

## ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Дифракция и дифракционное излучение

Б.М. Болотовский, Е.А. Галстьян

*На примере скалярной теории рассматриваются сходства и различия двух родственных явлений — дифракции и дифракционного излучения.*

PACS numbers: 41.60.-m, 41.90.+e, 42.25.Fx, 61.14.-x

## Содержание

1. Введение (809).
  2. Простая скалярная теория дифракции (811).
  3. Простая скалярная теория дифракционного излучения (815).
  4. Излучение малого источника, пролетающего через круглое отверстие в плоском экране (818).
  5. Излучение точечного источника, пересекающего центр плоского круглого экрана (824).
  6. Аналог теоремы Бабиня для дифракционного излучения (825).
  7. Излучение заряженной частицы, вылетающей из открытого конца волновода (827).
  8. Заключение (828).
- Список литературы (829).

## 1. Введение

Дифракционное излучение представляет собой один из случаев излучения, возникающего при равномерном движении заряженной частицы. Заряженная частица, движущаяся в однородной среде, может стать источником излучения, если ее скорость превосходит фазовую скорость света в среде. Возникающее при этом излучение — это хорошо известное излучение Вавилова–Черенкова, теория которого была создана И.Е. Таммом и И.М. Франком<sup>1</sup>. Отметим здесь (это важно для дальнейшего), что излучение Вавилова–Черенкова обычно рассматривается в предположении, что заряженная частица движется равномерно в однородной безгра-

<sup>1</sup> Тамм И.Е., Франк И.М. "Когерентное излучение быстрого электрона в среде" *ДАН СССР* 14 107 (1937).

**Б.М. Болотовский.** Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация  
Тел. (095) 132-62-35  
E-mail: bolot@td.lpi.ac.ru

**Е.А. Галстьян.** Московский радиотехнический институт РАН, 113519 Москва, Варшавское шоссе 132, Российская Федерация  
Тел. (095) 118-03-35  
E-mail: galstjan@aha.ru

*Статья поступила 10 ноября 1999 г.,  
после доработки 21 июня 2000 г.*

ничной среде. В дальнейшем излучение Вавилова–Черенкова нашло важные применения в физике высоких энергий, где оно было использовано для регистрации быстрых заряженных частиц. Кроме того, появились плодотворные физические представления, основанные на взаимодействии движущегося заряда с синхронной волной. Эти представления позволили, в частности, наглядно объяснить затухание волн в электронной плазме без столкновений.

Если среда неоднородна вдоль траектории частицы, то излучение возникает при любой скорости движения. Первой работой, в которой рассматривалось излучение равномерно движущейся частицы в неоднородной среде, была работа В.Л. Гинзбурга и И.М. Франка<sup>2</sup>. Авторы рассмотрели простейший вид неоднородности — плоскую границу раздела между двумя средами с различными значениями показателя преломления. Заряженная частица двигалась в одной из сред, приближаясь по нормали к границе раздела, пересекала границу, переходя во вторую среду, и затем, двигаясь с той же скоростью, уходила от границы раздела на бесконечность. В.Л. Гинзбург и И.М. Франк вычислили возникающее при этом излучение, полностью определив все его характеристики — интенсивность, угловое распределение, поляризацию и т.д. Авторы назвали это излучение переходным. Интересно отметить, что Тамм и Франк ставили своей задачей объяснение открытия, сделанного П.А. Черенковым и С.И. Вавиловым несколькими годами ранее, а Гинзбург и Франк предсказали новый эффект, который был обнаружен на опыте двенадцать лет спустя. В дальнейшем Г.М. Гарибян показал, что спектр переходного излучения вперед для быстрой частицы простирается до высоких частот, пропорциональных энергии частицы, и это обстоятельство позволило создать детекторы быстрых частиц на переходном излучении. В отличие от черенковских детекторов, счет-

<sup>2</sup> Гинзбург В.Л., Франк И.М. "К теории переходного излучения" *ЖЭТФ* 16 15 (1946). Дальнейшее развитие теории и приложений см. в книгах: Гарибян Г.М., Ши Ян *Рентгеновское переходное излучение* (Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1983); Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. *Переходное излучение и переходное рассеяние* (М.: Наука, 1984); Франк И.М. *Излучение Вавилова–Черенкова. Вопросы теории* (М.: Наука, 1988).

чики частиц на переходном излучении не только регистрируют факт прохождения частицы, но и дают возможность определить ее энергию.

В работе В.Л. Гинзбурга и И.М. Франка по переходному излучению было впервые рассмотрено поле заряда, равномерно движущегося в неоднородной среде. При этом, как уже было сказано, неоднородность представляла собой плоскую границу раздела между двумя средами. В дальнейшем были рассмотрены и другие виды неоднородности, в частности, экраны с отверстиями или же тела конечных размеров, расположенные вблизи от траектории так, что частица пролетает мимо тела, не пересекая его поверхности. При таком пролете также возникает излучение, и оно получило название дифракционного<sup>3</sup>.

Физическая природа переходного и дифракционного излучений одна и та же: поле пролетающей частицы наводит в неоднородности переменные токи (или переменную поляризацию), которые и являются как бы источниками излучения. Мы употребили слова "как бы", потому что, по нашему мнению, не имеет смысла ставить вопрос, что именно является в данном случае источником излучения — движущаяся заряженная частица или оптическая неоднородность. И движущийся заряд, и оптическая неоднородность представляют собой два необходимых компонента для того, чтобы возникло излучение. Достаточно убрать любой из них, и излучение не появится.

Однако, несмотря на общую физическую природу, переходное излучение и дифракционное излучение различаются по методу рассмотрения этих задач, причем это различие оказывается значительно более глубоким, чем просто методическое. Для того чтобы уяснить это различие, рассмотрим трансформацию свободной плоской электромагнитной волны на оптической неоднородности. Если неоднородность представляет собой плоскую границу раздела между двумя средами, то при падении плоской волны на такую границу возникают отражение и преломление. Полное поле состоит из падающей, отраженной и преломленной волн. При этом отраженная и преломленная волны выражаются через падающую с помощью коэффициентов Френеля. Если на границу раздела падает заряженная частица, ее поле можно разложить по плоским волнам, а затем для каждой такой волны найти с помощью коэффициентов Френеля отраженную и преломленную. Полное поле будет равно сумме всех падающих, отраженных и преломленных волн. Такой подход был применен И.М. Франком, показавшим, что поле переходного излучения можно выразить через коэффициенты Френеля.

Но коэффициенты Френеля определены только для плоской границы раздела, причем плоскость, разделяющая две среды, должна иметь достаточно большую (в идеале — бесконечную) протяженность, иначе кроме отражения и преломления будет иметь место еще и дифракция.

Если заряженная частица движется вблизи от тела конечных размеров, то, как и в задаче о переходном излучении, можно разложить ее поле по плоским вол-

нам и затем рассмотреть трансформацию каждой такой волны, обусловленную дифракцией на теле. Коэффициенты Френеля для решения такой задачи непригодны, они даже не определены для тела ограниченных размеров. Трансформацию волн на теле конечных размеров следует определять с помощью методов, разработанных в теории дифракции. Таким образом, хотя "исходная" физическая природа дифракционного и переходного излучений имеет много общего, вместе с тем имеют место и различия в самой их физической сущности. Эти различия легче можно понять, если вспомнить определение дифракции, приведенное в книге А. Зоммерфельда "Оптика"<sup>4</sup>: "Под дифракцией мы понимаем любое отклонение света от прямолинейного хода лучей, если только оно не может быть истолковано как отражение или как преломление".

Очевидно, что плоская граница раздела вызывает только отражение и преломление падающих на нее волн и, следовательно, в этом случае не может иметь места явление дифракции. Поэтому на плоской границе раздела не возникает и дифракционного излучения, а только переходное.

С другой стороны, в некоторых известных нам случаях переходное излучение может рассматриваться как предельный случай дифракционного излучения. Рассмотрим, например, излучение равномерно движущейся заряженной частицы при пролете через круглое отверстие в тонком идеально проводящем экране. Поскольку в данном случае нет идеальной плоской границы (она была бы, если бы радиус отверстия равнялся нулю), мы имеем дело с типичной задачей дифракционного излучения. Нужно найти поле движущегося заряда при наличии экрана с отверстием. Предположим, что мы решили эту задачу и определили поле излучения, возникающее при пролете заряда через отверстие. Тогда можно утверждать, что при стремлении радиуса отверстия к нулю найденное решение непрерывным образом переходит в решение для поля переходного излучения, возникающего при падении равномерно движущегося заряда на идеальное зеркало. Подобный предельный переход возможен также, если известно дифракционное излучение, возникающее в том случае, когда заряженная частица пересекает круглый непрозрачный диск, двигаясь по его оси. Очевидно, в пределе, когда радиус диска стремится к бесконечности, мы также получаем переходное излучение. Подробнее эти случаи будут разобраны ниже.

В настоящей статье сделана попытка провести сравнительное изложение двух физических явлений — дифракции и дифракционного излучения. Такое сравнительное изложение позволяет читателю легче уяснить сходство и различия этих двух родственных явлений. Кроме того, дифракция — это явление уже давно известное, сравнительно хорошо изученное и вошедшее в учебники. Практически ни одно учебное руководство по электродинамике или оптике не обходится без специального раздела, посвященного дифракции. Что же касается дифракционного излучения, то оно представляет собой явление, которое привлекло внимание исследователей сравнительно недавно и в учебной литературе

<sup>3</sup> См., например: Болотовский Б М, Воскресенский Г В *УФН* **88** 209 (1966).

<sup>4</sup> С основами теории дифракции можно ознакомиться по книгам: Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988); Зоммерфельд А *Оптика* (М.: ИЛ, 1953); Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988).

практически не отражено<sup>5</sup>. Между тем, этой проблеме (имеются в виду как теоретические, так и прикладные работы по дифракционному излучению) посвящено уже множество публикаций, и число их непрерывно растет. Причина такого интереса заключается в том, что дифракционное излучение играет существенную роль в ряде областей физики, в частности, в радиотехнике и в физике высоких энергий, где оно находит полезные применения.

Напомним теперь читателю, в чем состоит явление дифракции. Пусть в однородной среде (в дальнейшем для простоты мы будем подразумевать, что такой средой является вакуум) распространяется волна. Поле волны  $f$  описывается уравнением Даламбера

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (1a)$$

Одним из решений этого уравнения является плоская волна вида

$$f = A \exp [i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)], \quad (1б)$$

где  $\omega$  — частота волны, а  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  — волновой вектор, определяющий длину волны и направление ее распространения. Частота волны  $\omega$ , компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$  и амплитуда волны  $A$  не зависят от координат.

Предположим теперь, что в среде имеются неоднородности, скажем, отражающие или поглощающие экраны, но мы наблюдаем поле  $f$  в той области пространства, где неоднородностей нет. В этом случае по-прежнему справедливо волновое уравнение (1a), но плоская волна (1б) уже не будет его решением. Наличие неоднородностей приводит к появлению волн с другими направлениями волнового вектора  $\mathbf{k}$ , соответственно решение будет представлено линейной комбинацией волн вида (1б) с различными направлениями  $\mathbf{k}$ . Можно сказать, что неоднородности играют роль дополнительных источников, от которых во все стороны расходятся добавочные волны. В появлении этих добавочных волн и состоит явление дифракции. Характер поля, образованного этими добавочными волнами, определяется структурой неоднородностей (в частности, расположением и формой экранов). Разные условия наблюдения (различия в направлении падающей волны, в расположении неоднородностей, в положении наблюдателя) дают поразительное богатство явлений, характерное для этого раздела физической науки.

Обычная задача дифракции ставится следующим образом. На экран (или на заданное расположение экранов) падает волна, излученная некоторым источником. Если источник расположен достаточно далеко от рассеивающей системы, то можно считать, что падающая волна является плоской. Требуется определить рассеянное поле. Отметим, что в классической теории дифракции расположение источника волн является неизменным во времени. Источник волн покоится в некоторой заданной точке.

Рассмотрим теперь несколько другую, хотя и родственную задачу. Пусть мимо рассеивающей системы движется источник поля. Например, если речь идет об электромагнитном поле, таким источником может быть движущаяся заряженная частица. Для простоты предположим, что частица движется равномерно. Если ее поле разложить в интеграл Фурье по времени, то окажется, что волны всех частот затухают по экспоненциальному закону с удалением от траектории. Отсюда следует, что заряженная частица, движущаяся в пустоте равномерно и прямолинейно, не излучает. Поле равномерно движущейся заряженной частицы переносится вместе с ней и с той же скоростью, с какой движется частица. Когда частица пролетает мимо неоднородности, это увлекательное поле наводит на неоднородности переменные токи (или переменную поляризацию), и неоднородность становится источником излучения.

Несколько десятков лет назад И.М. Франк ввел термин "оптика движущихся источников"<sup>6</sup>. Этим термином он обозначил раздел электродинамики, в котором рассматриваются различные виды излучения, порожденного движущимися заряженными частицами, движущимися диполями и другими движущимися источниками электромагнитного поля. Оптика движущихся источников включает такие явления, как излучение Вавилова — Черенкова, переходное излучение, эффект Доплера, синхротронное излучение. Дифракционное излучение с полным основанием также может быть отнесено к оптике движущихся источников (можно использовать для этого раздела и несколько более общее название "электродинамика движущихся источников").

Ряд особенностей дифракционного излучения будет рассмотрен ниже. Но перед этим будет кратко изложена простая скалярная теория дифракции, позволяющая рассмотреть основные качественные особенности рассеяния свободных электромагнитных волн на экранах с отверстиями. Затем будет показано, какие изменения необходимо внести в теорию, чтобы стало возможным описать рассеяние связанного поля (т.е. поля, которое переносит равномерно движущийся источник). Наконец, на простых примерах будут рассмотрены основные качественные особенности дифракционного излучения.

## 2. Простая скалярная теория дифракции

Мы будем рассматривать для простоты не векторное, а скалярное волновое поле, т.е. поле, которое определяется одной только функцией  $f(x, y, z, t)$ , удовлетворяющей уравнению Даламбера

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

или

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Существуют такие физические задачи, в которых для описания поля действительно достаточно одной функции. Примером может служить распространение (и

<sup>5</sup> Исключение составляет книга: Тер-Микаэлян М.Л. *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях* (Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969), где специальная глава посвящена дифракционному излучению.

<sup>6</sup> См. Франк И.М. "Оптика источников света, движущихся в преломляющих средах" *УФН* **68** (3) 397 (1959).

дифракция) звуковых волн. Однако для описания электромагнитного поля одной функции, вообще говоря, недостаточно. Электрическое поле в пустоте описывается вектором в трехмерном пространстве, т.е. для определения электрического поля необходимо задать три функции. То же самое относится и к магнитному полю. Всего, следовательно, необходимо задать шесть функций. Правда, функции, составляющие эту шестерку, связаны уравнениями Максвелла, поэтому не все из них независимы. Например, поле плоской электромагнитной волны задается всего двумя функциями. Даже и в этом случае скалярная теория дифракции, строго говоря, неприменима. Тем не менее, во многих случаях скалярная теория с успехом применяется для качественного и даже для количественного рассмотрения векторных полей. Будем рассматривать монохроматическое поле, отвечающее частоте  $\omega$ . В этом случае функция  $f(x, y, z, t)$  может быть записана следующим образом:

$$f(x, y, z, t) = f_{\omega}(x, y, z) \exp(i\omega t). \quad (3)$$

Соответственно, волновое уравнение (1) для функции  $f_{\omega}(x, y, z)$  записывается в виде

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) f_{\omega} = 0. \quad (4)$$

Если ввести величину  $k = \omega/c$ , уравнение (4) переписывается так:

$$(\Delta + k^2) f_{\omega} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4a)$$

Уравнение (4a) называется уравнением Гельмгольца по имени знаменитого немецкого физика и врача Германа Гельмгольца, который применил это уравнение к исследованию волновых явлений. Уравнение (4a) — это, по существу, волновое уравнение для поля, имеющего фиксированную частоту  $\omega$ . Мы сначала будем рассматривать дифракцию свободного поля, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца (4a). В дальнейшем мы будем опускать индекс  $\omega$ , имея в виду, что те функции от пространственных переменных  $x, y$  и  $z$ , с которыми мы будем иметь дело, описывают пространственное распределение поля на спектральной частоте  $\omega$ , а это означает, что зависимость поля от времени определяется множителем  $\exp(i\omega t)$ .

Посмотрим, как решение уравнения Гельмгольца зависит от вида краевых условий. Предположим, что имеется плоский экран с отверстиями и на этот экран падает волна (рис. 1). Для того чтобы определить поле в этом случае, нам нужно найти решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее определенным краевым условиям на поверхности экрана. Мы, например, можем потребовать, чтобы на непрозрачной части экрана поле  $f$  принимало заданное значение, в частности, мы можем потребовать, чтобы на непрозрачной части экрана было  $f = 0$ . Иногда бывает необходимо задать другое краевое условие — потребовать, чтобы на поверхности экрана производная  $\partial f / \partial n$  от поля  $f$  по нормали к поверхности экрана принимала заданное значение. Возможны случаи, когда поле  $f$  должно удовлетворять комбинации этих двух условий.

Существует удобное соотношение, выражающее волновое поле  $f$  через значения самой функции  $f$  и ее

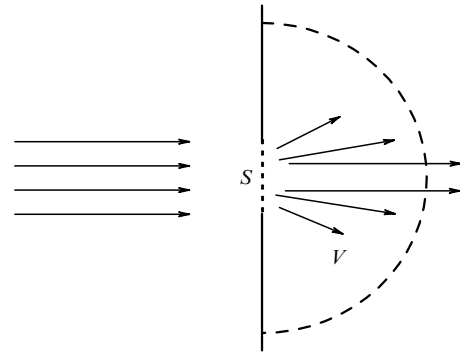


Рис. 1. Дифракция волны на отверстии в плоском экране.

нормальной производной на граничной поверхности (т.е. в нашем случае на поверхности экрана). Это соотношение получается из формулы Грина. Пусть даны две функции от координат —  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$ . Рассмотрим некоторый объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . При разумных предположениях относительно функций  $f$  и  $g$ , а также относительно свойств поверхности  $S$  справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\int_V (f \Delta g - g \Delta f) dV = \oint_S (f \text{grad } g - g \text{grad } f) dS. \quad (5)$$

Здесь векторный элемент площади  $dS$  по величине равен элементу площади  $dS$  поверхности  $S$ , а по направлению совпадает с нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности в точке интегрирования:

$$dS = dS \cdot \mathbf{n}. \quad (6)$$

Соотношение (5) называют теоремой Грина. Она может рассматриваться как следствие интегральной теоремы Гаусса, по которой поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, заключенному внутри поверхности. Если выбрать вектор в виде

$$\mathbf{A} = f \text{grad } g - g \text{grad } f$$

и записать для него теорему Гаусса, то получится соотношение (5). Преобразуем соотношение (5) следующим образом. В левую часть (интеграл по объему  $V$ ) вместо оператора Лапласа  $\Delta$  вставим оператор Гельмгольца  $(\Delta + k^2)$ . Это не изменит подынтегрального выражения, так как слагаемые, содержащие  $k^2$ , взаимно сокращаются. В правой же части равенства (5) учтем соотношение (6), а также то обстоятельство, что

$$\mathbf{n} \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial n}, \quad \mathbf{n} \text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial n}, \quad (7)$$

где  $\partial f / \partial n$  и  $\partial g / \partial n$  — производные функций  $f$  и  $g$  по направлению  $\mathbf{n}$ .

После этого формула (5) запишется так:

$$\int_V [f(\Delta + k^2)g - g(\Delta + k^2)f] dV = \oint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (8)$$

Формула (8) показывает, что интеграл по объему  $V$  от некоторой комбинации, составленной из функций  $f$  и  $g$ ,

определяется значением этих функций и их нормальных производных на поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ . Но формула (8) позволяет получить и значительно более определенный результат, а именно, определить одну из двух функций, входящих в (8), скажем, функцию  $f$ , если известны значения этой функции и ее нормальной производной на поверхности  $S$ . Иными словами, формула (8) дает возможность получить решение уравнения Гельмгольца в объеме  $V$ , удовлетворяющее поставленным краевым условиям. Мы сейчас получим выражение для функции  $f$  в объеме  $V$  через краевые значения.

Если функция  $f$  удовлетворяет волновому уравнению (4а), то второе слагаемое под знаком объемного интеграла в (8) обращается в нуль и мы получаем

$$\int_V f(\Delta + k^2) g dV = \oint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (9)$$

Потребуем теперь, чтобы функция  $g$  удовлетворяла неоднородному уравнению Гельмгольца с точечным источником в правой части:

$$(\Delta + k^2) g = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (10)$$

Подразумевается, что точка  $\mathbf{r}_0$ , в которой расположен источник, находится внутри объема  $V$ . Потребуем также, чтобы функция  $g(x, y, z)$  обращалась в нуль на поверхности  $S$ :

$$g|_S = 0. \quad (11)$$

Тогда из соотношения (9) с учетом (10) и (11) получим:

$$4\pi f(\mathbf{r}_0) = \oint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS. \quad (12)$$

Формула (12) дает возможность определить значение поля  $f$  в любой точке объема  $V$ , если известно значение поля на поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$  (и если известно решение  $g$  уравнения (10), удовлетворяющее нулевым граничным условиям (11) на поверхности  $S$ ).

В качестве объема  $V$  мы будем рассматривать полупространство  $x \geq 0$ , а за поверхность  $S$  примем плоскость  $x=0$ .

Определим сначала функцию  $g$ , удовлетворяющую неоднородному уравнению Гельмгольца (10) с источником в точке  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  и однородному краевому условию (11). Поскольку источник находится в полупространстве  $x \geq 0$ , величина  $x_0$  заведомо положительна. Пусть координаты точки  $\mathbf{r}_0$ , в которой определяется поле, равны  $x_0, y_0$  и  $z_0$ . Выберем точку  $\hat{\mathbf{r}}_0$  с координатами:  $-x_0, y_0, z_0$ . Точки  $\mathbf{r}_0$  и  $\hat{\mathbf{r}}_0$  расположены симметрично относительно плоскости экрана  $x=0$ . При этом точка  $\mathbf{r}_0$  находится внутри выбранного нами объема  $V$ , а точка  $\hat{\mathbf{r}}_0$  — вне этого объема.

Поместим теперь в точку  $\hat{\mathbf{r}}_0$  точечный источник, сдвинутый по фазе на  $\pi$  относительно источника, стоящего в правой части уравнения (10). Напомним, что и функция  $f$ , и функция  $g$ , и функции, входящие в правую часть уравнения Гельмгольца, представляют собой координатные части некоторых функций, зависящих и от координат, и от времени. Временной же множитель у всех этих функций имеет вид  $\exp[i(\omega t + \varphi)]$ , где величина  $\varphi$  может быть различна для различных функций. Если разность фаз двух источников равна  $\pi$ , то соответствую-

щие пространственные функции, определяющие плотность источников, имеют разные знаки.

При наличии двух источников функция  $g$  удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2) g = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_0). \quad (13)$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = g(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_0|)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_0|}, \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \hat{\mathbf{r}}_0 = (-x_0, y_0, z_0). \quad (14a)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция  $g$  удовлетворяет краевому условию (11), т.е. обращается в нуль на поверхности  $x=0$ .

Таким образом, мы нашли функцию  $g$ , которую необходимо знать для того, чтобы определить волновое поле  $f$  с помощью формулы (12).

Отметим, что функция  $g$  в нашем рассмотрении играет чисто вспомогательную роль и мы выбираем ее так, чтобы получить удобное выражение для волнового поля  $f$  при наличии экрана. Источник, стоящий в правой части уравнения для  $g$ , также играет чисто вспомогательную роль. Можно его рассматривать как пробный источник, позволяющий определить поле  $f$  в точке  $\mathbf{r}$ .

Вычислим теперь  $\partial g/\partial n$  на поверхности  $S$ , т.е. на плоскости  $x=0$ , и подставим в (12).

Производная функции  $g$  по нормали к поверхности  $S$  в нашем случае сведется к частной производной по координате  $x$ . При этом для определения поля  $f$  по формуле (12) нам нужно знать величину  $\partial g/\partial n$  не во всем пространстве, а только на поверхности  $S$ , т.е. в нашем случае на плоскости  $x=0$ . Простые вычисления дают:

$$\frac{\partial g}{\partial n} \Big|_S = -2ikx_0 \frac{\exp(ikR_S)}{R_S^2} \left( 1 - \frac{1}{ikR_S} \right), \quad (15)$$

где  $R_S$  — расстояние от точки наблюдения  $(x_0, y_0, z_0)$  до точки  $(0, x, y)$  на поверхности  $S$ :

$$R_S = \sqrt{x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (16)$$

Для упрощения предположим, что точка наблюдения находится достаточно далеко от плоскости экрана, так что мы можем считать

$$kR_S \gg 1 \quad (17)$$

и пренебречь в формуле (15) вторым слагаемым в скобках. Физически неравенство (17) означает, что расстояние от точки наблюдения до поверхности  $S$  велико по сравнению с длиной волны. Пренебрегая членом  $1/ikR_S$  в сравнении с единицей, получим из (12) и (15)

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi} \oint_S f \frac{\exp(ikR_S)}{R_S} \cos \theta dS, \quad (18)$$

где  $R_S$  — расстояние между элементом поверхности  $dS$  и точкой наблюдения,

$$\cos \theta = \frac{x_0}{R_S}, \quad (18a)$$

$a\theta$  — угол между нормалью к элементу поверхности  $dS$  и направлением в точку наблюдения.

Формула (18) дает значение поля  $f$  в заданной точке объема  $V$ , если известны значения  $f$  на поверхности экрана. Отметим, что функция  $f$  описывает свободное поле, т.е. поле без источников. Это обстоятельство было исходным при выводе формулы (18): мы с самого начала предположили, что функция  $f$  удовлетворяет уравнению (4а) с нулевой правой частью. Нетрудно показать, что функция  $f$ , представленная в виде интеграла (18), действительно удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца для внутренних точек объема  $V$ .

Пусть теперь выбранная нами поверхность  $S$  (т.е. плоскость  $x=0$ ) представляет собой непрозрачный экран. Пусть в объеме  $V$  (т.е. в полупространстве  $x \geq 0$ ) нет источников поля. Тогда во всем объеме  $f=0$ , так как волны от источников, находящихся во внешнем пространстве (в области  $x \leq 0$ ), не могут проникнуть в объем  $V$ . Если же в экране имеются отверстия, то поле источников, находящихся в области  $x \leq 0$ , может через эти отверстия проникать в объем  $V$  и формула (18) позволяет оценить это поле.

Можно предположить, что на поверхности  $S$  поле  $f$  отлично от нуля только там, где имеются отверстия, а на всей остальной поверхности экрана оно равно нулю. Для такого предположения имеются некоторые физические основания. Действительно, если волна падает на экран из внешней области, то она не проходит через непрозрачную часть экрана (т.е. ту часть площади экрана, на которой нет отверстий). Поэтому естественно предположить, что в соответствующих точках внутренней поверхности экрана  $f=0$ . Тогда из формулы (18) видно, что поле во внутренней области определяется только значениями поля на отверстиях (или на отверстиях, если их несколько).

Что касается значений, которые принимает поле  $f$  на площади отверстия (или отверстий), то можно принять, хотя бы в первом приближении, что поле на площади отверстия имеет такие же значения, какие оно имело бы в тех же точках в отсутствие экрана. Если сделать это предположение, справедливость которого мы обсудим ниже, то формула (18) дает выражение для поля в объеме  $V$ :

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S'} f \frac{\exp(ikR_S)}{R_S} \cos \theta dS. \quad (19)$$

Здесь интеграл берется только по площади отверстий  $S'$ , а не по всей поверхности экрана  $S$ ,  $\mathbf{r}$  — внутренняя точка объема  $V$ ,  $R_S$  — расстояние от точки наблюдения  $\mathbf{r}$  до элемента поверхности  $dS$  на площади отверстия,  $\theta$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к элементу поверхности  $dS$  и отрезком, соединяющим элемент  $dS$  с точкой наблюдения  $\mathbf{r}$ .

Как видно из формулы (19), поле  $f$  представляет собой совокупность сферических волн вида  $a \exp(ikr)/r$ , расходящихся от каждого элемента  $dS$  поверхности, "натянутой" на отверстие. Амплитуда  $a$  каждой такой парциальной волны пропорциональна значению поля  $f$  на соответствующем участке поверхности, а также косинусу угла  $\theta$  между нормалью к элементу поверхности  $dS$  и направлением от элемента  $dS$  в точку наблюдения. По существу, формула (19) точно соответствует словесной формулировке принципа Гюйгенса. Отметим здесь, что

далеко не всегда вывод формулы (19) проводится, исходя из интегрального соотношения (5). В книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица "Теория поля" вывод формулы (19), по существу, представляет собой прямую запись принципа Гюйгенса в виде интегрального соотношения, т.е. первичным при выводе является физическое содержание принципа Гюйгенса.

Формулу (19) можно переписать в виде

$$f(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2\pi} \int_{S'} f R_S \exp(ikR_S) d\Omega, \quad (20)$$

где  $d\Omega$  — телесный угол, под которым виден элемент поверхности  $dS$  из точки наблюдения:

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \cos \theta.$$

Смысл формулы (19) или эквивалентной формулы (20) следующий. Предположим, что объем  $V$  отделен от окружающего пространства экраном  $S$ , имеющим отверстия  $S'$ , и внутри объема нет никаких источников поля. Во внешнем пространстве имеются источники, и их поле через отверстия в экране проникает в объем  $V$ . Тогда, если известно поле на отверстиях, то известно и поле в объеме  $V$ , причем поле в объеме определяется через поле на отверстиях по формулам (19) и (20).

Опирающаяся на края отверстия поверхность  $S'$ , по которой проводится интегрирование в (19), может быть выбрана с широкой степенью произвола. Следует только помнить, что  $S'$  дополняет поверхность экрана до замкнутой поверхности, эта полная поверхность разделяет пространство на две части, и объем  $V$ , в котором мы определяем поле, не должен содержать источников.

Формула (19) является приближенной, поскольку при ее выводе мы приняли некоторые упрощающие допущения. Напомним эти допущения.

1) Мы рассматриваем поле в точках, не очень близких к поверхности экрана (не ближе нескольких длин волн).

2) Поле внешнего источника на отверстиях в экране принимается точно таким же, каким оно было бы в отсутствие экрана.

Из первого предположения вытекает, что линейные размеры объема  $V$ , в котором мы определяем поле, должны существенно превышать длину волны излучения  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . В нашем простом случае объем  $V$ , в котором определяется поле, представляет собой полупространство  $x \geq 0$ , и это требование заведомо выполнено.

Справедливость второго предположения можно оценить следующим образом. Поле внешнего источника, падая на экран, наводит на поверхности экрана переменные токи и заряды. Эти наведенные токи и заряды являются источниками излучения вторичных волн. Полное поле представляет собой сумму падающего на экран поля и вторичных волн, которые излучаются наведенными токами и зарядами. Поэтому на площади отверстия поле, вообще говоря, отличается от того, каким оно было бы в отсутствие экрана. Но поскольку поле излучения в свободном пространстве, вообще говоря, спадает по мере удаления от источника, то в точках отверстия, более далеких от края, добавочное поле оказывается слабее, чем вблизи от края отверстия. Количественные оценки можно получить из немногочисленных точных решений задачи дифракции, первое из которых было получено А. Зоммерфельдом. Из этих

решений следует, что добавочное поле становится значительно меньше падающего уже на расстоянии нескольких длин волн от края отверстия. Это означает, что пренебрежение добавочным полем заведомо неправильно, если линейные размеры отверстия по порядку величины сравнимы с длиной волны. Следовательно, формула (19) справедлива, если линейные размеры отверстия существенно превосходят длину волны падающего излучения.

Предположим, что объем  $V$ , в котором определяется поле, достаточно велик. Это предположение, например, заведомо выполнено, если экран расположен в плоскости  $x = 0$ , а объем  $V$  представляет собой полупространство  $x > 0$ . Предположим далее, что точка наблюдения расположена на больших расстояниях от отверстия в экране, так что расстояние от точки наблюдения до отверстия значительно превосходит по величине линейные размеры отверстия. В этом случае выражение (19) для поля в объеме  $V$  упрощается. Действительно, приведем еще раз для удобства читателя выражение (19):

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S'} f \frac{\exp(ikR_S)}{R_S} \cos \theta dS.$$

В этой формуле  $R_S$  — расстояние от точки наблюдения  $\mathbf{r}$  до элемента интегрирования  $dS$  на площади отверстия:

$$R_S = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|,$$

где  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор точки на элементе поверхности  $dS$ . Если выполняется неравенство  $r \gg r'$ , расстояние  $R_S$  можно разложить по степеням отношения  $r'/r$  и ограничиться первой степенью этой малой величины. Мы получим:

$$R_S = r - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r} = r - \mathbf{n}\mathbf{r}', \quad (21)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный из точки наблюдения в точку интегрирования (т.е. в точку  $\mathbf{r}'$ ).

Подставим значение  $R_S$  (21) в формулу (19). При этом в знаменателе подынтегрального выражения достаточно ограничиться первым членом в разложении (21). В показателе экспоненты пренебрегать этим членом нельзя, поскольку он, хотя и относительно мал, но его абсолютная величина существенно определяет фазу волны.

В результате получаем выражение для рассеянного поля на больших расстояниях от отверстия:

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} f \exp(-ik\mathbf{n}\mathbf{r}') \cos \theta dS. \quad (22)$$

Поле на больших расстояниях от отверстия представляет собой расходящуюся сферическую волну  $\exp(ikr)/r$ . Амплитуда этой волны пропорциональна интегралу

$$\int_{S'} f \exp(-ik\mathbf{n}\mathbf{r}') \cos \theta dS,$$

взятому по площади отверстия.

Если ввести волновой вектор рассеянной волны

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n},$$

то выражение (22) переписывается в виде

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} f \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta dS. \quad (23)$$

Перепишем эту формулу для простого частного случая, который мы в дальнейшем разберем более подробно. Пусть экран представляет собой плоскость  $x = 0$  с одним отверстием, причем это отверстие расположено таким образом, что начало координат попадает на плоскость отверстия. Тогда формулу (23) можно переписать следующим образом:

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} f(y', z') \times \times \exp[-i(k_y y' + k_z z')] \cos \theta dy' dz'. \quad (24)$$

Здесь  $f(y', z')$  дает значение поля на плоскости отверстия, величина  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — расстояние от точки наблюдения до отверстия, причем подразумевается, что величина  $r$  велика в сравнении с линейными размерами отверстия. При этих условиях величина  $\cos \theta = k_x/k$  под знаком интеграла может рассматриваться как постоянная величина, и можно вынести  $\cos \theta$  за знак интеграла. В случае, когда рассматриваются малые углы рассеяния, можно принять  $\cos \theta = 1$ . Выше уже отмечалось, что поле вдали от отверстия имеет вид сферической волны. Как видно из формулы (24), амплитуда этой волны определяется преобразованием Фурье от распределения поля на внутренней стороне экрана (т.е. на той стороне, которая обращена в сторону объема  $V$ ).

### 3. Простая скалярная теория дифракционного излучения

Рассмотрим теперь простейшую задачу дифракционного излучения. Предположим, что в плоскости  $x = 0$  расположен непрозрачный экран, в котором имеются отверстия (рис. 2). Пусть по оси  $x$  движется с постоянной скоростью  $v$  заряженная частица. Заряд частицы обозначим через  $q$ . Уравнение движения частицы запишем в виде  $x = vt, y = z = 0$ . Частица приближается к экрану со стороны отрицательных значений  $x$ , пересекает плоскость экрана в момент  $t = 0$  и затем удаляется от плоскости экрана, двигаясь в положительном направлении оси  $x$ . При этом в зависимости от расположения отверстий на экране частица либо пролетает в отверстие, либо пересекает экран на сплошном непрозрачном участке. Требуется, как и в рассмотренной ранее задаче дифракции, определить поле в полупространстве  $x > 0$ .

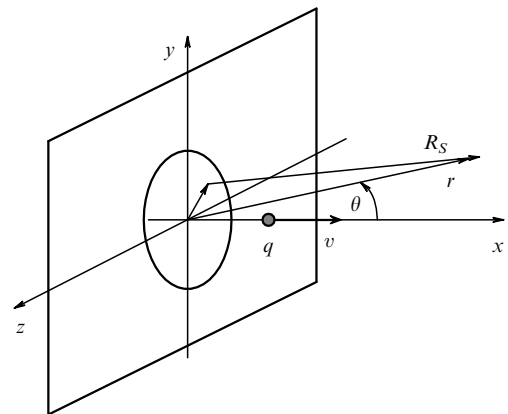


Рис. 2. Пролет точечной заряженной частицы через круглое отверстие в плоском экране.

Заряженная частица, движущаяся в пустоте с постоянной скоростью, не излучает. Как уже было сказано выше, если поле движущейся заряженной частицы разложить в интеграл Фурье по времени, т.е. представить поле в виде совокупности гармоник со всеми возможными частотами, то все гармоники в случае равномерного движения затухают в пространстве по мере удаления от траектории частицы. Но когда на пути частицы появляется экран, происходит дифракция затухающих гармоник, рассеяние их на экране. При этом могут возникнуть незатухающие в пространстве волны, уходящие на бесконечность, т.е. может возникнуть излучение.

Казалось бы, возникающее излучение можно рассчитать, используя формулу (19) — основную формулу скалярной теории дифракции. Действительно, если имеется экран с отверстиями и вблизи от этого экрана пролетает заряженная частица, то по формуле (19) достаточно знать поле на площади отверстия для того, чтобы определить излучение в объеме  $V$ . Однако в случае дифракционного излучения такой подход приводит, вообще говоря, к неверным результатам. Причина заключается в следующем. Если на экран с отверстием падает волна, то поле по другую сторону экрана определяется в согласии с формулой (19) интегралом от поля по площади отверстия. Если мы устремим размеры отверстия к нулю, то поле по другую сторону экрана (т.е. в объеме  $V$ ) в пределе исчезает. Рассмотрим теперь случай, когда на экран падает заряженная частица. Для определенности будем считать, что экран расположен в плоскости  $x = 0$ . Частица подлетает к экрану из полупространства  $x < 0$ , пересекает экран и далее движется в полупространстве  $x > 0$  (т.е., по принятой нами терминологии — в объеме  $V$ ). Допустим, что мы знаем фурье-компоненту  $F_\omega$  поля частицы, отвечающую частоте  $\omega$ . Если подставить  $F_\omega$  вместо  $f$  в формулу (19), мы получим поле, рассеянное на отверстии. Если теперь устремить размеры отверстия к нулю, рассеянное поле в объеме  $V$  исчезнет, как и в случае обычной дифракции. Но полное поле в объеме  $V$  не должно исчезнуть даже в случае, когда заряд движется равномерно и прямолинейно. Действительно, движущийся заряд несет с собой собственное поле. Кроме того, когда равномерно движущийся заряд пересекает экран и влетает в полупространство  $x > 0$ , возникает вспышка переходного излучения. Если же заряд в объеме  $V$  движется с ускорением, возникает, кроме переходного, еще и добавочное излучение. Формула (19) не содержит ни переходного, ни какого-либо добавочного излучения, ни увлекаемого поля, потому что относительно поля  $f$ , для которого была выведена эта формула, мы с самого начала предположили, что оно удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца  $\Delta f + k^2 f = 0$ . Это уравнение описывает свободное поле без источников в объеме  $V$ . Переходное же излучение — это как раз излучение источника, и вдобавок не покоящегося, а движущегося. Поэтому, если мы хотим описать дифракционное излучение, нам следует сформулировать теорию, аналогичную теории дифракции, но для случая, когда поле удовлетворяет волновому уравнению с отличной от нуля правой частью (в правой части стоит плотность источника). Будем описывать плотность источника функцией  $s(x, y, z, t)$ , а порожденное им поле определять через потенциальную функцию  $\varphi(x, y, z, t)$  подобно тому, как это делается в электродинамике, а также в механике жидкостей и газов. Мы пока отложим

на будущее вопрос о том, как выражаются поля через потенциальную функцию. Для нас сейчас существенно, что функция  $\varphi(x, y, z, t)$  удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi s(x, y, z, t), \quad (25)$$

а фурье-компонента  $\varphi_\omega$  функции  $\varphi$  — неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \varphi_\omega + k^2 \varphi_\omega = -4\pi s_\omega, \quad (26)$$

где  $s_\omega$  — фурье-компонента плотности источника (скажем, плотности заряда), отвечающая частоте  $\omega$ . При этом мы будем пользоваться следующим определением фурье-компоненты. Если  $F_\omega(x, y, z)$  есть фурье-компонента функции  $F(x, y, z, t)$ , то эти две функции связаны соотношениями

$$F(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega(x, y, z) \exp(-i\omega t) d\omega, \\ F_\omega(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y, z, t) \exp(i\omega t) dt. \quad (27)$$

Вообще говоря, достаточно было бы привести какое-нибудь одно из этих двух соотношений, другое было бы его следствием. Но мы приводим здесь оба соотношения для удобства читателя.

Приступим теперь к выводу основной формулы дифракционного излучения в скалярном приближении теории дифракции. Как и в задаче дифракции, мы будем исходить из интегральной формулы Грина (см. формулу (8)) для двух функций — на этот раз речь идет о потенциале  $\varphi$ , описывающем поле дифракционного излучения, и вспомогательной функции  $g$  (в качестве функции  $g$  мы, как и в ранее рассмотренном случае, выберем функцию Грина для рассматриваемой краевой задачи):

$$\int_V [\varphi(\Delta + k^2)g - g(\Delta + k^2)\varphi] dV = \int_S \left( \varphi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (28)$$

Функцию  $g$ , как и ранее, при рассмотрении задачи дифракции, определим следующим образом: эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)g = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (29)$$

причем в правой части стоит плотность единичного точечного источника. Потребуем также, чтобы функция  $g$  удовлетворяла нулевым краевым условиям на поверхности экрана:

$$g|_S = 0. \quad (30)$$

Для плоского экрана функция  $g$  имеет вид (14), (14а). С учетом (29) соотношение (28) примет вид

$$-4\pi \varphi(\mathbf{r}_0) = \int_V g(\Delta + k^2)\varphi dV - \int_{S'} \varphi \frac{\partial g}{\partial n} dS. \quad (31)$$

Подставим теперь в формулу (31) значение величины  $(\Delta + k^2)\varphi$  из формулы (26). Мы получим

$$\varphi_\omega(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \varphi_\omega(\mathbf{r}) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n} dS + \int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) s_\omega(\mathbf{r}) dV. \quad (32)$$



Напомним здесь, что  $\varphi_\omega$  — фурье-компонента потенциала  $\varphi(x, y, z, t)$ , а  $s_\omega$  — фурье-компонента функции  $s(x, y, z, t)$ , определяющей плотность источника (см. уравнения (25) и (26)). Функция  $g$  также должна иметь индекс  $\omega$ , так как она определяется уравнением (26), справедливым для волн частоты  $\omega$ . При выводе формулы (32) мы индекс  $\omega$  опускали, и в дальнейшем будем, как правило, опускать, но следует помнить, что, если не оговорено противоположное, то всегда речь идет о переменном поле частоты  $\omega$ .

Формула (32) показывает, что потенциал  $\varphi$  волнового поля в объеме  $V$  описывается двумя слагаемыми различной природы. Первое слагаемое (интеграл по площади отверстия  $S'$ ) имеет тот же вид, какой имеет рассеянное поле в классической теории Френеля–Гюйгенса–Кирхгофа (см. формулу (12)). Однако следует иметь в виду, что в случае дифракционного излучения потенциал  $\varphi$  есть потенциал движущегося (а не покоящегося, как в классической теории дифракции) источника излучения. Можно сказать, что потенциал  $\varphi_\omega$  под знаком поверхностного интеграла в формуле (32) описывает поле, возникшее при движении источника вне объема  $V$ . Соответственно, первое слагаемое в формуле (32) определяет ту часть поля в объеме  $V$ , которая обусловлена дифракцией на отверстии  $S'$  поля, созданного зарядом при его движении вне объема  $V$ . В дальнейшем мы рассмотрим простой пример, помогающий выяснить физический смысл первого слагаемого.

Второе слагаемое описывает поле, созданное источником при движении в объеме  $V$ . Если источник при своем движении не попадает в объем  $V$ , а движется только по одну сторону экрана, вне объема  $V$ , то плотность  $s_\omega$  в объеме  $V$  равна нулю, и, следовательно, второй член в выражении (32) обращается в нуль. В этом случае все поле, проникшее в объем  $V$ , описывается только первым слагаемым (интегралом по поверхности отверстия) в правой части формулы (32).

Предположим, что источник, двигаясь с постоянной скоростью, пересекает плоскость экрана (т.е. плоскость  $x = 0$ ) и влетает в объем  $V$ . При дальнейшем своем движении источник удаляется от экрана. Разобьем путь источника на две части, из которых одна находится вне объема  $V$ , а другая — внутри этого объема. Ту часть траектории, которая расположена вне объема  $V$ , назовем внешней частью, а часть, расположенную в объеме  $V$ , — внутренней частью. Тогда первый член в формуле (32) описывает ту часть поля в объеме  $V$ , которая обусловлена движением источника на внешней части траектории: источник как бы двигался по внешнему участку траектории до точки пересечения с плоскостью экрана, а в этой точке мгновенно остановился и дальше не пошел. Возникшее при таком законе движения излучение испытало дифракцию на отверстиях в экране и проникло в объем  $V$ . Второй член в правой части формулы (32) описывает поле в объеме  $V$ , обусловленное движением источника на внутреннем участке траектории: источник как бы покоился первоначально в точке пересечения с плоскостью экрана, а затем мгновенно ускорился и начал движение по внутреннему участку траектории. При этом также возникает излучение, и оно интерферирует с тем, которое создано источником при движении вне объема  $V$  и проникло в объем  $V$  через отверстия в экране. Но если источник движется равномерно, то в объеме  $V$  должно существовать также и неизлучаемое поле — так называемое

увлекаемое поле, которое переносит с собой источник при равномерном движении. Это поле также описывается вторым слагаемым в формуле (32).

На малых расстояниях от точки перехода увлекаемое поле сильно интерферирует с излучением, и полное поле не удастся разделить на слагаемые, отвечающие излучению и собственному полю. Но на достаточно больших расстояниях от точки перехода (на расстояниях, превышающих путь формирования<sup>7)</sup> такое разделение становится возможным. Тогда мы можем рассматривать поле излучения и увлекаемое поле в отдельности. В частности, если выбрать точку наблюдения достаточно далеко от экрана, можно найти выражение для излучаемого поля, которое следует из общей формулы (32).

Первое слагаемое (интеграл по поверхности) в формуле (32) на больших расстояниях от экрана принимает вид, в точности аналогичный формуле (23), с той только разницей, что вместо свободного поля  $f_\omega(\mathbf{r})$ , с которым мы имели дело в формуле (23), мы рассматриваем теперь потенциал движущегося источника  $\varphi_\omega(\mathbf{r})$ . Обозначая первое слагаемое в (32) через  $\varphi_\omega^{(1)}$ , имеем

$$\varphi_\omega^{(1)} = -\frac{ik}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} \varphi_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta \, dS'. \quad (33)$$

Интеграл берется по площади отверстия  $S'$ . Формула (33) справедлива при условии, что расстояние  $r$  велико по сравнению со значениями  $|\mathbf{r}'|$  в области интегрирования. Вектор  $\mathbf{k}$  имеет величину  $k = \omega/c$  и направлен в точку наблюдения от той области экрана, по которой производится интегрирование в (33).

Второе слагаемое (интеграл по объему) в формуле (32) обозначим через  $\varphi_\omega^{(2)}$ . На больших расстояниях от экрана (и от области, в которой происходит процесс излучения) это слагаемое принимает вид

$$\varphi_\omega^{(2)} = \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V s_\omega(\mathbf{r}') [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \, dV'. \quad (34)$$

Если в скобках под знаком интеграла учесть только первую экспоненту  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}')$ , а вторую опустить, мы получим выражение для потенциала, отвечающего движению источника в неограниченном пространстве. Вторая экспонента в скобках под знаком интеграла (34) —  $\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')$  — учитывает наличие принятых нами граничных условий — обращение функции Грина  $g$  в нуль на поверхности экрана. Можно сказать, что первая экспонента дает излучение источника, а вторая — излучение его зеркального изображения.

Подводя итоги обсуждения, можно сказать, что в объеме  $V$  на больших расстояниях от области, прилегающей к той точке, в которой движущийся источник пересек плоскость экрана и влетел в объем, существует сферическая волна излучения, расходящаяся из этой области. Волна эта описывается суммой выражений  $\varphi_\omega^{(1)}$  (33) и  $\varphi_\omega^{(2)}$  (34). Кроме этого, существует еще и неизлучаемое поле, переносимое вместе с источником. Но оно спадает быстрее, чем  $1/r$ , и на достаточно больших расстояниях от траектории источника пренебрежимо мало по сравнению с полем излучения. Однако на малых расстояниях от

<sup>7</sup> Франк И М *Известия АН СССР. Сер. физическая* 3 2 (1943). См. также: Болотовский Б М *Труды ФИАН* 140 95 (1982).

экрана увлекаемое поле сильно интерферирует с излучаемым, поэтому полное поле не поддается разделению на излучаемое и увлекаемое. Как и в любом случае, понятия "малое расстояние" и "большое расстояние" не имеют абсолютного значения. В данной задаче имеется характерная длина  $l_f$  — путь формирования излучения, введенный И.М. Франком:

$$l_f = \frac{v}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad (35)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость источника, а  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор излучаемой волны. Физический смысл величины (35) состоит в том, что путь формирования определяет расстояние, на котором существенно интерференция между излучаемой волной и собственным полем равномерно движущейся частицы. Когда мы говорим "большие расстояния", подразумевается, что расстояния значительно превосходят величину  $l_f$ . Соответственно, "малые расстояния" малы по сравнению с  $l_f$ .

#### 4. Излучение малого источника, пролетающего через круглое отверстие в плоском экране

Пусть плоский непрозрачный экран расположен в плоскости  $yz$  декартовой прямоугольной системы координат. В экране имеется круглое отверстие радиуса  $a$  с центром в начале координат. По оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$  движется источник поля. В электродинамике источником является заряженная частица, в акустике — малое тело, движущееся в газе. Источник приближается к экрану со стороны отрицательных значений  $x$ , проходит по центру круглого отверстия и удаляется от экрана в положительном направлении оси  $x$ . Требуется определить возникающее при этом излучение.

Из предыдущего следует, что потенциал поля излучения на больших расстояниях от экрана равен сумме выражений (33) и (34):

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(r \rightarrow \infty) &= \varphi_\omega^{(1)} + \varphi_\omega^{(2)} = \\ &= \frac{\exp(ikr)}{r} \left[ -\frac{ik}{2\pi} \int_{S'} \varphi_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta dS + \right. \\ &\left. + \int_V s_\omega(\mathbf{r}') (\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')) dV' \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, назовем амплитудой сферической волны. Очевидно, величина амплитуды излученной волны зависит от направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Впрочем, поскольку расстояние  $r$ , на котором определяется поле излучения, достаточно велико, то волну в точке наблюдения можно считать плоской, причем волновой вектор  $\mathbf{k}$  такой волны направлен от начала координат в точку наблюдения. Поэтому выражение в квадратных скобках в формуле (36) можно считать также и амплитудой плоской волны с соответствующим направлением волнового вектора.

Выражение (36) для поля излучения может быть записано несколько иначе. Заметим, что если размеры отверстия увеличивать до бесконечности, то в пределе экран исчезнет и мы получим однородное пространство с равномерно движущимся источником. В этом случае излучение, как известно, отсутствует. Но с другой стороны, если размеры отверстия возрастают, то в

пределе интеграл по площади отверстия в (36) распространяется на всю поверхность  $x = 0$ . Поэтому должно быть справедливо равенство

$$\begin{aligned} -\frac{ik}{2\pi} \int_S \varphi_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta dS + \\ + \int_V s_\omega(\mathbf{r}') [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] dV' = 0, \end{aligned}$$

где  $S$  — полная поверхность экрана:

$$S = S' + S''$$

( $S'$  — площадь отверстия,  $S''$  — площадь непрозрачной части экрана). Последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{ik}{2\pi} \int_{S'} \varphi_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta dS - \\ - \frac{ik}{2\pi} \int_{S''} \varphi_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta dS + \\ + \int_V s_\omega(\mathbf{r}') [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] dV' = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{ik}{2\pi} \int_{S'} \varphi_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta dS + \\ + \int_V s_\omega(\mathbf{r}') [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] dV' = \\ = \frac{ik}{2\pi} \int_{S''} \varphi_\omega(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') \cos \theta dS. \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть формулы (36), определяющая поле излучения, может быть записана в виде поверхностного интеграла, взятого по непрозрачной части экрана.

Как видно из соотношения (36), для того чтобы вычислить амплитуду излучаемой волны, необходимо знать фурье-компоненту  $\varphi_\omega$  потенциала источника на площади отверстия и фурье-компоненту  $s_\omega$  от плотности движущегося источника. Функции  $\varphi(x, y, z, t)$  и  $s(x, y, z, t)$  связаны между собой уравнением (25)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi s(x, y, z, t).$$

Плотность  $s(x, y, z, t)$  малого равномерно движущегося источника может быть записана в виде

$$s(x, y, z, t) = q\delta(x - vt)\delta(y)\delta(z), \quad (37)$$

где коэффициент  $q$  характеризует физические свойства источника. Например, если речь идет о пролете частицы, обладающей электрическим зарядом, то  $q$  дает величину этого заряда и тогда функция  $\varphi$  — это скалярный потенциал. Если рассматривается задача о движении малого тела в газе, то  $q$  — это величина силы сопротивления, которое испытывает частица при своем движении, а функция  $\varphi$  позволяет определить поле давлений в газе. В этом последнем случае, как показал В.П. Докучаев<sup>8</sup>, в выражении (37) для плотности источника вместо

<sup>8</sup> См. Докучаев В.П. *ЖЭТФ* 43 2 (8) (1962).

$\delta(x - vt)$  следует поставить  $(\partial/\partial x)\delta(x - vt)$ . Ниже мы будем пользоваться выражением (37) для плотности источника, понимая под  $q$  величину электрического заряда.

Приведем решение уравнения (25) в том случае, когда правая часть задается в виде (37). При этом мы будем исходить не из явного вида решения для потенциала  $\varphi$  как функции координат и времени, а запишем разложение решения в интеграл Фурье по времени. Такое представление решения для нас является более удобным, поскольку вся предыдущая теория справедлива для компонент фурье-разложения, отвечающих определенной частоте  $\omega$ .

Решение уравнения (25) с правой частью (37) может быть записано следующим образом:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{\pi v} \int \exp(-i\omega t) \exp\left(i \frac{\omega}{v} x\right) \times K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right) d\omega. \quad (38)$$

Здесь

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (39)$$

$\beta$  — отношение скорости источника  $v$  к характерной скорости  $c$ , входящей в волновое уравнение (25) (в электромагнитной задаче  $c$  есть скорость света в вакууме),  $K_0(x)$  — модифицированная бесселева функция второго рода (функция Макдональда).

Сравнение с формулами (27) сразу же позволяет выписать выражение для  $\varphi_\omega$ :

$$\varphi_\omega(x, y, z) = \frac{q}{\pi v} \exp\left(i \frac{\omega}{v} x\right) K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right). \quad (40)$$

Функция Макдональда  $K_0(x)$  обладает следующими свойствами:

при малых значениях  $x$

$$K_0(x) = -\ln x, \quad x \ll 1;$$

при больших значениях аргумента

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x), \quad x \gg 1.$$

Таким образом, поле равномерно движущейся в пустоте заряженной частицы затухает по экспоненциальному закону по мере удаления от траектории:

$$\varphi_\omega(x, \rho) \approx \frac{q}{\sqrt{2\pi v |\omega| \rho \sqrt{1 - \beta^2}}} \times \exp\left(i \frac{\omega}{v} x\right) \exp\left(-\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right); \quad \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho \gg 1 \quad (\rho = \sqrt{y^2 + z^2}). \quad (41)$$

Зависимость поля от координаты  $x$  носит волновой характер — по оси  $x$  распространяется плоская волна с волновым вектором  $k_x^{(0)} = \omega/v$ . Поскольку скорость заряда  $v$  меньше, чем скорость света  $c$ , величина  $k_x^{(0)}$  больше, чем волновой вектор свободной электромагнитной волны  $k = \omega/c$ .

В связи с асимптотикой (41) отметим следующее обстоятельство. Предположим, что в среде распространяется свободная волна вида

$$\varphi \sim \exp[i(k_x x + k_\rho \rho)]. \quad (42)$$

Очевидно, компоненты волнового вектора  $k_\rho$  и  $k_x$  в такой волне должны удовлетворять соотношению  $k_x^2 + k_\rho^2 = \omega^2/c^2$ . Пусть теперь  $k_x = k_x^{(0)} = \omega/v$ . Тогда для  $k_\rho$  получаем:  $k_\rho^2 = \omega^2/c^2 - \omega^2/v^2 = (-\omega^2/v^2)(1 - \beta^2)$ . Поскольку мы считаем, что скорость  $v$  источника поля не превышает характерную скорость волн  $c$ , т.е.  $\beta < 1$ , квадрат радиальной компоненты волнового вектора  $k_\rho$  оказывается отрицательным, т.е. сама радиальная компонента  $k_\rho$  — мнимой:  $k_\rho = (i\omega/v)(1 - \beta^2)^{1/2}$ . Подстановка этого значения  $k_\rho$  в выражение (42) для волны дает такой же закон затухания с ростом  $\rho$ , что и в формуле (41). Выражение (41) имеет одну характерную особенность. Предположим, что скорость источника  $v$  превосходит скорость  $c$  распространения волны в среде:  $v > c$ . Тогда имеем  $\beta = v/c > 1$ . Соответственно,  $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  становится мнимой величиной:  $(1 - \beta^2)^{1/2} = \pm i(\beta^2 - 1)^{1/2}$ . В этом случае формула (41), определяющая зависимость поля от координат на большом расстоянии от траектории источника, приводит к следующей зависимости поля от координат (постоянные множители опускаем):

$$\varphi_\omega(x, \rho) \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(i \frac{\omega}{v} x\right) \exp\left(i \frac{|\omega|}{v} \sqrt{\beta^2 - 1} \rho\right). \quad (43)$$

Из формулы (43) видно, что в случае  $v > c$  на больших расстояниях от пути источника существует волна излучения. При достаточно больших значениях  $\rho$  эту волну можно считать плоской. Волновой вектор этой волны имеет две компоненты:  $k_x = \omega/v$  по оси  $x$  и  $k_\rho = (\omega/v)(\beta^2 - 1)^{1/2}$  по радиусу. Полная величина волнового вектора, как нетрудно убедиться, равна  $\omega/c$ , т.е. такая же, как и у свободной волны частоты  $\omega$ . Волновой вектор составляет некоторый угол  $\vartheta$  с траекторией источника, такой, что

$$\cos \vartheta = \frac{k_x}{k} = \frac{c}{v}. \quad (44)$$

Вещественный угол  $\vartheta$  может возникнуть лишь в том случае, если выполняется неравенство  $v > c$ , т.е. если скорость источника превосходит характерную скорость волн в среде. Разумеется, если постоянная  $c$  означает скорость света в вакууме, неравенство  $v > c$  не может быть выполнено. Если же речь идет о движении заряженной частицы в преломляющей среде, в которой скорость света меньше, чем в вакууме, неравенство  $v > c$  может быть выполнено. Оно также может быть выполнено при движении тела в газе со сверхзвуковой скоростью.

Волна (43) описывает излучение Вавилова — Черенкова, если величина  $c$  в волновом уравнении (25) обозначает скорость света в преломляющей среде (или эффект Маха, если речь идет о движении тела в газе, а  $c$  — скорость звука). Очевидно, что в этом случае источник обгоняет собственное поле, и задача о дифракционном излучении имеет свои особенности. Мы здесь будем считать, что скорость источника не превышает скорость волн в среде, поэтому поле  $\varphi_\omega$  определяется выражением (40). Это выражение и следует подставить в формулу (36), определяющую поле излучения.

Для того чтобы полностью определить потенциал дифракционного излучения  $\varphi_\omega$ , надо еще знать фурье-

компоненту плотности источника  $s_\omega(x, y, z)$ :

$$s_\omega(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, z, t) \exp(i\omega t) dt.$$

Если в это равенство подставить выражение (37) для  $s(x, y, z, t)$ , мы получим

$$s_\omega(x, y, z) = \frac{q}{2\pi v} \exp\left(i\frac{\omega}{v}x\right) \delta(y) \delta(z). \quad (45)$$

Итак, для того чтобы определить потенциал дифракционного излучения, возникающего при пролете заряда через круглое отверстие в экране, надо в общую формулу (36) подставить выражение (40) для  $\varphi_\omega$  и выражение (45) для  $s_\omega$ . Тогда формула (36) для потенциала излучения примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(r \rightarrow \infty) = & -q \frac{ik}{2\pi^2 v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \rho\right) \times \\ & \times \exp[-i(k_y y + k_z z)] \cos \theta dy dz + \\ & + \frac{q}{2\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V [\exp(-i\mathbf{kr}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \times \\ & \times \exp\left(i\frac{\omega}{v}x'\right) \delta(y') \delta(z') dx' dy' dz'. \quad (46) \end{aligned}$$

Здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — расстояние точки наблюдения от центра отверстия,  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$  — расстояние точки наблюдения от траектории заряда (от оси  $x$ ). Напомним, что первое слагаемое в формуле (46) — интеграл по площади отверстия  $S'$  — описывает излучение, возникшее при движении источника на подлете к экрану и прошедшее (с учетом дифракции) через отверстие. Второе слагаемое — интеграл по объему  $V$  — описывает излучение, созданное при движении источника после пролета через отверстие.

Вычислим сначала интеграл по площади отверстия:

$$I_s = \int_{S'} K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \rho\right) \exp[-i(k_y y + k_z z)] \times \cos \theta dx dy dz. \quad (47)$$

В показателе экспоненты под знаком интеграла стоит скалярное произведение вектора  $\rho = (y, z)$  и вектора  $\kappa = (k_y, k_z)$ . Оба вектора лежат в плоскости экрана (т.е. в плоскости  $yz$ ). Очевидно,  $|\kappa| = (\omega/c) \sin \theta$ ,  $|\rho| = \sqrt{y^2 + z^2}$ . Поэтому мы можем записать выражение (47) следующим образом:

$$I_s = \int_{S'} K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \rho\right) \exp(-i\kappa \rho \cos \phi) \cos \theta \rho d\rho d\phi, \quad (48)$$

где  $\phi$  — угол между векторами  $\kappa$  и  $\rho$ . Интегрирование по  $\rho$  проводится в пределах от нуля до  $a$  (напомним, что  $a$  — радиус отверстия в экране), интегрирование по  $\phi$  — в пределах от нуля до  $2\pi$ .

Проведем сначала интегрирование по  $\phi$ . Для этого используем соотношение

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\kappa \rho \cos \phi) d\phi = 2\pi J_0(\kappa \rho),$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Мы получим:

$$I_s = 2\pi \int_0^a K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \rho\right) J_0\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \rho\right) \cos \theta \rho d\rho. \quad (49)$$

Интегрирование по  $\rho$  дает

$$\begin{aligned} I_s = & 2\pi \frac{v^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta} \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1\left(a \frac{\omega}{c} \sin \theta\right) \times \right. \\ & \times K_0\left(a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} J_0\left(a \frac{\omega}{c} \sin \theta\right) \times \\ & \left. \times K_1\left(a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) + 1 \right] \cos \theta. \quad (50) \end{aligned}$$

Здесь  $J_1(x) = -J_0'(x)$ ,  $K_1(x) = -K_0'(x)$ .

Соответственно, первое слагаемое в формуле (46) записывается в виде

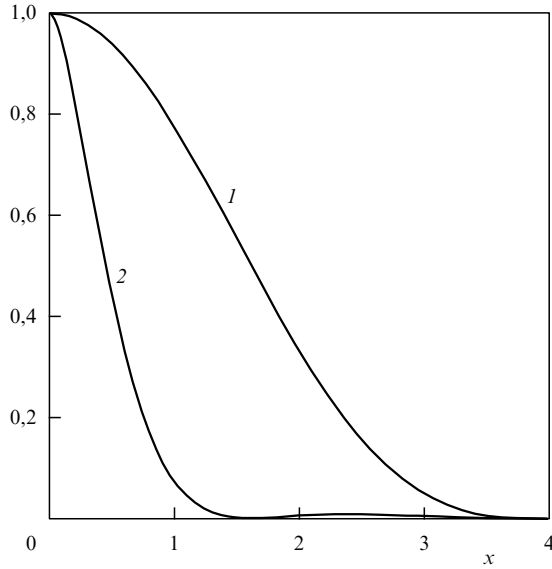
$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -\frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta} \times \\ & \times \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1\left(a \frac{\omega}{c} \sin \theta\right) K_0\left(a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) - \right. \\ & \left. - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} J_0\left(a \frac{\omega}{c} \sin \theta\right) K_1\left(a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) + 1 \right] \cos \theta. \quad (51) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что если радиус отверстия  $a$  стремится к нулю, та часть потенциала, которая выражается членом  $\varphi_1$ , обращается в нуль. Если же радиус  $a$  устремить к бесконечности, мы получим из формулы (51)

$$\varphi_1 = -\frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta} \cos \theta (a \rightarrow \infty). \quad (52)$$

Последний результат ярко показывает различие между двумя явлениями: дифракцией свободной волны на отверстии в экране и дифракцией, которую испытывает на том же экране поле равномерно движущегося источника. Если на отверстие в экране падает свободная электромагнитная волна, то при стремлении радиуса отверстия к бесконечности рассеянное поле в объеме  $V$  пропадает и остается только падающая волна. Если же на отверстие в экране падает поле равномерно движущегося источника, то, как видно из формулы (52), при стремлении радиуса отверстия к бесконечности в объеме  $V$  возникает поле, которое резко отличается от падающего. Действительно, формула (52) для рассеянного поля описывает незатухающую сферическую волну, в то время как падающее поле имеет вид (40), т.е. затухает по экспоненциальному закону по мере удаления от траектории источника. Получается, что наличие экрана в каком-то смысле эквивалентно неравномерному движению — в обоих случаях возникает излучение. Ниже мы покажем, что действительно можно говорить о связи этих двух явлений.

На рисунке 3 кривая 1 изображает интенсивность рассеянного излучения при нормальном падении плоской волны на круглое отверстие в экране. Кривая 2



**Рис. 3.** Сравнительные характеристики излучения на отверстии в плоском экране в зависимости от параметра  $x = ka/\gamma$  под углом наблюдения  $\theta = 1/\gamma$ : 1 — интенсивность рассеянного света при нормальном падении плоской волны на круглое отверстие; 2 — интенсивность дифракционного излучения точечного заряда при пролете через центр круглого отверстия.

изображает интенсивность дифракционного излучения, возникающего при пролете заряда через круглое отверстие того же радиуса. Для сравнения взят один и тот же угол наблюдения  $\theta = 1/\gamma$ . Максимальные значения интенсивностей в обоих случаях нормированы на единицу. Видно, что интенсивность дифракционного излучения спадает быстрее, чем интенсивность рассеянного излучения при дифракции.

Перейдем теперь к вычислению слагаемого в (46), содержащего интеграл по объему  $V$ . Обозначим это слагаемое через  $\varphi_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{q}{2\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \times \\ &\times \exp\left(i\frac{\omega}{v}x'\right) \delta(y')\delta(z') dx' dy' dz = \\ &= \frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - (v^2/c^2)\cos^2\theta} \cos\theta. \end{aligned} \quad (53)$$

Сравнение формул (53) и (52) показывает, что слагаемое  $\varphi_2$  равно по величине и противоположно по знаку предельному значению слагаемого  $\varphi_1$  в пределе  $a \rightarrow \infty$ .

Полное выражение для потенциала поля излучения в объеме  $V$  на больших расстояниях от плоскости экрана равно сумме  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_\omega &= -\frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - (v^2/c^2)\cos^2\theta} \times \\ &\times \left[ a\frac{\omega}{c} \sin\theta J_1\left(a\frac{\omega}{c} \sin\theta\right) K_0\left(a\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) - \right. \\ &\left. - a\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} J_0\left(a\frac{\omega}{c} \sin\theta\right) K_1\left(a\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) \right] \cos\theta. \end{aligned} \quad (54)$$

Если радиус отверстия  $a$  растет, то в пределе  $a \rightarrow \infty$  потенциал поля излучения (54) стремится к нулю. Этот результат легко понять из физических соображений: если радиус отверстия неограниченно растет, то экран, по существу, исчезает и в пределе получается задача о равномерном движении источника в однородном пространстве в отсутствие экрана. В этом случае, как уже говорилось, нет никакого излучения.

В обратном случае сплошного экрана (когда происходит предельный переход  $a \rightarrow 0$ ) получаем

$$\varphi_\omega = \frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - (v^2/c^2)\cos^2\theta} \cos\theta. \quad (55)$$

Это выражение дает потенциал переходного излучения, возникающего в том случае, когда заряженная частица, двигаясь с постоянной скоростью по оси  $x$ , пересекает непрозрачный экран, расположенный в плоскости  $x = 0$ , влетает в объем  $V$  и далее движется в объеме  $V$  вдоль оси  $x$ , удаляясь от стенки.

Перейдем теперь от потенциала к полям излучения. Для этого напомним, как записываются уравнения для потенциалов поля в электродинамике:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi &= 4\pi s. \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал,  $\varphi$  — скалярный потенциал,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $s$  — плотность заряда. Для нашего случая (равномерное движение точечного заряда вдоль оси  $x$ ) плотность заряда  $s$  имеет вид (37), а вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  имеет только одну отличную от нуля компоненту  $j_x = vs$ . Поле заряда, пролетающего по оси круглого отверстия в экране, обладает аксиальной симметрией. Из вида уравнений (56) следует, что если известно решение уравнения (56) для  $\varphi$ , то решение уравнения для вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  выражается через скалярный потенциал следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{v}{c} \varphi, \\ \text{т.е. в нашем случае единственной отличной от нуля} \\ \text{компонентой вектор-потенциала } \mathbf{A} &\text{ является компонента} \\ A_z &= \frac{v}{c} \varphi. \end{aligned} \quad (57)$$

Поэтому с помощью соотношений (54) и (57) мы сразу можем записать ту часть вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ , которая описывает излучение точечного заряда при пролете через круглое отверстие:

$$\begin{aligned} A_z &= -\frac{iq}{\pi\omega} \frac{v^2}{c^2} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - (v^2/c^2)\cos^2\theta} \times \\ &\times \left[ a\frac{\omega}{c} \sin\theta J_1\left(a\frac{\omega}{c} \sin\theta\right) K_0\left(a\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) - \right. \\ &\left. - a\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} J_0\left(a\frac{\omega}{c} \sin\theta\right) K_1\left(a\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}\right) \right] \cos\theta. \end{aligned} \quad (58)$$

Зная выражение для вектор-потенциала, мы по обычным правилам находим магнитное поле:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = i[\mathbf{k}, \mathbf{A}].$$

Магнитное поле имеет только одну отличную от нуля компоненту  $H_\varphi$ :

$$H_\varphi = \frac{q}{\pi} \frac{v^2}{c^3} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta} \times \\ \times \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) - \right. \\ \left. - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} J_0 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_1 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right] \sin \theta \cos \theta. \quad (59)$$

Электрическое поле излучаемой волны лежит в плоскости, проведенной через радиус-вектор точки наблюдения и линию движения источника (ось  $x$ ). По величине вектор электрического поля равен вектору магнитного поля  $H_\varphi$ . Интенсивность излучения на частоте  $\omega$  под углом  $\theta$  в элемент телесного угла  $d\Omega$  записывается в виде

$$W_\omega(\theta) d\Omega = c |H_\omega(\theta)|^2 r^2 d\Omega = \\ = \frac{q^2}{\pi^2} \frac{v^4}{c^5} \frac{1}{(1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta)^2} \times \\ \times \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) - \right. \\ \left. - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} J_0 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_1 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right]^2 \times \\ \times \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi. \quad (60)$$

Здесь  $\varphi$  — азимутальный угол. Ввиду осевой симметрии интенсивность излучения не зависит от  $\varphi$ . Поэтому интегрирование по  $\varphi$  сводится к умножению на  $2\pi$ .

Если радиус отверстия  $a$  стремится к бесконечности, интенсивность излучения стремится к нулю, как это и должно быть. Если же  $a \rightarrow 0$ , формула (60) дает переходное излучение, возникающее при вылете заряженной частицы из сплошного экрана:

$$W_\omega(\theta) d\Omega = \frac{q^2}{\pi^2} \frac{v^4}{c^5} \frac{1}{(1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta)^2} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi. \quad (61)$$

Для этого случая существует точное решение электродинамической задачи (см. сноску на с. 809), из которого следует такое выражение для интенсивности переходного излучения на границе идеального проводника:

$$W_\omega(\theta) d\Omega = \frac{q^2 v^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi}{\pi^2 c^3 [1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2}. \quad (62)$$

Сравнение формул (61) и (62) показывает, что приближенная формула для интенсивности излучения, полученная с помощью скалярной теории, отличается от точного решения векторной задачи множителем  $(v^2/c^2) \cos^2 \theta$ . Отсюда можно вывести условия справедливости скалярной теории дифракционного излучения. Условия должны быть такие, чтобы этот лишний множитель был близок к единице. Во-первых, скорость пролетающей через отвер-

стие частицы должна быть близка к скорости света; во-вторых, должны рассматриваться только малые углы излучения. На практике достаточно выполнения только первого условия: из формул (61) и (62) видно, что если скорость частицы близка к скорости света, то основное излучение сосредоточено в области малых углов

$$\theta \approx \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad (\gamma \gg 1). \quad (63)$$

Здесь  $\gamma = (\sqrt{1 - v^2/c^2})^{-1} = E/mc^2$  — величина, называемая лоренц-фактором. Она показывает, во сколько раз энергия излучающей частицы превышает ее энергию покоя. Условие  $\gamma \gg 1$  можно считать условием справедливости изложенного здесь подхода, который приводит к выражению (36) для поля дифракционного излучения. Условие это можно пояснить следующим образом. Теория дифракции строится в предположении, что на отверстие в экране падает свободная электромагнитная волна. Скорость распространения этой волны равна скорости света. С другой стороны, поле равномерно движущегося заряда в свободном пространстве распространяется со скоростью заряда, т.е. медленнее, чем свободные электромагнитные волны. Поэтому поле движущегося заряда отличается от поля свободных электромагнитных волн, и результат взаимодействия этого поля с экраном может сильно отличаться от той картины, которую дает дифракция свободных электромагнитных волн. Но чем ближе скорость заряда к скорости света, тем меньше оказывается различие между полем заряда и полем свободных электромагнитных волн, и с тем большим основанием мы можем надеяться на справедливость развитой выше теории. В дальнейшем, если не оговорено особо, мы будем предполагать, что скорость пролетающей частицы близка к скорости света, т.е. лоренц-фактор  $\gamma$  велик по сравнению с единицей.

Рассмотрим теперь подробнее выражение (60) для интенсивности дифракционного излучения. Исследуем сначала угловую зависимость. Мы начнем с множителя

$$\frac{\sin^3 \theta \cos^2 \theta}{[1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta]^2} = \frac{\sin^3 \theta \cos^2 \theta}{[1 - \beta^2 \cos^2 \theta]^2}$$

при выражении, заключенном в квадратные скобки в (60). При малых значениях угла  $\theta$  мы можем разложить  $\cos \theta$  по степеням аргумента, ограничившись первыми двумя членами разложения, а также считать  $\sin \theta = \theta$ . Мы получим:

$$\frac{\theta^3}{[1 - \beta^2 \cos^2 \theta]^2} = \frac{\theta^3}{[1 - \beta^2 + \theta^2]^2} = \frac{\theta^3}{[1/\gamma^2 + \theta^2]^2}. \quad (64)$$

Этот множитель принимает большие значения в области углов  $\theta \approx 1/\gamma$  (максимальное значение пропорционально  $\gamma$ ), а затем с ростом угла  $\theta$  спадает как  $\theta^{-4}$ .

Продолжая рассмотрение формулы (60), обратимся теперь к множителю

$$\left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) - \right. \\ \left. - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} J_0 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_1 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right]^2. \quad (65)$$

В этом выражении аргументом функций Бесселя  $J_0$  и  $J_1$  является комбинация переменных  $a(\omega/c) \sin \theta$ , а аргументом функций Макдональда  $K_0$  и  $K_1$  — комбинация  $a(\omega/v)(1 - \beta^2)^{1/2}$ . Но поскольку множитель (64) принимает большие значения при  $\theta = 1/\gamma = (1 - \beta^2)^{1/2}$ , то для качественной оценки выражения (65) можно считать, что при больших значениях  $\gamma$  аргументы функций Бесселя и функций Макдональда близки друг к другу. Тогда, учитывая свойства функций  $J_0, J_1$  и  $K_0, K_1$  при малых и больших значениях аргумента, получаем, что при малых значениях аргумента (т.е. при  $a(\omega/v)(1 - \beta^2)^{1/2} \ll 1$ ) множитель (65) равен единице, а при больших значениях аргумента (т.е. при  $a(\omega/v)(1 - \beta^2)^{1/2} > 1$ ) выражение (65) с ростом аргумента убывает экспоненциально, т.е. пропорционально множителю  $\exp(-2a(\omega/v)(1 - \beta^2)^{1/2})$ . Очевидно, что вместе с этим множителем убывает по экспоненциальному закону также и интенсивность излучения на соответствующих частотах. Мы, таким образом, можем качественно определить верхнюю границу спектра излучения, возникающего при пролете заряда по оси круглого отверстия в экране. Определим граничную частоту как такую, начиная с которой интенсивность излучения падает по экспоненциальному закону. Очевидно, граничную частоту можно определить по порядку величины, приравняв единице аргумент  $a(\omega/v)(1 - \beta^2)^{1/2}$ , от которого зависят функции  $K_0$  и  $K_1$ , потому что именно эти функции при дальнейшем росте аргумента начинают спадать по экспоненциальному закону. Поэтому мы принимаем за граничную частоту  $\omega_{\text{гр}}$  такую частоту, при которой имеет место соотношение

$$a \frac{\omega_{\text{гр}}}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \approx 1, \quad (66)$$

откуда для граничной частоты получаем

$$\omega_{\text{гр}} \approx \frac{v}{a} \gamma. \quad (67)$$

Поскольку, как было отмечено ранее, наше рассмотрение справедливо при скоростях заряда  $v$ , близких к скорости света  $c$ , мы можем переписать это соотношение:

$$\omega_{\text{гр}} \approx \frac{c}{a} \gamma. \quad (68)$$

Частоты, много большие, чем  $\omega_{\text{гр}}$ , излучаются с пренебрежимо малой интенсивностью. Из формулы (67) следует, что  $\omega_{\text{гр}}$  пропорциональна энергии частицы (поскольку лоренц-фактор  $\gamma$  пропорционален энергии). Даже при макроскопических размерах отверстия (скажем, при  $a = 1$  см), начиная с некоторых значений энергии налетающей заряженной частицы, может излучаться видимый свет и более жесткое излучение. В связи с этим отметим, что для достаточного больших значений  $\omega_{\text{гр}}$  наше рассмотрение может потерять силу. Действительно, если  $\omega_{\text{гр}}$  попадает в область рентгеновского излучения, принятые нами граничные условия на поверхности экрана уже не выполняются (для рентгеновских лучей тонкий экран полностью пронизаем).

Граничной частоте соответствует граничная длина волны

$$\lambda_{\text{гр}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{2\pi a}{\gamma}. \quad (69)$$

Волны, длина которых много меньше, чем  $\lambda_{\text{гр}}$ , излучаются с пренебрежимо малой интенсивностью. Заме-

тим здесь, что поскольку мы принимаем скорость заряда близкой к скорости света, мы можем считать, что лоренц-фактор  $\gamma$  намного больше единицы. Тогда из формулы (69) следует, что граничная длина волны намного меньше линейных размеров отверстия, т.е. одно из основных условий, определяющих справедливость нашего рассмотрения (малость длины волны по сравнению с размерами отверстия), выполняется автоматически.

Зафиксируем теперь частоту  $\omega$  и проследим, как зависят потери  $W_\omega$  (60) от радиуса отверстия  $a$ . Уже было сказано ранее, что при  $a \rightarrow 0$  выражение для потерь дает потери на переходное излучение, т.е. излучение, сопровождающее вылет заряженной частицы из сплошного экрана. В обратном случае, когда  $a \rightarrow \infty$ , величина  $W_\omega$  стремится к нулю по экспоненциальному закону. Но когда мы говорим о малых или о больших значениях радиуса  $a$ , следует задать некоторую физическую величину, по сравнению с которой значения  $a$  могут считаться малыми (или большими). Такой величиной в нашем случае является  $v\gamma/\omega = \lambda\gamma/2\pi$ , где  $\lambda = 2\pi c/\omega$  — длина волны на частоте  $\omega$ . Действительно, фурье-компонента скалярного потенциала для поля равномерно движущейся в пустоте заряженной частицы определяется соотношением (40)

$$\varphi_\omega(x, y, z) = \frac{q}{\pi v} \exp\left(i \frac{\omega}{v} x\right) K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right).$$

Выражение для фурье-компоненты вектор-потенциала можно получить, умножив последнее соотношение на  $\beta = v/c$ . Сделав это, мы получаем

$$A_z(x, y, z) = \frac{q}{\pi c} \exp\left(i \frac{\omega}{v} x\right) K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right).$$

Уже было отмечено (см. текст, заключенный между формулами (40) и (41)), что функция  $K_0$  спадает с ростом аргумента по экспоненциальному закону. Можно грубо качественно считать, что фурье-компонента поля равномерно движущегося заряда на расстоянии  $\rho$  от линии движения отлична от нуля, если выполняется неравенство

$$\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho < 1,$$

и становится пренебрежимо малой, если выполняется обратное неравенство:

$$\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho > 1.$$

Поэтому, если заряд пролетает через круглое отверстие радиуса  $a$ , возможны два случая. При

$$a < \frac{v}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{v}{\omega} \gamma \approx \frac{1}{2\pi} \lambda \gamma$$

поле на краю отверстия заметно отличается от нуля. В этом случае имеет место дифракция и возникает рассеянное поле, т.е. дифракционное излучение на частоте  $\omega$ . Если же

$$a > \frac{v}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{v}{\omega} \gamma \approx \frac{1}{2\pi} \lambda \gamma,$$

то поле на краю отверстия пренебрежимо мало, а следовательно, пренебрежимо мало и рассеянное поле.

Поскольку  $\omega_{\text{гр}}$  пропорциональна энергии частицы, то и полные потери на дифракционное излучение также пропорциональны энергии частицы.

Перейдем теперь к оценке потерь на дифракционное излучение. Полная потеря энергии  $\delta W$  определяется выражением

$$\int W_{\omega}(\theta) d\Omega d\omega,$$

где  $W_{\omega}(\theta)$  определяется формулой (60). Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{q^2 v^4}{\pi^2 c^5} \int \frac{1}{(1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta)^2} \times \\ & \times \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) - \right. \\ & \left. - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} J_0 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_1 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right]^2 \times \\ & \times \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi d\omega. \end{aligned} \quad (70)$$

Множитель перед выражением в квадратных скобках под знаком интеграла, как было отмечено выше, велик в области углов  $\theta \approx 1/\gamma$ , где он равен по порядку величины  $1/\gamma^4$ . Далее, мы можем положить по порядку величины  $\sin \theta \approx d\theta \approx 1/\gamma$ ,  $\cos \theta \approx 1$ . Интегрирование по углу  $\varphi$  сводится к умножению на  $2\pi$ . Что касается выражения в квадратных скобках, можно принять, что оно по порядку величины равно единице для частот, не превышающих  $\omega_{\text{гр}}$ , а при более высоких частотах быстро падает и, следовательно,  $d\omega \approx \omega_{\text{гр}}$ . Приняв все это во внимание, получаем

$$\Delta W = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{a} \gamma. \quad (71)$$

Оценка эта достаточно груба, но можно надеяться, что порядок величины определен справедливо.

Итак, полная энергия дифракционного излучения обратно пропорциональна радиусу отверстия (или, что то же самое, обратно пропорциональна пролетному параметру — минимальному расстоянию траектории заряда от края отверстия) и прямо пропорциональна энергии пролетающей частицы. При этом излучение испускается вперед по направлению движения частицы в узком конусе, раствор которого обратно пропорционален энергии частицы. Спектр излучаемых частот ограничен сверху, причем граничная частота пропорциональна энергии частицы.

Если частота излучаемого кванта по порядку величины определяется формулой (67), то, умножив эту величину на постоянную Планка  $h$ , получаем величину энергии, которую уносит этот квант:

$$\varepsilon = h\omega_{\text{гр}} \approx \frac{hv}{a} \gamma.$$

Зададимся вопросом, какое число  $n$  таких квантов излучается за одно прохождение заряженной частицы. Для этого, очевидно, следует определить отношение полных потерь энергии  $\delta W$  (71) к энергии излучаемого

кванта  $h\omega_{\text{гр}}$ . Проредив это, получаем

$$n \approx \frac{e^2}{hc}.$$

Величина  $e^2/hc$  известна как постоянная тонкой структуры и равна  $1/137$ . Можно на основе проведенной оценки заключить, что один квант с энергией порядка  $h\omega_{\text{гр}}$  излучается примерно один раз на сто прохождений заряда через отверстие в экране.

## 5. Излучение точечного источника, пересекающего центр плоского круглого экрана

Пусть в плоскости  $yz$  декартовой прямоугольной системы координат расположен тонкий непрозрачный диск круговой формы радиуса  $a$  (рис. 4). Заряженная частица движется равномерно в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ , так что уравнение движения частицы имеет вид  $x = vt$ . В момент времени  $t = 0$  заряженная частица пересекает экран, входит в объем  $V$  (полупространство  $x > 0$ ) и, продолжая движение, уходит от экрана. Требуется определить возникающее в этом случае излучение.

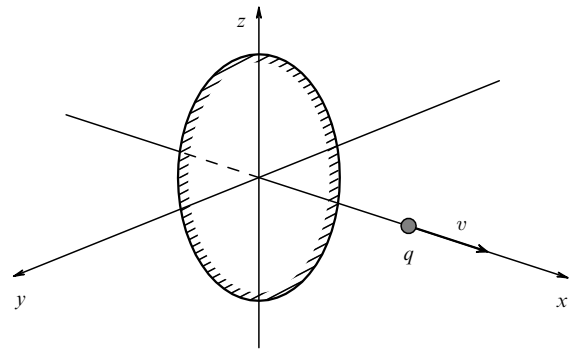


Рис. 4. Пролет точечной заряженной частицы через центр диска.

Для того чтобы определить вектор-потенциал возникающего в этой задаче излучения, мы можем воспользоваться формулой для компоненты  $A_z$  вектор-потенциала:

$$\begin{aligned} A_z(r \rightarrow \infty) = & -q \frac{ik}{2\pi^2 c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} K_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho \right) \times \\ & \times \exp[-i(k_y y + k_z z)] \cos \theta dy dz + \\ & + \frac{q}{\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \times \\ & \times \exp\left(i \frac{\omega}{v} x'\right) \delta(y') \delta(z') dx' dy' dz'. \end{aligned} \quad (72)$$

Здесь  $S'$  — площадь "отверстия", т.е. в данном случае вся площадь вне диска на плоскости  $x = 0$ . Формула (72) эквивалентна соотношению (46) для скалярного потенциала  $\varphi$  с той единственной разницей, что  $A_z = v\varphi/c$ , так что правая часть формулы (72) отличается множителем  $v/c$ . Напомним, что в формуле (72)  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$  — расстояние от оси  $x$ ,  $r$  — расстояние точки наблюдения от центра диска,  $S'$  — площадь отверстия в экране, по которой проводится интегрирование. В рассматриваемом случае область  $S'$  простирается от  $\rho = a$  до  $\rho = \infty$ .



Как было показано выше, выражение для вектор-потенциала можно свести к интегралу по площади диска:

$$A_z(r \rightarrow \infty) = q \frac{ik}{2\pi^2 c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S''} K_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho \right) \times \\ \times \exp[-i(k_y y + k_z z)] \cos \theta \, dy \, dz. \quad (73)$$

Здесь  $S''$  — поверхность диска, что соответствует области значений  $\rho$  от 0 до  $a$ .

Если, как это было сделано в предыдущем разделе, ввести на плоскости  $yz$  полярную систему координат  $\rho, \phi$  и провести интегрирование по полярному углу  $\phi$ , мы получим

$$A_z(r \rightarrow \infty) = q \frac{ik}{\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_0^a K_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho \right) \times \\ \times J_0 \left( \frac{\omega}{c} \sin \theta \rho \right) \cos \theta \, \rho \, d\rho. \quad (74)$$

Проведя интегрирование по переменной  $\rho$ , получаем

$$A_z(r \rightarrow \infty) = \frac{iq}{\pi \omega} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \times \\ \times \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) - \right. \\ \left. - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} J_0 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_1 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) + 1 \right] \cos \theta. \quad (75)$$

Магнитное поле, как и в случае пролета заряда по оси круглого отверстия, имеет только одну отличную от нуля компоненту  $H_\phi$ :

$$H_\phi = -\frac{q}{\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\beta^2 \sin \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) \times \right. \\ \times K_0 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} J_0 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) \times \\ \left. \times K_1 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) + 1 \right] \cos \theta. \quad (76)$$

Энергия, излученная на частоте  $\omega$  в интервале частот  $d\omega$  и в телесный угол  $d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$  в направлении, составляющем угол  $\theta$  со скоростью заряда, равна

$$W_\omega(\theta) \, d\Omega = c |H_\phi(\theta)|^2 r^2 \, d\Omega = \frac{q^2 v^4}{\pi^2 c^5} \frac{1}{(1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta)^2} \times \\ \times \left[ a \frac{\omega}{c} \sin \theta J_1 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) K_0 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) - \right. \\ \left. - a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} J_0 \left( a \frac{\omega}{c} \sin \theta \right) \times \right. \\ \left. \times K_1 \left( a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) + 1 \right]^2 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (77)$$

Если радиус  $a$  диска стремится к нулю, интенсивность излучения также стремится к нулю. Для того чтобы установить, по какому закону происходит обращение интенсивности в нуль, вернемся к выражению (74) для вектор-потенциала. При малых значениях аргумента функция  $K_0$  имеет логарифмическую особенность. Поэтому результат интегрирования по радиусу при

малых значениях  $a$  можно записать в виде

$$A_z(a \rightarrow 0) = q \frac{ik}{\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{a^2}{2} \ln \left( \frac{v}{\omega a (1 - \beta^2)^{1/2}} \right).$$

Отсюда следует, что интенсивность излучения при малых значениях  $a$  стремится к нулю как  $(a^2 \ln[v/\omega a (1 - \beta^2)^{1/2}])^2$ . Того, что интенсивность дифракционного излучения на диске при малых значениях радиуса стремится к нулю, следовало ожидать из физических соображений. Действительно, в этом случае оптическая неоднородность в пределе исчезает, и мы имеем равномерное движение заряда в свободном пространстве. В обратном пределе, когда радиус диска стремится к бесконечности, выражение (77) дает формулу (61) для интенсивности переходного излучения, которое возникает при пересечении зарядом сплошного экрана. Величиной, отделяющей большие значения радиуса от малых, как и в ранее разобранном случае прохождения заряда через круглое отверстие, является величина  $\lambda\gamma/2\pi$ . В связи с этим важно отметить следующее обстоятельство. Предположим, что мы рассматриваем излучение на длине волны  $\lambda \ll a$ . Тогда при не очень больших скоростях заряда (когда  $\gamma \approx 1$ ) мы имеем случай  $a \gg \lambda\gamma/2\pi$ . С ростом энергии частицы лоренц-фактор  $\gamma$  растет и, начиная с некоторого значения энергии частицы, выполняется обратное неравенство  $a \ll \lambda\gamma/2\pi$  при тех же значениях радиуса отверстия  $a$  и длины волны  $\lambda$ . Как мы видели, от того, которое из этих двух неравенств выполняется, существенно зависит характер дифракционного излучения.

В случае излучения на диске зависимость интенсивности от радиуса оказывается совсем не такой, как в случае излучения при пролете через круглое отверстие того же радиуса. При больших значениях радиуса ( $a \gg \lambda\gamma/2\pi$ ) излучение на отверстии стремится к нулю, а излучение на диске — к переходному излучению. При малых же значениях радиуса ( $a \ll \lambda\gamma/2\pi$ ), наоборот, излучение на отверстии стремится к переходному излучению, а излучение на диске — к нулю.

## 6. Аналог теоремы Бабине для дифракционного излучения

Между амплитудами полей излучения на диске и на отверстии того же радиуса существует определенная связь. Рассмотрим сумму двух выражений — поля излучения (59) для случая пролета заряда через круглое отверстие радиуса  $a$  и поля излучения (76) для случая излучения на диске того же радиуса. Нетрудно видеть, что сумма полей для этих двух случаев равна полю переходного излучения. Соответственно, сумма потенциалов дает потенциал переходного излучения. Это обстоятельство имеет общий характер и справедливо для излучения заряженной частицы на любых двух дополнительных экранах. Два экрана (для простоты здесь речь идет о плоских экранах) называются дополнительными, если прозрачные области одного из них являются непрозрачными у другого, и, наоборот, непрозрачным областям одного экрана соответствуют прозрачные области у другого (рис. 5). Очевидно, если взять два дополнительных экрана и совместить их плоскости, мы получим один сплошной непрозрачный экран. В классической теории дифракции существует так

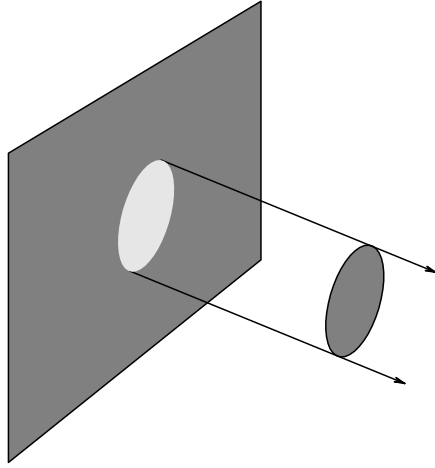


Рис. 5. Дополнительные экраны.

называемая теорема Бабине: сумма полей, образованных при дифракции на двух дополнительных экранах, равна полю падающей на экран волны (или полю источника). Для дифракционного излучения движущихся источников можно сформулировать аналогичную теорему: сумма полей дифракционного излучения на двух дополнительных экранах равна полю переходного излучения (на сплошном экране). Поясним, что означает это утверждение. Пусть заряженная частица движется равномерно по оси  $x$ . Поместим в плоскости  $x = 0$  плоский экран с отверстиями. Часть поверхности экрана, которую составляют отверстия, обозначим через  $S'$ . Непрозрачную часть поверхности обозначим  $S''$ . Заряженная частица движется равномерно по оси  $x$  и, пересекая плоскость экрана, дает дифракционное излучение. Выпишем теперь выражение для потенциала, определяющего поле излучения в этом случае. Потенциал поля излучения  $\varphi_\omega$  определяется формулой (46), которую мы здесь для удобства перепишем:

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(r \rightarrow \infty) = & -q \frac{ik}{2\pi^2 v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} K_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \rho} \right) \times \\ & \times \exp[-i(k_y y + k_z z)] \cos \theta \, dy \, dz + \\ & + \frac{q}{2\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \times \\ & \times \exp\left(i \frac{\omega}{v} x'\right) \delta(y') \delta(z') \, dx' \, dy' \, dz'. \end{aligned}$$

Заменим теперь в плоскости экрана непрозрачные области на прозрачные и наоборот. Мы получим так называемый дополнительный экран. При пролете заряда через дополнительный экран также возникает дифракционное излучение, потенциал которого записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi'_\omega(r \rightarrow \infty) = & -q \frac{ik}{2\pi^2 v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S''} K_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \rho} \right) \times \\ & \times \exp[-i(k_y y + k_z z)] \cos \theta \, dy \, dz + \\ & + \frac{q}{2\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \times \\ & \times \exp\left(i \frac{\omega}{v} x'\right) \delta(y') \delta(z') \, dx' \, dy' \, dz'. \end{aligned} \quad (78)$$

Здесь  $\varphi'_\omega$  — потенциал дифракционного излучения на дополнительном экране. В этом случае поверхностный интеграл берется по области  $S''$ ; в дополнительном экране прозрачна именно эта область.

Сложим два последних равенства. Мы получим сумму потенциалов излучения от двух дополнительных экранов:

$$\begin{aligned} [\varphi_\omega + \varphi'_\omega](r \rightarrow \infty) = & -q \frac{ik}{2\pi^2 v} \frac{\exp(ikr)}{r} \times \\ & \times \int_{S'+S''} K_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \rho} \right) \exp[-i(k_y y + k_z z)] \times \\ & \times \cos \theta \, dy \, dz + \frac{q}{\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \times \\ & \times \int_V [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \exp\left(i \frac{\omega}{v} x'\right) \times \\ & \times \delta(y') \delta(z') \, dx' \, dy' \, dz'. \end{aligned} \quad (79)$$

В формуле (79) поверхностный интеграл берется по области  $S' + S''$ , т.е. по всей плоскости экрана. Можно этот поверхностный интеграл вычислить следующим образом. В рассмотренной выше задаче о дифракционном излучении на круглом отверстии слагаемое потенциала, содержащее поверхностный интеграл, вычисляется явным образом и имеет вид (51). В этом случае интегрирование проводилось по площади круга радиуса  $a$ . Очевидно, устремив радиус круга к бесконечности, мы получим интеграл по всей плоскости экрана. Сделав так, мы получим из формулы (51)

$$\begin{aligned} -q \frac{ik}{2\pi^2 v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'+S''} K_0 \left( \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \rho} \right) \times \\ \times \exp[-i(k_y y + k_z z)] \cos \theta \, dy \, dz = \\ = -\frac{iq}{\pi \omega c} \frac{v \exp(ikr)}{r} \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Объемный интеграл в (79) также может быть вычислен в явном виде. Второе слагаемое в формуле (79) представляет собой удвоенное выражение (53):

$$\begin{aligned} \frac{q}{\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}')] \exp\left(i \frac{\omega}{v} x'\right) \times \\ \times \delta(y') \delta(z') \, dx' \, dy' \, dz' = \frac{2iq}{\pi \omega c} \frac{v \exp(ikr)}{r} \times \\ \times \frac{1}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Подставив два последних соотношения в формулу (79), мы получим выражение (55) для потенциала, определяющего поле переходного излучения. Таким образом, теорема доказана.

Рассмотренная теорема позволяет, если известно решение задачи о дифракционном излучении на экране заданной конфигурации, сразу же получить и решение для задачи об излучении на дополнительном экране — эти два решения отличаются только полем переходного излучения.

Важно также отметить, что рассмотренная теорема показывает теснейшую связь, существующую между

переходным и дифракционным излучениями. При дифракции свободной волны источник поля находится по одну сторону от рассеивающих препятствий, роль которых играют дополнительные экраны. При этом сумма дифракционных полей по другую сторону от дополнительных экранов равна полю источника. В задаче о дифракционном излучении источник поля при своем движении пересекает плоскость экранов и, таким образом, источник находится по обе стороны от них, что и обуславливает связь между дифракционным и переходным излучениями.

## 7. Излучение заряженной частицы, вылетающей из открытого конца волновода

Рассмотрим полубесконечный волновод круглого сечения, ось которого совпадает с осью  $x$  прямоугольной декартовой системы координат. Волновод расположен в области отрицательных значений  $x$ . Радиус волновода обозначим через  $a$ . Открытый конец волновода расположен при  $x = 0$  и сопряжен с плоским металлическим фланцем, расположенным в той же плоскости  $x = 0$ , что и раскрыт волновода (рис. 6). Заряженная частица движется по оси волновода с постоянной скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $x$ . Достигнув открытого конца, частица вылетает в свободное пространство и, продолжая движение с той же скоростью, уходит на бесконечность.

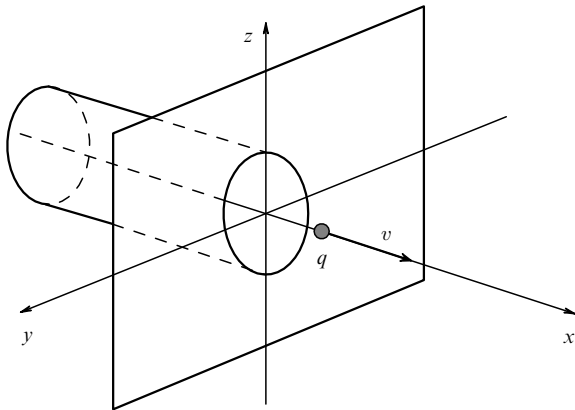


Рис. 6. Вылет точечного заряда из круглого волновода с фланцем.

Вылет частицы из открытого конца волновода сопровождается излучением. Поле, возникающее при вылете частицы через открытый конец круглого волновода без фланца, было ранее точно определено в аналитическом виде<sup>9</sup>. При наличии фланца это излучение можно оценить в приближении Гюйгенса–Кирхгофа, подобно тому, как это было сделано при рассмотрении предыдущих задач. Ниже мы рассмотрим эту задачу в приближении скалярной теории дифракции.

В рассматриваемом случае экран не является плоским, а представляет собой совокупность фланца и волноводных стенок. Поле заряженной частицы, движущейся

щейся внутри волновода, определяется выражением

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \int \varphi_{\omega}^{(0)} \exp(-i\omega t) d\omega,$$

где

$$\varphi_{\omega}^{(0)} = \frac{q}{\pi v} \exp\left(\frac{\omega}{v} x\right) \left[ K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right) - \frac{K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a\right)}{I_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a\right)} I_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right) \right]. \quad (80)$$

Здесь  $I_0(x) = J_0(ix)$  — модифицированная функция Бесселя (функция Бесселя от мнимого аргумента). С ростом аргумента эта функция растет по экспоненциальному закону:

$$I_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp x \quad (x \gg 1).$$

Выражение (80) учитывает обращение поля в нуль на стенках волновода. В приближении Гюйгенса–Кирхгофа мы можем считать, что в плоскости  $x = 0$  поле отлично от нуля только на раскрытии волновода (т.е. при  $\rho < a$ ) и определяется формулой (80). Далее, поступая аналогично тому, как это делалось при рассмотрении предыдущих задач, можно определить поле излучения на больших расстояниях от раскрытия волновода (т.е. от начала координат). Потенциал поля излучения может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega}(r \rightarrow \infty) = & -q \frac{ik}{2\pi^2 v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{S'} \left[ K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right) - \frac{K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a\right)}{I_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a\right)} I_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right) \right] \times \\ & \times \exp[-i(k_y y + k_z z)] \cos \theta dy dz + \\ & + \frac{q}{2\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_V (\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}'')) \times \\ & \times \exp\left(i\frac{\omega}{v} x'\right) \delta(y') \delta(z') dx' dy' dz', \quad (81) \end{aligned}$$

где  $S'$  — площадь раскрытия волновода, определяемая неравенством

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} < a.$$

Введем на плоскости  $x = 0$  полярную систему координат  $(\rho, \phi)$  и проведем интегрирование по полярному углу  $\phi$ . Мы получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega}(r \rightarrow \infty) = & -q \frac{ik}{\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_0^a \left[ K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right) - \frac{K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a\right)}{I_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a\right)} I_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \rho\right) \right] \times \\ & \times J_0\left(\frac{\omega}{c} \rho \sin \theta\right) \cos \theta \rho d\rho + \frac{q}{2\pi v} \frac{\exp(ikr)}{r} \times \\ & \times \int_V [\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') - \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}'')] \exp\left(i\frac{\omega}{v} x'\right) \times \\ & \times \delta(y') \delta(z') dx' dy' dz'. \quad (82) \end{aligned}$$

<sup>9</sup> См., например: Болотовский Б М, Воскресенский Г В ДАН СССР 156 (5) 1072 (1964).

Интегрирование дает

$$\varphi_{\omega} = -\frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\cos\theta}{1 - (v^2/c^2) \cos^2\theta} \times \left[ 1 - \frac{J_0((\omega/c) a \sin\theta)}{I_0((\omega/v) \sqrt{1 - \beta^2} a)} \right] + \frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \times \frac{\cos\theta}{1 - (v^2/c^2) \cos^2\theta}. \quad (83)$$

Первое слагаемое описывает дифракцию волноводного поля при выходе через раскрыв в свободное пространство. Второе слагаемое, аналогично рассмотренным выше случаям, дает переходное излучение. На этот раз оно связано с вылетом заряда из волновода. Приведение членов в формуле (83) дает выражение

$$\varphi_{\omega} = \frac{iq}{\pi\omega} \frac{v}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\cos\theta}{1 - (v^2/c^2) \cos^2\theta} \times \frac{J_0((\omega/c) a \sin\theta)}{I_0((\omega/v) \sqrt{1 - \beta^2} a)}. \quad (84)$$

Определим теперь спектральное и угловое распределение излучения, вытекающее из соотношения (84). Выражение для скалярного потенциала  $\varphi$  соответствует вектор-потенциал  $A_z = \beta\varphi$ . Зная выражение для  $\varphi$ , находим магнитное поле

$$H_{\varphi} = \frac{q}{\pi c} \frac{v^2}{c^2} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\cos\theta \sin\theta}{1 - (v^2/c^2) \cos^2\theta} \frac{J_0((\omega/c) a \sin\theta)}{I_0((\omega/v) \sqrt{1 - \beta^2} a)}. \quad (85)$$

Зная  $H_{\varphi}$ , нетрудно получить выражение для  $W_{\omega}(\theta)$  — интенсивности излучения на частоте  $\omega$  под углом  $\theta$  к направлению движения заряда:

$$W_{\omega}(\theta) = \frac{q^2 v^4}{\pi c^4} \frac{\cos^2\theta \sin^3\theta}{(1 - (v^2/c^2) \cos^2\theta)^2} \frac{J_0^2((\omega/c) a \sin\theta)}{I_0^2((\omega/v) \sqrt{1 - \beta^2} a)}. \quad (86)$$

При малых значениях  $a$  ( $a \rightarrow 0$ ) формула (86) дает интенсивность переходного излучения. При больших значениях  $a$  интенсивность излучения стремится к нулю по экспоненциальному закону:

$$W_{\omega}(\theta) \approx \exp\left[-\frac{2\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a\right] \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} a \gg 1\right).$$

Такое асимптотическое поведение указывает на то, что спектр дифракционного излучения релятивистской частицы характеризуется предельной частотой  $\omega_{\text{гр}}$ , которая пропорциональна гамма-фактору, т.е. энергии частицы. Выражение для  $\omega_{\text{гр}}$  имеет тот же вид (67), что и в случае дифракционного излучения на круглом отверстии того же радиуса. Ширина спектра в рассматриваемой задаче, а следовательно, и полные потери на излучение пропорциональны энергии частицы.

Существует точное решение задачи об излучении заряженной частицы, вылетающей в открытое пространство из полубесконечного круглого волновода без

фланца (см. сноску на с. 827). Полученное аналитическое решение в релятивистском случае дает интенсивность излучения, близкую к той, которая описывается формулой (86). С другой стороны, в релятивистском случае и для малых углов излучения наличие или отсутствие фланца не является существенным. Отсюда можно сделать заключение, что в рассматриваемой задаче скалярная теория дифракционного излучения является хорошим приближением.

## 8. Заключение

Выше были рассмотрены некоторые простейшие задачи дифракционного излучения. Рассмотрение было проведено в скалярном приближении теории дифракции. В действительности, как уже было сказано, электромагнитное поле имеет векторную природу, и возникает вопрос, не лучше ли было бы использовать так называемую векторную теорию дифракции. Эта теория представляет рассеянное поле в виде векторов, удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Такой результат позволяет непосредственно определять поляризацию рассеянного излучения, чего скалярная теория в общем случае не дает возможности сделать. Однако для осесимметричных задач, которые только и рассматривались выше, векторная и скалярная теории приводят к одинаковым результатам. При этом скалярная теория имеет то преимущество, что позволяет получить результат более простым путем. Отметим, что поля излучения в рассмотренных выше задачах определялись на больших расстояниях от области, в которой происходил процесс излучения, т.е. на расстояниях, превышающих путь формирования. В классической теории дифракции наблюдение поля на больших расстояниях от экрана характерно для дифракции Фраунгофера. Очень важно было бы рассмотреть полное поле (т.е. поле дифракционного излучения вместе с собственным полем излучающей частицы) на сравнительно малых расстояниях от экрана, т.е. на расстояниях, сравнимых или меньших, чем путь формирования. В классической теории дифракции такая постановка задачи характерна для дифракции Френеля.

Для ряда задач теории дифракционного излучения были получены строгие аналитические решения. Анализ этих решений важен как для уяснения природы явления, так и для оценки различных приближенных методов. Отметим, что подавляющее число точных решений было опубликовано советскими и российскими исследователями. Для полноты изложения мы приводим в конце статьи список всех известных нам работ по дифракционному излучению. Однако в настоящей статье мы не рассматривали ни математических методов, позволяющих получить точные решения, ни самих этих решений, ограничившись изложением значительно более простых приближенных методов, приводящих в ряде случаев к удовлетворительным результатам.

Авторы считают своей приятной обязанностью поблагодарить В.И. Когана, М. Икезаву и Ю. Шибата за полезные замечания при обсуждении рукописи.

Авторы благодарны также Российскому фонду фундаментальных исследований, при поддержке которого была выполнена существенная часть этой работы (проекты 98-02-17994 и 99-02-18183).

Список литературы<sup>10</sup>

1. Аскарьян Г А "Об излучении ускоренно движущегося электрического изображения равномерно движущегося заряда" *ЖЭТФ* **29** (3) 388 (1955)
2. Бобринев В, Брагинский В "Излучение точечного заряда, равномерно движущегося по оси круглого отверстия в бесконечной идеально проводящей плоскости" *ДАН СССР* **123** 634 (1958)
3. Днестровский Ю Н, Костомаров Д П "Излучение модулированного пучка заряженных частиц при пролете через круглое отверстие в плоском экране" *ДАН СССР* **124** 792, 799 (1959)
4. Казанцев А П, Сурдутович Г И "Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана" *ДАН СССР* **147** (1) 74 (1962)
5. Седракян Д М "Дифракционное излучение линейного источника, пролетающего вблизи края идеально проводящей полуплоскости" *Изв. АН АрмССР* **16** 115 (1963)
6. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Поле заряженной нити, равномерно пролетающей мимо проводящей полуплоскости" *ЖТФ* **34** (1) 11 (1964)
7. Седракян Д М "Излучение линейного источника, пересекающего при своем движении плоский полубесконечный экран" *ЖТФ* **34** 718 (1964)
8. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Излучение линейного источника при пролете через открытый конец плоского волновода" *ДАН СССР* **156** 74 (1964)
9. Айвазян Ю М "Возбуждение плоского полубесконечного волновода линейным источником, пролетающим мимо открытого конца" *Изв. АН АрмССР* **17** 81 (1964)
10. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Поле заряженной нити, равномерно движущейся вблизи от системы идеально проводящих полуплоскостей" *ДАН СССР* **156** 770 (1964)
11. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Излучение точечной заряженной частицы, пролетающей по оси полубесконечного круглого волновода" *ДАН СССР* **156** 1072 (1964)
12. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Излучение точечной заряженной частицы, пролетающей по оси полубесконечного круглого волновода" *ЖТФ* **34** 711 (1964)
13. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Излучение нити с током и заряженной нити, пролетающих вблизи открытого конца плоского волновода" *ЖТФ* **34** (4) 704 (1964)
14. Колпаков О А, Котов В И "Излучение заряда, пролетающего через цилиндрический резонатор" *ЖТФ* **34** 1387 (1964)
15. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Излучение линейного источника, пролетающего вблизи дифракционной решетки, образованной системой идеально проводящих полуплоскостей" *ЖТФ* **34** 1856 (1964)
16. Болотовский Б М, Седракян Д М "Излучение частицы от открытого конца волновода" *Изв. АН АрмССР* **17** (2) 119 (1964)
17. Болотовский Б М, Седракян Д М "Излучение заряженной частицы, пролетающей через открытый конец круглого волновода параллельно его оси" *Радиотехн. и электрон.* **9** 2187 (1964)
18. Седракян Д М "Дифракционное излучение линейных и точечных источников", Дис. канд. ф.-м. н. (Москва: ФИАН, 1964)
19. Айвазян Ю М, Седракян Д М "Возбуждение плоского полубесконечного волновода линейным источником, пролетающим мимо открытого конца" *Изв. АН АрмССР* **18** (1) 117 (1965)
20. Айвазян Ю М "Дифракционное излучение источников, движущихся с постоянными и переменными скоростями", Дис. канд. ф.-м. н. (Москва: ФИАН, 1965)
21. Седракян Д М "Дифракция излучения Вавилова – Черенкова на полуплоскости" *Оптика и спектроскопия* **18** 360 (1965)
22. Болотовский Б М "Излучение равномерно движущихся источников", Дис. д-ра ф.-м. н. (Москва: ФИАН, 1965)
23. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Дифракционное излучение" *УФН* **88** (2) 209 (1966)
24. Авдеев Е В, Воскресенский Г В "К расчету дифракционного излучения линейного источника, движущегося вблизи периодической замедляющей структуры" *Радиотехн. и электрон.* **11** 1419 (1966)
25. Авдеев Е В, Воскресенский Г В "Излучение точечного заряда, равномерно движущегося вблизи периодической системы идеально проводящих плоскостей" *Радиотехн. и электрон.* **11** 1560 (1966)
26. Авдеев Е В, Воскресенский Г В "Излучение заряженной нити, движущейся равномерно вблизи гребенчатой структуры; общее решение" *Радиотехн. и электрон.* **12** 469 (1967)
27. Авдеев Е В, Воскресенский Г В "О характеристиках излучения источника, движущегося вблизи гребенчатой структуры" *Изв. вузов. Радиофизика* **11** 121 (1968)
28. Болотовский Б М, Воскресенский Г В "Излучение заряженных частиц в периодических структурах" *УФН* **94** (3) 377 (1968)
29. Morton P, Neil T, in *Proc. Symposium on Electron Ring Accelerators UCRL-18103* 365 (Berkeley, 1968)
30. Lowson T D "Radiation from a ring charge passing through a resonator" *RHEL/M* 144 (1968)
31. Авдеев Е В, Воскресенский Г В "Электромагнитное возбуждение периодической решетчатой структуры из проводящих лент" *Радиотехн. и электрон.* **14** 839 (1969)
32. Авдеев Е В "Электромагнитное возбуждение периодических замедляющих структур", Дис. канд. ф.-м. н. (Москва: МФТИ, 1968)
33. Levine B S, Sessler A M "Excitation of a closed cylindrical cavity by a charge ring moving along the axis at constant velocity" *Transactions IEEE NS-16* **3** 1031 (1969)
34. Рубин С Б, Кузнецов А Б, Препринт ОИЯИ P9-4728 (Дубна: ОИЯИ, 1969)
35. Тер-Микаелян М Л *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях* (Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969)
36. Тер-Микаелян М Л, Хачатрян Б В "Дифракционное излучение быстрых частиц" *ДАН АрмССР* **40** 13 (1965)
37. Хачатрян Б В "Математическое обоснование формул дифракционного излучения" *Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук* **18** (2) 133 (1965)
38. Hazeltine R D, Rosenbluth M N, Sessler A M, Preprint UCRL-19793 LRL (Berkeley, 1970)
39. Воскресенский Г В, Курдюмов В Н "Излучение электронного кольца при пролете возле стыка двух круглых волноводов" *Труды РТИ АН СССР* **2** 60 (1970)
40. Кузнецов А Б, Рубин С Б "К вопросу о торможении релятивистского заряда при пролете мимо идеально проводящего препятствия" Препринт ОИЯИ P9-5247 (Дубна: ОИЯИ, 1970)
41. Рубин С Б, Кузнецов А Б "К вопросу о торможении релятивистского заряда при пролете мимо идеально проводящего препятствия" *ЖТФ* **41** 1851 (1971)
42. Воскресенский Г В, Курдюмов В Н "Радиационное торможение заряда в цилиндрическом резонаторе с подводящими волноводами" *Труды РТИ АН СССР* **7** 3 (1971)
43. Воскресенский Г В, Курдюмов В Н "Зависимость интенсивности радиационных потерь в резонаторе от формы электронного сгустка" *Труды РТИ АН СССР* **7** 27 (1971)
44. Бережной В А, Плис А И "Об электромагнитном возбуждении периодической структуры с каналом" *Труды РТИ АН СССР* **7** 41 (1971)
45. Шегурова Г И "Излучение звуковых волн протяженными, хорошо обтекаемыми телами, движущимися мимо полуплоскости" *Акуст. журн.* **17** 284 (1971)
46. Шегурова Г И "Дифракционное акустическое излучение точечных и протяженных источников", Дис. канд. ф.-м. н. (Москва: МГПИ, 1971)
47. Королев А А, Фролов-Багреев А А "Приближенное определение дифракционных потерь при пролете заряженной частицы мимо малого отверстия" *Труды РТИ АН СССР* **7** 55 (1971)
48. Бережной В А, Плис А И "Об электромагнитном возбуждении одной периодической структуры" *Краткие сообщения по физике* (5) 81 (1970)
49. Бережной В А, Воскресенский Г В, Плис А И "Об электромагнитном возбуждении периодической структуры с каналом" *Изв. вузов. Радиофизика.* **16** 449 (1973)
50. Ломидзе Л Г, Рубцов Б А, Шмидт А В "Расчет датчиков гармоника тока пучка" *Труды РТИ АН СССР* **10** 260 (1973)

<sup>10</sup> Библиография дифракционного излучения.

51. Плис А И "Возбуждение открытых и замкнутых структур движущимися зарядами и токами", Дис. канд. ф.-м. н. (Москва: ФИАН, 1972)
52. Бережной В А "Точный расчет излучения движущихся источников в замкнутых периодических структурах", Дис. канд. ф.-м. н. (Москва: МФТИ, 1973)
53. Воскресенский Г В, Курдюмов В Н "О характеристиках взаимодействия движущегося кольцевого тока с неоднородной волноводной структурой" *Изв. вузов. Радиофизика* **19** (1) 141 (1976)
54. Шестопалов В П *Дифракционная электроника* (Киев: Наукова думка, 1976)
55. Воскресенский Г В, Галстьян Е А "Излучение точечного заряда при пролете возле разветвления круглого волновода" *Труды РТИ АН СССР* **30** 70 (1977)
56. Воскресенский Г В, Галстьян Е А "Излучение заряженной нити при пролете мимо плоского волновода с фланцами" *ЖТФ* **48** (2) 210 (1978)
57. Галстьян Е А "Характеристики излучения заряженного сгустка, пролетающего вблизи разветвления круглого волновода" *Труды РТИ АН СССР* **31** 56 (1978)
58. Галстьян Е А, Воскресенский Г В, Курдюмов В Н "Взаимодействие заряженного источника с диафрагмой в волноводе", Препринт РТИ АН СССР 784 (Москва: РТИ АН СССР, 1978)
59. Галстьян Е А "Взаимодействие движущихся источников электромагнитного поля с нерегулярностями волноводов", Дис. канд. ф.-м. н. (Москва: МФТИ, 1978)
60. Воскресенский Г В, Галстьян Е А "Взаимодействие равномерно движущейся заряженной нити с диафрагмой в плоском волноводе" *ЖТФ* **49** 696 (1979)
61. Бегжанов Р Б, Болотовский Б М, Исаев Р С "Об излучении равномерно и прямолинейно движущегося источника при пересечении плоского непрозрачного экрана, имеющего отверстия произвольной формы", Препринт ИЯФ АН УзССР Р-1-386 (Ташкент: ИЯФ АН УзССР, 1988)
62. Shibata Y, Hasebe S, Ishi K et al. "Observation of coherent diffraction radiation from bunched electrons passing through a circular aperture in the millimeter- and submillimeter-wavelength regions" *Phys. Rev. E* **52** 6787 (1995)
63. Rule D W, Fiorito R B, Kimura W D "Noninterceptive beam diagnostics based on diffraction radiation" *AIP Conf. Proc.* **390** 510 (1997)
64. Castellano M *Nucl. Instrum. Methods A* **394** 275 (1997)
65. Fiorito R B, Rule D W, Kimura W D "Noninvasive beam position, size, divergence and energy diagnostics using diffraction radiation", in *Proc. of the Advanced Accelerator Concept Workshop* (Baltimore, Maryland: July 5–11, 1998) (AIP Conf. Proc., Vol. 472, Ed. W Lawson) (Woodbury, N.Y.: AIP, 1999)
66. Shestopalov V P *Smith–Purcell Effect* (Commack, N.Y.: Nova Science Publishers, Inc., 1998)
67. Potylitsyn A P "Smith–Purcell effect as resonant diffraction radiation" *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B* **145** (1, 2) 60 (1998)
68. Mkrtchyan A R et al. "Coherent diffraction radiation from an electron bunch" *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B* **145** (1, 2) 67 (1998)
69. Potylitsyn A P "Transition radiation and diffraction radiation. Similarities and differences" *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B* **145** (1, 2) 169 (1998)
70. Fiorito R B, Rule D W "Diffraction radiation diagnostics for moderate to high energy beams", in *Proc. of the IV Int. Symp. on Radiation from Relativistic Electrons in Periodical Structures*, September 13–16, 1999, Lake Baikal, Russian Federation
71. Potylitsyn A P "Polarization characteristics of diffraction radiation", in *Proc. of the IV Int. Symp. on Radiation from Relativistic Electrons in Periodical Structures*, September 13–16, 1999, Lake Baikal, Russian Federation
72. Shibata Y et al. "Measurement of the Longitudinal Distribution of Electrons in Bunches by Observation of Coherent Radiation in the Far-Infrared Region", in *Proc. of the IV Int. Symp. on Radiation from Relativistic Electrons in Periodical Structures*, September 13–16, 1999, Lake Baikal, Russian Federation
73. Галстьян Е А "Излучение заряженной нити при косом пролете мимо проводящей полуплоскости" *Доклады РАН* **366** 616 (1999)
74. Болотовский Б М "Дифракция и дифракционное излучение", в сб. лекций Учебно-научного центра *Фундаментальная оптика и спектроскопия* Вып. 2 (Москва: ФИАН, 1999) с. 39

### Diffraction and diffraction radiation

#### **В.М. Bolotovskii**

*P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences  
Leninskii prosp. 53, 117924 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 132-62 35  
E-mail: bolot@td.lpi.ac.ru*

#### **Е.А. Galst'yan**

*Moscow Radio Engineering Institute, Russian Academy of Sciences,  
Varshavskoe shosse 132, 113519 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-095) 118-03 35  
E-mail: galstjan@aha.ru*

Similarities and differences between two closely related phenomena, diffraction and diffraction radiation, are discussed in the context of a scalar theory.

PACS numbers: **41.60.–m**, **41.90. + e**, 42.25.Fx, **61.14.–x**

Bibliography — 74 references

*Received 10 November 1999, revised 21 June 2000*