турбулентности сводится к формированию двух антициклонических полярных вихрей в соответствии с результатами более ранней работы [92] (ср. [47]).

В работе [91] изучается как затухающая турбулентность, так и вынужденная турбулентность в системе с придонным трением. В некоторой степени работа повторяет анализ работы [12] для случая сферической геометрии. Используется модель с обрезанием Т85 на сетке 256×128 точек и с накачкой на $n_f = 55$. Двумерный спектр энергии как для затухающей турбулентности, так и для вынужденной турбулентности в статистически стационарном состоянии выглядит похожим на спектр в случае плоской геометрии. Именно, энергия сосредотачивается в основном в модах с близким к нулю зональным волновым числом m . Отличие случая сферической геометрии от случая плоской геометрии состоит в том, что струи в высоких широтах являются более широкими и менее сильными, что согласуется с наивными представлениями об уменьшении β с широтой. Струи менее устойчивы в экспериментах по затухающей турбулентности, чем в экспериментах с накачкой, где они являются квазистационарными (заметим, что, в отличие от случая плоской геометрии с периодическими граничными условиями по обоим координатам, струи не могут смещаться вдоль меридиана в

сферической геометрии, поскольку β обращается в нуль на полюсах).

В работе [91] различаются полная среднеквадратичная скорость и среднеквадратичная скорость вихрей, получающаяся при вычете зонального среднего из полной скорости. Зависимости среднеквадратичных скоростей от среднего волнового числа $[n(n+1)]_{CM}^{1/2}$ воспроизведены на рис. 10 (последнее определяется из отношения средней зональной энтропии к средней зональной энергии). Качественно они следуют соотношению, вытекающему из (30) при замене $n_\beta^R(1+n_\beta^R)$ на квадрат среднего волнового числа.

Важным результатом работы является анализ спектральных потоков, показывающий, что струи поддерживаются в стационарном состоянии за счет растяжения мелкомасштабных вихрей с масштабом, близким к масштабу накачки, вследствие сдвига в самих струях. При этом промежуточные масштабы фактически не вовлечены во взаимодействия при усреднении по времени. Энергия в вихревой моде, определяемой как разность между полным полем и зональным средним, имеет пик на масштабе Райнса. Крупные вихри, однако,

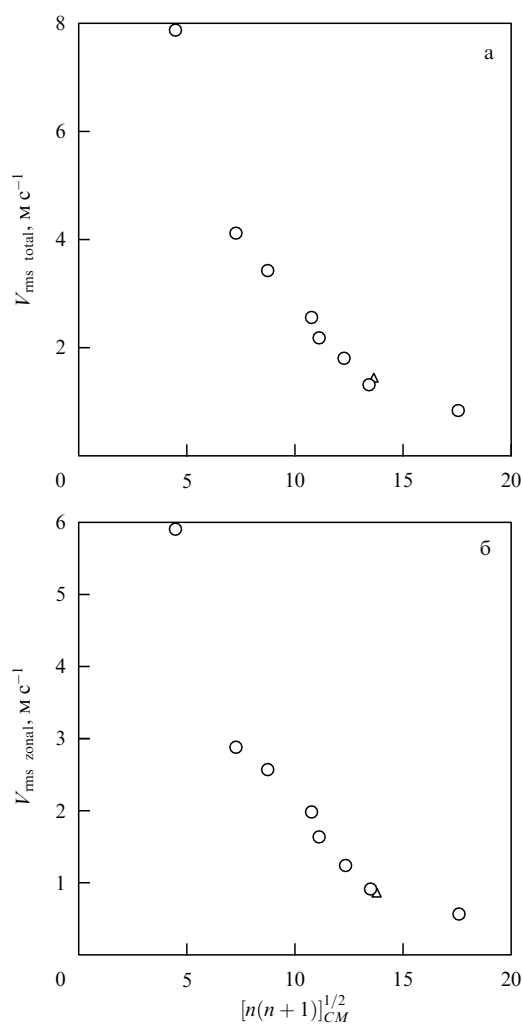


Рис. 10. Зависимость полной среднеквадратичной скорости пульсаций (а) и среднеквадратичной скорости зональной компоненты (б) от среднего волнового числа в численных экспериментах [91]. Квадрат среднего волнового числа определяется как отношение средней энтропии к средней энергии.

в среднем почти не взаимодействуют с зональным течением. Эти результаты, во-первых, еще раз подчеркивают нелокальность взаимодействий, характерных для двумерной турбулентности, и, во-вторых, указывают на то, что масштаб струи и масштаб Райнса — отдельные понятия. Поддержание струй динамически не связано со структурами на масштабе Райнса, ответственными за максимум вихревой активности.

В заключение данного раздела повторим, что имеется несколько похожих теоретических оценок для волнового числа, ограничивающего мелкомасштабную изотропную турбулентность на бета-плоскости от турбулентности, подверженной действию бета-эффекта. Волновое число k_β является, по-видимому, наилучшей оценкой для границы между изотропной и анизотропной турбулентностью, как указывается в [49], хотя, как мы видели, она может сильно завывать эту границу. Оценка Райнса обычно описывает некоторое промежуточное волновое число между k_β и волновым числом спектрального максимума. Последнее соответствует масштабу восточных и западных струй, устанавливающихся в турбулентном течении на бета-плоскости. Следует, однако, отметить, что оценки являются качественными в том смысле, что вряд ли возможно охарактеризовать переход от изотропной к анизотропной турбулентности одним масштабом. По историческим причинам чаще всего используется оригинальная формулировка самого Райнса, хотя следует заметить, что даже здесь нет однозначного толкования, и разные авторы понимают под среднеквадратичной скоростью пульсаций разные величины.

Оказывается, что турбулентная энергия почти не попадает в область, где она должна вырождаться в ансамбль волн Россби, а наоборот, сосредотачивается вдоль направления (в волновом пространстве) север–юг. Поддержание струй в вынужденном случае в основном происходит за счет прямых взаимодействий с компонентами течения на масштабе вблизи масштаба накачки (волны Россби не вовлечены).

Дополнительную неоднозначность вносит присутствие длинноволновой диссипации (при моделировании стационарной турбулентности), которая сама по себе способна формировать масштаб, на котором подавляется обратный перенос энергии. Является ли волновое число Райнса (или ему подобные) универсальной оценкой внешнего масштаба в присутствии диссипации, не ясно.

4.4. Конечность радиуса Россби–Обухова

В предыдущем разделе мы говорили о геострофической турбулентности на бета-плоскости и на сфере в пределе бесконечно большого радиуса Россби–Обухова. Его конечность приводит к новым эффектам. Уравнение трансформации ПЗ с конечным радиусом Россби–Обухова иногда называют уравнением для ПЗ в эквивалентно баротропной жидкости. В физике плазмы оно известно как уравнение Хасегавы–Мимы (Hasegawa–Mima equation) и применяется для моделирования поведения турбулентности дрейфовых волн.

Чтобы рассмотреть эффекты конечного радиуса Россби–Обухова, мы исключим волны Россби, считая, что параметр Кориолиса постоянен (приближение f -плоскости). В случае конечного радиуса Россби–Обухова, как известно, локализованное распределение ПЗ порождает локализованное распределение скорости,

экспоненциально затухающее при удалении от области ПЗ. Действительно, связь между ПЗ и функцией тока в этом случае имеет вид

$$\Delta\psi - \frac{1}{L_0^2}\psi = \omega_q.$$

Взяв $\omega_q = \omega_0\delta(|r - r_0|)$, мы получаем функцию Грина этого уравнения

$$G(r, r_0) = -\frac{1}{2\pi}\omega_0 K_0\left(\frac{r - r_0}{L_0}\right),$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка, ведущая себя при больших значениях аргумента, как $\exp(-x)$. Эта локализованность означает, что взаимодействие между крупномасштабными структурами будет ослаблено, если их типичный размер превышает L_0 . Поэтому естественно ожидать, что масштаб Россби — Обухова будет ограничивать каскад энергии в сторону больших масштабов. Это не означает, однако, что каскад будет полностью остановлен.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим предел

$$k \ll \frac{2\pi}{L_0} = k_{RO}.$$

В этом пределе ПЗ записывается как

$$\omega_q = -\frac{\psi}{L_0^2},$$

и уравнение трансформации ПЗ вырождается в

$$-L_0^{-2}\partial_t\psi = [\psi, \Delta\psi] + D + F, \quad (31)$$

которое в отсутствие диссипации и накачки имеет интегралы

$$K = \int \psi \Delta\psi \, dx \, dy,$$

$$P = \int \psi^2 \, dx \, dy.$$

Первый из них соответствует сохранению кинетической энергии, второй — потенциальной энергии. Нетрудно заметить, что эти законы являются следствием законов сохранения полной энергии и энтропии, главные слагаемые которых в рассматриваемом пределе пропорциональны друг другу. Члены следующего порядка по $(kL_0)^2$ в этих законах соответствуют сохранению кинетической энергии, тогда как главные слагаемые — потенциальной энергии. Как показано в [93], два интеграла K , P порождают два каскада — обратный, связанный с переносом потенциальной энергии, и прямой, связанный с переносом кинетической энергии. Спектр энергии в первом случае имеет наклон $-11/3$, а во втором — наклон -5 . В [93] приводятся ссылки на более ранние работы Ирошникова, где получены такие же законы. Спектральные законы оказываются существенно круче, чем в двумерной турбулентности, что может интерпретироваться как снижение эффективности переноса. Эволюция турбулентности на больших масштабах, согласно (31), происходит на мед-

ленном времени tL_0^2/L^2 , где L — характерный пространственный размер, в качестве которого удобно выбрать внешний размер системы (мы считаем $L = 2\pi$). Поэтому после проникновения энергии через барьер $k = k_{RO}$ дальнейшая динамика должна быть более медленной. Численные эксперименты с затухающей турбулентностью, начальный спектр которой сосредоточен в области $k \ll k_{RO}$, показали [93], что спектры прямого каскада круче, чем -5 , подобно тому, как спектры прямого каскада в затухающей двумерной турбулентности круче, чем -3 . Они также показали, что в таком пределе различие между динамикой в рамках полных уравнений трансформации ПЗ и приближенного уравнения (31) практически отсутствует.

В работе [94] рассматривается динамика вынужденной турбулентности, возбуждаемой на волновых числах $47 < k < 50$ для

$$k_{RO} = \frac{2\pi}{L_0} = 0, 10, 20, 40.$$

Пространственное разрешение составляет 256×256 точек. Длинноволновая диссипация отсутствует, а для диссипации энтропии вводится гипервязкость. Волновые числа накачки выбраны большими, чем k_{RO} . Ищется ответ на вопрос о переносе энергии через барьер $k = k_{RO}$. Поскольку длинноволновая диссипация не включена, стационарное состояние не достигается. Наклон средних спектров в интервале обратного каскада, полученных усреднением по некоторому промежутку времени, увеличивается с увеличением k_{RO} и заключен между $-5/3$ и $-11/3$. Замедление каскадных процессов при $k < k_{RO}$ приводит к тому, что накапливается избыточная энергия, и это проявляется в физическом пространстве через появление вихрей, или, в терминологии работы [94], "квазикристаллизацию" вихрей. Последнее следует из вида структурных функций ПЗ, которые осциллируют при увеличении расстояния между точками. Авторы подчеркивают, что решетка вихрей не является стационарной, поскольку энергия продолжает проникать на все большие масштабы. Квазипериод решетки увеличивается, по утверждению авторов, за счет слияния вихрей, однако свидетельств в пользу этого утверждения не приводится. Также не приводится ответа на вопрос, какова роль взаимодействий вихрей с фоном. Суть этого вопроса состоит в том, что накачка возбуждает фоновое течение, а не непосредственно вихри, и должен существовать механизм, обеспечивающий передачу энергии в вихри.

В случае вынужденной турбулентности конечность L_0 не может остановить перенос энергии (необходим соответствующий сток энергии, а он отсутствует). Обычное линейное трение, которое решает проблему стока энергии в двумерной турбулентности, оказывается не столь эффективным в случае конечного радиуса Россби — Обухова. Действительно, экмановское трение связано с относительной завихренностью, а не с ПЗ. При малых волновых числах только малая часть ПЗ связана с относительной завихренностью. Наши расчеты показывают, что энергия проникает на масштабы, значительно превышающие радиус Россби — Обухова, и спектральная плотность энергии в стационарном состоянии может превышать значения при $k_{RO} = 0$ и равенстве прочих параметров. Неэффективность трения на больших мас-

штабах, однако, конкурирует с неэффективностью нелинейного взаимодействия. Вопрос о том, способно ли придонное трение в этом случае остановить обратный каскад энергии в стационарном режиме, насколько нам известно, не решен.

4.5. Турбулентность в течении, описываемом уравнениями мелкой воды

Уравнения вращающейся мелкой воды допускают существование поверхностных (инерционно-гравитационных) волн и позволяют исследовать вопрос о поведении вихревой (медленной) моды в присутствии волновой (быстрой) моды. Эта задача представляет определенный интерес для геофизических приложений в свете часто обсуждаемого вопроса о существовании медленного многообразия (slow manifold), обладающего тем свойством, что если в начальный момент времени течение принадлежит ему, то дальнейшая эволюция является медленной (близкой к квазигеострофической). При эволюции течения излучаются быстрые гравитационные волны, и вопрос, таким образом, сводится к следующему: возможно ли описание воздействия гравитационных волн на эволюцию медленной моды в терминах самой медленной моды?

Вторая группа вопросов, анализируемых при изучении течений, подчиняющихся уравнениям мелкой воды, связана с конечностью радиуса Россби–Обухова. Эти эффекты не связаны с генерацией быстрой моды и могут рассматриваться независимо в рамках эквивалентно баротропной модели.

Задача о турбулентности в течении, описываемом уравнениями мелкой воды, естественно, не дает прямого ответа на вопрос о существовании медленного многообразия, но позволяет в некотором приближении охарактеризовать возможные эффекты присутствия волн. В условиях быстрого вращения вихревая и волновая моды взаимодействуют слабо и можно надеяться, что если накачка не возбуждает волновую моду (является сбалансированной), характеристики турбулентности будут близки к характеристикам двумерной турбулентности. Оказывается, что это справедливо только в определенной степени, ибо инерционно-гравитационные волны генерируются в окрестности интенсивных вихревых структур и могут локально влиять на динамику вихревой компоненты.

В условиях малых чисел Россби и Фруда (последнее есть отношение типичной скорости к скорости распространения поверхностных волн) для разделения на медленную и быструю моды естественно использовать собственные векторы оператора линейной задачи, как это, например, сделано в [95]. (Известно, что линеаризованные уравнения мелкой воды допускают две моды — инерционно-гравитационную и геострофически сбалансированную.) Полная эволюция не сводится к линейной, и поэтому всякое разделение для нелинейной задачи включает какое-то приближение или соглашение. Обычно применяется тот же подход, что и при написании так называемых сбалансированных уравнений, использующий уравнение баланса градиентного ветра (см., например, [96]). Все поля представляются в виде сумм вихревой, или сбалансированной компоненты (нижний индекс v) и остаточного слагаемого, которое считается малым (по числу Россби и Фруда). Это слагаемое будем называть *несбалансированным*. Тогда уравнение баланса гра-

диентного ветра получается из уравнения Навье–Стокса, если к нему применить операцию дивергенции и оставить слагаемые нулевого и первого порядка по числу Россби:

$$g\nabla^2 h_v = f\nabla^2 \psi_v + 2J(\partial_x \psi_v, \partial_y \psi_v).$$

Первое слагаемое справа в этом уравнении соответствует геострофическому балансу. Второе слагаемое уточняет этот баланс при малых числах Россби. При больших же числах Россби оно соответствует циклострофическому балансу, и, таким образом, можно ожидать, что область применимости этого уравнения будет шире, чем формальное условие малости числа Россби. Это предположение соответствует действительности.

Уравнение градиентного ветра позволяет вычислить сбалансированную компоненту возвышения по сбалансированной компоненте функции тока ψ_v . Определение же ψ_v требует дополнительных предположений. В работе [97] считается, что вся квазигеострофическая потенциальная завихренность связана с вихревой модой:

$$\omega_q = \nabla^2 \psi_v - \frac{f}{H_0} h_v.$$

Несбалансированная компонента, таким образом, имеет нулевую квазигеострофическую потенциальную завихренность. Это предположение оправдано, если несбалансированная компонента остается малой в процессе эволюции, что должно проверяться *a posteriori*. Два выписанных соотношения позволяют восстановить поля ψ_v , h_v по полю ПЗ. Остаточные (несбалансированные) компоненты получаются как разность между полным решением и сбалансированным решением. Источники массы и момента, возбуждающие течение, выбираются так, что генерируют только сбалансированную компоненту.

Интегрирование в работе [97] для большинства экспериментов выполняется на сетке 256×256 точек. Накачка включает волновые числа 7–9. Линейное трение действует на первые шесть волновых чисел. Радиус Россби–Обухова примерно вдвое превышает масштаб накачки. В силу выбора масштаба накачки обратный каскад энергии в работе не разрешается и исследуется поведение турбулентности в интервале энтропии. Режимы, изучаемые в работе, характеризуются числами Россби (отношение среднего значения абсолютной величины относительной завихренности к параметру Кориолиса) и Фруда в диапазоне 0,1–1. Для статистически равновесного режима при числе Россби 0,45 и числе Фруда 0,25, например, вихревая компонента при больших k имеет спектр с наклоном, близким к $-3,3$, на начальном участке спектр несколько круче и приблизительно равен $-3,8$. Это соответствует поведению обычной двумерной турбулентности. Вплоть до малых масштабов вихревая компонента превалирует. Спектр энергии гравитационных волн убывает медленнее, чем спектр вихревой компоненты, и вносит определяющий вклад на больших волновых числах. Он не аппроксимируется степенным законом. Анализ дивергенции потока энергии, связанного с волновой модой, в физическом пространстве показывает, что области значительной дивергенции находятся в окрестности областей, занимаемых крупномасштабными вихрями. В волновом простран-

стве энергия поступает в волновую моду за счет взаимодействия с крупномасштабной компонентой вихревого поля. Спектр волновой компоненты оказывается чувствительным к используемому пространственному разрешению. В работе показано, что характеристики вихревой компоненты очень близки к характеристикам обычной двумерной турбулентности и что каскад энтропии так же, как в обычной двумерной турбулентности, характеризуется удлинёнными триадами. Если число Россби превышает 0,2, наклон спектра инерционно-гравитационных волн становится существенно более пологим, чем наклон спектра вихревой компоненты, и эта компонента начинает превалировать на малых масштабах. Утверждается, что если использовать значения параметров, приближенно соответствующие атмосферным, переход от близкого к -3 спектра к более пологому происходит в области масштаба 500 км. Таким образом, мезомасштабные движения, доминируемые гравитационными волнами, могут порождаться и в отсутствие мелкомасштабной накачки.

Наиболее полное исследование характеристик затухающей турбулентности на мелкой воде было выполнено в работе [98]. В этой работе изучается эволюция начально сбалансированного спектра. Для определения сбалансированных начальных полей используются сбалансированные уравнения, для получения которых поле скорости представляется в виде суммы вихревой и малой потенциальной компонент

$$\mathbf{v} = \text{rot } \psi \mathbf{e}_z + \epsilon \nabla \chi,$$

где ϵ — малый параметр. Это выражение подставляется в уравнения мелкой воды, и в последних отбрасываются слагаемые с порядком выше произведения ϵ и числа Россби Ro . Задается спектр вихревой компоненты ψ и при помощи сбалансированных уравнений рассчитываются спектры соответствующего потенциала χ и возвышения. Соответствующие поля используются как начальные. После этого интегрируются уравнения мелкой воды. Пространственное разрешение в большинстве экспериментов — 200×200 точек, некоторые эксперименты повторены при разрешении 500×500 . Начальный спектр центрирован относительно волнового числа $k_0 = 14$. По сравнению с известными работами, связанными с интегрированием уравнений мелкой воды, численные эксперименты в [98] выполнены для наиболее широкой области на плоскости параметров число Россби — число Фруда.

Основное внимание в работе [98] уделено эффектам конечности радиуса Россби — Обухова. Показано, что динамика затухающей турбулентности в основном контролируется числом Бюргера, определяемым как

$$B = \frac{Ro^2}{Fr^2} = \frac{L_0^2}{L^2},$$

где L — типичный размер и L_0 — радиус Россби — Обухова. Если B мало, то вихри изначально велики по сравнению с радиусом Россби — Обухова и обратный каскад энергии очень слаб. Авторы приводят зависимость взвешенного по кинетической энергии волнового числа k_K в функции от числа Бюргера по прошествии времени в 1000 оборотов начальных вихрей. Из этой зависимости видно, что при наименьших значениях B это волновое число смещается не очень сильно относи-

тельно начального значения k_0 . По мере увеличения числа Бюргера волновое число k_K уменьшается и выходит на постоянное значение, так как радиус Россби — Обухова сравнивается с размером области интегрирования при $B \approx 200$, и далее эволюция турбулентности определяется лишь геометрическим фактором.

Еще одна показательная характеристика — поведение пологости (kurtosis) поля завихренности, характеризующего степень перемежаемости. В [98] приведено поведение пологости как функции времени для трех экспериментов. В первом начальный размер вихрей много больше радиуса Россби — Обухова, во втором равен половине его и в третьем равен пятой части его. В первом эксперименте значение пологости остается близким к гауссову значению 3, характеризующему начальное распределение завихренности. Во втором эксперименте интенсивное формирование вихрей останавливается при $t = 200$, когда типичный размер вихря сравнивается с радиусом Россби — Обухова. После этого обратный каскад энергии становится малоэффективным и пологость испытывает насыщение. Наконец, в последнем эксперименте типичный размер не достигает радиуса Россби — Обухова и при $t = 1000$ и рост пологости продолжается.

В работе [98] отмечается, что по мере эволюции турбулентности становится заметной асимметрия между циклонической (положительной) и антициклонической (отрицательной) завихренностью. Асимметрия (skewness) поля завихренности, равная нулю для начального распределения, приобретает отрицательные значения по мере эволюции. Эффект усиливается по мере увеличения числа Фруда. Он замечен уже на начальных стадиях экспериментов. Циклоны выглядят менее регулярными, чем антициклоны, и растут медленнее. В работе нет надежной интерпретации этого поведения, однако указывается, что из-за того, что циклонам соответствует локальное уменьшение толщины слоя жидкости, локальный радиус Россби — Обухова для них меньше и поэтому меньше область взаимодействия. Вопрос асимметрии между циклонами и антициклонами на вращающейся мелкой воде также обсуждается в работе [99], где показано, что при объединении антициклонов происходит осесимметризация итогового антициклона, тогда как циклоны остаются продолговатыми и характеризуются активным каскадом энтропии. Эти факты согласуются с результатами работы [98]. Симметрия между циклонами и антициклонами сохраняется в квазигеострофическом приближении, где возвышения поверхности учитываются в линейном приближении (полагается, что $1/H = (1/H_0)(1 - h/H_0)$ при переходе к квазигеострофической потенциальной завихренности). В уравнениях мелкой воды это приближение не делается, поэтому динамика циклонов и антициклонов не обязана быть одинаковой.

Анализ показывает, что несбалансированные поля нарастают с увеличением числа Россби и числа Фруда, но остаются в среднем малыми при малых числах Россби. Так же, как и в работе [97], найдено, что крупные когерентные вихревые структуры окружены фронтами ударных гравитационных волн (борами). Боры исходят радиально из вихревых центров. Наблюдается формирование бор при спаривании циклонов и антициклонов.

Малость несбалансированных полей в [97, 98] обусловлена сбалансированностью накачки и наличием силь-

ной диссипации на малых масштабах, которая препятствует накоплению энергии в несбалансированных движениях. Ситуация заметно меняется при рассмотрении консервативной динамики. В этом случае быстрая мода всегда порождается при эволюции медленной, тогда как обратный эффект отсутствует. Генерация волн вихрями является медленным процессом при малых числах Фруда (отметим в этой связи аналогию с генерацией звука вихревыми течениями). Медленная утечка энергии из вихревой моды может рассматриваться в адиабатическом приближении. В этом случае она соответствует медленной эволюции параметров медленной моды. Тогда эволюция медленной моды согласуется на ограниченном отрезке времени с идеей существования медленного многообразия. На большом времени истинная динамика и адиабатическая динамика могут сильно различаться, как показывает пример, рассмотренный в [100]. По мере накопления энергии в волновой моде ее динамика может приобретать самостоятельное, а не подчиненное значение, что, по-видимому, должно приводить к разрушению медленного многообразия.

В уже упоминавшейся выше работе [42] исследуется влияние конечности радиуса Россби–Обухова на затухающую турбулентность во вращающейся мелкой воде на сфере. Показано, что вместо обширных полярных вихрей в полярных областях образуются группы вихрей, размер которых близок к радиусу Россби–Обухова. Струйная структура при этом исчезает и заменяется спиралеобразной. Эти результаты также могут быть проинтерпретированы как следствие снижения эффективности нелинейных взаимодействий при увеличении масштаба.

5. Геострофическая турбулентность

5.1. Квазигеострофическая потенциальная завихренность в расслоенной жидкости

Хотя выше мы затронули определенные геофизические аспекты (бета-эффект, топография, конечность радиуса Россби–Обухова), мы оставались в рамках баротропной динамики. Из-за разницы в притоке тепла с широтой поверхности равной потенциальной температуры в атмосфере (или плотности в океане) наклонены по отношению к горизонтали, а значит, к поверхностям постоянного давления. Этот наклон означает наличие потенциальной энергии, которая может частично высвободиться, порождая бароклинные движения. Он также означает, что потенциальная температура (плотность) есть функция вертикальной координаты. В курсах геофизической гидродинамики (см., например, [5, 7]) показывается, что в квазигеострофическом приближении динамика бароклиновой жидкости может быть охарактеризована сохранением квазигеострофической ПЗ (в отсутствие накачки и диссипации):

$$D_t \omega_q = 0, \quad (32)$$

где, как и ранее, $D_t = \partial_t + (\mathbf{v} \nabla)$, $\mathbf{v}$ — горизонтальная скорость, определяемая геострофической функцией тока, а

$$\omega_q = \Delta \psi + f^2 \partial_z \left(\frac{1}{N^2} \partial_z \psi \right) + f$$

— квазигеострофическая ПЗ. В этом выражении Δ есть оператор Лапласа по горизонтальным координатам, а $N(z)$ — частота Брента–Вайсяля, определяемая как

$$N^2(z) = -g \frac{\partial_z \rho_s(z)}{\rho_0}$$

для океана и как

$$N^2(z) = g \frac{\partial_z \theta_s(z)}{\theta_0}$$

для атмосферы. Здесь ρ_s и θ_s — профили потенциальной плотности и температуры, а ρ_0 и θ_0 — их базовые значения. По сравнению со случаем слоя вращающейся жидкости постоянной плотности здесь в выражение для квазигеострофической ПЗ добавляется слагаемое, связанное с изменениями функции тока по вертикальной координате. Квазигеострофические движения в расслоенной жидкости почти горизонтальны и поэтому, как и в двумерном случае, описываются функцией тока. Последняя, однако, есть функция всех трех пространственных координат и времени.

Из соотношений гидростатики и геострофических соотношений следуют уравнения термического ветра. Для атмосферного случая они имеют вид

$$\partial_z v_x = -\frac{g}{f} \partial_y \frac{\theta}{\theta_s}, \quad \partial_z v_y = \frac{g}{f} \partial_x \frac{\theta}{\theta_s},$$

где θ — отклонение потенциальной температуры от базового профиля, обозначенного индексом s . Для океана отношение потенциальных температур должно быть заменено отношением плотностей, взятым с обратным знаком. В силу соотношений термического ветра горизонтальный градиент потенциальной температуры эквивалентен вертикальному сдвигу скорости. В частности, меридиональный контраст потенциальной температуры порождает сдвиговое течение, направленное вдоль оси x .

Из уравнения сохранения квазигеострофической ПЗ следует, что сохраняются полная энергия

$$E = -\frac{1}{2} \int \psi \omega_q dV = \frac{1}{2} \int \left(|\nabla \psi|^2 + \frac{N^2}{f^2} (\partial_z \psi)^2 \right) dV$$

и квазигеострофическая потенциальная энтропия

$$Z = \int \omega_q^2 dV.$$

Как было показано Чарни [101], наличие двух интегралов движения означает, что теория, развитая для двумерной турбулентности, может быть перенесена и на квазигеострофическую турбулентность, если предположить, что энергия будет распределена изотропно в трехмерном пространстве с растянутой вертикальной координатой (при постоянной частоте Брента–Вайсяля $z' = zN/f$). Вопрос о том, действительно ли существует тенденция к изотропизации в геострофической турбулентности, рассматривался в [102] при помощи упрощенного варианта модели пробного поля (Test Field Model). В этой работе изучается поведение затухающей турбулентности и показано, что на боль-

ших волновых числах (больше волнового числа пика энергии) турбулентное течение действительно стремится к изотропному состоянию. Скорость этого процесса, однако, низка, что связывается с тем, что спектр энергии оказывается близким к закону k^{-3} . Для такого спектра энергии скорость растяжения компонент с волновым числом k

$$\left(\int_0^k E(p) p^2 dp \right)^{1/2}$$

увеличивается при увеличении волнового числа очень медленно. На малых волновых числах распределение энергии близко к двумерному.

Идея Чарни о трехмерной изотропизации требует, строго говоря, однородности по вертикальной координате, тогда как реальные атмосфера и океан по этой координате ограничены. Помимо этого адвекция в уравнениях (32) является двумерной, тогда как оператор квазигеострофической ПЗ трехмерен. Поэтому для того, чтобы показать, что геострофическая турбулентность действительно изоморфна двумерной турбулентности, надо также показать, что структура триад, отвечающих за нелинейные взаимодействия, изоморфна в обоих случаях. Для случая $N = \text{const}$ последнее демонстрируется в [103]; там же отмечается, что при непостоянстве частоты Брента–Вайсяля для подобного изоморфизма нет оснований.

В численных экспериментах, выполненных в [103], гипотеза Чарни проверяется на модели, имеющей горизонтальное разрешение 128×128 и разрешающей 6 мод по вертикали. Вертикальные моды являются решениями следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} F_m(z) \right] = -\lambda_m^2 F_m(z)$$

с верхним и нижним граничными условиями твердой крышки. Мода с $m = 0$ однородна по вертикали: $F_0(z) = 1$. Это *баротропная* мода. Остальные моды называются *бароклинные*:

$$F_m(z) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right), \quad \lambda_m^2 = \left(\frac{m\pi f}{NH}\right)^2.$$

Здесь H — толщина слоя жидкости. Считая, что внешнее сдвиговое течение $\mathbf{U} = (U(z), 0)$ порождается, в силу уравнений термического ветра, балансом притока тепла и диссипации (т.е. удовлетворяет уравнению (32) при учете диссипативных слагаемых и притока тепла), можно рассматривать задачу о его устойчивости (мы подробнее опишем постановку задачи ниже на примере двуслойной модели). Такое течение, как известно (см., например, [5]), неустойчиво к возмущениям бароклинового типа. Эта неустойчивость и порождает турбулентность, рассматриваемую в [103]. Считается, что вертикальный профиль $U(z)$ имеет компоненту лишь по первой бароклиновой моде. Стационарные состояния возможны при учете диссипации из-за придонного трения, которое добавляется в правую часть уравнения (32) как $-\lambda \nabla^2 \psi|_{z=0}$. Наличие среднего потока можно учесть, добавляя слагаемое $-U \nabla \omega_q$ или представляя все поля в виде суммы внешнего течения и возмущения и записывая уравнения для последних.

Такая постановка задачи отличается от обычно используемой при изучении двумерной турбулентности. Здесь масштаб накачки не является заданным, а определяется самим течением. Поскольку масштаб неустойчивости задается радиусом Россби первой моды (λ_1^{-1}), передача энергии возмущениям должна быть сосредоточена в окрестности $k = \lambda_1$.

Накачка энергии в [103] анизотропна в трехмерном пространстве, поскольку осуществляется на первой бароклиновой моде. Однако спектры энергий мод для случая постоянной частоты Брента–Вайсяля в зависимости от полного волнового числа

$$K = (k^2 + \lambda_m^2)^{1/2}$$

совпадают при больших значениях K . Это и означает трехмерную изотропизацию в модальном представлении: спектральная плотность зависит не от номера вертикальной моды, а только от полного волнового числа. Пики спектров энергии мод в зависимости от k находятся на разных значениях, но пики баротропной и первой бароклиновой мод совпадают. Горизонтальное волновое число максимума энергии близко к волновому числу Райнса k_R^R , определяемому по кинетической энергии баротропной моды.

В экспериментах с экспоненциальным профилем частоты Брента–Вайсяля спектры энергии мод не являются универсальной (одинаковой для всех m) функцией полного волнового числа, хотя все они имеют один и тот же спектральный наклон. Однако эксперименты для того же профиля стратификации, но с трехмерной изотропной накачкой, опять приводят к универсальной зависимости. Авторы [103] высказывают предположение, что тенденция к трехмерной изотропизации в общем случае зависит от того, является ли накачка энергии изотропной.

В работе [103] также изучаются бюджеты энергии мод. Показано, что нелинейный перенос (не путать с потоком!) энергии для баротропной моды положителен при малых горизонтальных волновых числах, что соответствует обратному каскаду энергии, как и в двумерной турбулентности. Перенос в основном сбалансирован с придонным трением, тогда как непосредственная генерация энергии в баротропной моде за счет бароклиновой неустойчивости играет меньшую роль. Для бароклиновых мод нелинейный перенос энергии по спектру отрицателен в области малых волновых чисел, т.е. энергия переносится в сторону увеличения волнового числа, и мы имеем дело с прямым каскадом. Баланс энергии первой баротропной моды в основном сводится к балансу между генерацией энергии и переносом. Интересно отметить, что для всех бароклиновых мод придонное трение приводит к притоку энергии на малых волновых числах. Это эффект связи с баротропной модой на нижней границе. Мы вернемся к картине спектральных потоков далее, когда будем обсуждать послойные модели. Здесь же подчеркнем главный результат, состоящий в том, что при наличии модовой структуры обратный каскад энергии связан только с баротропной модой.

Сравнение поведения затухающих 2D турбулентности и квазигеострофической (3D) турбулентности (однородной по вертикальной координате) выполнялось в работе [104]. Поведение оказывается очень похожим в целом (закон убывания энтропии, скорость диссипации

энтропии как функция времени), но различается в деталях. Подобно тому, как процесс затухания двумерной турбулентности сопровождается генерацией долгоживущих вихрей, вихри появляются и в затухающей турбулентности [106]. Анализ статистики вихрей геострофической турбулентности содержится в недавней работе [105], где показано, что после начального периода установления статистика вихрей является автомодельной и согласуется с предсказаниями скейлинга, построенного на предположении о постоянстве энергии, экстремума завихренности и отношения вертикального и горизонтального размера вихрей (ср. [70, 72]).

Исследование динамики квазигеострофической турбулентности является существенно более трудоемким по сравнению со случаем двумерной турбулентности, поскольку сопряжено с интегрированием трехмерных уравнений. Соответствующие работы поэтому немногочисленны. Основные результаты, имеющие геофизическое значение, получены при помощи послойных (как правило, двуслойных) моделей, к описанию которых мы сейчас и переходим.

5.2. Послойные модели

Для атмосферы накачка осуществляется за счет усвоения приходящей солнечной радиации, приводящей к формированию горизонтального контраста температуры между полюсом и экватором. Из-за горизонтального контраста температуры поверхности постоянной потенциальной температуры наклонены. Этот наклон и есть причина бароклинной неустойчивости, за счет которой происходит высвобождение доступной потенциальной энергии. Наблюдения, однако, показывают, что максимум кинетической энергии нестационарных вихрей в атмосфере и максимум меридионального потока тепла находятся не на масштабе бароклинной неустойчивости, который в условиях земной атмосферы соответствует зональным волновым числам 12–15 [107], а на масштабе, соответствующем существенно меньшим волновым числам (4–7), как свидетельствует рис. 11, воспроизведенный из работы [108]. Вопрос состоит, таким образом, в том, какие процессы ответственны за наблю-

даемый максимум и как они объясняют его эволюцию от сезона к сезону и при переходе от Северного полушария к Южному полушарию.

Для океанических течений часть энергии поступает за счет ветрового напряжения, приложенного к поверхности. Масштаб накачки здесь соответствует размеру акватории. Напряжения порождают вертикальный сдвиг скорости, который, согласно соотношениям термического ветра, эквивалентен меридиональному градиенту температуры. Бароклинная неустойчивость, таким образом, и здесь ответственна за приток энергии. Классической задачей для океана является проблема антарктического циркумполярного вихря в "южном" океане — струйного течения, меридиональная локализация которого существенно меньше, чем масштаб ветровой накачки [109]. Понимание физики этой локализации для океана составляет лишь часть проблемы. Основная же задача диктуется тем фактом, что для океана внутренний радиус Россби (см. далее), характеризующий масштаб высвобождения бароклинной энергии, мал (40–50 км в сравнении с 800–1000 км для атмосферы) и относится к подсеточным масштабам в моделях общей циркуляции океана. Наличие турбулентных вихрей на подсеточных масштабах должно быть параметризовано в терминах разрешаемых полей (в терминах средних полей для самых простых моделей). Речь идет, таким образом, о разработке эффективных параметризаций для турбулентных потоков тепла, потенциальной завихренности и момента импульса, что составляет нерешенную до конца задачу, которой мы в данном обзоре не касаемся.

Для решения указанных задач в большинстве работ используются послойные (часто двуслойные) модели. Они наиболее экономичны с точки зрения затрат компьютерного времени, необходимых для получения статистических средних в области параметров моделей.

Квазигеострофические уравнения трансформации ПЗ для двуслойной жидкости с одинаковыми толщинами слоев в приближении твердой крышки (последнее приближение эквивалентно предположению о бесконечно большом радиусе Россби — Обухова) записываются следующим образом (подробный вывод см. в [5]):

$$\partial_t q_i + J(\psi_i, q_i) = F_i. \quad (33)$$

Здесь $i = 1, 2$; индекс 1 относится к верхнему слою, а индекс 2 — к нижнему. Потенциальная завихренность в слоях вычисляется как

$$q_i = \Delta\psi_i + f + \frac{1}{2} k_R^2 (\psi_j - \psi_i), \quad j = 3 - i,$$

$k_R = 2(f^2/(g'H_0))^{1/2}$ — величина, обратная внутреннему радиусу Россби ($g' = g\Delta\rho/\rho_0$ — приведенное ускорение свободного падения, $\Delta\rho$ — разность плотностей слоев), а F_i обозначают сумму диссипации и накачки в слоях. Эти слагаемые выглядят по-разному для атмосферных и океанских моделей. Для океана накачка осуществляется ветровыми напряжениями, приложенными к поверхности. В модели это учитывается заданием внешнего меридионального градиента ветрового касательного напряжения на верхней границе, в качестве длинноволнового стока энергии обычно включается экмановское трение в нижнем слое и используется гипервязкость для

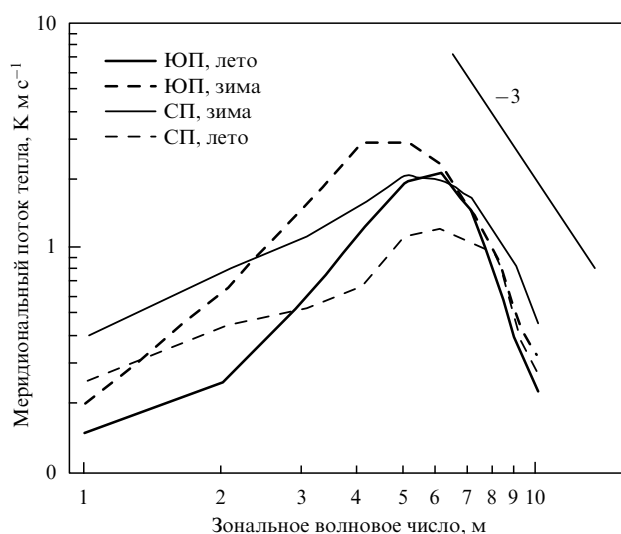


Рис. 11. Меридиональный поток тепла как функция зонального волнового числа для земной атмосферы [108].

обеспечения коротковолнового стока:

$$F_1 = -\partial_y \tau + D_{1u}, \quad F_2 = -\lambda \Delta \psi_2 + D_{2u}.$$

Вторые слагаемые означают гипервязкость, вид которой мы не конкретизируем. Для атмосферных моделей накачкой служит усвоение солнечной радиации, а диссипация наряду с придонным трением включает также и радиационное выхолаживание. В непрерывных моделях тепловой источник пропорционален вертикальной производной от скорости выделения тепла [5], поэтому в двуслойной модели он может быть включен через источники равной амплитуды, но противоположных знаков в уравнениях трансформации ПЗ. Температура в двуслойной модели пропорциональна разности функций тока слоев и радиационное выхолаживание учитывается как релаксация температуры. Это означает, что можно взять

$$F_1 = \kappa_T \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2} - \tau_e(y) \right) + D_{1u},$$

$$F_2 = -\kappa_T \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2} - \tau_e(y) \right) - \lambda \Delta \psi_2 + D_{2u}.$$

Здесь $\kappa_T \tau_e(y)$ — меридиональный профиль накачки. В отличие от предыдущего случая здесь существует стационарное решение, описывающее баланс тепловой накачки, выхолаживания и трения. Если экмановское трение и коротковолновая диссипация отсутствуют, равновесный меридиональный профиль температуры пропорционален τ_e . В этом случае фиксируется только разность функций тока, т.е. вертикальный сдвиг скорости между слоями, но не сами величины скоростей. Добавление экмановского трения в пренебрежении коротковолновой диссипацией (что оправдано, поскольку масштаб накачки много больше масштаба, на котором начинает сказываться коротковолновая диссипация) приводит к тому, что $\Delta \psi_2 = 0$. Это условие описывает однородный поток, скорость которого должна равняться нулю в отсутствие силовых источников в нижнем слое. Из-за наличия стационарного решения решение уравнений (33) можно искать в виде суммы базового потока и возмущения, появляющегося как следствие неустойчивости этого базового потока. Для океанического случая накачка в верхнем слое балансируется только за счет нестационарности и нелинейности, и выделение базового потока невозможно.

Общая картина поведения турбулентности в двуслойном течении была дана Салмоном [110, 111]. Элементарное изложение дано в [7]. Вместо функций ψ_1, ψ_2 введем их полусумму $\psi = (\psi_1 + \psi_2)/2$ и полуразность $\tau = (\psi_1 - \psi_2)/2$, называемые соответственно *баротропной* и *бароклиной функциями тока* (соответствуют баротропной и первой бароклиной моде в модовых моделях). Уравнения для этих функций тока получаются элементарным образом из уравнений (33). Полная средняя энергия течения на единицу массы записывается как

$$E = \frac{1}{2S} \int (\nabla \psi \cdot \nabla \psi + \nabla \tau \cdot \nabla \tau + k_R^2 \tau^2) dx dy,$$

S — площадь, занимаемая течением, и состоит из суммы баротропной кинетической, бароклиной кинетической и бароклиной потенциальной энергий. В отсутствие

накачки и диссипации полная энергия сохраняется. Сохраняются также потенциальные энтропии каждого из слоев. В пространстве волновых чисел обозначим полную энергию баротропной моды с волновым вектором $\mathbf{k}$ через U_k , а полную энергию бароклиной моды через T_k . Анализ трехволновых взаимодействий для мод с волновыми числами $\mathbf{k}, \mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ ($\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$) в [111] показывает, что они могут быть двух типов: баротропные (ψ_k, ψ_p, ψ_q) и бароклинные (ψ_k, τ_p, τ_q). Для взаимодействий первого типа законы сохранения энергии и энтропии дают

$$\dot{U}_k + \dot{U}_p + \dot{U}_q = 0, \quad k^2 \dot{U}_k + p^2 \dot{U}_p + q^2 \dot{U}_q = 0.$$

Эти же соотношения имеют место и для двумерной турбулентности. Поэтому следует ожидать, что возможны обратный каскад энергии и прямой каскад энтропии в баротропных модах. Для бароклиного типа взаимодействия законы сохранения дают

$$\dot{U}_k + \dot{T}_p + \dot{T}_q = 0,$$

$$k^2 \dot{U}_k + (p^2 + k_R^2) \dot{T}_p + (q^2 + k_R^2) \dot{T}_q = 0.$$

Если волновые числа малы по сравнению с k_R , обмен энергией происходит преимущественно между двумя бароклиными модами, в баротропную моду поступает очень мало энергии. В этом пределе сохранение энергии означает также сохранение энтропии, и поток энергии в сторону больших волновых чисел не запрещен. Взаимодействие с баротропной модой становится возможным в окрестности волнового числа k_R . Салмон заключает, что имеет место схема переноса энергии и энтропии, представленная на рис. 12 [7, 111].

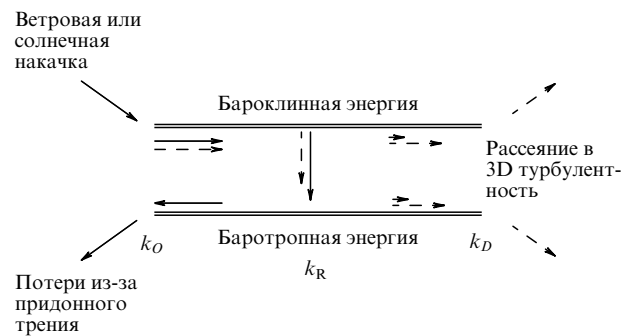


Рис. 12. Схематическая картина потоков энергии (сплошные линии) и потенциальной энтропии (штриховые линии) в бароклином турбулентном течении [111].

Численные эксперименты в работе [111] выполнены для сетки 32×32 и согласуются с расчетами, выполненными для марковской модели турбулентности. В этих расчетах $k_R = 8$, а максимум кинетической энергии оказывается на волновых числах 3–4. Наклон спектра на больших волновых числах близок к -3 . Расчеты с большим разрешением можно найти в работах [112, 113] (трехслойные модели), [13–15, 114–117] (двуслойные модели). В работах, описываемых ниже в этом разделе, бета-эффект учитывается.

Исследование в работе [112] инициировано задачей об антарктическом циркумполярном вихре. Используется конечно-разностная модель. Область интегриро-

вания ограничена жесткими границами в меридиональном направлении (корректная запись граничных условий в этом случае составляет отдельную задачу, рассмотренную в [118]) и периодически продолжается в зональном направлении. Особенностью работы является использование квадратичного придонного трения и линейного трения между слоями. Пространственный шаг сетки меняется от 38,5 до 9,8 км, а размер области интегрирования составляет 2000 км в зональном и 1000 км в меридиональном направлениях. Касательное напряжение меняется по закону $\sin(\pi y/L_y)$. Режим, устанавливающийся в канале, соответствует меандрирующей струе, локализация которой поперек канала существенно меньше, чем локализация ветрового напряжения. Поле ПЗ имеет фронтальную структуру с нерегулярными и нестационарными вихрями. Существенная часть работы посвящена рассмотрению средних балансов, которых мы касаться не будем. Для нас интересны расчеты спектральных характеристик. Спектральная плотность флуктуаций скорости на оси канала имеет широкий участок, где наклон близок к -3 (спектр меридиональной компоненты v' существенно больше по амплитуде, чем спектр зональной компоненты u'). Этот участок включает как волновые числа, соответствующие радиусу деформации, так и волновые числа максимума неустойчивости. Этот участок не простирается, однако, в сторону малых волновых чисел, где содержится основная энергия течения. Волновое число максимума спектра близко к волновому числу, соответствующему масштабу Райнса [8]. Эта величина меняется приблизительно в два раза при переходе от нижнего к верхнему слою. Волновое число, соответствующее размеру струи (определяется по расстоянию, на котором среднее поле скорости уменьшается в e раз), оказывается меньшим волнового числа максимума спектра (похожие закономерности мы отмечали для 2D турбулентности на бета-плоскости).

Рисунок 13 показывает спектры для компонент поля скорости и соотношение масштабов [112]. Расчеты частотного спектра показывают, что он содержит участок с наклоном -3 , что подтверждает гипотезу Тэйлора о замороженной турбулентности. Интервал частот, где наблюдается такой спектр, однако, существенно уже, чем в случае пространственных спектров, и относится к коротковолновой части.

Спектры вихревой энергии по зональному волновому числу похожи на спектры скорости на оси канала. Спектр кинетической энергии имеет область с наклоном, близким к -3 , тогда как спектр потенциальной энергии спадает в этой области круче — как -4 . Спектр полной энергии имеет промежуточный наклон. Наконец, бюджет вихревой энергии, представленный на рис. 14 (по рис. 21 из [112]), свидетельствует о том, что энергия в вихревую компоненту поступает от среднего течения на промежуточных волновых числах и переносится оттуда за счет нелинейных взаимодействий между вихрями как в сторону больших, так и в сторону малых волновых чисел. Диссипация энергии сравнима с нелинейным переносом в широкой области волновых чисел n , и поэтому вопрос об инерционном интервале остается открытым даже для той области, где наблюдается спектр с наклоном -3 . Максимум диссипации наблюдается на волновых числах, меньших, чем волновое число генерации, и должен совпадать с максимумом энергии в силу исполь-

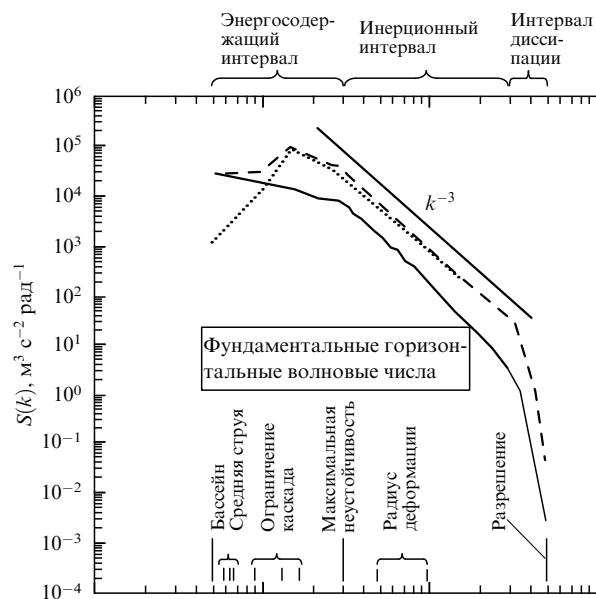


Рис. 13. Спектры компонент поля скорости на оси течения в верхнем слое трехслойной жидкости и соотношение масштабов [112]. Спектр зональной компоненты (сплошная кривая) меньше по абсолютной величине, чем спектр меридиональной компоненты (пунктирная кривая). Полный спектр кинетической энергии (штриховая кривая) почти совпадает со спектром меридиональной компоненты. Спектры получены осреднением 720 мгновенных спектров.

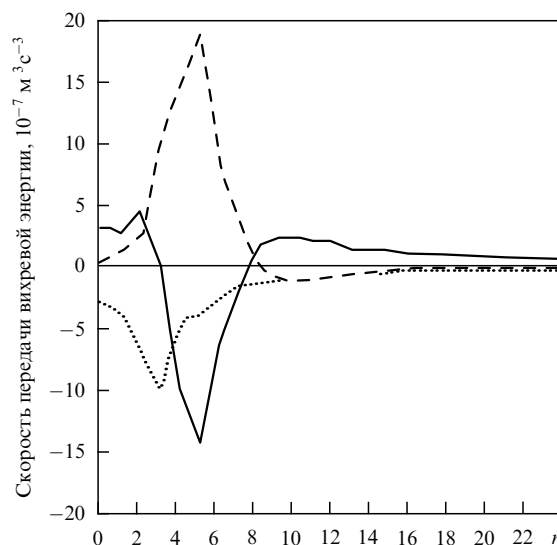


Рис. 14. Бюджет вихревой энергии в численных экспериментах [112]. Производство энергии показано штриховой кривой. Оно находится в балансе с нелинейным переносом (сплошная кривая) и диссипацией (пунктирная кривая). Энергия переносится из интервала генерации как в сторону больших, так и в сторону малых волновых чисел.

зуемого закона длинноволновой диссипации. Подчеркнем, что приведенный бюджет касается полной энергии и, таким образом, объединяет бароклинную и баротропную компоненты. Этого недостаточно для того, чтобы понять, в какой мере выполняется картина, предсказываемая Салмоном. Однако мы уже обсуждали ранее результаты [103], подтверждающие именно такую картину.

Образование струйных течений подробно рассматривалось в работе [13] в "атмосферной" постановке. Использовалась псевдоспектральная модель с 64 или 128 волнами в каждом направлении и слое. Тепловая накачка в отсутствие нестационарных вихрей порождает однородное течение со скоростью U_0 в верхнем слое. Функция тока имеет период $2\pi L$, L равно 15, 20 или 30 в единицах $1/k_R$. Для большинства экспериментов температурная релаксация не учитывается. Время эволюции течения к состоянию с устойчивыми струями зависит от диссипации и накачки. Автор отмечает, что установление глобальных характеристик течения (таких, как полная энергия или поток тепла) происходит сравнительно быстро, на нескольких десятках единиц времени $1/(U_0 k_R)$. Установление же струй требует на порядок большего времени. Представленные в работе реализации функции тока, ПЗ и осредненной по времени зональной компоненты скорости отчетливо визуализируют струйную структуру течения в обоих слоях. Зависимость волнового числа k_L , полученного делением числа струй на L , от волнового числа $k_\beta^R = (\beta/(2U))^{1/2}$ из [13] воспроизведена на рис. 15. Среднеквадратичная скорость определяется по полной вихревой кинетической энергии: $U = (2E)^{1/2}$. Вихрями в [13] называется отклонение текущего состояния от базового потока, поэтому они включают также и зональные струи.

Три зависимости, представленные на основной части рис. 15, отличаются значениями коэффициента придонного трения и β . Для сплошной линии $\lambda = 0,05$ и $\beta = 0,1 - 0,5$ в безразмерных единицах (обезразмеривание производится при помощи k_R и U_0). Для штриховой линии $\lambda = 0,15$ и $\beta = 0,2 - 0,5$. Наконец, пунктирная линия соответствует постоянному значению $\beta = 0,25$, но коэффициент придонного трения изменяется от 0,015 до 0,4. Струи заметно ослабевают по мере увеличения придонного трения. Из рисунка 15 ясно, что действительно

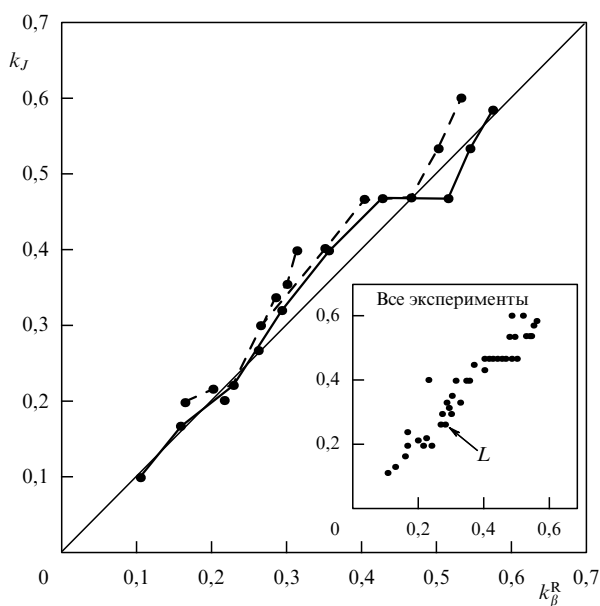


Рис. 15. Зависимость экспериментально измеренного волнового числа k_L , полученного делением числа струй на L , от волнового числа $k_\beta^R = (\beta/(2U))^{1/2}$ [13]. Среднеквадратичная скорость определяется по полной вихревой энергии (включается также и зональная средняя компонента, т.е. струи).

существует количественная связь между количеством струй и волновым числом k_β^R , и, таким образом, получается, что влияние придонного трения в изученной области параметров учитывается через среднеквадратичную скорость. E есть полная кинетическая энергия, включающая как баротропную, так и бароклинную компоненты. Это не согласуется с аргументами Райнса, однако во всех экспериментах в [13] баротропная энергия существенно больше.

В [13] приводятся карты зональной компоненты вихревого поля скорости как функции времени и меридиональной координаты (подобно карте на рис. 8в). Положение и толщина струй меняются во времени, но их количество остается постоянным. Максимумы вихревой активности приходятся на участки между струями. Поэтому масштабы энергонесущих вихрей близки (несколько меньше) к масштабу струй.

Мы отметим два факта, упомянутых в работе. Указывается, что все попытки получить установившиеся режимы в отсутствие придонного трения не были успешными предположительно по причине отсутствия длинноволнового стока энергии для баротропной компоненты. Это снова подчеркивает определяющую роль длинноволновой диссипации в формировании статистически стационарного режима и, опосредованно, струй.

Второе замечание касается характеристик обратного переноса кинетической энергии. Автор [13] отмечает, что в экспериментах масштаб генерации баротропной энергии является динамическим — он сдвигается к большим масштабам по мере того, как увеличивается накачка (или уменьшается диссипация, или β). Расстояние между волновым числом максимума кинетической энергии и максимума генерации заметно меньше самих этих чисел, поэтому есть перенос энергии в сторону больших масштабов, но нет инерционного интервала с автомодельным спектром. По всей видимости причина такой картины состоит в рассмотрении полной энергии. В кинетической энергии на больших масштабах действительно преобладает баротропная компонента, но генерация кинетической энергии относится к бароклинной компоненте. Передача же энергии из бароклинной моды в баротропную, согласно Салмону, происходит в окрестности масштаба радиуса Россби.

Существует вопрос о механизмах низкочастотной изменчивости для земной атмосферы. Имеются указания на то, что такая изменчивость появляется даже в отсутствие зональных неоднородностей в притоке тепла и является, таким образом, внутренней характеристикой системы. В этом случае она должна быть взаимосвязана с характеристиками квазидвумерной турбулентности. В работе [115] для исследования этой задачи используется квазигеострофическая двуслойная модель. Базовое течение берется не в виде однородного потока в верхнем слое, а в виде струи, и используется несколько меньшее разрешение (31 волновое число по обоим направлениям), чем в работе [13]. Найдено, что хотя k_β^R дает хорошую оценку масштаба волн, отвечающих за максимум энергии вихревых компонент и за максимум низкочастотной изменчивости, динамика этих волн не связана с обратным каскадом энергии: нелинейный перенос мал и амплитуда волны определяется балансом между генерацией (взаимодействием со средним потоком) и диссипацией. Этот вывод опять делается для полной энергии, как и в работе [13], и поэтому заключение авторов не может

считаться окончательным (обратный перенос энергии характерен только для баротропной моды). Отметим, что в отличие от работы [13] здесь вихревой компонентой считается отклонение от потока, осредненного зонально и по времени. В работе [115] показано, что слагаемое, осуществляющее нелинейный перенос, проходит через нуль вблизи волнового числа, на котором достигается максимум генерации. Перенос положителен на меньших волновых числах и отрицателен там, где генерация максимальна, поскольку энергия должна проникать оттуда в моды с другими волновыми числами. Максимум энергии в численном эксперименте рассматриваемой работы приходится как раз на максимум генерации, и этот результат в значительной степени перекликается как с результатом работы [13], так и более ранней работы [112], где эти максимумы близки.

Хотя все авторы единодушны в том, что масштаб Райнса характеризует масштаб максимума вихревой энергии в квазигеострофической турбулентности (здесь нет прямой аналогии с 2D баротропной турбулентностью на β -плоскости, поскольку речь идет о спектрах по зональному волновому числу и поступление энергии во флуктуации происходит за счет неустойчивости анизотропного течения с глобальным меридиональным масштабом), этот факт сам по себе имеет мало "предсказательной" силы, пока нет независимой оценки для среднеквадратичной скорости флуктуаций.

Хелд и Ларичев [14, 15] используют идеализированные представления о поведении квазигеострофической турбулентности в двуслойной жидкости для того, чтобы оценить величину среднеквадратичной скорости и коэффициента диффузии для ПЗ. Их рассуждения выглядят следующим образом. Пусть источник, возбуждающий течение, таков, что в отсутствие вихрей генерирует течение с вертикальным сдвигом

$$U = \frac{U_1 - U_2}{2} > 0,$$

где индексы, как и ранее, обозначают слои. Тогда средние градиенты ПЗ в верхнем и нижнем слоях есть

$$\beta \pm Uk_R^2 = Uk_R^2(\xi^{-1} \pm 1),$$

где введен безразмерный параметр $\xi = Uk_R^2/\beta$. Условие линейной неустойчивости такого течения — $\xi > 1$ (см., например, [5]). Предположим, что течение является преимущественно баротропным на масштабах, больших по сравнению с радиусом деформации $1/k_R$ (это выполнено в экспериментах [13]), и что обратный каскад энергии останавливается на некотором волновом числе k_0 . Если спектр убывает достаточно круто при $k > k_0$, энергия будет содержаться в основном на волновом числе k_0 . Крупномасштабная адвекция бароклининой ПЗ будет осуществляться этим крупномасштабным баротропным полем. Оценка для вихревой бароклининой ПЗ тогда будет

$$q' = k_0^{-1}(Uk_R^2)$$

и поток ПЗ может быть оценен как

$$\overline{v'q'} \approx -D(Uk_R^2),$$

где $D = V/k_0$ — коэффициент диффузии и V — среднеквадратичная баротропная скорость. Скорость производства энергии на единицу массы оценивается как

$$\epsilon = -\frac{U_1 \overline{v'_1 q'_1} + U_2 \overline{v'_2 q'_2}}{2} \approx V k_0^{-1} (Uk_R)^2.$$

Бароклининая вихревая энергия производится на волновом числе k_0 (поскольку баротропные вихри сосредоточены на этом волновом числе). Далее она переносится в сторону малых масштабов в результате каскадного процесса и переходит в баротропную в окрестности волнового числа k_R . Дальнейшего проникновения энергии не происходит, поскольку при $k > k_R$ течение ведет себя как баротропное, и вниз по спектру может переноситься только энтропия. Поток энергии в баротропной моде должен равняться скорости производства бароклининой энергии. Отсюда

$$\epsilon \approx V^3 k_0.$$

Это соотношение, на наш взгляд, является спорным, поскольку игнорирует диссипацию, которая не мала на малых волновых числах и которая в конечном счете должна балансировать течение. Тем не менее оно позволяет получить оценку

$$V \approx \frac{Uk_R}{k_0},$$

которая свидетельствует о том, что баротропная среднеквадратичная скорость много больше, чем вертикальный сдвиг.

Ключевым предположением далее является отождествление k_0 с k_β^R . Тогда

$$\frac{V}{U} \approx \xi, \quad k_0 \approx \frac{k_R}{\xi}, \quad D = \frac{U\xi^2}{k_R}.$$

Второе из этих предсказаний согласуется с результатами численных расчетов, представленными в [13] на рис. 21, которые свидетельствуют о почти линейной зависимости волнового числа максимума энергии от параметра β .

Проверка приведенных выше оценок проводилась численно на модели, описанной в [14]. Размер области интегрирования L таков, что

$$\frac{2\pi}{k_R} = \frac{L}{50},$$

т.е. k_R в 50 раз больше минимального волнового числа. Коэффициент придонного трения выбирается в виде

$$\lambda = 0,16Uk_R$$

и изменяется при изменении амплитуды накачки (U). В работе приводятся спектры квадрата баротропной компоненты меридиональной скорости и скорости генерации энергии ϵ , определенной несколько выше, по модулю волнового числа. Положения максимумов этих спектров хорошо коррелируют с k_β^R , при вычислении которого используется среднеквадратичная меридиональная баротропная скорость. Энергия и скорость генерации энергии возрастают с параметром ξ заметно быстрее, чем по предсказываемому закону ξ^2 (в исследованной

области изменения ξ рост ближе к ξ^4). Также заметны и отклонения от зависимости $k_0/k_R = \xi$.

Основную причину отклонений авторы работы [15] видят в упрощенной трактовке баротропной динамики, хотя, на наш взгляд, существуют и другие причины. Рассуждения, приведенные выше, никак не учитывают действие придонного трения. Оно, как мы уже неоднократно указывали на протяжении этого обзора, уменьшает поток энергии (в данном случае баротропной кинетической энергии) вверх по спектру и может изменить приведенные оценки (отметим, что авторы указывают на возможную зависимость вихревой статистики от придонного трения). Хелд и Ларичев также утверждают, что из-за сильной положительной обратной связи между вихревыми потоками и размером вихрей формулировка надежной теории для вихревых амплитуд может оказаться сложной задачей.

В заключение данного раздела можно отметить следующее. Специфика обсуждаемых здесь задач состоит не только в усложнении процессов переноса энергии из-за наличия баротропной и бароклинных мод, но и в другом характере накачки. Она имеет глобальный масштаб, является неізотропной и возбуждает в основном бароклинную моду. Можно надеяться, что локальная изотропия восстанавливается на малых масштабах $k > k_R$, но для больших масштабов уместно говорить лишь о спектрах по зональному волновому числу. Поскольку масштаб максимума генерации кинетической энергии близок и динамически связан с масштабом максимума кинетической энергии, качественная картина Хелда и Ларичева, по-видимому, ухватывает суть процесса генерации турбулентной кинетической энергии.

Масштаб Райнса в большинстве случаев дает хорошую оценку для масштаба максимума вихревой энергии или масштаба струй, хотя следует опять отметить, что разные исследователи используют разные оценки для среднеквадратичной скорости флуктуаций. Подробные исследования транспорта и типичных нелинейных взаимодействий, подобные работам [12] для баротропной турбулентности на бета-плоскости и [91] для сферы, для геострофической турбулентности отсутствуют даже в рамках двуслойных моделей. Между тем представляется важным выяснить, действительно ли баланс двух процессов переноса — баротропного вверх по спектру и бароклинного вниз по спектру — "держит" структуру квазигеострофической турбулентности и масштабы энергосодержащих движений в ней.

6. Натурные и лабораторные измерения

6.1. Натурные измерения

Спектры горизонтальных компонент скорости в атмосфере с масштабами от 3000 км до нескольких километров в верхней тропосфере и нижней стратосфере были тщательно измерены в ходе GASP (Global Atmospheric Sampling Program) и представлены в работах [119, 120]. Результаты этих измерений (рис. 16) свидетельствуют о том, что для волновых чисел между 10^{-5} и 10^{-3} рад/м (соответствующих мезомасштабам) реализуется спектр с наклоном $-5/3$, тогда как для волновых чисел, меньших 10^{-5} рад/м, спектр имеет наклон -3 . Измерения, выполненные в недавней работе [121], относятся к меньшим высотам, однако также свидетельствуют о спектрах с

наклоном $-5/3$ в диапазоне волновых чисел от 10^{-5} до 10^{-3} рад/м, хотя и с меньшей амплитудой. В диапазоне от 10^{-3} до 10^{-2} рад/м авторы обнаружили более крутой спектр с наклоном $-9/4$, который заменяется более пологим спектром на еще больших волновых числах. В работе [31] приводятся результаты обработки экспериментальных данных, полученных по результатам самолетных измерений и составляющих базу данных MOZAIC. Эти результаты также свидетельствуют о спектре с наклоном $-5/3$ на меньших масштабах и спектре с наклоном -3 на больших масштабах в соответствии с данными предыдущих экспериментов. В [122] приводятся данные, полученные в ходе TOGA COARE (Tropical Ocean Global Atmosphere Coupled Ocean-Atmosphere Response Experiment), соответствующие диапазону масштабов от 1 до 1000 км. Спектры энергии для всего набора данных имеют наклон, близкий к $-5/3$, тогда как наклоны спектров для подмножеств всего набора данных заключены между $-5/3$ и -2 . Участка с наклоном -3 не обнаружено (этот наклон соответствует области больших масштабов).

Известны несколько попыток примирить указанные экспериментальные результаты с парадигмой двумерной турбулентности. Трудность этой задачи состоит в обратном расположении спектральных участков. Традиционная интерпретация участков спектра с наклонами -3 и $-5/3$ как связанных с инерционными интервалами двумерной турбулентности восходит к работам [123, 124] (см. также [121]). Лилли [124] предположил, что спектр с наклоном $-5/3$ соответствует обратному каскаду энергии от источника, которым служат конвективные движения. Вследствие того, что атмосфера стратифицирована, конвективные движения будут порождать гравитационные волны и стратифицированную турбулентность. Последняя должна быть почти двумерной (уточним, что речь идет о масштабах, где квазигеострофическое приближение уже не применимо и вращение не играет определяющей роли). Стратифицированная турбулентность и проблема мезомасштабных спектров в атмосфере являются темой двух недавних обзоров [125, 126]. Не останавливаясь подробно на этой теме, укажем, что в численных экспериментах, где накачка сосредоточена в узком диапазоне масштабов, действительно наблюдается одвумеривание движений. Спектральные потоки энергии по горизонтальным волновым числам отрицательны в области малых волновых чисел (обратный каскад), но наклоны спектров энергии по горизонтальным волновым числам весьма далеки от $-5/3$ и, как правило, спектральный пик близок к диапазону накачки. О близких к $-5/3$ спектральных наклонах сообщается в тех работах, где накачка распределена по широкому диапазону и учтена физика процессов, приводящих к конвекции (как в [127]).

В работе [120] высказывалось предположение, что источником мезомасштабной турбулентности служит обрушение внутренних волн.

Спектр с наклоном -3 относят к спектру прямого каскада энтропии с накачкой на масштабах больше или порядка внутреннего радиуса Россби. В работе [128] указывается, что совместное существование спектров с -3 и $-5/3$ может иметь место при наличии двух источников энергии соответственно на больших и промежуточных масштабах, причем для этого не требуется делать предположение о присутствии стока энтропии и

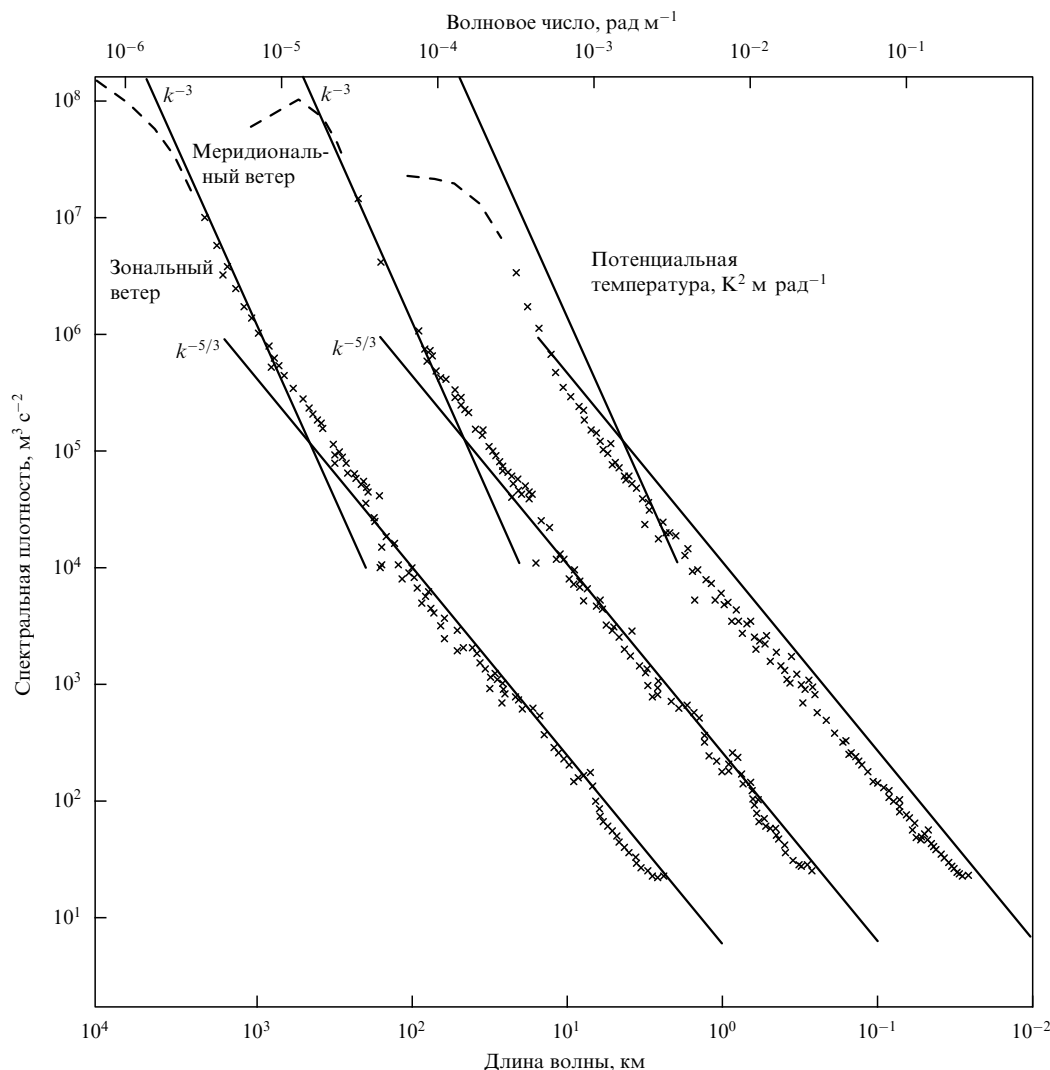


Рис. 16. Спектры дисперсии скорости ветра и потенциальной температуры по данным самолетных наблюдений в рамках программы GASP [120]. Спектры меридионального ветра и потенциальной температуры сдвинуты соответственно на одну и две декады вправо.

энергии на промежуточном масштабе. Малтруд и Валис [41] показали в численных экспериментах, что такое существование действительно возможно. Иная точка зрения излагается в работе [27]. Ее авторы утверждают, что спектр с наклоном -3 можно объяснить и в рамках обратного каскада энергии, поскольку, по их мнению, учет придонного трения приводит как раз к такому наклону. Мы уже указывали выше, что рассуждения о роли придонного трения в этой работе неточны.

К сожалению, процедура получения спектров является косвенной (они получаются пересчетом из частотных спектров). Поэтому однозначно интерпретировать их как спектры двумерной турбулентности по одним только наклонам нельзя. В частности, для того, чтобы утверждать, что спектр с наклоном $-5/3$ соответствует обратному каскаду энергии, надо измерить скорость каскада, что требует наличия пространственной реализации полей скорости, или же вычислить структурную функцию третьего порядка. Хотя на длинноволновой части интервала с наклоном $-5/3$ (~ 500 км) движения можно считать двумерными, вряд ли это же можно сказать о коротковолновой части, соответствующей масштабам от десятков до единиц километров.

Спектральный наклон -3 , наоборот, согласуется с результатами работ, представленных в предыдущем разделе. В частности, наклон спектров кинетической энергии в [15] (рис. 1) и [13] (рис. 18) близок к этому значению.

Эти заключения подтверждаются критическим анализом, приведенным в работе [31]. При обработке экспериментальных данных в этой работе вычисляются структурные функции. Преимущество структурных функций состоит в том, что поперечная и продольная структурные функции связаны определенными соотношениями, различными для двумерной и трехмерной турбулентности. Автор приходит к выводу, что участок больших разнесений (соответствующий спектру -3) лучше согласуется с двумерным поведением, чем участок меньших разнесений. На основании этого делается вывод, что спектр с наклоном $-5/3$ не следует интерпретировать как принадлежащий двумерной турбулентности. В работе [31] также выполнены расчеты структурной функции третьего порядка. Эта функция надежно восстанавливается в интервале $30-300$ км и оказывается положительной. Положительность свидетельствует об обратном направлении потока энергии или по крайней мере о

важности двумерных эффектов. Таким образом, нельзя также и утверждать, что участок со спектром $-5/3$ относится к трехмерной турбулентности. По-видимому, концепция стратифицированной турбулентности является наилучшей для описания мезомасштабных движений в атмосфере, однако ответ на вопрос, почему наклон $-5/3$ сохраняется на протяжении более чем двух декад, пока отсутствует.

Важным дополнением к натурным наблюдениям является анализ спектров энергии атмосферных полей по данным центров прогноза погоды. В работе [129] приводятся спектры за февраль 1993 г. по данным ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts), за январь 1989 г. по данным NMC (National Meteorological Center) и за январь 1979 г. по данным эксперимента FGGE-3b. Эти данные показывают, что наклон спектра энергии (проинтегрированной по вертикальной координате) в области сферических гармоник с номерами 10–30 действительно близок к -3 для всех трех наборов данных. Для $n > 30$ спектры расходятся, что говорит о разных пространственных разрешениях данных. Спектральный перенос энергии в основном положителен при $n < 10$ и отрицателен в области $n = 10–30$, свидетельствуя о том, что последняя область (со спектральным наклоном -3) — это область прямого каскада. Данные были отфильтрованы по схеме T60 и не содержали волновых чисел, соответствующих интервалу $-5/3$ экспериментов, описанных ранее.

Анализ в [130], выполненный по 14 зимним и 15 летним сезонам по данным ECMWF, показывает, что вертикально осредненные спектры энергии в диапазоне $n = 10–40$ характеризуются спектральным наклоном между $-2,5$ и $-2,6$. Даже с учетом возможной изменчивости этот наклон существенно отличен от наклона -3 , отмечаемого в предшествующих исследованиях. Авторы указывают, что спектр с наклоном $-5/3$ не наблюдается при больших n . В работе [130] также приводятся спектральные переносы энергии и энтропии. Спектральный перенос энергии положителен при $n = 3–10$, т.е. в диапазоне планетарных волн, и отрицателен в диапазоне $n = 10–40$, т.е. на синоптических масштабах. Опять это показывает, что спектральный интервал с наклоном -3 связан с прямым каскадом. Отмечается, что нелокальные взаимодействия с учетом планетарных волн играют существенную роль в переносе энтропии, тогда как более локальные взаимодействия в диапазоне синоптических масштабов в основном отвечают за обратный перенос энергии в сторону больших масштабов.

Прямое применение представления о крупномасштабных атмосферных движениях как о двумерной турбулентности является слишком упрощенным, поскольку не учитывает вертикальной структуры движений. Усредненные по вертикали спектры суммируют вклады от баротропной и бароклинных мод, и уже одно это может приводить к неопределенности в наклонах. Самолетные измерения дают скорее энергетические спектры, отнесенные к высоте полетов, чем спектры, характеризующие атмосферу в целом.

6.2. Лабораторные эксперименты

Лабораторные эксперименты по исследованию двумерной турбулентности немногочисленны. Ранние эксперименты, обзор которых можно найти в [131], как правило,

являются качественными. Обзор многих современных экспериментов можно найти в [21].

Мы кратко остановимся на тех известных нам экспериментах, где представлены количественные измерения. Для начала опишем используемые в лабораторных экспериментах способы реализации двумерных движений. Первый и наиболее естественный с точки зрения геофизической гидродинамики способ — быстрое вращение однородной жидкости, такое, что число Россби для характерных движений мало по сравнению с единицей. В этом случае, согласно теореме Праудмена, жидкость движется как целое (см., например, [5]) в пределах вертикальных столбиков — колонн Тэйлора. Источник, возбуждающий движения, может быть в значительной степени произвольным: если число Россби мало, трехмерные эффекты сосредоточены в тонких стюартсоновских слоях и в основной массе жидкости движения двумерны. Часто для возбуждения движения используется метод источников и стоков массы [83, 132]. За счет слабых агеострофических токов жидкости между источниками и стоками под действием силы Кориолиса генерируется намного более интенсивное геострофическое вихревое движение. Вследствие неустойчивости последнего при увеличении амплитуды накачки возникают сложные вихревые движения, которые можно ассоциировать с двумерной турбулентностью.

Вращающаяся жидкость в цилиндрическом канале может нагреваться на одной из боковых стенок вращающегося цилиндрического сосуда и охлаждаться на другой. Такая конфигурация использовалась Хайдом и Масоном [133] и представляет собой модель возбуждения глобальной циркуляции в атмосфере. В силу нагревания поверхности постоянной плотности наклонены, и возбуждение турбулентных движений жидкости при достаточно большом значении температурного контраста происходит за счет бароклиной неустойчивости.

Если жидкость — проводник, то сильное магнитное поле, направленное по вертикальной координате, будет оказывать то же действие, что и вращение. Возбуждение вихревых движений может осуществляться при пропускании тока между системой электродов чередующейся полярности [84]. Решетка регулярных вихрей теряет устойчивость при определенном значении силы тока, и наблюдается двумерное течение со сложной пространственно-временной структурой.

Простейшим способом одвумеривания движений жидкости может быть использование тонкого слоя жидкости. Если типичные горизонтальные масштабы возбуждаемых движений велики по сравнению с толщиной слоя жидкости и движения являются медленными по сравнению со скоростью распространения поверхностных волн, вертикальная компонента скорости остается малой, и поле скорости поэтому почти двумерно. Течения в таких экспериментах обычно генерируются магнитогидродинамически. Рабочая жидкость является слабым электролитом, контейнер с жидкостью помещается на систему магнитов, создающих магнитное поле специально подобранной конфигурации (как правило, это — решетка из магнитов с чередующейся ориентацией вертикальной компоненты напряженности магнитного поля), и при пропускании тока через жидкость вихревые движения в ней генерируются за счет действия силы Ампера (см., например, [82]). При увеличении плотности тока через электролит первичное течение становится

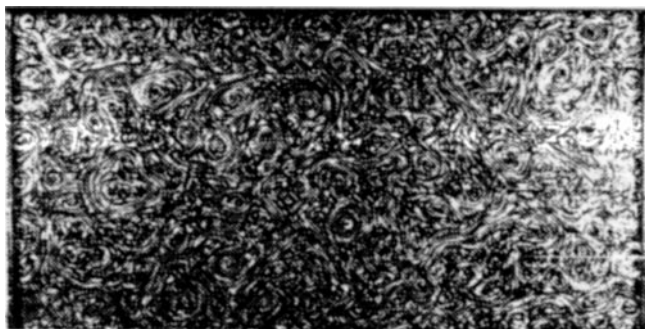


Рис. 17. Трековая фотография течения, возбуждаемого магнитогидродинамически в тонком слое жидкости. Конфигурация магнитного поля соответствует решетке из 8×8 эллиптических вихрей с эксцентриситетом 2:1. Показанное течение возникает вследствие неустойчивости базового течения и характеризуется нестационарным поведением.

неустойчивым. Трековая фотография на рис. 17 представляет пример сложной пространственной структуры течения, наблюдаемого в таких экспериментах.

Отметим, что во всех указанных экспериментальных конфигурациях присутствует придонное трение. Для вращающейся жидкости оно связано с формированием экмановского пограничного слоя на дне вращающегося сосуда. Для МГД экспериментов в проводящей жидкости трение возникает вследствие появления гартмановского пограничного слоя. Наконец, в экспериментах с тонкими слоями жидкости трение возникает вследствие того, что вертикальный профиль скорости квазипузайлев, и поэтому

$$\nu \partial_{zz} \mathbf{u} \sim -\lambda \mathbf{u},$$

где $\lambda = \nu \kappa / H_0^2$ и κ — подгоночный параметр порядка единицы. Разумеется, в последнем случае мы имеем дело всего лишь с параметризацией, которая физически правильно отражает влияние дна на диссипацию.

Еще одну группу составляют эксперименты с мыльными пленками [134, 135], текущими под действием силы тяжести между двумя вертикальными нитями. Здесь одмеривание также связано с малой толщиной пленки (единицы микрон), а диссипация обусловлена трением об окружающий воздух. Если предположить, что напряжение трения пропорционально локальной скорости пленки относительно воздуха, приходим к той же ситуации, что и в других экспериментах.

Эксперименты с затухающей турбулентностью выполнялись в работах [136–143]. В работах [30, 84, 144–151] изучалась квазидвумерная турбулентность с накачкой.

В работе [136] используется МГД метод генерации течения. Электрический ток пропускается через электролит в течение короткого промежутка времени, после чего исследуется затухание поля скорости течения. Горизонтальный размер отдельного магнита в решетке составляет $8 \times 5 \text{ мм}^2$, толщина слоя жидкости — $H_0 = 3 \text{ мм}$. Установка позволяет размещать до 14×13 магнитов, что позволяет создавать такое же количество вихрей. Движения жидкости визуализируются трассерными частицами. Для измерения полей скорости используется корреляционная обработка последовательных видеозаписей течения. Пространственное разрешение

измеренного поля скорости составляет 32×32 точки, однако информация о поле скорости доступна в последовательные моменты времени, разделенные периодом следования кадров. Измерения для течения, состоящего из 100 вихрей в начальный момент времени, свидетельствуют о следующем соотношении между энергией и энтропией:

$$\frac{\Omega}{E} \approx t^{-0,44 \pm 0,06},$$

которое устанавливается по прошествии нескольких секунд. Этот закон не соответствует теории Бэтчелора [4], предсказывающей затухание энтропии как t^{-2} , но близок к найденному в численном исследовании [70]. Однако согласно [70] площадь, занимаемая вихрями, уменьшается при затухании турбулентности, а в лабораторном эксперименте [136] вихри остаются плотно упакованными все время. Авторы работы [136] делают вывод, что эволюция затухающей турбулентности не следует этим двум сценариям.

Отличия от теоретических предсказаний не удивительны, поскольку каждая из теорий исходит из определенных предположений, которые не выполнены в эксперименте. Так, в теории энергия постоянна, а энергия в [136] убывает экспоненциально во времени с постоянной 2,3 с, что близко к оценке времени затухания по придонному трению

$$\frac{1}{2\lambda} \approx \frac{H_0^2}{4\nu},$$

составляющей 2,2 с (энергия затухает с удвоенной экспонентой). В работе не анализируется относительная роль нелинейных слагаемых, ответственных за перенос энергии по спектру, и диссипации, поэтому трудно судить о том, является изучаемый режим турбулентным или представляет собой в основном вязкое затухание (за счет как обычного, так и придонного трения). Дело в том, что при выбранных геометрических размерах обычная вязкость сравнима с придонным трением на масштабе накачки. Действительно, время затухания энергии, построенное на обычной вязкости, может быть оценено как $(2\nu k_z^2)^{-1}$ и составляет 1,6 с, т.е. меньше времени придонного трения. Компоненты с масштабом накачки затухают очень быстро, и перестройка течения может быть лишь следствием вязкого затухания.

Пологость в эксперименте [136] остается вблизи начального значения, приблизительно равного 3 (что ожидается для гауссова поля скорости), в течение всего времени эволюции. Такое поведение сильно отличается от поведения в численных экспериментах по затуханию турбулентности, где типичные значения пологости превышают несколько десятков по прохождении максимума диссипации энтропии и свидетельствуют о появлении сильных локализованных вихрей на более или менее однородном (в статистическом смысле) фоне.

Эксперименты в [138] опять посвящены изучению законов затухания и статистики вихрей в двумерной турбулентности и похожи на предыдущие эксперименты [136]. Утверждается, что благодаря усовершенствованию экспериментальной методики (используется двуслойная жидкость с малой разницей плотностей слоев) и изменению интерпретации удастся получить совпадение экспериментальных характеристик вихрей и законов затуха-

ния с предсказаниями теории [70]. Сюда относятся законы изменения количества вихрей, расстояния между вихрями и средних размеров вихрей во времени. Новая интерпретация предполагает замену переменных в уравнении трансформации завихренности

$$\xi^* = \xi \exp(\lambda t)$$

и переход к новому времени

$$t^* = \lambda^{-1}(1 - \exp(-\lambda t)).$$

В новых переменных слагаемое, соответствовавшее придонному трению, отсутствует, но эволюция длится конечное время. Коэффициент вязкости экспоненциально нарастает во времени:

$$\partial_t \xi^* + [\psi^*, \xi^*] = \nu^* \Delta \xi^*, \quad \nu^* = \nu \exp(\lambda t).$$

Авторы [138] предлагают считать, что изменение вязкости во времени несущественно и, следовательно, что течение описывается обычным двумерным уравнением. Тогда с предсказаниями теории надо сравнивать экспериментальные зависимости в новых переменных. Поскольку число Рейнольдса близко к значению, используемому в [136], новая интерпретация ничего не меняет в плане соотношения нелинейного переноса и диссипации, но, конечно, меняет временные зависимости. Мы, однако, должны еще раз отметить, что законы затухания двумерной турбулентности чувствительны к виду коротковолновой диссипации, о чем мы говорили выше в соответствующем разделе. Законы затухания, найденные в работе [70], относятся только к конкретному типу гипервязкости и сильно отличаются от законов, имеющих место для обычной вязкости. По этой причине совпадение результатов [138] с предсказаниями [70] не может носить универсального характера. Кроме того, нечеткой является сама экспериментальная процедура разделения течения на вихри и фон. Если в численной турбулентности локальные экстремумы завихренности превышают фон во много раз, этого не наблюдается в эксперименте, где разница между среднеквадратичными значениями и экстремумами невелика.

Двумерная затухающая турбулентность в эксперименте [139] наблюдается на мыльной пленке. Пленка создается между двумя нитями, натянутыми вертикально. Длина нитей — 180 см, а расстояние между ними — 5 см. Нити начинаются от дна резервуара с мыльным раствором. Раствор вытекает через отверстия радиуса 0,02 см, выполненные в дне резервуара. Скорость течения пленки может изменяться от 20 см с⁻¹ до 4 м с⁻¹. Использовались два метода получения информации о поле скорости — гомодинная корреляционная спектроскопия и измерения при помощи волоконного анемометра. Мы остановимся на результатах последних как более прямых. Турбулентность возбуждалась горизонтальной гребенкой с расстоянием между зубьями 3(1) мм. Измерения выполнялись на расстоянии 4(1) см от гребенки вниз по потоку. Частотные спектры мощности вертикальной и горизонтальной компонент скорости пересчитывались в пространственные при помощи гипотезы Тэйлора. Эти два спектра практически совпадают для частот между 100 и 1000 Гц (что свидетельствует об изотропии) и имеют наклон -3,3 (-3,6). Указанный

диапазон частот соответствует диапазону масштабов 2–0,2 см (скорость течения составляла 2 м с⁻¹). В диапазоне частот 20–100 Гц изотропия нарушена, но спектры являются более пологими и имеют наклон, приблизительно равный -2. Авторы интерпретируют измеренные спектры в высокочастотной области как спектры каскада энтропии.

Поскольку эволюция турбулентности в таком эксперименте происходит по мере смещения вниз по потоку, можно ожидать, что интегральный масштаб (скорость течения пленки, отнесенная к частоте максимума спектра) будет расти линейно с расстоянием вниз по потоку (в затухающей по Бэтчелору турбулентности [4] размеры вихрей растут линейно со временем).

Последнее демонстрируется в работе [140]. Схема эксперимента в ней похожа на предыдущую, но измерения поля скорости проводятся при помощи двухкомпонентного лазерного доплеровского анемометра в разных точках вниз по потоку. Спектральные наклоны высокочастотной части спектра (в области, где сигнал больше шума) приближенно равны -3,3. Линейный рост интегрального масштаба с расстоянием вниз по потоку в [140] сопровождается, однако, уменьшением плотности кинетической энергии. Последнее обусловлено трением о воздух. Авторы показывают, что, уменьшая давление окружающего воздуха, можно добиться существенного уменьшения диссипации. Форма спектров и закон роста интегрального масштаба при этом не меняются.

Мыльные пленки не являются строго двумерными системами, поскольку их толщина может изменяться. В эксперименте [141] показывается, что изменения толщины таковы, что средняя дивергенция составляет около 10–20 % от средней завихренности. Эксперименты выполнялись на установке, похожей на используемые в двух предыдущих случаях. Длина канала составляла 120 см, расстояние между нитями — 6 см и средняя скорость течения пленки была 1,05 м с⁻¹. Измерения скорости турбулентных пульсаций проводились при помощи системы цифровой обработки видеоизображений, которая позволяла получать значения скорости на сетке 60 × 60 точек для квадратного участка поверхности пленки со стороной 1,5 см. В работе [141] показано, что изменения толщины пленки коррелируют с завихренностью течения (своеобразная мелкая вода, однако поверхностное натяжение вносит дополнительную специфику). Найдены законы убывания энергии, флуктуаций толщины, среднего квадрата дивергенции и энтропии вниз по потоку. Энтропия и средний квадрат дивергенции убывают одинаково и быстрее, чем энергия. Это убывание энергии связано с внешним трением, и поэтому закон убывания не может быть проинтерпретирован в рамках какой-либо известной теории затухания. Указание на существенную роль сжимаемости (флуктуаций толщины) несколько снижает ценность экспериментов с мыльными пленками в плане установления связи между теорией двумерной турбулентности и экспериментом. Тем не менее можно надеяться на то, что многие качественные характеристики будут сохраняться и для этой системы. В работе [141] измерены структурные функции второго порядка завихренности и продольной компоненты скорости и структурная функция третьего порядка

$$S_{v\xi\xi} = \langle \delta v_L (\delta \xi)^2 \rangle.$$

Для последней в интервале энстрофии существует точный результат

$$\langle \delta v_L (\delta \xi)^2 \rangle = -2\eta r,$$

который можно получить подобно уравнению (9). Измеренная структурная функция $S_{v\xi\xi}$ действительно содержит интервал с длиной около декады, где указанная зависимость от разнесения r имеет место (масштабы — от доли миллиметра до 1 см, измерения выполнены на расстоянии 5 см от гребенки с диаметром зубьев 2,7 мм и расстоянием между ними 3 мм). Структурная функция второго порядка завихренности имеет наклон 0,4, что не противоречит наклону спектра энергии круче -3 , найденному в других работах с мыльными пленками. Наклон структурной функции скорости равен 1,6 и должен приводить к спектру энергии с наклоном $-2,6$. Столь разные результаты могут быть обусловлены ограниченным размером интервала энстрофии.

В работе других авторов [142], где измерения выполнялись для похожей экспериментальной системы (длина 120 см, ширина 6,2 см, скорость течения 180 см с^{-1} , измерения скорости проводятся при помощи лазерного доплеровского анемометра), также сообщается о наклоне 1,6 для структурной функции скорости второго порядка в интервале энстрофии. Измерения спектра скорости показывают, что спектр содержит участок с наклоном $-3,3$. Это также согласуется с предыдущими результатами. Измерения структурной функции скорости третьего порядка показывают, что при малых разнесениях она отрицательна, как и следует ожидать для каскада энстрофии, а при увеличении разнесения становится положительной, что говорит об обратном направлении переноса энергии. В работе ставится задача проверить соотношение между второй и третьей структурными функциями для двумерной турбулентности (следствие уравнения (7)). Эта задача может быть решена только на качественном уровне, поскольку рассматривается затухающая система и должны быть оценены производные по времени (не говоря о том, что внешняя диссипация не принимается во внимание).

Вопрос о структурной функции $S_{v\xi\xi}$ опять поднимается в работе [143]. Показано, что экспериментально измеренная зависимость $S_{v\xi\xi}/r$ имеет плато, и в этом отношении опять повторяются предыдущие результаты. В работе также измерена плотность вероятностей значений $S_{v\xi\xi}$ при разных разнесениях и показано, что она сильно отклоняется от гауссовой. Измерения выполнялись при помощи двух волоконных анемометров, схема установки аналогична предыдущим.

Работа [152] посвящена моделированию экспериментов по наблюдению турбулентности в мыльных пленках. Здесь рассматривается двумерное течение за гребенкой с цилиндрическими зубьями. Для спектрального наклона найдено значение $-3,7$, для наклона структурной функции второго порядка для продольных компонент скорости — 2, переходящее в 1,6 при увеличении разнесения. Наклон структурной функции завихренности близок к ее порядку n для $n = 2$ и $n = 4$.

Если эволюция турбулентного течения происходит в отсутствие не только накачки, но и диссипации, к анализу равновесных состояний могут быть применены методы статистической механики (см., например, [7, 153, 154]),

предсказывающие функциональную зависимость между функцией тока и завихренностью. Попытка понять, следует ли эволюция двумерной турбулентности предсказаниям статистической теории, была предпринята в работе [137], где были выполнены эксперименты с использованием установки, описанной в [136]. Авторы [137] заключают, что эволюция далека от предсказаний статистической теории, равно как и от предсказаний теории избирательного затухания, или минимума энстрофии. В работе, однако, также не исследуется отношение между скоростью диссипации энергии и скоростью переноса энергии по спектру, поэтому, строго говоря, нет оснований утверждать, что изучаемая система представляет собой турбулентное течение. Так, в работе [155] подчеркивается, что эволюция течения за счет вязкого затухания может выглядеть похожей на эволюцию двумерного турбулентного течения, поскольку также сопровождается увеличением размера вихрей.

Перейдем к исследованиям вынужденной турбулентности. В работе [84] измерения проводились в тонком слое ртути, помещенной во внешнее магнитное поле. Вихревое течение создавалось 36 электродами с чередующейся полярностью, размещенными на дне кюветы. Поле скорости измерялось в 11 точках, расположенных вдоль одной линии, поэтому представлены только одномерные спектры поперечной скорости и приведены соображения, показывающие, что спектральные наклоны, измеряемые по одномерным спектрам, должны быть близкими к наклонам в спектрах по модулю волнового числа (если принять соображение об изотропии поля скорости). Спектры содержат интервал, который имеет наклон, близкий к $-5/3$, однако длина этого интервала не превышает половину декады. В работе также рассматривалась зависимость спектров от надкритичности и было показано, что перенос энергии на большие масштабы ограничен из-за придонного трения, причем масштаб максимума энергии сдвигается в сторону увеличения при росте числа Рейнольдса. Турбулентность возбуждается на волновом числе (6, 6) (используется разложение по синусам, поэтому волновое число означает количество вихрей вдоль каждой координаты), и при $Re_\lambda \approx 20$ максимум энергии приближается к масштабу кюветы. К сожалению, данные, представленные в [84] по зависимости волнового числа максимума спектра от числа Рейнольдса, неполны и касаются только одномерных спектров.

В работе [144] исследовались турбулентные движения, появляющиеся в результате бароклинной неустойчивости фронтов апвеллинга, возбуждаемых поверхностным напряжением, приложенным к двуслойной жидкости в цилиндрическом вращающемся сосуде. В силу способа возбуждения здесь речь идет скорее о поведении квазигеострофической турбулентности. Вопрос о том, в какой мере движения проникают на всю глубину жидкости, т.е. в какой степени они являются квазидвумерными, в работе не обсуждается. Поля скорости восстанавливались по трековым фотографиям трассеров на поверхности жидкости. Разрешаемые масштабы составляли от 1 см и до масштаба сосуда, диаметр которого был 90 см. В работе рассматривалось несколько способов обработки трековых фотографий для получения спектров скорости. Первый способ — это восстановление спектральных наклонов по дисперсии

частиц. Этот способ приводит к некорректному восстановлению спектров, наклон которых круче $-2,5$. Второй способ состоит в вычислении двумерных спектров Фурье для поля скорости, интерполированного на регулярную сетку. Наконец, третий метод связан с вычислением одномерного преобразования Фурье от функции корреляции продольной компоненты скорости. Второй и третий способы ведут к непротиворечивым результатам. При вычислении спектров при помощи двумерного преобразования Фурье поле скорости интерполировалось на регулярную сетку 32×32 точки. Основным результатом работы состоит в наблюдении спектров, согласующихся со спектральным законом $-5/3$ на малых волновых числах и характеризующихся наклоном $-5,5$ на больших волновых числах. Пространственное разрешение, однако, не слишком велико, чтобы можно было говорить о надежном определении спектральных наклонов.

В работе [145] исследуется турбулентность, возбуждаемая методом источников и стоков в стратифицированной вращающейся жидкости. Чередующиеся источники и стоки расположены по окружности кольца с внутренним диаметром 563 мм, подвешенного горизонтально внутри объема жидкости с глубиной 445 мм. В экспериментах с вращающейся жидкостью используется 8 пар источников-стоков, диаметр отверстий которых — 4 мм. Для визуализации полей скорости используются трассерные частицы и система слежения за их смещениями DigImage, позволяющая в типичной ситуации измерять скорости около 2000 частиц в заданном горизонтальном сечении с частотой 6,25 Гц. В работе изучается эволюция турбулентности из состояния покоя и утверждается, что если начальный размер вихрей меньше радиуса Россби, основанного на полной глубине жидкости, обратный каскад энергии останавливается на этом масштабе. По мере того как вихри растут до масштаба радиуса Россби, увеличивается и их вертикальная протяженность — происходит эффективная баротропизация крупномасштабных компонент течения. Но это также означает, что может начать сказываться придонное трение. Возможно, эффект придонного трения и есть причина того, что в работе не наблюдается перенос энергии на масштабы, большие радиуса Россби. Между тем именно этого следует ожидать, если следовать аргументам геострофической турбулентности.

Вынужденная турбулентность в работах [146, 147] возбуждается как результат бароклинной неустойчивости жидкости в цилиндрическом канале и цилиндрическом сосуде соответственно. Жидкость охлаждается со стороны внешней стенки и нагревается внутри. Дно в обоих случаях является наклонным, что моделирует бета-эффект. Энергетические спектры рассчитываются по полю скорости, измеренному в горизонтальном сечении. Представленные в работах результаты свидетельствуют о том, что в зависимости от знака бета-эффекта максимум энергии находится либо на масштабе, большем масштаба Райнса (отрицательный наклон дна), либо на этом масштабе (положительный наклон). Коротковолновая часть спектров убывает круче, чем по закону k^{-3} , и в некоторых случаях имеется указание на спектральный наклон $-5/3$ на больших масштабах, однако эти масштабы велики по сравнению с масштабом Райнса. Радиус деформации Россби во всех

случаях мал и находится на пределе разрешаемых размеров. Вследствие этого следовало бы ожидать появления спектра обратного каскада энергии фактически вплоть до масштаба Райнса, однако этого не наблюдается. Опять мы должны отметить, что пространственное разрешение не слишком велико: оно составляет 6 отсчетов по радиусу и 15 по азимуту. В такой ситуации говорить о спектральных наклонах можно только качественно.

Работы [148] и [30] приводят результаты, пожалуй, самых подробных на настоящее время измерений характеристик вынужденной квазидвумерной турбулентности в области обратного потока энергии. В работе [30] турбулентное течение возбуждалось в тонком слое слабого электролита МГД методом. Размеры кюветы составляют 15×15 см², а масштаб накачки равен 15 мм (определяется периодом решетки магнитов). Ток через жидкость представляет собой импульсы постоянной амплитуды, но случайного знака (в отличие от других экспериментов с МГД приводом, где накачка не меняется во времени). Поле скорости оценивается на сетке 64×64 точки. Изучались два случая. В первом из них толщина слоя жидкости (5,5 мм) такова, что придонное трение велико и экспериментальный спектр энергии по модулю волнового числа ограничен со стороны больших масштабов. Спектр содержит интервал, который характеризуется наклоном $-5/3$, однако ширина этого интервала (хотя и наиболее велика из всех известных нам) все же меньше декады. Во втором случае толщина слоя жидкости больше, и придонное трение не в состоянии остановить перенос энергии на большие масштабы. Это, однако, означает, что наблюдаемый спектр является функцией максимального размера установки. Для первого случая показательны одновременные измерения спектра и спектрального потока энергии, представленные на рис. 18. Из сравнения следует, что спектральный наклон остается близким к $-5/3$ даже там, где спектральный поток энергии уменьшился практически до нуля.

Это уменьшение есть следствие влияния придонного трения и подтверждает наблюдение, сделанное по результатам численного моделирования в [11]: спектр $-5/3$ простирается в сторону больших масштабов далее, чем можно было бы ожидать, исходя из непостоянства потока энергии по спектру. В измерениях [30] поток энергии нигде не остается постоянным, монотонно уменьшаясь до нуля при $k \rightarrow 0$. Экспериментальная задача, решаемая в [30], является более широкой, чем измерения спектров. В ней рассматриваются структурные функции разных порядков для поперечной и продольной компоненты поля скорости. Для колмогоровской турбулентности в инерционном интервале должно иметь место соотношение

$$\langle \delta v^p \rangle \sim \varepsilon^{p/3} r^{p/3}.$$

Четные структурные функции продольной компоненты скорости, измеренные в эксперименте, имеют степенную зависимость от разнесения только в узком диапазоне масштабов, что связано с ограничением обратного каскада. Оказывается, что существенно лучше выполняются предсказания теории "расширенной автомодельности" (Extended Self-Similarity, или ESS). Эта теория (см. выше) предлагает исследовать следующий скейлинг для

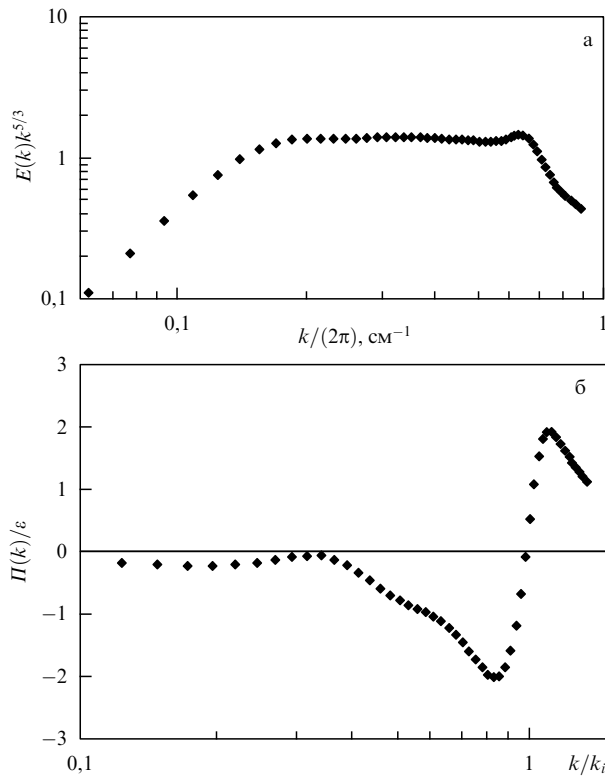


Рис. 18. Спектр энергии установившегося квазидвумерного течения (а) и соответствующий ему поток энергии (б), полученные в экспериментах с магнитогидродинамическим возбуждением течения в тонком слое [30].

структурных функций скорости:

$$\langle |\delta v_l|^p \rangle \sim \langle |\delta v_l|^s \rangle^{\zeta_p/\zeta_s},$$

поскольку относительная экспонента ζ_p/ζ_s может не зависеть от масштаба даже в тех случаях, когда абсолютные экспоненты от него зависят. В частности, в работе [33] показано, что особое значение имеет третий момент $\langle \delta v^3 \rangle$. Относительные экспоненты ζ_p/ζ_3 для низших четных моментов оказываются постоянными в широком интервале масштабов.

Это же демонстрируется в лабораторном эксперименте [30]. Более того, оказывается, что относительные экспоненты для продольных структурных функций близки к колмогоровским значениям вплоть до структурной функции $n = 12$, а нормированные четные продольные структурные функции очень мало отличаются от гауссовых значений. Относительные экспоненты для поперечных структурных функций не определялись, а нормированные четные поперечные функции опять оказываются близкими к гауссовым значениям. Взятое в целом, это означает, что перемежаемость практически отсутствует в обратном каскаде, и статистика поля скорости практически соответствует гауссовой (ср. [27]). В [30], однако, подчеркивается, что малые отклонения от гауссовости существуют, в том числе слабая, но значимая асимметрия плотности вероятности продольных приращений поля скорости. Отсутствие последней означало бы отсутствие обратного каскада энергии.

Еще одно обстоятельство, на которое обращают внимание авторы [30], состоит в том, что согласно наблюдаемому распределению вихрей по размерам

вихри в основном имеют размер порядка масштаба накачки, а количество вихрей в "инерционном" интервале сравнительно мало. Слияния вихрей сравнительно редки, а основной процесс, через который идет проникновение энергии на большие масштабы, — агрегация (кластеризация вихрей одного знака). Этот процесс замечен на начальной стадии в численных экспериментах. Здесь же он является основным из-за ограниченного разрешения.

В работе [149] выполняются измерения трех реализаций поля скорости квазидвумерного течения, возбуждаемого магнитогидродинамически. Масштаб накачки составляет 1/8 масштаба кюветы. Магнитное поле на порядок слабее, чем в экспериментах, описанных выше, однако сила тока выше и составляет 1, 3 и 9 А. Надкритичность, оцениваемая как отношение числа Рейнольдса к его критическому значению, при котором происходит потеря устойчивости, составляет в этих экспериментах приблизительно 9, 30 и 90. Восстановление поля скорости проводилось по цифровой обработке трековых фотографий. Каждая фотография содержит приблизительно 15000 треков. Поле скорости восстанавливается на сетке 256×128 точек. Спектры и потоки энергии, измеренные по реализациям, показывают, что каскад энергии на большие масштабы остановлен: спектральная плотность стремится к нулю при стремлении к нулю волнового числа, а поток энергии монотонно убывает. Это опять проявление придонного трения. Область с наклоном $-5/3$ в спектрах отсутствует, что обусловлено недостаточной закритичностью течения.

Эксперименты в [150] касаются спектров энергии и статистики завихренности в интервале энстрофии. Используется та же экспериментальная установка, что и в [30], но расположение магнитов изменено. Магниты занимают квадратную область, причем магниты с одноименной ориентацией вертикальной компоненты напряженности занимают противолежащие секторы, формируемые диагоналями этой области. Расположение магнитов внутри секторов произвольно. Накачка, таким образом, имеет масштаб системы. Восстановление полей скорости производится на сетке 64×64 точки, как и в [30], пространственное разрешение составляет 2,5 мм. Оцениваемая авторами точность измерений скорости составляет несколько процентов, а завихренности — 10 %. Электрический ток состоит из импульсов разной полярности с нулевым средним.

Спектр энергии, полученный осреднением по 200 реализациям, содержит участок несколько меньше декады с наклоном -3 , как показано на рис. 19. Положительность поля завихренности близка к гауссовому значению 3, что свидетельствует об отсутствии выраженных вихревых образований. На вставке на рис. 19 приведен измеренный поток энстрофии, который сильно изменчив и достигает максимума на масштабе, сильно отличающемся от масштаба накачки. Поток всюду положителен, т.е. энстрофия переносится в сторону больших волновых чисел, но непостоянство потока не позволяет говорить о наличии инерционного интервала энстрофии. Для определения η авторы осредняют поток по интервалу между волновым числом накачки и максимальным волновым числом. Это позволяет оценить константу Крейчнана–Бэтчелора C_1 величиной $1,4 \pm 0,3$. Это близко к оценке [48]. Расчеты в последней работе относятся к инерционному интервалу энстрофии (поток

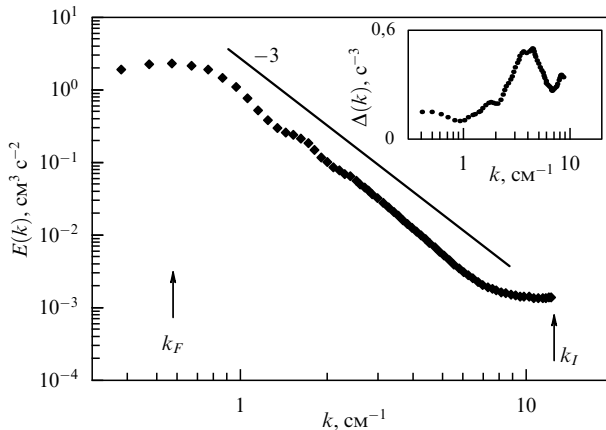


Рис. 19. Спектры энергии установившегося квазидвумерного течения в интервале энтрофии. На вставке приведен поток энтрофии [150].

энтрофии почти постоянен), и поэтому столь хорошее совпадение неожиданно. В [150] сообщается об измерениях функции плотности вероятности разности завихренности для нескольких разнесений, соответствующих интервалу спектра k^{-3} . Хвосты этой функции негауссовы. Также в работе впервые приводятся результаты экспериментальных измерений четных структурных функций завихренности $\langle \delta \xi^p \rangle$ с $p = 2, 4, 6, 8, 10$. Эти функции меняются с расстоянием, но соответствующие экспоненты малы (между $-0,05$ и $0,15$) и неотличимы от нуля в пределах экспериментальной погрешности. Наличие логарифмической поправки (для $p = 2$ появляется по той же причине, что и для структурных функций скорости; см. выше) также не может быть надежно установлено. Постоянство структурных функций означает, что поправки на перемежаемость в области прямого каскада малы. Этот факт согласуется с результатами [32], где отмечается, что перемежаемость в интервале энтрофии мала. Однако непостоянство потока энтрофии по спектру в [150] не позволяет судить о степени универсальности полученных в этой работе результатов. Как мы уже отмечали выше, спектры с наклоном, близким к -3 , в интервале энтрофии получаются при большом пространственном разрешении (до 4096×4096 в [48, 60]) и, как правило, при использовании гипервязкости. Ни то, ни другое не имеет отношения к эксперименту [150]. Авторы не приводят спектра мощности накачки. Наклон последнего также может влиять на измеряемое значение наклона спектра энергии.

В эксперименте [151] с мыльными пленками гребенки устанавливаются либо вертикально, либо под небольшим углом к вертикали, как схематически показано на рис. 20. Измерение поля скорости, как и в [140], выполняется при помощи двухкомпонентного лазерного доплеровского анемометра. Спектр мощности горизонтальной компоненты скорости A на рис. 20а измеряется между гребенками, где возмущение постоянно вносится в пленку. Этот спектр содержит короткий участок с наклоном $-5/3$, а его максимум соответствует длине волны λ , связанной со структурами максимального размера. По мере смещения точки измерения вниз по потоку происходит трансформация спектра к спектру затухающей турбулентности. Участок с наклоном $-5/3$ исчезает и остается только участок с наклоном -3 . Максимум спектральной плотности смещается в сто-

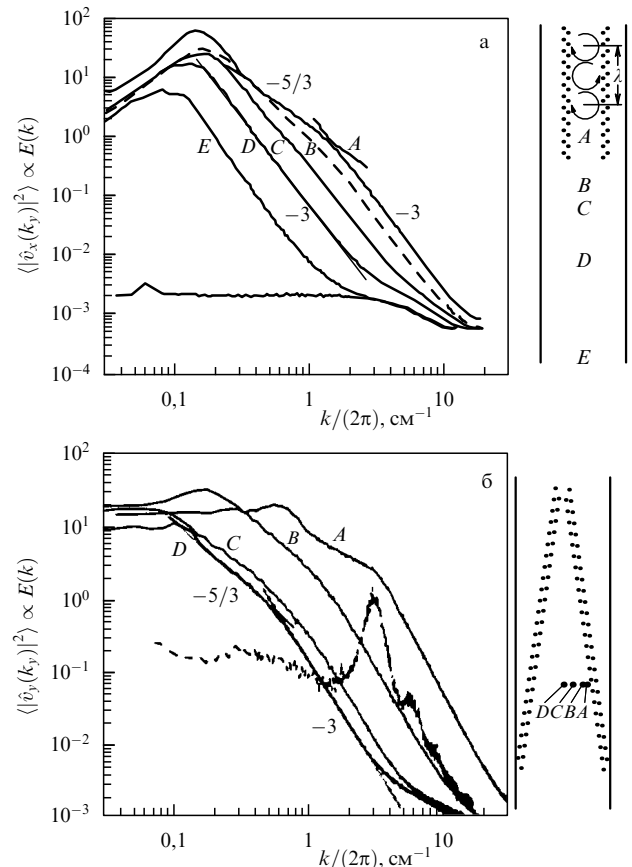


Рис. 20. (а) Спектры мощности горизонтальной компоненты скорости. Нижняя кривая дает уровень фонового шума. Ширина пленки 8 см, расстояние между гребенками 2,5 см; координаты точек относительно нижней точки гребней: 5, -5 , -10 , -20 , -40 см. (б) Спектры мощности вертикальной компоненты скорости. Штриховая кривая — спектр от одного зуба гребенки 2 см вниз по потоку. Расстояние между гребенками 2 см вверх и 7 см вниз [151].

рону меньших k , а его амплитуда уменьшается из-за трения. Спектры мощности вертикальной компоненты скорости на рис. 20б показывают тенденцию изменения того, что можно назвать масштабом накачки (границы между интервалами с разным наклоном) при удалении от гребенки.

Итак, мы видим, что современные методы лабораторных исследований сделали возможными количественные измерения спектральных и других характеристик квазидвумерных турбулентных течений. Часть экспериментальных результатов находится в хорошем соответствии с теорией. Это в первую очередь касается спектральных наклонов, знаков спектральных потоков энергии и энтрофии, роли придонного трения. Несмотря на это, эксперименты все еще достаточно далеки от того, чтобы претендовать на роль эталонов, на которых могут проверяться теоретические предсказания. Ни в одном из известных нам экспериментов не измерены спектры и структурные функции, связанные с постоянными спектральными потоками энергии и энтрофии. В первую очередь это связано с недостаточным пространственным разрешением. Даже в последних экспериментах максимальный (минимальный) масштаб и масштаб накачки различаются всего на порядок. Экспериментальные течения далеки от идеализированных численных аналогов и содержат ряд дополнительных особен-

ностей, которые не всегда анализируются. В частности, в экспериментах с тонкими слоями слабого электролита, приводимыми в движение МГД методом, движение двумерно только в том смысле, что вектор скорости почти горизонтален. Однако скорость меняется с глубиной (она равна нулю на дне), а ее вертикальный профиль есть сложная функция трех координат и времени. Последнее ведет к тому, что придонное трение $\nu \delta^2 \mathbf{v} / \delta z^2$ в нестационарных течениях может быть параметризовано рэлеевским трением только качественно (профиль не успевает релаксировать к пуазейлеву). Между тем именно указанное придонное трение обеспечивает сток энергии в [30] и энстрофии в [150], где выполнены наиболее обширные на сегодняшний день измерения. Такое трение не используется в численных исследованиях.

7. Заключение

Даже строго двумерная турбулентность, хотя, как мы видели, "строгость" нарушается включением искусственной длинноволновой и коротковолновой диссипации, не обязательно ведет себя в соответствии с предсказаниями теорий, основанных на идее инерционных интервалов энергии и энстрофии. Основная причина этого для коротковолновой части спектра — нелокальность взаимодействий. Типичные триады, участвующие в нелинейных взаимодействиях, таковы, что при умеренном спектральном разрешении одна из компонент всегда находится вблизи масштаба накачки. Вследствие этого память о накачке сохраняется, и сама идея инерционного интервала, строго говоря, становится неприменимой, поскольку спектральные потоки зависят не только от локальных, но и от внешних характеристик. При обеспечении достаточного пространственного разрешения происходит "возврат к теории" и может устанавливаться спектр с наклоном, близким к -3 , на достаточно больших волновых числах. Это происходит вследствие того, что динамика мелкомасштабных вихрей суть динамика пассивной примеси во внешнем поле крупномасштабных вихрей, возникающих на масштабе накачки (скорость переноса энстрофии определяется этими крупными вихрями).

В интервале энергии спектр энергии обычно близок к $k^{-5/3}$, однако и здесь возможны отклонения от этого закона для стационарных спектров, обусловленные искусственной остановкой обратного каскада. При использовании специального способа ограничения каскада [62] достигается идеальный спектр с наклоном $-5/3$. Если каскад останавливается при помощи придонного трения, спектры обычно близки к закону $k^{-5/3}$ в пределах некоторого интервала волновых чисел при непостоянном потоке энергии по спектру. Использование трения, избирательно действующего на большие масштабы и обеспечивающего почти постоянный поток энергии по спектру вплоть до интервала диссипации энергии, приводит к спектрам, сильно отклоняющимся от этого закона (до k^{-3} в [44]). Эти случаи характеризуются ростом когерентных вихрей, которые в случае спектров с наклоном $-5/3$ наблюдаются только на масштабах накачки. Сформировавшись, эти вихри модифицируют турбулентность. Последние эксперименты свидетельствуют о том, что турбулентные поля скорости близки к гауссовым в случаях, когда реализуется спектр с наклоном $-5/3$.

С точки зрения геофизических приложений режимы строго двумерной турбулентности представляют лишь ограниченный интерес. Наличие придонного трения, бета-эффекта, вертикальной стратификации модифицируют поведение турбулентности. Придонное трение уменьшает поток энергии по мере того, как она переносится на большие масштабы и устанавливает, таким образом, внешний масштаб двумерной турбулентности. Бета-эффект устанавливает масштаб, разграничивающий изотропную турбулентность от существенно анизотропной, существующей в форме струй, ориентированных в зональном направлении (масштаб Райнса). Вопреки мнению о том, что масштаб Райнса служит границей между изотропной турбулентностью и волнами Россби, волны практически отсутствуют в той области спектра, которая предсказывается качественными аргументами Райнса. Масштаб Райнса ограничивает обратный каскад энергии в затухающей турбулентности [54], но в стационарной турбулентности это может сделать только длинноволновая диссипация. То же касается и радиуса Россби–Обухова. Он ограничивает обратный каскад энергии в затухающей турбулентности [54], но при наличии стационарной (в статистическом смысле) накачки для ограничения каскада необходима диссипация. В баротропных задачах диссипация на больших масштабах обусловлена придонным трением. Его роль в формировании внешнего масштаба при наличии бета-эффекта и конечном радиусе Россби–Обухова еще не исследована.

Ситуация только усложняется при переходе к простейшим послойным бароклинным моделям. Источником энергии здесь служит бароклиная неустойчивость, и энергия поступает в систему на масштабах, больших или порядка внутреннего радиуса Россби. Перенос энергии по масштабам баротропной и бароклиной модами осуществляется в противоположных направлениях. Согласно большинству работ максимум вихревой энергии наблюдается на масштабах, превышающих внутренний радиус Россби, и хорошо согласуется с масштабом Райнса. Вопрос о том, как интенсивность турбулентности меняется в зависимости от накачки, без ответа на который априорные оценки масштаба Райнса невозможны, до сих пор открыт. Опять мы должны отметить тот факт, что модели обязательно включают придонное трение и радиационную релаксацию, которые и определяют сток энергии. Вряд ли можно надеяться получить надежный скейлинг для внешнего масштаба, не принимая во внимание диссипацию.

Лабораторные эксперименты по исследованию характеристик двумерной турбулентности пока еще немногочисленны и имеют сравнительно низкое пространственное разрешение. Прогресс в технике обработки видеоизображений, наблюдаемый в последнее время, позволяет надеяться на появление измерений со все большим пространственным разрешением.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 99-05-64350 и 99-05-64351) и гранта COBASE. Авторы выражают благодарность Дж. Херринугу за указание на новые результаты по затухающей турбулентности и В. Грянику за обсуждение многих вопросов, затронутых в обзоре.

Мы особо благодарны Ф.В. Должанскому, пробудившему наш интерес к проблеме двумерной турбулентности и, в частности, к вопросу о роли придонного трения.

Список литературы

- Kraichnan R H *Phys. Fluids* **10** 1417 (1967)
- Kraichnan R H *J. Fluid Mech.* **47** 525 (1971)
- Leith C E *Phys. Fluids* **11** 671 (1968)
- Batchelor G K *Phys. Fluids Suppl. II* **12** 233 (1969)
- Педлоски Дж *Геофизическая гидродинамика* (М.: Мир, 1984) [Pedlosky J *Geophysical Fluid Dynamics* 2nd ed. (New York: Springer-Verlag, 1979)]
- Монин А С *Геофизическая гидродинамика* (М.: Гидрометеиздат, 1988)
- Salmon R *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics* (New York: Oxford University Press, 1998)
- Rhines P B *J. Fluid Mech.* **69** 417 (1975)
- Lilly D K *Geophys. Fluid Dyn.* **3** 289 (1972)
- Манин Д Ю *Изв. АН СССР. Физика атмос. и океана* **26** 579 (1990)
- Данилов С Д, Должанский Ф В *Изв. РАН. Физика атмос. и океана* **34** (3) 293 (1998)
- Vallis G K, Maltrud M E *J. Phys. Oceanogr.* **23** 1346 (1993)
- Panetta R L *J. Atmos. Sci.* **50** 2073 (1993)
- Larichev V D, Held I M *J. Phys. Oceanogr.* **25** 2285 (1995)
- Held I M, Larichev V D *J. Atmos. Sci.* **53** 946 (1996)
- Монин А С, Мирабель А П *Успехи мех.* **2** (3) 47 (1979)
- Rhines P B *Ann. Rev. Fluid Mech.* **11** 401 (1979)
- Мирабель А П, Монин А С *Изв. АН СССР. Физика атмос. и океана* **16** 1011 (1980)
- Lesieur M *Turbulence in Fluids* 3d ed. (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997)
- Vallis G K, in *Nonlinear Phenomena in Atmospheric and Oceanic Sciences* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 40, Eds G F Carnevale, R T Pierrehumbert) (New York: Springer-Verlag, 1992)
- 2D *Turbulence. A Tentative Dictionary* (NATO ASI Series. Ser. B: Physics, Vol. 341, Eds P Tabeling, O Cardoso) (New York: Plenum Press, 1997)
- Монин А С, Озмидов Р В *Океанская турбулентность* (Л.: Гидрометеиздат, 1981) [Monin A S, Ozmidov R V *Turbulence in the Ocean* (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1985)]
- Fjofort R *Tellus* **5** 225 (1953)
- Новиков Е Л *Изв. АН СССР. Физика атмос. и океана* **14** 668 (1978)
- Oetzel K G, Vallis G K *Phys. Fluids* **9** 2991 (1997)
- Smith L M, Yakhot V *Phys. Rev. Lett.* **71** 352 (1993)
- Smith L M, Yakhot V *J. Fluid Mech.* **274** 115 (1994)
- Orszag S A *J. Fluid Mech.* **41** 363 (1970)
- Holloway G *Ann. Rev. Fluid Mech.* **18** 91 (1986)
- Paret J, Tabeling P *Phys. Fluids* **10** 3126 (1998)
- Lindborg E *J. Fluid Mech.* **388** 259 (1999)
- Babiano A, Dubrulle B, Frick P *Phys. Rev. E* **52** 3719 (1995)
- Babiano A, Dubrulle B, Frick P *Phys. Rev. E* **55** 2693 (1997)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988)
- Frisch U *Turbulence: The Legacy of A N Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge University Press, 1995)
- Колмогоров А Н *ДАН СССР* **32** 19 (1941)
- Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941)
- Babiano A, Basdevant C, Sadourny R *J. Atmos. Sci.* **42** 941 (1985)
- Lilly D K *Phys. Fluids Suppl. II* **12** 240 (1969)
- Lilly D K *J. Fluid Mech.* **45** 395 (1971)
- Maltrud M E, Vallis G K *J. Fluid Mech.* **228** 321 (1991)
- Cho J Y-K, Polvani L M *Phys. Fluids* **8** 1531 (1996)
- Maltrud M E, Vallis G K *Phys. Fluids A* **5** 1760 (1993)
- Borue V *Phys. Rev. Lett.* **72** 1475 (1994)
- Kukharkin N N *J. Sci. Comput.* **10** 409 (1995)
- Chekhlov A et al. *Phys. Fluids* **6** 2548 (1994)
- Nozawa T, Yoden S *Phys. Fluids* **9** 2081 (1997)
- Borue V *Phys. Rev. Lett.* **71** 3967 (1993)
- Chekhlov A et al. *Physica D* **98** 321 (1996)
- Chasnov R J *Phys. Fluids* **9** 171 (1997)
- Legras B, Santangelo P, Benzi R *Europhys. Lett.* **5** 37 (1988)
- Ohkitani K *Phys. Fluids A* **3** 1598 (1991)
- Ohkitani K *Phys. Fluids A* **2** 1529 (1990)
- McWilliams J C *J. Fluid Mech.* **146** 21 (1984)
- Herring J, McWilliams J J *Fluid Mech.* **153** 229 (1985)
- McWilliams J C *Phys. Fluids A* **2** 547 (1990)
- Lesieur M, Herring J R *J. Fluid Mech.* **161** 77 (1985)
- Dubrulle B, Nazarenko S *Physica D* **110** 123 (1997)
- Gotoh T *Phys. Rev. E* **57** 2984 (1998)
- Lindborg E, Avelius K *Phys. Fluids* **12** 945 (2000)
- Frish U, Sulem P L *Phys. Fluids* **8** 1921 (1984)
- Sukoriansky S, Galperin B, Chekhlov A *Phys. Fluids* **11** 3043 (1999)
- Yakhot V *Phys. Rev. E* **60** 5544 (1999)
- Boffetta G, Celani A, Vergassola M *Phys. Rev. E* **61** R29 (2000)
- Fornberg B *J. Comput. Phys.* **25** 1 (1977)
- Basdevant C et al. *J. Atmos. Sci.* **38** 2305 (1981)
- Santangelo P, Benzi R, Legras B *Phys. Fluids A* **1** 1027 (1989)
- Benzi R, Patarnello S, Santangelo P *J. Phys. A* **21** 1221 (1988)
- McWilliams J C *J. Fluid Mech.* **219** 361 (1990)
- Carnevale G F et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 2735 (1991)
- Benzi R et al. *Phys. Fluids A* **4** 1036 (1992)
- Weiss J B, McWilliams J C *Phys. Fluids A* **5** 608 (1993)
- Matthaeus W H et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 2731 (1991)
- Matthaeus W H et al. *Physica D* **51** 531 (1991)
- Carnevale G F et al. *Phys. Fluids A* **4** 1314 (1992)
- Dritschel D G *Phys. Fluids A* **5** 984 (1993)
- Legras B, Dritschel D J *Comput. Phys.* **104** 287 (1993)
- Mariotti A, Legras B, Dritschel D G *Phys. Fluids* **6** 3954 (1994)
- Bartello P, Warn T *J. Fluid Mech.* **326** 357 (1996)
- Chasnov J R, Herring J R *Phys. Fluids* (submitted)
- Должанский Ф В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **35** (1) 163 (1999)
- Должанский Ф В, Крымов В А, Манин Д Ю *УФН* **160** (7) 1 (1990)
- Colin de Verdiere A *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **15** 213 (1980)
- Sommeria J *J. Fluid Mech.* **170** 139 (1986)
- Hopfinger E J, Griffiths R W, Mory M *J. Mech. Theor. Appl. (Numéro Special)* **2** 21 (1983)
- Dolzhaniskii F V, Manin D Yu *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **72** 93 (1993)
- Danilov S D, Dolzhanskii F V, Krymov V A *Chaos* **4** (2) 299 (1994)
- Holloway G, Hendershott M *J. Fluid Mech.* **82** 747 (1977)
- Каменкович В М, Кошляков М Н, Монин А С *Синоптические вихри в океане* (Л.: Гидрометеиздат, 1982) [Kamenkovich V M, Koshlyakov M N, Monin A S *Synoptic Eddies in the Ocean* (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1986)]
- Williams G P *J. Atmos. Sci.* **35** 1399 (1978)
- Huang H-P, Robinson W A *J. Atmos. Sci.* **55** 611 (1998)
- Yoden S, Yamada M *J. Atmos. Sci.* **50** 631 (1993)
- Larichev V D, McWilliams J C *Phys. Fluids A* **3** 938 (1991)
- Kukharkin N, Orszag S A, Yakhot V *Phys. Rev. Lett.* **75** 2486 (1995)
- Farge M, Sadorny R *J. Fluid Mech.* **206** 433 (1989)
- McWilliams J C *Phys. Fluids* **10** 3178 (1998)
- Yuan L, Hamilton K J *Fluid Mech.* **280** 369 (1994)
- Polvani L M et al. *Chaos* **4** (2) 177 (1994)
- Arai M, Yamagata T *Chaos* **4** 163 (1994)
- Ford R *Phys. Fluids* **6** 3694 (1993)
- Charney J G *J. Atmos. Sci.* **28** 1087 (1971)
- Herring J R *J. Atmos. Sci.* **37** 969 (1980)
- Hua B L, Haidvogel D B *J. Atmos. Sci.* **43** 2923 (1986)
- McWilliams J C, Weiss J B *Chaos* **4** 305 (1994)
- McWilliams J C, Weiss J B, Yavneh I *J. Fluid Mech.* **401** 1 (1999)
- McWilliams J C *J. Fluid Mech.* **219** 387 (1990)
- Gall R *J. Atmos. Sci.* **33** 349 (1976)
- Randel W, Held I J *J. Atmos. Sci.* **48** 688 (1991)
- Olbers D, Wolf J-O, Völker C *J. Phys. Oceanogr.* **30** 1645 (2000)
- Salmon R *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **10** 25 (1978)
- Salmon R *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **15** 167 (1980)
- McWilliams J C, Chow H S *J. Phys. Oceanogr.* **11** 921 (1981)
- Held I M, O'Brien E J *J. Atmos. Sci.* **49** 1861 (1992)
- Haidvogel D B, Held I M *J. Atmos. Sci.* **37** 2644 (1980)
- Whitaker J S, Barsilon A *J. Atmos. Sci.* **52** 491 (1995)
- Lee S *J. Atmos. Sci.* **54** 1726 (1997)
- Pavan V, Held I M *J. Atmos. Sci.* **53** 1262 (1996)
- McWilliams J C *Dyn. Atmos. Oceans* **1** 427 (1977)
- Nastrom G D, Gage K S *J. Atmos. Sci.* **42** 950 (1985)
- Gage K S, Nastrom G D *J. Atmos. Sci.* **43** 729 (1986)

121. Höglström U, Smedman A-S, Bergström H *J. Atmos. Sci.* **56** 959 (1999)
122. Wikle C K, Milliff R F, Large W G *J. Atmos. Res.* **56** 2222 (1999)
123. Larsen M F, Kellet M C, Gage K S *J. Atmos. Sci.* **39** 1035 (1982)
124. Lilly D K *J. Atmos. Sci.* **40** 749 (1983)
125. Lilly D K et al. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **11** 139 (1998)
126. Herring J R *Fluid Dyn. Res.* **24** 363 (1999)
127. Vallis G K, Shutts G J, Gray M E B *Quart. J. R. Met. Soc.* **12** 1621 (1996)
128. Lilly D K *J. Atmos. Sci.* **46** 2026 (1989)
129. Koshyk J N, Boer G J *J. Atmos. Sci.* **52** 965 (1995)
130. Straus D M, Ditlevsen P *Tellus* **51A** 749 (1999)
131. Tritton D J, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (Proc. of the School of Physics "Enrico Fermi", Course 88, Eds M Ghil, R Benzi, G Parisi) (Amsterdam: North-Holland, 1985) p. 172
132. Hide R *J. Fluid Mech.* **32** 737 (1968)
133. Hide R, Mason P J *Adv. Phys.* **24** 47 (1975)
134. Couder Y, Chomaz J M, Rabaud M *Physica D* **37** 384 (1989)
135. Charib M, Derango P *Physica D* **37** 406 (1989)
136. Cardoso O, Marteau D, Tabeling P *Phys. Rev. E* **49** 454 (1994)
137. Marteau D, Cardoso O, Tabeling P *Phys. Rev. E* **51** 5124 (1995)
138. Hansen A E, Marteau D, Tabeling P *Phys. Rev. E* **58** 7261 (1998)
139. Kellay H, Wu X L, Goldburg W I *Phys. Rev. Lett.* **74** 3975 (1995)
140. Martin B K, Wu X L, Goldburg W I *Phys. Rev. Lett.* **80** 3964 (1998)
141. Rivera M, Vorobieff P, Recke R E *Phys. Rev. Lett.* **81** 1417 (1998)
142. Belmonte A et al. *Phys. Fluids* **11** 1196 (1999)
143. Kellay H, Bruneau C H, Wu X L *Phys. Rev. Lett.* **84** 1696 (2000)
144. Narimousa S, Maxworthy T, Spedding G R *J. Fluid Mech.* **223** 113 (1991)
145. Linden P F, Boubnov B M, Dalziel S B *J. Fluid Mech.* **298** 81 (1995)
146. Bastin M E, Read P L *J. Fluid Mech.* **339** 173 (1997)
147. Bastin M E, Read P L *Phys. Fluids* **10** 374 (1998)
148. Paret J, Tabeling P *Phys. Rev. Lett.* **79** 4162 (1997)
149. Данилов С Д, Довженко В А, Крымов В А *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **36** 284 (2000)
150. Paret J, Jullien M-C, Tabeling P *Phys. Rev. Lett.* **83** 3418 (1999)
151. Rutgers M A *Phys. Rev. Lett.* **81** 2244 (1998)
152. Bruneau C H, Greffier O, Kellay H *Phys. Rev. E* **60** 1162 (1999)
153. Salmon R, Holloway G, Hendershott M *J. Fluid Mech.* **75** 691 (1976)
154. Rober R, Sommeria J *J. Fluid Mech.* **229** 291 (1991)
155. Van de Konijnenberg J A, Flór J D, Van Heijst G J F *Phys. Fluids* **10** 595 (1998)
156. Cardoso O et al. *Phys. Fluids* **8** 209 (1996)

Quasi-two-dimensional turbulence

S.D. Danilov

*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,
Pyzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation,
Tel. (7-095) 951-84 80*

E-mail: danilov@omega.ifaran.ru

D. Gurarie

*Math. Department, CWRU,
Cleveland OH, 44106-7044, USA
E-mail: dxg5@po.cwru.edu*

We review the results of numerical and experimental studies in quasi-two-dimensional (Q2D) turbulence. We demonstrate that theoretical energy spectra with slopes $-5/3$ and -3 (Kraichnan–Batchelor–Leith) could be observed only under special set of external parameters. The bottom drag, beta effect, finite Rossby–Obukhov radius or vertical stratification, which distinguish geophysical Q2D turbulence from its purely 2D counterpart, determine organization of a Q2D flow on a large scale. Since spectral energy flux in 2D turbulence is directed upscale, the bottom friction takes on a special role. In the absence of bottom drag the energy condenses on the largest resolvable scale and flow equilibration is not attained.

PACS numbers: 47.27.Ak, 47.27.Eq, **92.10.-c**, **92.90.+x**

Bibliography — 156 references

Received 22 May 2000, revised 20 June 2000