

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Простейший пример возникновения кластерной структуры поля пассивной примеси в случайных потоках

В.И. Кляцкин, К.В. Кошель

В дополнение к работе [1] на примере простейшей задачи, допускающей решение в аналитическом виде, анализируется образование кластеров частиц (лагранжево описание) и поля пассивной примеси (эйлерово описание) в случайном поле скоростей.

PACS numbers: 02.50.-r, 05.40.-j, 05.45.+b

## Содержание

1. Введение (771).
  2. Модель поля скорости (774).
  3. Простейший случай (775).
    - 3.1. Лагранжево описание модели. 3.2. Эйлерово описание модели.
  4. Численное моделирование (776).
  5. Заключение (777).
- Список литературы (778).

## 1. Введение

На начальных этапах развития диффузия плотности пассивной консервативной примеси —  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , движущейся в случайном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , описывается уравнением непрерывности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1)$$

**В.И. Кляцкин.** Институт физики атмосферы РАН им. А.М. Обухова, 109017 Москва, Пыжевский пер. 3, Российская Федерация  
Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В.И. Ильичева, 690041 г. Владивосток, Балтийская ул. 43, Российская Федерация  
Тел. (095) 269-12-83  
E-mail: klyatskin@hotmail.com

**К.В. Кошель.** Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В.И. Ильичева, 690041 г. Владивосток, Балтийская ул. 43, Российская Федерация  
Тел. (4232) 31-64-19  
E-mail: wave@online.vladivostok.ru

Статья поступила 14 марта 2000 г.

В общем случае случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  может иметь как соленоидальную (бездивергентную) составляющую, для которой  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ , так и дивергентную составляющую, для которой  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ . При этом общая масса примеси сохраняется в процессе эволюции, т.е.

$$M = \int \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \text{const}.$$

Это — эйлерово описание эволюции поля плотности. Уравнение (1) является уравнением в частных производных 1-го порядка и может быть решено методом характеристик. Вводя характеристические кривые  $\mathbf{r}(t)$  — траекторию частицы, описываемые уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (2)$$

перейдем от (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = - \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (3)$$

Решения уравнений (2), (3) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они описывают эволюцию плотности в окрестности фиксированной частицы примеси, траектория которой задается равенством  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Причем, как видно из (3), плотность в дивергентных потоках меняется, увеличиваясь в областях сжатия и уменьшаясь в областях разрежения среды. При этом расходимость (элементарный объем частицы)  $j(t) = \text{Det} \|\partial r_i(t) / \partial r_{0j}\|$  связана с плотностью частицы с помощью равенства

$$j(t) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{\rho(t)}.$$

Решения системы (2), (3) зависят от характеристического параметра — начальной координаты частицы  $\mathbf{r}_0$ :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t|\mathbf{r}_0), \quad (4)$$

что будем отмечать вертикальной чертой. Компоненты вектора  $\mathbf{r}_0$ , однозначно определяющего положение произвольной частицы, называют ее лагранжевыми координатами. При этом уравнения (2), (3) соответствуют лагранжеву описанию эволюции поля плотности. Связь между эйлеровым и лагранжевым описаниями задается первым из равенств (4). Разрешив его относительно  $\mathbf{r}_0$ , получим соотношение, выражающее лагранжевы координаты через эйлеровы:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r}). \quad (5)$$

Исключая затем с помощью (5) зависимость от  $\mathbf{r}_0$  в последнем равенстве (4), вернемся к эйлерову описанию плотности:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t|\mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})). \quad (6)$$

Для стационарного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$  уравнение (2) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (7)$$

Отсюда ясно, что стационарные точки  $\tilde{\mathbf{r}}$ , в которых  $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$ , остаются неподвижными точками. При этом в зависимости от того, являются они устойчивыми или неустойчивыми, они будут притягивать или отталкивать частицы, находящиеся в их окрестности. В силу случайности функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  положение точек  $\tilde{\mathbf{r}}$  также случайно.

Аналогичная ситуация должна осуществляться и в общем случае пространственно-временного случайного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Если какие-то точки  $\tilde{\mathbf{r}}$  в течение достаточно большого времени остаются устойчивыми, то в отдельных реализациях случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в их окрестностях должны образовываться кластерные области частиц (т.е. компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах). Если же смена устойчивости этих точек на неустойчивость происходит достаточно быстро и частицы не успевают значительно перестроиться, то кластерные области образовываться не будут.

Численное моделирование [2–4] показывает, что динамика системы частиц существенно различна в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1а, заимствованным из [1], для конкретной реализации бездивергентного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  схематически изображена эволюция системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге, в безразмерном времени, связанным со статистическими параметрами поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется, и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. Для случая же дивергентного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1б. Подчеркнем, что это — чисто кинематический эффект. При усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, очевидно, такая особенность динамики частиц исчезает.

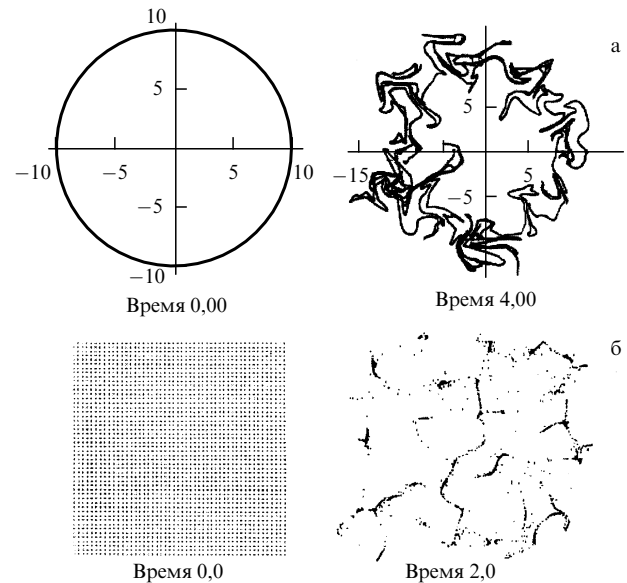


Рис. 1. Результаты численного моделирования диффузии системы частиц в соленоидальном (а) и дивергентном (б) случайных полях скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Цель настоящей работы заключается в демонстрации эффекта кластеризации частиц и поля пассивной примеси в случайном поле скоростей на простейшем примере поля скоростей, для которого можно выписать решение задачи в аналитическом виде.

Прежде всего мы напомним основные идеи статистической топографии, позволяющие установить и описывать процесс кластеризации эйлерова поля плотности в гауссовом дельта-коррелированном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Далее будет показано, что этому общему случаю статистически эквивалентна задача о диффузии примеси в случайном поле скоростей вида  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r})$ , где  $f(\mathbf{r})$  — детерминированная "как бы периодическая" функция, а  $\mathbf{v}(t)$  — векторный гауссов процесс, дельта-коррелированный во времени. Отметим, что для одномерного поля скоростей можно вообще отказаться от условия дельта-коррелированности. И, наконец, будет приведен пример, допускающий аналитическое решение для каждой реализации случайного поля скорости. На этом примере можно проследить предсказания общей теории.

Итак, для описания поля плотности в эйлеровом представлении, введем индикаторную функцию

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (8)$$

сосредоточенную на поверхности  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$  в трехмерном случае или контуре в двумерном случае. Эволюция этой функции описывается уравнением Лиувилля [1, 5]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho),$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho). \quad (9)$$

Одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (1) в этом случае совпадает с усредненной по ансамблю реализаций индикаторной

функцией:

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}; \rho) \rangle.$$

Индикаторная функция характеризует и геометрическую структуру поля плотности [1, 5]. Через функцию (8) в двумерном случае, например, выражаются такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ :

$$S(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \quad (10)$$

и общая "масса" поля, заключенная в этих областях:

$$M(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}). \quad (11)$$

Случайная составляющая поля скоростей предполагается в общем случае дивергентной ( $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ), статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ( $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle &= B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \\ E_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $N$  — размерность пространства, а спектральный тензор поля скоростей имеет структуру

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (13)$$

Здесь через  $E^s(k, t)$  и  $E^p(k, t)$  обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Обычно при расчете статистических свойств поля плотности используется приближение дельта-коррелированности во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (см., например, [6]), в рамках которого корреляционный тензор (12) аппроксимируется выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = 2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r})\delta(t),$$

где

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t).$$

При усреднении уравнения (9) по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  возникает корреляция поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с функцией  $\Phi(t, \mathbf{r}; \rho)$ , которая является функционалом поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Для гауссова поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  расщепление корреляций производится с помощью формулы Фурутцу – Новикова (см., например, [6])

$$\begin{aligned} \langle u_\alpha(\mathbf{r}, t) \Phi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})] \rangle &= \int d\mathbf{r}' \int dt' B_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta}{\delta u_\beta(\mathbf{r}', t')} [\Phi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})]] \right\rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

справедливой для произвольного функционала  $\Phi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})]$  гауссова поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и являющейся, по сути, формулой интегрирования по частям в функциональном пространстве.

Усредняя уравнение (9) по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в приближении дельта-коррелированности во времени поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , получаем уравнение для плотности вероятностей поля плотности в виде [1]

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(t, \mathbf{r}; \rho) &= D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t, \mathbf{r}; \rho), \\ P(0, \mathbf{r}; \rho) &= \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$D_0 = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} [(N-1)E^s(k, t) + E^p(k, t)],$$

$$D^p = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k, t).$$

Зная решение уравнения (15), можно вычислить эволюцию во времени таких функционалов поля плотности, как, например, в двумерном случае среднюю общую величину площади, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ , —  $\langle S(t, \rho) \rangle$ , и среднюю общую массу примеси, заключенную в этих областях, —  $\langle M(t, \rho) \rangle$ :

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}),$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}),$$

а именно ( $\tau = D^p t$ ):

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int d\mathbf{r} \Phi \left( \frac{\ln(\rho_0(\mathbf{r}) \exp(-\tau)/\rho)}{2\sqrt{\tau}} \right),$$

$$\langle M(t, \rho) \rangle = \int \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \Phi \left( \frac{\ln(\rho_0(\mathbf{r}) \exp(\tau)/\rho)}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (16)$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл ошибок:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Отсюда видно, что при  $\tau \gg 1$  средняя площадь областей, где плотность выше уровня  $\rho$ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} d\mathbf{r},$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle = M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} d\mathbf{r}$$

монотонно стремится к полной ее массе  $M = \int \rho_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ . Это свидетельствует об образовании кластеров поля примеси в случайном поле скоростей — компактных областей повышенной плотности, окруженных разреженными областями.

Если начальная плотность примеси всюду одинакова:  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ , то вероятностное распределение плотности не зависит от пространственной точки  $\mathbf{r}$  и логнормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$P(t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(\rho \exp \tau/\rho_0)}{4\tau}\right\},$$

$$F(t; \rho) = \Phi\left(\frac{\ln(\rho \exp \tau/\rho_0)}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (17)$$

## 2. Модель поля скорости

Рассмотрим теперь модель случайного поля скоростей вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r}), \quad (18)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  будем считать гауссовым случайным стационарным векторным процессом с параметрами

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(t-t') = \langle v_i(t)v_j(t') \rangle \quad (B_v(0) = \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle),$$

а  $f(\mathbf{r})$  — детерминированной функцией.

В приближении дельта-коррелированности процесса  $\mathbf{v}(t)$  считаем, что

$$B_{ij}(t-t') = 2\sigma^2 \delta_{ij} \tau_0 \delta(t-t') \quad \left(\sigma^2 \delta_{ij} \tau_0 = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau)\right), \quad (19)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия флуктуаций поля скоростей, а  $\tau_0$  — их временной радиус корреляции. В этом случае формула Фурутцу – Новикова упрощается:

$$\langle v_x(t) \Phi[\mathbf{v}(\tilde{t})] \rangle = \sigma^2 \tau_0 \left\langle \frac{\delta}{\delta v_x(t)} [\Phi[\mathbf{v}(\tilde{t})]] \right\rangle,$$

и уравнение Лиувилля (9) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \mathbf{v}(t) \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho),$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = -\mathbf{v}(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}) - \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \right\} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho),$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho). \quad (20)$$

Усредняя уравнение (20) по ансамблю случайного процесса  $\mathbf{v}(t)$ , получаем выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho) = - \int_0^t dt' B_{ij}(t-t') \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial r_i} f(\mathbf{r}) - \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_i} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \right\} \left\langle \frac{\delta}{\delta v_j(t')} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) \right\rangle,$$

$$P(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho). \quad (21)$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta v_j(t)} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = - \left( f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_j} - \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_j} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho),$$

вытекающее из уравнения (20), для приближения дельта-коррелированного процесса  $\mathbf{v}(t)$  получаем уравнение для плотности вероятностей вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho) = \sigma^2 \tau_0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} f^2(\mathbf{r}) - \left(3 + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \right.$$

$$+ f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right)^2 \right\} P(t, \mathbf{r}, \rho). \quad (22)$$

Если теперь функция  $f(\mathbf{r})$  имеет характерный масштаб изменения по  $\mathbf{r}$  —  $\tilde{k}^{-1}$  и является как бы периодической функцией ("быстрое изменение"), то, дополнительно усредняя уравнение (22) по этим масштабам, получаем уравнение для "медленных" пространственных изменений

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho) = \sigma^2 \tau_0 \left\{ \overline{f^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{\partial \overline{f(\mathbf{r})}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \overline{f(\mathbf{r})}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \right\} P(t, \mathbf{r}, \rho). \quad (23)$$

Уравнение (23) совпадает с уравнением (15), и, следовательно, модель поля скоростей (18) для одноточечных статистических характеристик поля плотности статистически эквивалентна модели гауссова дельта-коррелированного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Следовательно, для модели флуктуаций поля скорости (18) также должна осуществляться кластеризация примеси, если

$$\mathbf{v}(t) \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \neq 0.$$

Для двухточечных статистических характеристик эти модели, очевидно, также будут статистически эквивалентными.

Отметим, что для одномерной задачи случайное поле скоростей  $u(x, t) = v(t)f(x)$  всегда потенциально, и предположение дельта-коррелированности процесса  $v(t)$  не обязательно. В самом деле, решение уравнения (20) в этом случае имеет структуру

$$\Phi(t, x, \rho) = \Phi(T(t), x, \rho),$$

где новое "случайное" время  $T(t) = \int_0^t d\tau v(\tau)$ , а функция  $\Phi(T, x, \rho)$  как функция своих переменных описывается детерминированным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial T} \Phi(T, x; \rho) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{df(x)}{dx} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \right\} \Phi(T, x; \rho),$$

$$\Phi(0, x; \rho) = \delta(\rho_0(x) - \rho). \quad (24)$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta v(t')} \Phi(t, x; \rho) = \frac{\partial \Phi(T, x; \rho)}{\partial T} \frac{\delta}{\delta v(t')} T(t) =$$

$$= \frac{\partial \Phi(T, x; \rho)}{\partial T} \theta(t-t') =$$

$$= -\theta(t-t') \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{df(x)}{dx} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \right\} \Phi(t, x; \rho),$$

где функция Хевисайда  $\theta(t)$  равна 1 при  $t > 0$  и 0 при  $t < 0$ , и уравнение (21) принимает вид замкнутого уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, x; \rho) = \int_0^t dt' B(t-t') \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{df(x)}{dx} \left( 1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{df(x)}{dx} \left( 1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} P(t, x; \rho),$$

$$P(0, x; \rho) = \delta(\rho_0(x) - \rho),$$

которое после дополнительного усреднения по быстрой пространственной переменной принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, x; \rho) = \\ = \int_0^t dt' B(t-t') \left\{ \overline{f^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \overline{\left( \frac{df(x)}{dx} \right)^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \right\} P(t, x; \rho).$$

Если начальное распределение плотности не зависит от  $x$ , т.е.  $\rho_0(x) = \rho_0$ , то и функция  $P(t, x; \rho) = P(t; \rho)$  и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D(t) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho),$$

$$D(t) = \overline{\left( \frac{df(x)}{dx} \right)^2} \int_0^t dt' B(t-t').$$

### 3. Простейший случай

В простейшем случае функция  $f(\mathbf{r})$  является функцией одной переменной, которую выберем в виде

$$f(\mathbf{r}) = \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (25)$$

Отметим, что такой вид функции  $f(\mathbf{r})$  соответствует первому члену ряда разложения функции  $f(\mathbf{r})$  по гармоническим составляющим, обычно используемый при численном моделировании задачи [3, 4].

#### 3.1. Лагранжево описание модели

В этом случае лагранжевы уравнения (2) и (3) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t) \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0,$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -2(\mathbf{k}\mathbf{v}(t)) \cos 2(\mathbf{k}\mathbf{r}) \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0).$$

Для такой модели движение частицы по направлениям вектора  $\mathbf{k}$  и перпендикулярно вектору  $\mathbf{k}$  расщепляется, и, если выбрать ось  $x$  в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , то уравнения запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} x(t) = v_x(t) \sin(2kx), \quad x(0) = x_0,$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_R(t) \sin(2kx), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0,$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -2kv_x(t) \cos(2kx) \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (26)$$

Решение первого уравнения в (26) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{k} \arctan[\exp(T(t)) \tan(kx_0)], \quad (27)$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t dt' v_x(t').$$

Учитывая равенства, вытекающие из (27),

$$\sin(2kx) =$$

$$= \sin(2kx_0) \frac{1}{\exp(-T(t)) \cos^2(kx_0) + \exp(T(t)) \sin^2(kx_0)},$$

$$\cos(2kx) = \frac{1 - \exp(2T(t)) \tan^2(kx_0)}{1 + \exp(2T(t)) \tan^2(kx_0)},$$

последние два уравнения в (26) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) =$$

$$= \sin(2kx_0) \frac{\mathbf{v}_R(t)}{\exp(-T(t)) \cos^2(kx_0) + \exp(T(t)) \sin^2(kx_0)},$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t|\mathbf{r}_0) = -2kv_x(t) \frac{1 - \exp(2T(t)) \tan^2(kx_0)}{1 + \exp(2T(t)) \tan^2(kx_0)} \rho(t|\mathbf{r}_0).$$

И, следовательно,

$$\mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin(2kx_0) \times$$

$$\times \int_0^t dt' \frac{\mathbf{v}_R(t')}{\exp(-T(t')) \cos^2(kx_0) + \exp(T(t')) \sin^2(kx_0)},$$

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0) [\exp(-T(t)) \cos^2(kx_0) + \exp(T(t)) \sin^2(kx_0)]. \quad (28)$$

При этом расходимость (элементарный объем частицы) равна

$$j(t|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{\exp(-T(t)) \cos^2(kx_0) + \exp(T(t)) \sin^2(kx_0)}.$$

Таким образом, если начальный параметр  $x_0$  такой, что

$$kx_0 = n \frac{\pi}{2}, \quad (29)$$

где  $n = 0, \pm 1, \dots$ , то частицы неподвижны и  $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$ .

Равенства (29) определяют в общем случае плоскости или в одномерном случае — точки. Они соответствуют нулям поля скоростей. Устойчивость этих точек, однако, зависит от знака функции  $\mathbf{v}(t)$ , который изменяется в процессе эволюции. В результате эволюции можно ожидать, что "частицы" — лагранжевы траектории будут сгущаться в окрестностях этих точек, если  $v_x(t) \neq 0$ , что и должно соответствовать кластеризации частиц. При этом в окрестности этих точек

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) \sim \rho_0(\mathbf{r}_0) \exp(\pm T(t)), \quad j(t|\mathbf{r}_0) \sim \exp(\mp T(t)),$$

и все статистические моментные функции этих величин растут со временем.

Для бездивергентного поля скорости, когда  $v_x(t) = 0$ , и, следовательно,  $T(t) \equiv 0$ ,

$$x(t|x_0) \equiv x_0, \quad \mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin 2(kx_0) \int_0^t dt' \mathbf{v}_R(t'),$$

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \quad j(t|\mathbf{r}_0) = 1.$$

### 3.2. Эйлера описание модели

Для перехода к эйлеровому описанию с помощью равенства (27) решим уравнение (28) относительно характеристического параметра  $\mathbf{r}_0$ :

$$x_0 = \frac{1}{k} \arctan[\exp(-T(t)) \tan(kx)],$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} - \sin(2kx) \int_0^t d\tau \times \\ \times \frac{\mathbf{v}_R(\tau)}{\exp[T(t) - T(\tau)] \cos^2(kx) + \exp[-T(t) + T(\tau)] \sin^2(kx)}.$$

И, следовательно, поле плотности можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0) \frac{1}{\exp(T(t)) \cos^2(kx) + \exp(-T(t)) \sin^2(kx)}. \quad (30)$$

Для бездивергентного поля скорости, когда  $v_x(t) = 0$ ,  $T(t) \equiv 0$ ,

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \sin(2kx) \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\tau), \\ \rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left( \mathbf{r} - \sin(2kx) \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\tau) \right).$$

В частном случае, когда начальное распределение плотности не зависит от  $x$ , т.е.  $\rho_0(\mathbf{r}_0) = \rho_0$ , равенство (30) упрощается и принимает вид

$$\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} = \frac{1}{\exp(T(t)) \cos^2(kx) + \exp(-T(t)) \sin^2(kx)}. \quad (31)$$

Из выражения (31) следует, что усредненная по быстрым пространственным переменным величина

$$\frac{\overline{\rho(\mathbf{r}, t)}}{\rho_0} = 1$$

и не зависит от случайного фактора  $T(t)$ .

Аналогичным образом получаем, например, что

$$\overline{\left( \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} \right)^2} = \frac{1}{2} (\exp(T(t)) + \exp(-T(t))),$$

и, следовательно, для гауссова случайного процесса  $v_x(t)$

$$\left\langle \overline{\left( \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} \right)^2} \right\rangle = \langle \exp(T(t)) \rangle = \exp\left\{ \frac{1}{2} \langle T^2(t) \rangle \right\},$$

в соответствии с логнормальным распределением вероятностей (17).

Что же касается самой структуры поля плотности (31), то очевидно, что поле плотности везде незначительно, кроме окрестностей точек  $kx = n\pi/2$ , где  $\rho(\mathbf{r}, t)/\rho_0 = \exp(\pm T(t))$ , и, следовательно, достаточно велико при соответствующем знаке случайного фактора  $T(t)$ .

Таким образом, для рассматриваемой задачи кластерная структура поля плотности в эйлеровом описании формируется в окрестностях точек

$$kx = n \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

### 4. Численное моделирование

При численном моделировании в двумерном случае будем считать векторный процесс  $\mathbf{v}(t)$  гауссовым дельта-коррелированным процессом с параметрами (19). Вводя безразмерные пространственные координаты и время

$$\mathbf{r} \rightarrow k\mathbf{r}, \quad t \rightarrow k^2 \sigma^2 \tau_0 t, \quad (32)$$

лагранжевы уравнения для положения частицы (26) примут вид

$$\frac{d}{dt} x(t) = v_x(t) \sin(2x), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d}{dt} y(t) = v_y(t) \sin(2x), \quad y(0) = y_0, \quad (33)$$

где корреляционные функции поля скоростей описываются формулами

$$\langle v_x(t) v_x(t') \rangle = \langle v_y(t) v_y(t') \rangle = 2\delta(t - t').$$

При этом  $x$ -координата лагранжевой частицы (27) и эйлерово поле плотности (31) запишутся в виде

$$x(t) = \arctan[\exp(T(t)) \tan x_0], \\ \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} = \frac{1}{\exp(T(t)) \cos^2 x + \exp(-T(t)) \sin^2 x}, \quad (34)$$

где

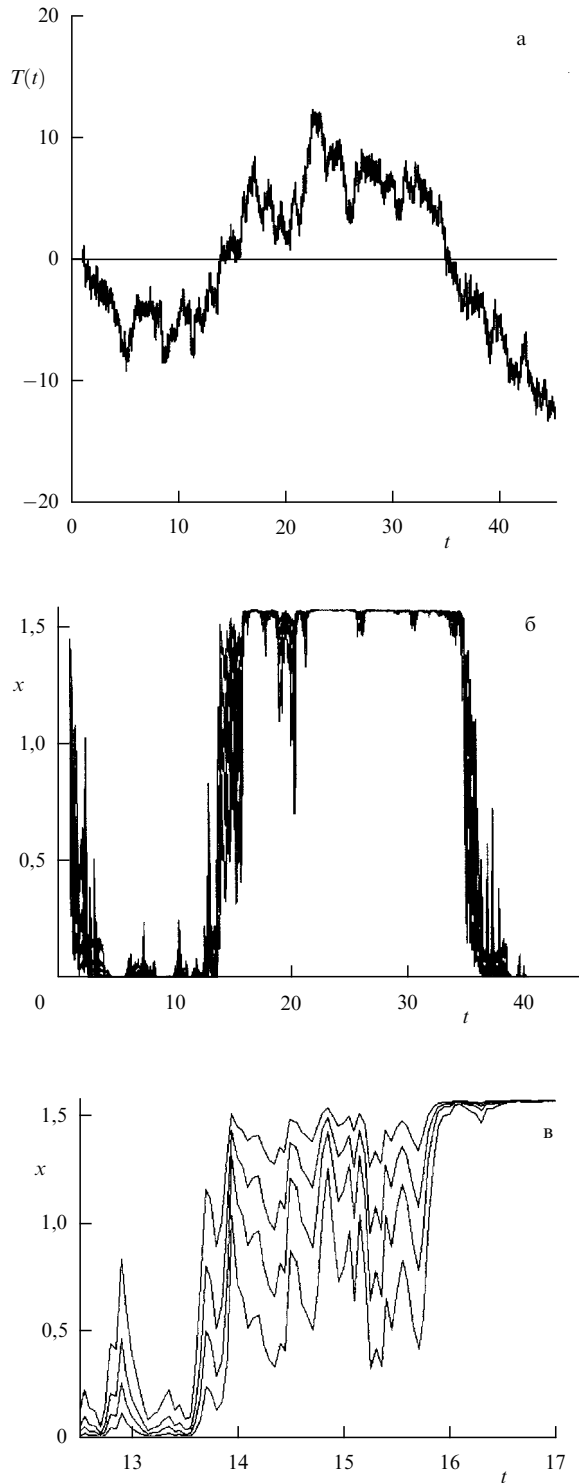
$$T(t) = 2 \int_0^t d\tau v_x(\tau). \quad (35)$$

Отметим, что в исходные стохастические уравнения (33) и выражения (34) и (35) формально не входят параметры  $\sigma^2$  и  $\tau_0$ . Через них определяется только безразмерное время (32). Это связано с упомянутым ранее свойством независимости диффузии частиц от модели случайного поля скоростей в одномерной задаче.

На рисунке 2а представлен кусок реализации случайного процесса  $T(t)$ , полученный путем численного интегрирования равенства (35) для одной реализации случайного процесса  $v_x(t)$ , используемый для численного моделирования временной эволюции координат четырех частиц  $x(t)$  ( $x \in (0, \pi/2)$ ) с начальными координатами  $x_0(i) = (\pi/2)(i/5)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (рис. 2б) и эйлерова поля плотности (рис. 3).

Из рисунка 2б видно, что частицы в момент времени  $t \approx 4$  образуют кластер в окрестности точки  $x = 0$ . Далее, в момент времени  $t \approx 16$  первоначальный кластер исчезает и образуется новый кластер в окрестности точки  $x = \pi/2$ . В момент времени  $t \approx 40$  снова образуется кластер в окрестности точки  $x = 0$  и т.д. При этом частицы в кластерах помнят свою предысторию и расходятся на значительные расстояния в переходных временных областях (рис. 2в).

Таким образом, видим, что в рассматриваемом примере кластер как цельное образование не переходит из одной области пространства в другое, а разрушается с последующим образованием нового. При этом время существования кластеров значительно больше, чем пере-

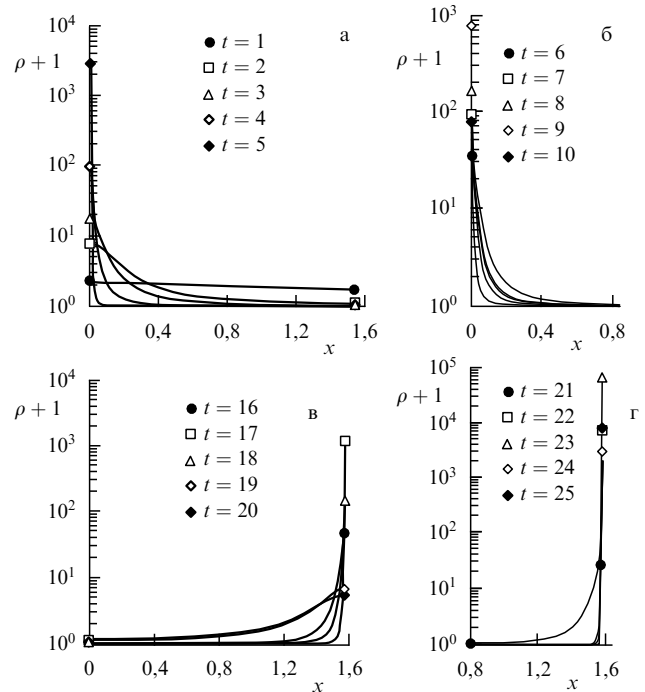


**Рис. 2.** Кусок реализации случайного процесса  $T(t)$  (а), полученный путем численного интегрирования равенства (35) для одной реализации случайного процесса  $v_x(t)$  и используемый для расчета временной эволюции  $x$  координат четырех частиц (б, в).

ходное время. По-видимому, это свойство конкретной рассматриваемой модели поля скоростей и возникает из-за стационарности точек (29).

Что касается диффузии частиц по оси  $y$ , то в этом направлении образование кластеров не наблюдается.

На рисунке 3а–г представлена пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности



**Рис. 3.** Пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности.

$1 + \rho(\mathbf{r}, t)/\rho_0$ , рассчитанная по формуле (34) (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе). Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек  $x \approx 0$  и  $x \approx \pi/2$ , т.е. образование кластеров. Так, на рис. 3а, б изображена временная последовательность ( $t = 1 \div 10$ ) образования кластера в окрестности точки  $x \approx 0$ . На рисунке 3в, г изображена временная последовательность ( $t = 16 \div 25$ ) перетекания поля плотности из окрестности точки  $x \approx 0$  в окрестность точки  $x \approx \pi/2$ , т.е. ликвидация кластера в окрестности  $x \approx 0$  и рождение нового кластера в окрестности  $x \approx \pi/2$ . Далее этот процесс повторяется во времени. "Время жизни" таких кластеров, как видно из рисунков, для рассматриваемой модели порядка "времени их формирования".

## 5. Заключение

Мы рассмотрели простейшую модель диффузии примеси (частиц и эйлерова поля плотности) в случайном поле скоростей, в которой наглядно виден процесс образования кластерной структуры. Особенностью рассмотренной модели является фиксированный характер точек, где образуются кластеры. Это, конечно, уменьшает ценность рассмотренной модели.

Однако эта модель позволяет понять основное отличие диффузии в дивергентных и бездивергентных полях скоростей. В бездивергентных (несжимаемых) полях скоростей частицы (и, следовательно, поле плотности) не успевают притягиваться к устойчивым центрам притяжения за время их существования и частицы слегка флуктуируют относительно их первоначального местонахождения. В дивергентном (сжимаемом) же поле скоростей за то же время существования устойчивых центров притяжения частицы успевают притянуться к

ним, так как этот процесс притяжения убыстряется экспоненциальным образом, что наглядно проявляется в формулах (34).

Данная работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98-05-64479, 99-05-64350 и 00-15-98608).

### Список литературы

1. Кляцкин В И, Гурарий Д *УФН* **169** 171 (1999)
2. Saichev A I, Woyczynski W A, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 85, Eds S A Molchanov, W A Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 359
3. Zirbel C L, Cinlar E, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 85, Eds S A Molchanov, W A Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 459
4. Кошель К В, Александрова О В *Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана* **35** 638 (1999)
5. Кляцкин В И, Саичев А И *ЖЭТФ* **111** 1297 (1997)
6. Кляцкин В И *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1980) [*Ondes et équations stochastiques dans les milieux aléatoirement non homogènes* (Besancon Cedex, France: Les éditions de physique, 1985)]

### The simplest example of the development of a cluster-structured passive tracer field in random flows

**V.I. Klyatskin**

*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,  
Pyzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation,  
Pacific Oceanological Institute,  
Russian Academy of Sciences (Far East Division),  
Baltiiskaya ul. 43, 690041 Vladivostok, Russian Federation  
Tel. (7-095) 269-1283  
E-mail: klyatskin@hotmail.com*

**K.V. Koshel'**

*Pacific Oceanological Institute,  
Russian Academy of Sciences (Far East Division),  
Baltiiskaya ul. 43, 690041 Vladivostok, Russian Federation  
Tel. (7-4232) 31-6419  
E-mail: wave@online.vladivostok.ru*

As a follow-up to Ref. [1], the formation of particle clusters (Lagrangian description) and of the field of a passive tracer (Eulerian description) in a random velocity field is analyzed for the simplest problem amenable to an analytical solution.

PACS numbers: **02.50.-r, 05.40.-j, 05.45.+b**

Bibliography — 6 references

*Received 14 March 2000*