

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука

В.Ф. Копьев, С.А. Чернышев

В работе рассмотрены последние результаты, относящиеся к описанию собственных колебаний вихревого кольца в идеальной несжимаемой жидкости. Для описания колебаний используется поле смещений как основная динамическая переменная. Вихревое кольцо с простейшим распределением завихренности в ядре и потенциальным течением в атмосфере является главным приближением в задаче о колебаниях вихревых колец более общего вида. Оказалось, что при учете размазывания ядра (даже очень слабого) большая часть колебаний теряет устойчивость. Показано, что эффект потери устойчивости определяется знаком энергии колебаний. Вычислены энергии собственных колебаний вихревого кольца и выделены два класса колебаний — моды с положительной энергией и моды с отрицательной энергией. Именно моды с положительной энергией теряют устойчивость при размазывании завихренности ядра. Множественная неустойчивость колебаний вихревого кольца и особенности пространственной структуры собственных колебаний показывают, что турбулентность вихревого кольца могла бы явиться следствием нелинейного развития именно этих процессов. Рассмотрен новый метод исследования нестационарных процессов в турбулентном вихревом кольце, основанный на экспериментальной диагностике его звукового поля. Особенности звукового поля дают веское подтверждение модели турбулентного вихревого кольца, развитой в настоящей работе.

PACS numbers: 43.30 – k, 47.27. – i, 47.27.Sd, 47.32. – y

Содержание

1. Введение (713).
2. Поле смещений в проблеме описания динамики несжимаемых вихревых течений (715).
 - 2.1. Эволюция поля смещения в произвольных вихревых течениях. Поле смещения как новая динамическая переменная.
 - 2.2. Эволюция поля смещений в локализованных вихрях.
 - 2.3. Энергия возмущений в вихревых течениях.
3. Собственные колебания вихревого кольца (720).
 - 3.1. Обзор различных подходов к проблеме описания колебаний вихревого кольца.
 - 3.2. Колебания цилиндрического вихря.
 - 3.3. Задача о трехмерных колебаниях вихревого кольца.
 - 3.4. Энергия возмущений.
4. Неустойчивость вихревого кольца со сглаженным профилем завихренности и возникновение турбулентности (729).
 - 4.1. Влияние монотонно убывающей завихренности на свойства колебаний осциллятора. Неустойчивость колеблющегося цилиндра в циркуляционном потоке идеальной жидкости.
 - 4.2. Неустойчивость бесселевских и бочкообразных колебаний

вихревого кольца. 4.3. Нелинейная стадия развития неустойчивости вихревого кольца и переход к турбулентности.

5. Турбулентное вихревое кольцо как источник звука. Возможность бесконтактной диагностики нестационарных процессов в вихрях (738).
 - 5.1. Теория звукового излучения, создаваемого вихревым кольцом.
 - 5.2. Возможные механизмы излучения звука турбулентным вихревым кольцом.
 - 5.3. Экспериментальные исследования шума вихревого кольца и сопоставление эксперимента с теорией.
6. Заключение (740).

Список литературы (741).

1. Введение

Вихревое кольцо является хорошо известным и очень популярным объектом динамики жидкости. Его исследования тянутся с прошлого века, когда кольцевой вихрь рассматривался в качестве модели в развивавшейся вихревой теории атомов [1–3]. И хотя квантовая теория свела на нет многие идеи, развиваемые в тот период, вихревое кольцо осталось, пожалуй, одним из самых интересных и удобных для исследования объектов в гидродинамике [4]. Действительно, этот вихрь доступен для экспериментального исследования, в то же время его поведение удается описывать в рамках основных уравнений сплошной среды. Что особенно важно, будучи созданным, этот вихрь развивается только под действием своей собственной динамики, не испытывая влияния твердых границ. Это позволяет

В.Ф. Копьев, С.А. Чернышев. Центральный аэрогидродинамический институт, Акустическое отделение,
107005 Москва, ул. Радио 17, Российская Федерация
Тел. (095) 263-44-72. E-mail: vkopiev@mx.iki.rssi.ru

Статья поступила 12 апреля 2000 г.,
после доработки 2 июня 2000 г.

исследовать с его помощью многие вопросы гидроаэродинамики в чистом виде. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением некоторого круга задач, связанных с высокочастотными колебаниями этого вихря. Оказалось, что последовательное описание динамики возмущений позволяет связать воедино такие вопросы, как устойчивость колебаний и механизмы обмена энергией между средним течением и отдельными модами, возникновение турбулентности в окрестности ядра кольцевого вихря и отсутствие турбулентного движения в ядре, генерация звука турбулентностью и вклад в звуковое излучение собственных колебаний ядра вихря.

Вихревое кольцо представляет собой вихревой тор, вместе с которым перемещается эллипсоидальный объем жидкости, называемый атмосферой кольца. Подробное описание стационарной модели вихревых колец можно найти, например, в [5–7]. Речь в этих работах идет прежде всего о самопереносе вихревой нити, свернутой в кольцо. Описание вихревого кольца как тонкой кольцевой нити в идеальной жидкости дает некоторое качественное соответствие известному гидродинамическому явлению и позволяет связать средние параметры вихря — его размеры и циркуляцию — со скоростью поступательного движения. Эти параметры, как следует из уравнений идеальной жидкости, остаются неизменными при движении вихря, т.е. такой вихрь живет неограниченно долго, не изменяясь по форме и по скорости. Ограниченность такого рассмотрения становится очевидной уже из того факта, что реальное кольцо при своем движении заметно расширяется. Учет вязкости [8, 9] позволил несколько сблизить имеющиеся расхождения между теоретической моделью и реальным явлением. Вместе с тем к началу 70-х годов стало совершенно ясно, что идеальная модель даже при учете вязкости не учитывает принципиальные моменты в эволюции вихревого кольца. Многочисленные экспериментальные исследования [10–15] показали, что существуют два качественно различных режима течения — ламинарный и турбулентный. Критическое число Рейнольдса Re_0 , построенное по начальному радиусу и скорости вихревого кольца, составляет около 10^3 . При малых числах Re образуется вихрь, с характерной и четко просматриваемой спиральной структурой [16, 17]. При числах Re , превышающих Re_0 , характер течения принципиально меняется — течение становится турбулентным. Главные особенности такого течения состоят в том, что структура потока оказывается близкой к универсальной и не зависит от особенностей процесса формирования вихря. При этом течение разделяется на две области — ламинарное ядро, где сосредоточена завихренность, и область атмосферы, где частицы жидкости совершают хаотическое движение (рис. 1). Что особенно важно и интересно, граница между турбулентной и ламинарными областями остается резкой, несмотря на то, что кольцо успевает пройти большие расстояния [18–20]. Обнаруженные в эксперименте особенности турбулентного режима течения позволили сформулировать полумпирическую автомодельную теорию [11, 21, 22], описывающую эволюцию средних параметров (радиуса, скорости, завихренности и т.д.) в предположении, что распределение завихренности в ядре близко к константе (твердотельное вращение в ядре). Проведенные измерения поступательной скоро-

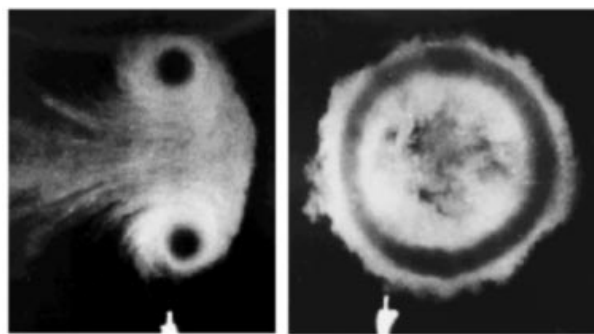


Рис. 1. Фотографии турбулентного вихревого кольца (сбоку и спереди), сделанные по методу светящейся плоскости.

сти и геометрических параметров кольца подтвердили автомодельный характер развития вихря. Вместе с тем прямых надежных измерений завихренности в ядре вихря практически не проводилось. Отметим работы [23, 24], данные которых носят предварительный характер, и новые измерения, основанные на технике *PIV* [25], относящиеся к не очень высокоскоростным кольцам.

Ограниченность экспериментальных данных о структуре средней завихренности в ядре, а тем более по нестационарным процессам в вихре, с одной стороны, сопровождается ограниченностью теоретических исследований вопроса устойчивости вихревого кольца — с другой стороны. Долгое время было принято считать, по-видимому, отталкиваясь от работы Кельвина [2] по устойчивости вихревого столба (вихря Ранкина), что большинство мод, соответствующих деформациям сечения вихревого кольца, являются устойчивыми. В литературе рассматривалась неустойчивость только одной изгибной моды [26–29]. Применяемые при этом методы используют дополнительные упрощающие предположения (см. раздел 3.1), а сравнение с экспериментом носит качественный характер.

Сложившаяся к настоящему времени концепция о структуре турбулентности вихревого кольца основана на представлении об "упругости" закрученных потоков, качественных представлениях о подавлении турбулентности в ядрах локализованных вихрей [30, 31] и аналогии между эффектами стратификации и вращения. Понятно, что для существенного продвижения в понимании реализующегося режима турбулентного течения требуются не только качественные рассуждения, но и динамическое описание колебательных режимов, механизмов неустойчивости, делающих возможной подкачку энергии в отдельные моды, а также, конечно, развитие методов диагностики тонких и сложных процессов в ядре вихревого кольца, по возможности основанных на бесконтактных методиках, поскольку речь идет об очень чувствительных к любым возмущениям процессах. Поэтому можно с уверенностью сказать, что описание турбулентного вихревого кольца относится к интересной и важной проблеме турбулентности и изучение его потребует еще значительных усилий.

В настоящей работе рассмотрены последние результаты, относящиеся к описанию собственных колебаний вихревого кольца в идеальной несжимаемой жидкости. Эти колебания имеют близкий аналог — кельвиновские колебания цилиндрического вихря Ранкина. Близость

средних течений — тонкого вихревого кольца с почти круговым сечением, малым по сравнению с радиусом вихря, и цилиндрического вихря с круговым сечением и бесконечным радиусом кривизны — явились, по-видимому, главной причиной того, что колебания вихревого кольца (в вычислительном отношении задача гораздо более сложная) в полной постановке не рассматривались (см. обзор этой проблемы в разделе 3.1). Оказалось, однако, что многие из мод вихревого кольца отличаются от соответствующих колебаний цилиндрического вихря уже в главном приближении. Изменение структуры собственных колебаний оказалось не просто неожиданным курьезным фактом. Это отличие повлекло за собой совокупность важных следствий — от возникновения множественной неустойчивости до особенностей акустического излучения вихрей.

Поскольку процедура метода возмущений в задаче о колебаниях вихревого кольца является не вполне тривиальной, требуется использование наиболее экономной и удобной процедуры. Изложению подхода, развитого в [32] для описания колебаний тонкого вихревого кольца и основанного на использовании поля смещений как основной динамической переменной, посвящен раздел 2. В данной работе затронуты в том числе некоторые важные вопросы описания энергии возмущений в вихревых течениях, основанные на теореме Арнольда [33–35]. Возможность вычисления этой нелинейной величины, основываясь лишь на линейной динамике возмущений (вследствие равенства нулю первой вариации энергии), является принципиальным в вычислительном отношении. Энергия колебаний и в особенности знак этой энергии для каждого колебания играют определяющую роль при исследовании рассматриваемой в работе неустойчивости.

В разделе 3 рассмотрены длинноволновые колебания тонкого вихревого кольца с потенциальной атмосферой и максимально простым распределением завихренности в ядре. Проанализировано сходство и различие колебаний такого вихревого кольца с аналогичными колебаниями цилиндрического вихря.

Вихревое кольцо с простейшим распределением завихренности в ядре и потенциальным течением в атмосфере является главным приближением в задаче о колебаниях вихревых колец более общего вида. Оказалось, что при учете размазывания ядра (даже очень слабого) многие колебания становятся неустойчивыми. При этом если завихренность в атмосфере слабая, то ее можно учесть аналитически и вычислить инкременты неустойчивых гармоник. Эта задача рассмотрена в разделе 4. Множественная неустойчивость колебаний вихревого кольца и структура неустойчивых колебаний показывают, что турбулентность вихревого кольца могла бы явиться следствием нелинейного развития именно этих процессов. С этой точки зрения правильное говорить не о подавлении турбулентности в ядре, а о генерации турбулентности в атмосфере кольца.

В разделе 5 рассмотрен новый метод исследования нестационарных процессов в турбулентном вихревом кольце, основанный на экспериментальной диагностике и теоретическом описании его звукового поля. Особенности звукового поля дают веское подтверждение модели турбулентного вихревого кольца, развитой в настоящей работе. Таким образом, вихревое кольцо оказывается очень удобной моделью для исследования всей совокуп-

ности нестационарных процессов, которые могут иметь место в трехмерных вихревых течениях.

2. Поле смещений в проблеме описания динамики несжимаемых вихревых течений

Традиционно для описания возмущений в вихревых течениях используется поле скорости или завихренности. В последнее время в задаче о возмущениях вихрей применяется также другой подход, который основан на использовании поля смещения [36] в качестве основной функции. Это поле, непосредственно описывающее деформацию каждой вихревой нити, впервые было использовано для описания эволюции возмущений завихренных потоков в работе [37]. Для исследования малых колебаний вихревого кольца этот подход использовался в работе [38], где впервые были правильно описаны бочкообразные моды вихревого кольца, а затем и другие колебания [32].

2.1. Эволюция поля смещения в произвольных вихревых течениях.

Поле смещения как новая динамическая переменная

Рассмотрим подход к описанию возмущений, основанный на использовании поля смещения $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ в качестве основной функции. Ограничимся такими возмущениями, при которых возмущенное течение изовихренно исходному стационарному течению [39, 40]. Такие возмущения могут быть представлены как результат смещения жидких частиц с замороженным полем завихренности.

2.1.1. Условие изовихренности. Рассмотрим произвольное бездивергентное векторное поле $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$, $\nabla \boldsymbol{\eta} = 0$. Пусть это поле задает множество преобразований пространства в себя по формуле

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где t — некоторый параметр. Преобразование (2.1) можно представить как движение жидких частиц с "полем скорости" $\boldsymbol{\eta}$. При таком преобразовании каждая частица, имевшая первоначально координату $\mathbf{r}_0$, перейдет в точку, определяемую решением уравнения (2.1) с начальным условием $\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0$. Так как поле $\boldsymbol{\eta}$ бездивергентно, то по теореме Лиувилля такое преобразование сохраняет объем. Очевидно, все мыслимые перемещения жидких частиц при условии сохранения объема задаются решением уравнения (2.1) при некотором $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$. Для преобразований, близких к тождественному, t является малым параметром. В линейном по t приближении решение (2.1) дается равенством $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}_0)t + O(t^2)$. Обозначим линейную по параметру t часть преобразования через $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}_0)t, \quad (2.2)$$

и будем называть эту величину *полем смещений*.

Рассмотрим некоторое исходное векторное поле $\mathbf{a}_0$, $\nabla \mathbf{a}_0 = 0$. Пусть при перемещении жидких частиц, задаваемых преобразованием (2.1), это поле остается замороженным, т.е. поле $\mathbf{a}_0$ преобразовывается в поле $\mathbf{a}$ таким образом, что интенсивности любых векторных трубок поля $\mathbf{a}$ остаются неизменными. По теореме Фридмана [41, 42] необходимым и достаточным условием сохранения

мости интенсивности векторных трубок (т.е. вмерозенности поля $\mathbf{a}$ в поле $\boldsymbol{\eta}$) является равенство нулю выражения

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (2.3)$$

При малых значениях t представим поле $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + t \left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} \right|_{t=0} + \dots = \mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a} + \delta^2 \mathbf{a} + \dots$$

Используя (2.3), получим

$$\left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right|_{t=0} = \nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{a}_0),$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \nabla \times \left(\boldsymbol{\eta} \times \left. \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right|_{t=0} \right) = \nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{a}_0)).$$

Тогда для первой и второй вариаций с учетом (2.2) получим

$$\delta \mathbf{a} = \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_0), \quad \delta^2 \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_0)). \quad (2.4)$$

Эти выражения будут использованы ниже для вычисления возмущений завихренности и энергии возмущений.

Если под полем $\mathbf{a}$ понимать завихренность $\boldsymbol{\Omega}$, то в этом случае условие вмерозенности называется *условием изозавихренности*. Очевидно, сохраняемость интенсивности векторных трубок для поля завихренности эквивалентна сохраняемости циркуляции по любому жидкому контуру. Так как преобразование (2.1) исчерпывает все сохраняющие объем преобразования пространства в себя, то соотношения (2.4) описывают все близкие поля, "равнозавихренные" исходному полю $\boldsymbol{\Omega}_0$.

2.1.2. Получение основной системы уравнений. В линейном приближении при соблюдении условия вмерозенности вихревых линий в поле смещения $\boldsymbol{\varepsilon}$ возмущение завихренности в соответствии с (2.4) равно

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0). \quad (2.5)$$

Здесь и далее мы будем опускать δ в обозначении первой вариации полей в тех случаях, когда нас будут интересовать возмущения только в линейном приближении.

Поскольку поле завихренности не выходит при своей эволюции из класса изозавихренных, то в любой момент времени возмущенное состояние можно представить как результат действия некоторого поля смещения $\boldsymbol{\varepsilon}$ (рис. 2), т.е. эволюции поля завихренности можно сопоставить эволюцию соответствующего поля $\boldsymbol{\varepsilon}$. Это означает, что для описания эволюции возмущений может быть использовано поле смещения $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, что при заданном $\boldsymbol{\Omega}$ поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяется неоднозначно. К нему может быть добавлено любое тривиальное смещение $\boldsymbol{\varepsilon}'$, являющееся решением уравнения $\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon}' \times \boldsymbol{\Omega}_0) = 0$. В соответствии с (2.5) тривиальное смещение представляет собой такое смещение жидких частиц, при котором вообще не происходит возмущения поля завихренности.

Получим уравнение, которому удовлетворяет поле смещения $\boldsymbol{\varepsilon}$, из уравнений динамики идеальной несжимаемой жидкости. Малые возмущения завихренности в

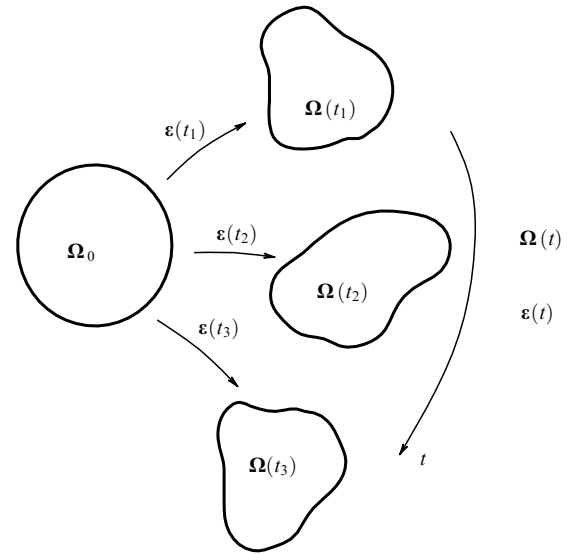


Рис. 2. Эволюция поля завихренности $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и поля смещения $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$.

безграничном течении описываются системой уравнений

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_0) + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}) = 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (2.7)$$

где $\mathbf{V}_0$, $\boldsymbol{\Omega}_0$ — стационарные поля скорости и завихренности, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\Omega}$ — возмущения этих полей. Уравнение (2.6) есть линеаризованное уравнение Гельмгольца, а уравнение (2.7) связывает возмущения скорости и завихренности в каждый момент времени в соответствии с законом Био — Савара.

Система уравнений, описывающая эволюцию поля смещения, может быть получена из системы линеаризованных уравнений (2.6), (2.7) прямой подстановкой соотношения (2.5). Используя векторное тождество

$$\nabla \times [\mathbf{a} \times [\nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]] + \nabla \times [\mathbf{b} \times [\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})]] + \nabla \times [\mathbf{c} \times [\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]] = 0$$

и соотношение $\nabla \times (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{V}_0) = 0$, представляющее собой уравнение Гельмгольца для стационарного течения, из (2.6) получим

$$\nabla \times \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} \right) \times \boldsymbol{\Omega}_0 \right] = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\nabla \times (\mathbf{F} \times \boldsymbol{\Omega}_0) = 0$, поле $\mathbf{v}$ выражается через $\boldsymbol{\varepsilon}$ с помощью уравнений (2.5) и (2.7). Легко показать, что произвольная функция $\mathbf{F}$ всегда может быть скомпенсирована добавлением некоторого тривиального смещения. Действительно, рассмотрим поле $\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}, t)$, которое удовлетворяет нулевому начальному условию и уравнению (2.8) с той же функцией $\mathbf{F}$. Поле $\boldsymbol{\varepsilon}'$ в любой последующий момент времени будет представлять

собой тривиальное смещение, поскольку оно есть решение задачи, в которой стационарное течение не получило начального возмущения. Следовательно, решения уравнения (2.8) с одинаковыми начальными условиями и с различающимися правыми частями отличаются друг от друга лишь на тривиальное смещение. Введем в рассмотрение разность $\xi = \varepsilon - \varepsilon'$. Эта величина представляет собой разность положений жидкой частицы в возмущенном и невозмущенном течениях через время t после момента возмущения, т.е. представляет собой лагранжево смещение жидкой частицы [36, 43]. Для этой величины правая часть (2.8) в точности равна нулю. Таким образом, получим известное уравнение, описывающее эволюцию поля лагранжевых смещений [36],

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \times (\xi \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} = 0, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{v} = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times (\xi \times \mathbf{\Omega}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (2.9b)$$

где ∇' — дифференциальный оператор по переменным $\mathbf{r}'$.

Использование как поля завихренности, так и поля смещения для описания возмущений позволяет локализовать задачу, т.е. находить решение только в области, занятой вихрем. Поведение поля $\mathbf{v}$ в области вне вихря, в частности, убывание этого поля на бесконечности, автоматически учитывается в интегральном выражении (2.9б). Важное отличие уравнения (2.9а) от эквивалентного ему уравнения Гельмгольца (2.6) заключается в выделении в чистом виде интегрального члена $\mathbf{v}$, который легко может быть превращен в дифференциальный с использованием операции rot и соотношения (2.5).

Уравнение (2.9а) легко обобщается на случай вихрей, движущихся как целое со скоростью $\mathbf{V}_\infty$ (например, вихревое кольцо), или вращающихся как целое с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (например, двумерный эллиптический вихрь Кирхгофа). Для таких течений основное течение будет стационарно в системе координат, движущейся и вращающейся вместе с вихрем, а возмущения будут описываться уравнением Гельмгольца, которое в этой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{U}_0) + \nabla \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v}) = 0,$$

где $\mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_\infty - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, поле скорости $\mathbf{V}_0$ убывает на бесконечности и связано с исходным стационарным полем завихренности $\mathbf{\Omega}_0$ интегралом Био – Савара

$$\mathbf{V}_0(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.10)$$

В этом случае поворот и смещение вихря как целого отделяется от малого поля смещения ξ , а уравнение (2.9а), описывающее эволюцию поля смещения, принимает вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \times (\xi \times \mathbf{U}_0) - \mathbf{v} = 0. \quad (2.11)$$

2.2. Эволюция поля смещений в локализованных вихрях

2.2.1. Основная система уравнений. Рассмотрим ситуацию, когда завихренность сосредоточена в ограниченной области пространства. Как известно, векторное поле

в ограниченной области M может быть определено по нормальной компоненте поля на границе $G(M)$, ротору и дивергенции этого поля во всей области M [6]. В случае неодносвязной области для однозначного определения векторного поля необходимо также задать циркуляцию этого поля по замкнутому контуру C , не стягиваемому к нулевому. Будем понимать под *векторным полем* все выражение $\partial \xi / \partial t + \nabla \times (\xi \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v}$, а под *областью* M — область, в которой сосредоточена завихренность. Тогда получим, что уравнение (2.9а) эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \xi + \nabla \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{V}_0)] - \nabla \times (\xi \times \mathbf{\Omega}_0) = 0, \quad \mathbf{r} \in M, \quad (2.12a)$$

$$\nabla \xi = 0, \quad \mathbf{r} \in M, \quad (2.12b)$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \times (\xi \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{r} \in G(M), \quad (2.12b)$$

$$\oint_C \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \times (\xi \times \mathbf{V}_0) - \mathbf{v} \right) d\mathbf{l} = 0, \quad (2.12r)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности $G(M)$. Важным преимуществом системы (2.12) по сравнению с уравнением (2.9а) является то, что интегральный член $\mathbf{v}$ исключен из уравнения во всей области внутри вихря и его необходимо вычислять только на границе $G(M)$.

2.2.2. Преобразование уравнения для определения скорости. В уравнение (2.12в) входит величина возмущения нормальной компоненты скорости $v^n = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ на границе $G(M)$ при заданном поле смещения ξ . Поэтому система уравнений (2.12) должна быть дополнена выражением (2.9б), из которого находится возмущение скорости $\mathbf{v}$. Преобразуем это выражение к виду, более удобному для вычислений. Используя интегрирование по частям, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \times \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla' \times \mathbf{B}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla' \times (\nabla' \times \mathbf{B})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla'(\nabla' \cdot \mathbf{B}) - \nabla'^2 \mathbf{B}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' = \mathbf{B} + \nabla \frac{1}{4\pi} \int_M \frac{\nabla' \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\mathbf{B} = \xi \times \mathbf{\Omega}_0$. Отсюда следует, что в области вне вихря возмущение скорости $\mathbf{v}$ может быть представлено как поле, создаваемое источниками с плотностью $Q(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot (\xi \times \mathbf{\Omega}_0)$. Действительно, в этой области $\mathbf{B} = 0$, и поэтому

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad \Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_M \frac{Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (2.14)$$

Поскольку на границе вихря нормальная компонента скорости непрерывна, то для вычисления величины v^n в уравнении (2.12в) может использоваться как внешний, так и внутренний предел выражения (2.13). Будем пользоваться внешним пределом, исходя из выражения (2.14).

Заметим также, что при вычислении поля $\mathbf{v}$ плотность Q в (2.14) может быть задана не единственным образом. Действительно, поле вне области M не изменится при замене $Q \rightarrow Q + Q'$, где $Q' = \nabla^2 G$ — произвольная функция, тождественно равная нулю вне области M .

Таким образом, вне вихря возмущение скорости может быть найдено из соотношений (2.14) с плотностью более общего вида

$$Q = -\nabla[(\xi \times \Omega_0) + \nabla G], \quad (2.15)$$

где G — произвольная функция, отличная от нуля только в области, занятой вихрем.

В частности, в качестве функции G можно выбрать решение уравнения $\nabla^2 G = -\nabla(\xi \times \Omega_0)$ при $\mathbf{r} \in M$ с условием $G = 0$ на границе $\mathbf{r} \in G(M)$. Тогда объемная плотность Q становится поверхностной. Это преобразование в некоторых случаях позволяет существенно облегчить вычисления.

2.2.3. Некоторые комментарии к основной системе уравнений. Остановимся на физическом смысле уравнений системы (2.12), (2.14). Поскольку смещение границы вихря равно величине $(\xi \cdot \mathbf{n})$ при $\mathbf{r} \in G(M)$, то уравнение (2.12в) описывает эволюцию границы возмущенного вихря. Эволюция границы вихря завязана с формой возмущений внутри вихря через член $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$, который выражается в виде интеграла (2.14) по всему объему вихря. В свою очередь эволюция возмущений внутри вихря описывается уравнениями (2.12а), (2.12б). Зависимость внутренних возмущений от формы границы выражается в том, что уравнение (2.12в) служит граничным условием при решении уравнений (2.12а), (2.12б). Таким образом, система уравнений (2.12), (2.14) описывает возмущения трехмерного вихря как совместную эволюцию границы вихря и возмущений внутри вихревой области. Такой подход можно рассматривать как обобщение метода контурной динамики, применяемого для описания эволюции границы двумерных вихрей с постоянной завихренностью [44, 45], на случай трехмерных возмущений локализованных вихрей с произвольной завихренностью.

2.3. Энергия возмущений в вихревых течениях

Энергия возмущений является одной из важнейших характеристик течения, которая позволяет во многих случаях не только понять, но и описать характерные особенности поведения системы. Возмущенное течение может иметь энергию (естественно, положительную), большую или меньшую по величине по сравнению с энергией основного потока. Поэтому имеет смысл говорить о положительной или отрицательной энергии возмущений в зависимости от знака разности энергий возмущенного и исходного состояний. Возмущения, энергия которых больше энергии исходного состояния, будем называть *возмущениями с положительной энергией*, поскольку для их создания требуется сообщать энергию в систему. Возмущения, энергия которых меньше энергии исходного состояния, будем называть *возмущениями с отрицательной энергией*, для их создания требуется отбирать энергию. Понятие возмущений (волн) отрицательной энергии широко используется не только в гидродинамике [46, 47], но и в физике плазмы [48, 49], акустике [50, 51], океанологии [52, 53] и т.д.

Для таких сложных течений, как вихревое кольцо, нахождение энергии колебаний требует громоздких вычислений. В связи с этим приведем выражения для энергии возмущений к наиболее простому и удобному виду. Следуя известным работам Арнольда [33, 34], получим общее выражение для второй вариации функ-

ционала кинетической энергии на множестве равновзвешенных течений. Поскольку, в силу теоремы Арнольда, первая вариация равна нулю, то вторая вариация будет представлять собой искомую разность энергии возмущенного и стационарного течений. Подробный обзор проблемы и приложения можно найти, например, в [35].

Для случая течений, стационарных в движущейся или вращающейся с постоянными скоростями системах отсчета, полученное выражение потребует некоторой модификации, поскольку в этом случае экстремальным оказывается более сложный функционал, представляющий собой обобщенную энергию течения соответственно в движущейся или вращающейся системах отсчета [54, 43].

2.3.1. Энергия изовихренных возмущений и теоремы Арнольда. Рассмотрим прежде всего случай, когда основное стационарное течение имеет поле скорости $\mathbf{V}_0$, убывающее на бесконечности в исходной неподвижной системе координат. Кинетическая энергия безграничного течения несжимаемой жидкости с полем скорости $\mathbf{V}$ определяется функционалом

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 d\mathbf{r}, \quad (2.16)$$

где интегрирование ведется по всему пространству, а плотность положена равной единице. Для трехмерных течений, если поле завихренности убывает достаточно быстро и сходится интеграл $\int (\mathbf{r} \times \Omega) d\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{V}$ убывает на бесконечности, как r^3 , и интеграл (2.16) существует. Это условие заведомо выполняется для течений с локализованными вихрями.

Представим поле скорости в виде $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v} + \delta^2\mathbf{v} + \dots$, где $\delta\mathbf{v}$ и $\delta^2\mathbf{v}$ — соответственно первая и вторая вариации скорости. Тогда энергия возмущений, т.е. разность энергий между возмущенным и стационарным состояниями в первом и втором приближениях, будет иметь вид

$$\delta T = \int \mathbf{V}_0 \delta\mathbf{v} d\mathbf{r}, \quad (2.17)$$

$$\delta^2 T = \frac{1}{2} \int [(\delta\mathbf{v})^2 + 2\mathbf{V}_0 \delta^2\mathbf{v}] d\mathbf{r}. \quad (2.18)$$

Покажем, что на множестве равновзвешенных состояний интеграл (2.17) обращается в нуль, и вычислим вторую вариацию энергии (2.18), которая как раз и будет представлять собой искомую энергию возмущений.

В соответствии с соотношениями (2.4) первая и вторая вариации поля завихренности для произвольного поля смещения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta\Omega &= \nabla \times (\xi \times \Omega_0), \\ \delta^2\Omega &= \frac{1}{2} \nabla \times (\xi \times \nabla \times (\xi \times \Omega_0)). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Используя тот факт, что вариации полей скорости и завихренности связаны соотношениями $\delta\Omega = \nabla \times \delta\mathbf{v}$ и $\delta^2\Omega = \nabla \times \delta^2\mathbf{v}$, получим

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v} &= (\xi \times \Omega_0) + \nabla\varphi_1, \\ \delta^2\mathbf{v} &= \frac{1}{2} (\xi \times \nabla \times (\xi \times \Omega_0)) + \nabla\varphi_2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где φ_1 и φ_2 должны быть выбраны таким образом, чтобы поля $\delta \mathbf{v}$ и $\delta^2 \mathbf{v}$ были бездивергентными. Рассмотрим интеграл (2.17). С учетом (2.20) получим

$$\delta T = \int \mathbf{V}_0 \delta \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int \mathbf{V}_0 (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0) \, d\mathbf{r} + \int \mathbf{V}_0 \nabla \varphi_1 \, d\mathbf{r}. \quad (2.21)$$

Используя интегрирование по частям и пользуясь соленоидальностью поля скорости $\mathbf{V}_0$, получим, что второй интеграл в (2.21) обращается в нуль, т.е.

$$\delta T = \int [\mathbf{V}_0 (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0)] \, d\mathbf{r} = \int [\boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{V}_0)] \, d\mathbf{r}. \quad (2.22)$$

В равенстве (2.22) поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ не произвольно, а удовлетворяет условию бездивергентности. Это поле всегда может быть представлено в виде $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \times \boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\beta}$ — уже произвольное векторное поле. После несложных преобразований из (2.22) получим

$$\delta T = \int [\boldsymbol{\beta} \nabla \times (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{V}_0)] \, d\mathbf{r}. \quad (2.23)$$

Поскольку уравнение Гельмгольца для стационарного течения имеет вид

$$\nabla \times (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{V}_0) = 0, \quad (2.24)$$

из (2.23) и (2.24) получим $\delta T = 0$. Таким образом, получаем известный вариационный принцип Арнольда: стационарное течение идеальной жидкости выделяется из всех изовихренных с ним течений тем, что оно является точкой условного экстремума функционала кинетической энергии. В силу произвольности поля $\boldsymbol{\beta}$, очевидно, справедливо и обратное утверждение.

Определим вторую вариацию энергии $\delta^2 T$. Первое слагаемое в выражении (2.18) оставим без изменения, а второе с учетом (2.20) перепишем в виде, аналогичном (2.22). Часть интеграла (2.18), связанная с $\nabla \varphi_2$, после интегрирования по частям обратится в нуль, и для $\delta^2 T$ с учетом (2.19) получим

$$\delta^2 T = \frac{1}{2} \int [(\delta \mathbf{v})^2 + \delta \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{V}_0 \times \boldsymbol{\varepsilon})] \, d\mathbf{r}. \quad (2.25)$$

Обратим внимание на то, что вторая вариация энергии выражается через линейные вариации течения. Поэтому для вычисления энергии колебаний достаточно знать динамику возмущений лишь в линейном приближении.

2.3.2. Энергия возмущений в системе координат, движущейся или вращающейся с постоянной скоростью. При получении выражения (2.25) предполагалось, что стационарное поле скорости $\mathbf{V}_0$ убывает на бесконечности. Течения, стационарные в движущейся системе координат (например, вихревое кольцо), очевидно, не удовлетворяют уравнению (2.24), поэтому в чистом виде для них вариационный принцип Арнольда неприменим. То же относится и к течениям, стационарным во вращающейся системе координат (например, к вихрю Кирхгофа). Для таких течений поля скорости и завихренности удовлетворяют уравнению Гельмгольца вида

$$\nabla \times (\mathbf{U}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0) = 0, \quad (2.26)$$

где $\mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_\infty - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{V}_0$ — поле скорости, убывающее на бесконечности и связанное с полем завихренности $\boldsymbol{\Omega}_0$ интегралом Био–Савара (2.10), $\mathbf{V}_\infty$ и $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно поступательная скорость и скорость вращения вихря в неподвижной системе координат.

Введем в рассмотрение помимо интеграла кинетической энергии T (2.16) интегралы вихревого импульса $\mathbf{p}$ и вихревого момента $\mathbf{M}$ [6]:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}) \, d\mathbf{r}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} \int (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})) \, d\mathbf{r}. \quad (2.28)$$

В соответствии с формулами преобразования гамильтонианов в классической механике функционал

$$T' = T - \mathbf{V}_\infty \mathbf{p} - \boldsymbol{\omega} \mathbf{M} \quad (2.29)$$

будет представлять собой энергию течения в движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{V}_\infty$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ системе координат.

Найдем первую вариацию обобщенной энергии: $\delta T' = \delta T - \mathbf{V}_\infty \delta \mathbf{p} - \boldsymbol{\omega} \delta \mathbf{M}$. Для δT будем использовать выражение (2.22). Рассмотрим вариацию импульса $\delta \mathbf{p}$ и момента $\delta \mathbf{M}$. С учетом (2.19) на изовихренном слое имеем

$$\mathbf{V}_\infty \delta \mathbf{p} = \int [\boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{V}_\infty)] \, d\mathbf{r}, \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\omega} \delta \mathbf{M} = \int [\boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))] \, d\mathbf{r}. \quad (2.31)$$

Подставляя выражения (2.30) и (2.31) вместе с (2.22) в формулу (2.29), получим окончательно

$$\delta T' = \int [\boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{U}_0)] \, d\mathbf{r}. \quad (2.32)$$

Используя те же рассуждения, что и при получении (2.23), с учетом уравнения Гельмгольца (2.26) получим, что интеграл (2.32) обращается в нуль. Следовательно, функционал обобщенной энергии (2.29) экстремален на течениях, стационарных в движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{V}_\infty$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ системе координат.

Для второй вариации получим

$$\delta^2 T' = \frac{1}{2} \int [(\delta \mathbf{v})^2 + \delta \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{U}_0 \times \boldsymbol{\varepsilon})] \, d\mathbf{r}, \quad (2.33)$$

что при $\mathbf{V}_\infty = \boldsymbol{\omega} = 0$ естественно совпадает с выражением (2.25). Используя равенство $\int (\delta \mathbf{v})^2 \, d\mathbf{r} = \int (\delta \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{A}) \, d\mathbf{r}$, где $\delta \mathbf{A}$ — векторный потенциал возмущений, определяемый формулой $\nabla \times \delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{v}$, получим

$$\delta^2 T' = \frac{1}{2} \int [\delta \boldsymbol{\Omega} (\delta \mathbf{A} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{U}_0)] \, d\mathbf{r}. \quad (2.34)$$

2.3.3. Выражение для энергии возмущений через поле смещений. Используя выражение (2.5) и формулу преобразования для дивергенции от векторного произведения, представим подынтегральное выражение (2.34) в виде

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\Omega} (\delta \mathbf{A} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{U}_0) &= \nabla [(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0) \times (\delta \mathbf{A} - \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{U}_0)] + \\ &+ (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\Omega}_0) (\delta \mathbf{v} - \nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{U}_0)). \end{aligned}$$

Используя уравнение (2.9а) или (2.10), с учетом обращения в нуль интеграла от первого члена получим следующее выражение:

$$\delta^2 T = \frac{1}{2} \int \left[\Omega_0 \left(\frac{\partial \mathbf{\epsilon}}{\partial t} \times \mathbf{\epsilon} \right) \right] d\mathbf{r}. \quad (2.35)$$

Выражение (2.35) справедливо для произвольных полей смещения $\mathbf{\epsilon}$, в том числе и для лагранжевых смещений ξ . В случае если найдены частоты и форма собственных колебаний вихря, выражение (2.35) оказывается более удобным для вычисления энергии колебаний, чем выражение (2.34).

3. Собственные колебания вихревого кольца

В этом разделе рассмотрим длинноволновые собственные колебания тонкого вихревого кольца с кусочно однородным и кусочно изохронным профилем завихренности в идеальной несжимаемой жидкости. Эти распределения завихренности оказываются наиболее простыми для получения аналитических решений. Полный набор трехмерных собственных колебаний для такого вихревого кольца был получен в [32] в виде асимптотических разложений по малому параметру μ , характеризующему тонкость кольца. Эти решения будут использованы в разделе 4 в качестве отправной точки для исследования колебаний вихревых колец с профилем завихренности более общего вида (сглаженным профилем завихренности).

3.1. Обзор различных подходов к проблеме описания колебаний вихревого кольца

Вследствие чрезвычайной сложности проблемы все теоретические решения в задаче о собственных колебаниях вихревого кольца ограничены случаем тонкого вихревого кольца ($\mu \ll 1$, μ — отношение размера сечения вихря к радиусу кольца). Однако даже для этого случая до недавнего времени были найдены только те моды, форма которых позволяет еще более упростить задачу. При этом использовались осесимметричность возмущений, коротковолновое приближение или априорные предположения о форме колебаний. Опишем основные подходы, основанные на использовании таких упрощений.

Наиболее простой оказывается задача об осесимметричных колебаниях, которая сводится к определению возмущений границы вихря. В этом случае удается исследовать как малые [55], так и нелинейные возмущения [56].

В случае коротковолновых трехмерных колебаний [28] длина волны является дополнительным малым параметром, наличие которого позволяет получить решения, пренебрегая взаимным влиянием возмущений в удаленных друг от друга областях вихревого кольца.

Для произвольных трехмерных колебаний использование малого параметра μ лежит в основе двух известных подходов, в которых задача о колебаниях вихревого кольца заменяется задачей, соответствующей предельному случаю $\mu = 0$. Этот предел может быть реализован двумя различными путями. В первом случае предел достигается при конечном радиусе кольца и стремлении к нулю размера сечения вихря при навязанной априори структуре возмущений в ядре. Во втором случае предел

$\mu = 0$ достигается при конечном размере сечения вихря и бесконечном радиусе кольца, что приводит к пренебрежению кривизной средней линии вихревого кольца.

Первому из упомянутых пределов соответствует метод локальной аппроксимации [57], а также его более точная версия, развитая в работах [58–60]. В этом методе самоиндуцированная скорость в любом сечении вихря вычисляется так, как если бы весь вихрь представлял собой нить бесконечно малой толщины, исключая окрестность рассматриваемого сечения, где структура потока представляется совпадающей со структурой потока во вписанном стационарном вихревом кольце. Полное решение задачи показывает, что этот метод позволяет получить правильное решение для одного из семейств колебаний, сопровождающихся изгибными возмущениями средней линии кольца (изгибные моды). Однако для колебаний из других семейств эволюция средней линии в каждый момент времени определяется не только формой этой средней линии, но и деталями структуры возмущений внутри вихревого ядра.

Во втором из упомянутых подходов предельная величина $\mu = 0$ достигается заменой тонкого вихревого кольца цилиндрическим вихрем [61, 62]. В основе этого подхода лежит тот факт, что локальная структура течения в тонком вихревом кольце близка к структуре течения в вихревом кольце. Детальный анализ показывает, что колебания этих вихрей действительно имеют близкие по структуре спектры. Однако формы колебаний вихревого кольца, полученные в приближении цилиндрического вихря, оказываются неверными. В отличие от собственных колебаний цилиндрического вихря собственные колебания вихревого кольца могут представлять собой в главном приближении не одну угловую гармонику, а сумму двух угловых гармоник.

Для того чтобы решить задачу о колебаниях тонкого вихревого кольца и избежать описанных трудностей, в [32] была разработана следующая процедура. Задача о нахождении собственных колебаний разделялась на три более простые задачи. На первом шаге строился набор базисных возмущений, по которому раскладывались собственные колебания. На втором шаге вычислялся интеграл Био–Савара для каждого из базисных возмущений. На третьем шаге решалась система алгебраических уравнений, определяющая частоты и формы собственных колебаний. При таком подходе оказалось возможным находить одновременно структуру возмущений внутри вихря, форму смещения границы и собственные частоты, а также оценивать величину отброшенных членов в каждом приближении. Для реализации этой процедуры оказалось удобным использовать поле смещений $\mathbf{\epsilon}$. Ниже изложены основные положения этой процедуры и главные результаты.

3.2. Колебания цилиндрического вихря

В предельном случае $\mu = 0$ ($R \rightarrow \infty$, $\rho_0 = \text{const}$, где R — радиус кольца, ρ_0 — радиус сечения вихря) тонкое вихревое кольцо с кусочно однородным профилем завихренности переходит в цилиндрический вихрь Ранкина с постоянной завихренностью Ω_0 . Зависимость безразмерной угловой скорости U_0 от радиальной координаты ρ для вихря Ранкина представлена на рис. 3.

Решение задачи о малых колебаниях цилиндрического вихря получено Кельвином [2] и хорошо известно (см., например, [63]). Дадим здесь краткий обзор этих

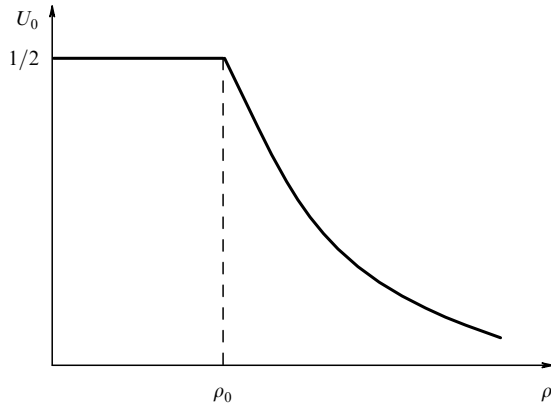


Рис. 3. Зависимость угловой скорости от радиальной координаты для вихря Ранкина.

колебаний, имея в виду, что некоторые их свойства оказываются аналогичными свойствам колебаний вихревого кольца.

Собственные колебания вихря Ранкина в цилиндрических координатах ρ, φ, z с осью $\mathbf{e}_z$ вдоль оси вихря имеют вид

$$V^i = V^i(\rho) \exp(im\varphi + ikz - i\omega t), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Возможность искать решение в таком виде связана с симметрией цилиндрического вихря относительно переноса вдоль z и поворотов вокруг оси $\mathbf{e}_z$. Заметим, что для вихревого кольца имеется только одна симметрия, связанная с поворотом вдоль угла θ (аналог симметрии цилиндрического вихря относительно переноса вдоль оси z).

Рассмотрим только случай $k \geq 0, m \geq 0$, поскольку он может быть легко обобщен на случай $k < 0, m \leq -1$. Ограничимся также случаем длинноволновых колебаний, т.е. будем предполагать, что $k\rho_0 \ll 1$.

Выберем безразмерные переменные, в которых радиус сечения вихря — $\rho_0 = 1$, стационарное поле завихренности — $\Omega_0 = 1$ (соответственно угловая скорость в ядре будет $U_0 = 1/2$).

3.2.1. Дисперсионное соотношение. Для нахождения собственных колебаний цилиндрического вихря решаются уравнения для возмущений скорости в областях внутри и вне вихря, а затем эти решения сшиваются на границе вихря. Внутри вихря возмущения удовлетворяют уравнению Гельмгольца (2.6) и условию бездивергентности для поля скорости. Исключая из этих уравнений компоненты скорости v^ρ и v^φ , для компоненты v^z получим уравнение Бесселя

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dv^z}{d\rho} \right) + \left(a^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) v^z = 0,$$

где $a = \sqrt{1 - \omega'^2} k / \omega'$, $\omega' = \omega - m/2$. Решением этого уравнения с условием конечности в нуле является функция Бесселя $v^z = J_m(a\rho)$. Используя это решение, легко получить остальные компоненты поля скорости.

Вне вихря течение потенциально. Потенциал скорости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа. Убывающее на бесконечности решение этого уравнения имеет вид $\Phi = AH_m^{(1)}(ik\rho)$, где $H_m^{(1)}$ — функция Ганкеля первого

рода. Константа A вместе с собственными частотами определяется из условий непрерывности нормальной компоненты скорости v^ρ и давления p на границе $\rho = 1$. Окончательно дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\omega' k J_{m+1}(a)}{\sqrt{1 - \omega'^2} J_m(a)} + \frac{ik H_{m+1}^{(1)}(ik)}{H_m^{(1)}(ik)} - \frac{m}{1 + \omega'} = 0. \quad (3.2)$$

Это соотношение справедливо для произвольного k , однако дальше мы будем интересоваться только случаем $k \ll 1$.

3.2.2. Анализ дисперсионного соотношения при $k \ll 1$. Для длинноволновых колебаний ($k \ll 1$) дисперсионное уравнение (3.2) имеет решения в двух областях значений параметров: $a = O(1)$ и $a \ll 1$. При $a = O(1)$ для каждого $m = 0, 1, 2, \dots$ имеется семейство решений

$$\omega_j = \frac{m}{2} + \frac{k}{a_j} + O(k^2), \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.3)$$

где a_j — нули функции Бесселя $J_m(a)$. Соответствующие собственные колебания будем называть *бесселевскими модами*. Собственные частоты ω_j имеют точку сгущения $\omega = m/2$ и лежат по обе стороны от нее. Моды с частотами, лежащими справа от точки сгущения ($a_j > 0$), будем называть *опережающими*, поскольку их угловая фазовая скорость больше максимальной угловой скорости потока, достигаемой на границе ядра ($\omega_j/m > 1/2$). Наоборот, моды с частотами, лежащими слева ($a_j < 0$), будем называть *отстающими*. Между этими модами имеется важное различие. Фазовая скорость отстающих мод меньше максимальной угловой скорости среднего потока (см. рис. 3) и поэтому может совпадать с этой угловой скоростью на некоторой линии тока ρ_c (при наличии переменной завихренности вне ядра вихря такая линия будет соответствовать так называемому критическому слою; см. раздел 4). Эти линии располагаются в области вне вихря тем ближе к границе вихря, чем ближе собственная частота собственного колебания к точке сгущения. Напротив, фазовая скорость опережающих мод во всем течении больше, чем угловая скорость среднего потока, и для них такие линии отсутствуют.

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ уравнение (3.2) имеет еще одно решение при $a \ll 1$ вида

$$\omega = \frac{m-1}{2} + O(k^2), \quad m \geq 2, \quad (3.4a)$$

$$\omega = -\frac{k^2}{4} \left(\ln \frac{2}{k} - C + \frac{1}{4} \right) + O(k^4 \ln k), \quad m = 1, \quad (3.4b)$$

где $C \approx 0,58$ — постоянная Эйлера [64]. Соответствующие собственные колебания будем называть *изолированными модами*, изолированная мода с $m = 1$ называется также *изгибной модой*. Обратим внимание на то, что частота изгибной моды отрицательна. Это означает, что угловая фазовая скорость этого колебания направлена против потока.

Таким образом, вблизи каждого значения частоты $\omega = l/2$, $l = 0, 1, 2, \dots$, имеются моды двух типов: бесселевские моды, имеющие вид гармоники $\exp(im\varphi)$ с $m = l$, и одна изолированная мода, имеющая вид следующей по номеру гармоники с $m = l + 1$ (рис. 4a). Мы

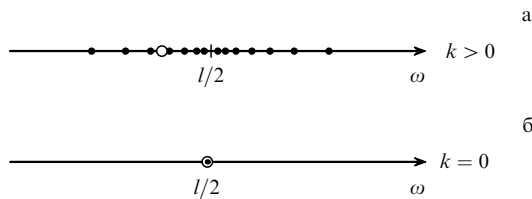


Рис. 4. Собственные частоты цилиндрического вихря вблизи величины $\omega = l/2$: $k > 0$ (а); $k = 0$ (б); • — бesselовские моды ($m = l$); ○ — изолированная мода ($m = l + 1$).

видим, что длинноволновые собственные колебания цилиндрического вихря с заданным значением k могут быть классифицированы как по номеру m гармоники $\exp(im\varphi)$, так и по числу l , характеризующему ближайшую точку сгущения собственных частот $\omega = l/2$.

Для вихревого кольца, как мы увидим, существует только вторая возможность. Собственные частоты вихревого кольца, как и цилиндрического вихря, находятся вблизи значений $\omega = l/2$, и в соответствии с этим колебания могут быть охарактеризованы числом l . В то же время номер гармоники m в сечении вихря уже не характеризует собственные колебания вихревого кольца, так как эти колебания имеют вид суммы гармоник $\exp(im\varphi)$ с различными m , в отличие от цилиндрического вихря, для которого собственные колебания есть отдельные гармоники по φ .

3.2.3. Формы собственных колебаний. Из (3.1) следует, что граница возмущенного вихря имеет гофрированную структуру. В каждом сечении $z = z_0$ эта структура имеет m лепестков, повернутых вокруг оси цилиндра на угол, зависящий от z , в соответствии с выражением $\exp(im\varphi + ikz)$ (рис. 5).

Бесселевские моды с $m = 0$ имеют характерную бочкообразную форму и в соответствии с этим называются *бочкообразными* (рис. 5б). Изолированные моды с $m = 1$, как упоминалось выше, называются *изгибными*, так как эти колебания сводятся к периодическому смещению средней линии вихря (рис. 5а).

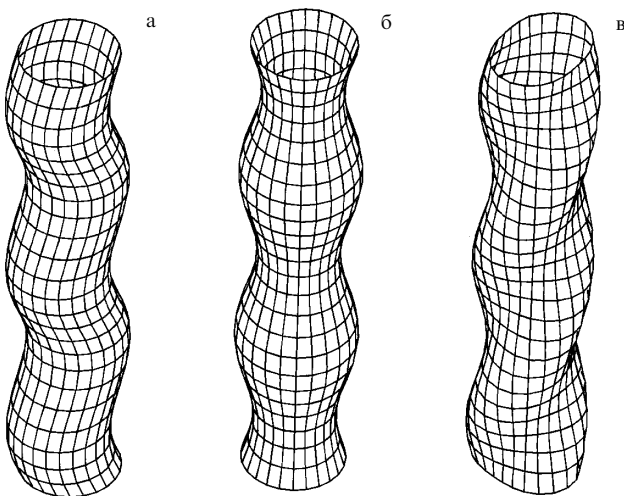


Рис. 5. Форма возмущения границы цилиндрического вихря: изгибная мода, $m = 1$ (а); бочкообразная мода, $m = 0$ (б); бesselовские моды и изолированная мода при $m = 2$ (в).

Бесселевские и изолированные моды с одинаковым числом m имеют одинаковую форму возмущения границы вихря (рис. 5в). Однако структуры возмущений внутри вихря для этих колебаний различны. Изолированные моды имеют степенную зависимость от координаты ρ , а бесселевские колебания имеют осциллирующий характер в радиальном направлении.

Различие бесселевских и изолированных мод проявляется также в соотношении между амплитудой возмущений вне вихря и амплитудой смещения границы вихря. Для изолированных колебаний эти амплитуды имеют величины одного порядка. В отличие от них, бесселевские колебания оказываются локализованными в большой мере внутри вихря. Для них амплитуда возмущений вне вихря оказывается порядка $O(k)$ относительно амплитуды смещения границы. Это связано с тем, что в соответствии с (3.1) фазовая скорость возмущений для бесселевских колебаний оказывается близкой к скорости основного потока на границе вихря, т.е. эти возмущения как бы вписаны в основной поток и слабо возмущают внешнюю область течения. Это свойство имеет ряд важных следствий. В частности, при учете сжимаемости среды колебания вихря генерируют звуковое излучение. При этом вписанные колебания оказываются неэффективными источниками звука. Напротив, невписанные колебания эффективно излучают звук и с этой точки зрения представляют больший интерес.

В случае двумерных колебаний ($k = 0$) изолированные моды сводятся к колебаниям плоского кругового вихря [5, 63] с частотой $\omega = (m - 1)/2$, а частоты всех бесселевских мод оказываются равными величине $\omega = m/2$, т.е. эти моды вырождаются (рис. 4б). При этом собственным колебанием с частотой $\omega = m/2$ будет любое возмущение вихревого ядра вида

$$\Omega^p = 0, \quad \Omega^q = 0,$$

$$\Omega^z = \left[f(\rho) - \delta(\rho - 1) \int_0^1 f(\rho) \rho^{m+1} d\rho \right] \exp(im\varphi),$$

где $f(\rho)$ — произвольная функция, δ — дельта-функция Дирака. Несмотря на то, что возмущение завихренности в ядре (первый член) сопровождается смещением границы с амплитудой порядка $O(1)$ (член с δ -функцией), легко проверить, что такие колебания вообще не создают возмущений во внешней области ($\rho > 1$), поскольку их фазовая скорость в точности равна $1/2$, т.е. эти возмущения в точности вписаны в основной поток [65]. Эти моды вместе с изолированной модой составляют полный набор возмущений, по которому может быть разложено любое двумерное возмущение вихревого ядра.

3.3. Задача о трехмерных колебаниях вихревого кольца

Вернемся к колебаниям вихревого кольца. В задаче о трехмерных (неосесимметричных) колебаниях вихревого кольца можно выделить две главные трудности. Первая из них связана с выбором простейшего стационарного течения. Даже в случае завихренности, полностью локализованной в границах области тороидального ядра, вопрос о наиболее простом с точки зрения получения аналитического решения профиле завихренности нетривиален.

Известно, что для тонких вихревых колец существует бесконечное число различных распределений завихренности в сечении ядра, для которых течение стационарно в системе координат, движущейся вместе с вихревым кольцом [66]. Наиболее простым из этих распределений, по-видимому, является так называемое однородное, для которого модуль вектора завихренности Ω пропорционален расстоянию от оси симметрии вихря ξ ($\Omega/\xi = \text{const}$). Отметим, что стационарное течение с таким распределением завихренности существует не только в случае тонкого ($\mu \ll 1$) кольца, но также и для колец произвольной толщины [67], включая в качестве предельного случая вихрь Хилла [42].

Однородное распределение завихренности характеризуется тем, что для него осесимметричные возмущения границы не порождают возмущений завихренности в ядре. Поэтому оно очень удобно для исследования осесимметричных колебаний (разделы 3.3.1, 3.3.2). С другой стороны, при таком распределении завихренности период движения частиц жидкости по линиям тока в ядре вихря оказывается неодинаков для различных линий тока (т.е. движение частиц неизохронно). Неизохронность может быть легко усмотрена из рассмотрения предельного случая вихря Хилла, для которого период движения частиц жидкости при приближении к границе вихря стремится к бесконечности. Свойство неизохронности приводит к тому, что при колебаниях течения возникают возмущения непрерывного спектра. Этот факт не препятствует исследованию осесимметричных колебаний, для которых возмущения непрерывного спектра могут быть достаточно просто описаны [32]. Однако в случае трехмерных (неосесимметричных) колебаний наличие непрерывного спектра существенно усложняет задачу. Поэтому для описания трехмерных колебаний наиболее удобным является такое распределение завихренности, для которого период движения жидких частиц по линиям тока будет одинаковым (изохронное распределение завихренности; см. разделы 3.3.3–3.3.6). В случае цилиндрического вихря однородное распределение завихренности ($\Omega_0 = \text{const}$) одновременно является изохронным. Для тонкого вихревого кольца эти распределения совпадают только в первых двух приближениях по μ , различаясь в членах порядка $O(\mu^2)$. Выражения для изохронного распределения завихренности в вихревом кольце получены в [68] и приведены ниже.

Вторая трудность связана с тем, что для трехмерных колебаний (даже в случае тонкого вихревого кольца) заранее не известно, в каком виде следует искать решение. Это отличает их от колебаний цилиндрического вихря (раздел 3.2) и от двумерных (осесимметричных) колебаний вихревого кольца, для которых общий вид решения выписать легко. В частности, использование мод цилиндрического вихря в качестве главного приближения оказывается неудовлетворительным. Поэтому для вихревого кольца строится специальная процедура, которая рассмотрена ниже.

3.3.1. Стационарное течение с однородным распределением завихренности. Рассмотрим цилиндрические координаты r, θ, z с осью e_z вдоль оси кольца и полярные координаты ρ, φ в сечении ядра с центром в точке остановки (рис. 6). Эти координаты связаны соотношениями $r = R - \rho \cos \varphi$ и $z = \rho \sin \varphi$, где R — расстояние от оси кольца до точки

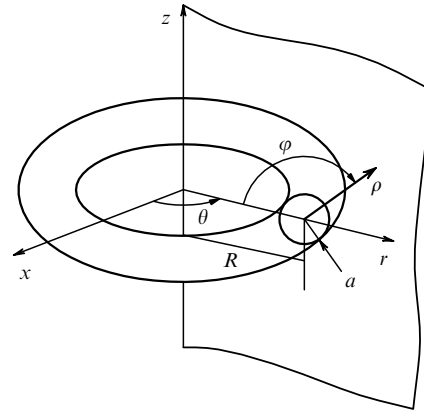


Рис. 6. Система координат.

остановки. Также будем использовать координату s , связанную с угловой координатой θ соотношением $s = R\theta$.

Для однородного распределения модуль завихренности пропорционален расстоянию от оси симметрии кольца, т.е. $\Omega_0 = e_s \Omega_0 r / R$ ($\Omega_0 = \text{const}$). Контравариантная s -компонента поля завихренности постоянна и имеет вид $\Omega_0^s = \Omega_0$. Стационарное поле скорости U_0 может быть представлено в виде $U_0 = V_0 - V_\infty$, где убывающая на бесконечности составляющая поля скорости V_0 определяется законом Био–Савара (2.10), V_∞ — скорость кольца в неподвижной системе координат, направленная вдоль оси z и равная

$$V_\infty^z = \frac{\Omega_0 a \mu}{4} \left(\ln \frac{8}{\mu} - \frac{1}{4} \right).$$

Определим точно малый параметр μ , характеризующий тонкость кольца. Этот параметр представляет собой отношение размера сечения ядра a к радиусу кольца R : $\mu = a/R$. Поскольку граница сечения близка к круговой, отличаясь от нее в членах порядка $O(\mu^2)$, то величина a определяется как радиус круга с площадью πa^2 , в точности равной площади сечения ядра.

Контравариантные компоненты стационарного поля скорости внутри ядра вихревого кольца и форма границы ядра имеют вид

$$V_0^p = -\mu \Omega_0 \frac{5\rho^2}{16a} \sin \varphi + \mu^2 \Omega_0 \left[\left(\frac{3}{8} \ln \frac{8}{\mu} - \frac{15}{64} \right) \rho - \frac{\rho^3}{16a^2} \right] \times \\ \times \sin 2\varphi + O(\mu^3), \quad (3.5a)$$

$$V_0^\varphi = \frac{\Omega_0}{2} + \mu^2 \Omega_0 \frac{5}{16} - \mu \Omega_0 \frac{7\rho}{16a} \cos \varphi + \\ + \mu^2 \Omega_0 \left[\left(\frac{3}{8} \ln \frac{8}{\mu} - \frac{15}{64} \right) - \frac{\rho^2}{32a^2} \right] \cos 2\varphi + O(\mu^3), \quad (3.5b)$$

$$\rho = a \left[1 + \frac{5}{8} \mu \cos \varphi - \frac{25}{256} \mu^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{161}{256} - \frac{3}{8} \ln \frac{8}{\mu} \right) \mu^2 \cos 2\varphi \right] + O(\mu^3), \quad (3.5b)$$

где, для краткости, единое выражение $O(\mu^n)$ используется для обозначения членов порядка $\mu^n \ln \mu$ и μ^n . Обратим внимание на то, что контравариантная φ -компонента скорости имеет размерность угловой скорости.

Отметим, что для описания стационарного течения в вихревом кольце могут быть также использованы поляр-

ные координаты ρ_c, φ_c с другим началом, расположенным в центре поперечного сечения кольца, который находится ближе к оси кольца по сравнению с точкой остановки на величину $\Delta \xi = (5a/8)\mu + O(\mu^3)$ [68]. Соотношения (3.5), выраженные в координатах ρ_c, φ_c при $a = 1$, использовались в работе [28]. В частности, в этих координатах форма границы (3.5в) имеет более простой вид и выражается соотношением

$$\rho_c = a \left[1 + \mu^2 \left(-\frac{3}{8} \ln \frac{8}{\mu} + \frac{17}{32} \right) \cos 2\varphi_c + O(\mu^3) \right].$$

Для удобства вычислений в [32] определены координаты σ, ψ в сечении ядра кольца, которые в главном приближении совпадают с координатами ρ, φ соответственно. Координаты $\sigma(\rho, \varphi)$ и $\psi(\rho, \varphi)$ выбраны таким образом, что удовлетворяются соотношения $V_0^\sigma = 0$, $V_0^\psi = V_0^\psi(\sigma)$, $\sqrt{|g|} = \sigma$, где V_0^σ, V_0^ψ — контравариантные компоненты поля скорости, g_{ij} — метрический тензор в системе координат σ, ψ, s . Линии $\sigma = \text{const}$ соответствуют линиям тока, так как $V_0^\sigma = 0$. Условие $\sqrt{|g|} = \sigma$ выбрано для того, чтобы дифференциальные операторы в системе координат σ, ψ, s имели наиболее простую форму. Конкретные выражения для координат σ, ψ, s и метрического тензора g_{ij} с точностью до μ^2 приведены в [32]. Контравариантные компоненты стационарного поля скорости в этих координатах имеют вид

$$V_0^\sigma = 0, \quad V_0^\psi = \frac{1}{2} - \mu^2 \frac{21}{64} \sigma^2 + O(\mu^3). \quad (3.6)$$

Для удобства записи здесь и далее мы используем безразмерные переменные. В качестве масштаба времени выберем Ω_0^{-1} , а масштаба длины — $a[1 + (5/16)\mu^2 + O(\mu^3)]$. Масштаб длины выбран таким образом, что границе вихря соответствует линия $\sigma = 1$.

Вычисляя период обращения жидких частиц на линиях тока, получим

$$T = \oint \frac{dl}{|\mathbf{V}_0|} = \frac{2\pi}{V_0^\psi(\sigma)}. \quad (3.7)$$

Из (3.6) и (3.7) легко видеть, что вихревое кольцо с однородной завихренностью оказывается неизохронным, т.е. период обращения жидких частиц в вихревом ядре на разных линиях тока $\sigma = \text{const}$ оказывается различным. Однако эта разница имеет порядок $O(\mu^2)$, т.е. для тонкого вихревого кольца однородное распределение завихренности слабо отличается от изохронного.

3.3.2. Осесимметричные колебания вихревого кольца с однородной завихренностью. Семейство осесимметричных колебаний вихревого кольца с однородной завихренностью описано в [32]. Их аналогом являются двумерные колебания цилиндрического вихря (раздел 3.2.3). Семейство осесимметричных колебаний состоит из изолированных мод, которые сводятся исключительно к возмущениям границы вихря, и множества колебаний непрерывного спектра, включающих в себя также возмущения завихренности в ядре. Частота изолированной моды равна

$$\omega = \frac{l}{2} + \mu^2 \left[\frac{6l^3 + 18l^2 + 14l + 3}{16l(l+1)(l+2)} - \frac{21}{64}(l+1) \right] + O(\mu^3),$$

$$l = 1, 2, \dots$$

В отличие от непрерывного спектра цилиндрического вихря, вырождающегося в двумерных случаях в точку $\omega = l/2$, частоты колебаний непрерывного спектра вихревого кольца занимают область частот $\omega/l = (V_{0,\min}^\psi, V_{0,\max}^\psi)$ (рис. 7).

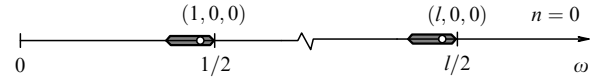


Рис. 7. Взаиморасположение непрерывного спектра и изолированной моды (•) вблизи каждого значения $l/2, l \geq 1$.

Появление непрерывного спектра для неизохронного течения связано с тем, что V_0^ψ зависит от σ , и решения уравнения (2.12а) имеют особенность при $-\omega + mV_0^\psi(\sigma) = 0$, где m целое.

3.3.3. Стационарное вихревое кольцо с изохронным движением жидких частиц. Условие изохронности для вихревого кольца с однородной завихренностью нарушается для членов порядка $O(\mu^2)$. В общем случае нахождение распределения завихренности, удовлетворяющего условию изохронности, является сложной задачей. Однако если ограничиться членами порядка $O(\mu^2)$, то однородное распределение завихренности легко модифицируется так, чтобы удовлетворить этому условию. С точностью до μ^2 стационарное вихревое кольцо с изохронным течением имеет поля завихренности и скорости:

$$\Omega_0^s = 1 + \mu^2 \frac{21}{16} \sigma^2 + O(\mu^3), \quad V_0^\sigma = 0, \quad V_0^\psi = \frac{1}{2}.$$

Поскольку V_0^ψ не зависит от σ , то в соответствии с (3.7) это течение изохронно в вихревом ядре. Вихревое кольцо с изохронным течением в ядре отличается от всех прочих тем, что для него ψ -компонента скорости не зависит от σ ни в каком приближении. Вследствие этого такое вихревое кольцо имеет колебания только дискретного спектра. В этом отношении именно изохронное вихревое кольцо, а не однородное, является простейшим для исследования трехмерных колебаний. Именно это течение использовалось в [32] в качестве основного при исследовании трехмерных колебаний.

3.3.4. Основные уравнения для описания колебаний вихревого кольца. Симметрия вихревого кольца относительно оси z позволяет искать собственные колебания в виде

$$\xi^i(\mathbf{r}, t) = \xi^i(\sigma, \psi) \exp(in\theta - i\omega t).$$

Таким образом, для нахождения формы возмущений вихревого кольца необходимо найти векторную амплитудную функцию двух переменных $\xi^i(\sigma, \psi)$. Именно поэтому задача о колебаниях вихревого кольца является гораздо более сложной, чем задача о колебаниях цилиндрического вихря, которая сводится к определению функции одной переменной ρ .

Для нахождения колебаний необходимо решить две связанные между собой задачи: решить систему дифференциальных уравнений (2.12а), (2.12б) и вычислить интегральный член в граничном условии (2.14). В [32] для случая длинноволновых колебаний ($n = O(1)$) был предложен метод решения, позволяющий разделить эти

задачи. В основных чертах этот метод заключается в следующем.

Амплитудные функции представляются в виде разложений по набору базисных возмущений

$$\xi(\sigma, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \xi_{(m)}(\sigma, \psi). \quad (3.8)$$

Базисные возмущения $\xi_{(m)}(\sigma, \psi, \omega)$ строятся таким образом, что каждое из них является решением уравнений (2.12а), (2.12б), а весь набор базисных возмущений представляет собой полную систему функций на границе (другими словами, граничные значения σ -компонент этих полей должны быть полной системой линейно независимых функций на отрезке $0 \leq \psi \leq 2\pi$). Хотя базисные возмущения по отдельности не удовлетворяют условию (2.12в) на границе вихря, любое решение системы уравнений (2.12а), (2.12б) с произвольным граничным условием (в том числе и искомое собственное колебание) может быть представлено в виде разложения (3.8).

Следующим шагом является вычисление поля скорости на границе вихря для каждого базисного возмущения. Для этого в соответствии с законом Био – Савара вычисляется интеграл (2.14). Заметим, что представление поля скорости в таком виде обеспечивает убывание возмущений на бесконечности.

Наконец, после подстановки в граничное условие (2.12в) разложения (3.8) и выражений для поля скорости на границе вихря, вычисленных на предыдущем шаге, получится система линейных уравнений относительно коэффициентов C_m разложения (3.8). Условие равенства нулю детерминанта этой системы дает дисперсионное уравнение, из которого находятся собственные частоты системы. Далее, после подстановки каждой из собственных частот в систему алгебраических уравнений находятся коэффициенты C_m разложения собственных колебаний по базисным возмущениям.

Для тонкого вихревого кольца задача имеет малый параметр μ , который позволяет на каждом из этапов получать решение последовательными приближениями. Следует учитывать, что для длинноволновых колебаний происходит вырождение собственных частот, т.е. в первых приближениях по μ некоторые из собственных частот совпадают. При этом форма соответствующих собственных колебаний в этих приближениях остается неопределенной, и для их определения требуется использование более высоких приближений, в которых среднее течение в вихревом кольце уже отличается от среднего течения в цилиндрическом вихре. Поэтому формы некоторых типов собственных колебаний тонкого вихревого кольца и цилиндрического вихря отличаются уже в главном приближении несмотря на близость средних течений.

3.3.5. Дисперсионное уравнение и собственные частоты. Рассмотрим отдельно случаи больших ($l \geq 1$) и малых ($l = 0$) частот. В случае $l \geq 1$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left[\omega' - \mu^2 \left(\frac{6l^2 + 11l + 6}{32l(l+1)(l+2)} - \frac{n^2}{4l(l+2)} \right) + O(\mu^3) \right] \frac{J_l(a_0)}{J_{l+1}(a_0)} = - \frac{(3l+2)^2(l+1)\omega'^3}{4n^3\mu} + O(\mu^2\omega', \mu^4), \quad (3.9)$$

где $a_0 = (\mu n / \omega') [1 + O(\omega')]$, $\omega' = \omega - l/2$. Дисперсионное уравнение (3.9) представляет собой трансцендентное уравнение, корни которого определяют собственные частоты системы. Поскольку правая часть мала, эти корни располагаются вблизи тех значений, при которых один из множителей в левой части уравнения обращается в нуль.

Второй множитель в (3.9) $J_l(a_0)/J_{l+1}(a_0)$, представляющий собой отношение бесселевских функций, обращается в нуль в бесконечном числе точек, соответствующих нулям функции Бесселя J_l . Эти нули соответствуют бесконечному семейству собственных колебаний с частотами

$$\omega = \frac{l}{2} + \frac{\mu n}{a_j} [1 + O(\mu)], \quad (3.10)$$

где $J_l(a_j) = 0, j = \pm 1, \pm 2, \dots$. Собственные частоты имеют точку сгущения $l/2$ и лежат по обе стороны от нее в зависимости от знака a_j . Колебания этого семейства называются *бесселевскими колебаниями*. Как и для цилиндрического вихря, моды, лежащие справа от точки сгущения ($a_j > 0$), называются *опережающими*. Наоборот, моды, лежащие слева ($a_j < 0$), называются *отстающими*.

При любом значении $l \geq 1$ существует еще одно собственное колебание, соответствующее обращению в нуль первого множителя в дисперсионном уравнении. Это колебание имеет частоту

$$\omega = \frac{l}{2} + \mu^2 \left(-\frac{n^2}{4l(l+2)} + \frac{6l^2 + 11l + 6}{32l(l+1)(l+2)} \right) + O(\mu^3). \quad (3.11)$$

Такие колебания называются *изолированными колебаниями*. В зависимости от соотношения величин l и n собственная частота может лежать как слева, так и справа от точки сгущения $l/2$.

Для малых частот ($l = 0$) дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left[\omega^2 - \frac{\mu^4}{16} A_n B_n + O(\mu^5, \mu^3 \omega) \right] \frac{J_0(a_0)}{J_1(a_0)} = O(\omega^3, \mu^6), \quad (3.12)$$

где

$$A_n = (n^2 - 1) \ln \frac{8}{\mu} + \frac{n^2 + 5}{4} - \frac{4n^2 - 1}{2} S_n, \\ B_n = n^2 \ln \frac{8}{\mu} + \frac{n^2}{4} - \frac{4n^2 - 3}{2} S_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}.$$

Уравнение (3.12) имеет бесконечное число корней, близких к нулям функции Бесселя J_0 . Эти корни соответствуют семейству собственных колебаний с частотами

$$\omega = \frac{\mu n}{a_j} [1 + O(\mu)], \quad (3.13)$$

где $J_0(a_j) = 0, j = 1, 2, \dots$. Собственные частоты имеют точку сгущения $\omega = 0$ и лежат справа от нее. Бесселевские колебания этого типа называются *бочкообразными модами* (аналогично колебаниям цилиндрического вихря). Отметим, что для бочкообразных мод значения $a_j < 0$ не дают новых решений, в отличие от случая $l > 0$.

При $l = 0$ существует еще одно собственное колебание, соответствующее обращению в нуль первого множителем в (3.12). Это — изолированная мода (так называемая *изгибная мода*, о которой шла речь в разделе 3.1 и во введении) с частотой

$$\omega = \frac{\mu^2}{4} \sqrt{A_n B_n} + O(\mu^3). \quad (3.14)$$

Отметим, что это выражение, начиная с некоторого номера n , становится комплексным [26]. Однако величина n , для которой возникает неустойчивость, оказывается большой, и условие применимости (3.14) нарушается. Строгая процедура описания коротковолновой неустойчивости изложена в [28, 63]. Обратим внимание на то, что при появлении неустойчивости частота становится чисто мнимой, т.е. такая неустойчивость не имеет колебательного характера.

Спектр колебаний тонкого вихревого кольца представлен на рис. 8. Можно видеть, что структуры спектра колебаний тонкого вихревого кольца и цилиндрического вихря оказываются аналогичными. Действительно, при фиксированном волновом числе ($k = \mu n = \text{const}$) и стремящейся к нулю кривизне кольца ($\mu \rightarrow 0$) выражения (3.10), (3.11) в точности совпадают с (3.3), (3.4а), а выражения (3.13), (3.14) совпадают с (3.3), (3.4б).

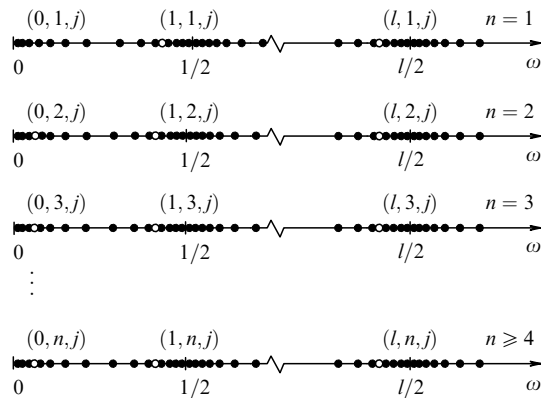


Рис. 8. Собственные частоты вихревого кольца, локализованные для каждого n вблизи значений $l/2$: бesselовские (и бочкообразные) моды (•); изолированные моды (◦).

Таким образом, длинноволновые трехмерные собственные колебания изохронного вихревого кольца характеризуются тремя целыми числами: частотным числом l , азимутальным числом n и радиальным числом j . Действительно, колебания вихревого кольца имеют частоты, расположенные в окрестности величины $\omega = l/2$, и имеют определенный номер n азимутальной гармоники. Кроме того, бesselовские и бочкообразные колебания различаются также радиальным номером $j \neq 0$, характеризующим форму возмущений в сечении вихревого ядра. Для изолированных колебаний величина j положена равной нулю.

3.3.6. Формы собственных колебаний. Форма колебаний определяется коэффициентами C_m разложения (3.8) по базисным смещениям $\xi_{(m)}$ и видом самих базисных смещений. Выражения C_m и $\xi_{(m)}$ для всех длинноволно-

вых колебаний приведены в [32]. Здесь приведем лишь величины нормальной компоненты поля смещения на границе вихря $\xi^\sigma|_{\sigma=1}$, характеризующие форму деформации границы вихря для каждого колебания.

Для бesselовских колебаний при $l \geq 1$, $\omega'/\mu = O(1)$ возмущение границы вихря $\xi^\sigma|_{\sigma=1}$ имеет вид (рис. 9а)

$$\xi^\sigma|_{\sigma=1} = \exp(ih\psi) - \frac{(3l+2)(l+1)}{2na_j} \exp[i(l+1)\psi] + O(\mu). \quad (3.15)$$

Мы видим, что деформация границы вихревого кольца в главном приближении представляет собой комбинацию двух гармоник, $\exp(ih\psi)$ и $\exp[i(l+1)\psi]$, в то время как бesselовские колебания цилиндрического вихря имеют форму l -й гармоники.

Еще более сильно колебания этих вихрей различаются в области вне вихря. Поскольку фазовая скорость возмущений границы вида $\exp(ih\psi - i\omega t)$ близка к средней скорости потока (l -я гармоника является вписанной в средний поток), то эта гармоника создает возмущения вне вихря гораздо менее эффективно, чем $(l+1)$ -я гармоника (см. раздел 3.2.3). В результате внешняя область для цилиндрического вихря оказывается слабо возмущенной, а для вихревого кольца — нет, в этой области доминирует $(l+1)$ -я гармоника, которая вообще отсутствует в случае цилиндрического вихря. В полярных координатах ρ и φ , связанных с центром сечения вихря, выражения для скорости вне вихря для l -х бesselовских колебаний вихревого кольца имеют вид

$$v^\rho = -i \frac{(3l+2)(l+1) \exp[i(l+1)\varphi]}{4na_j \rho^{l+2}} (1 + O(\mu)),$$

$$v^\varphi = - \frac{(3l+2)(l+1) \exp[i(l+1)\varphi]}{4na_j \rho^{l+3}} (1 + O(\mu)). \quad (3.16)$$

Таким образом, даже слабые различия в средних течениях цилиндрического вихря и вихревого кольца (кривизна вихревых линий и структура завихренности в сечении) приводят к качественным изменениям в свойствах колебаний. Эти изменения связаны с вырождением собственных частот (см. замечание в конце раздела 3.3.4). Что касается предельного перехода $\mu \rightarrow 0$, то необходимо учитывать, что при стремящейся к нулю кривизне колебания вихревого кольца должны переходить в колебания цилиндрического вихря при условии постоянства длины волны ($\mu n = \text{const}$). То есть при переходе к колебаниям цилиндрического вихря (раздел 3.2) правильный предельный переход имеет вид $\mu \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. В этом случае выражение (3.15) действительно переходит в выражение для бesselовских колебаний цилиндрического вихря.

Все сказанное выше о бesselовских колебаниях с $l \geq 1$ в полной мере относится к бочкообразным модам (бesselовские колебания с $l = 0$). При $\omega/\mu = O(1)$ форма возмущения границы вихря (рис. 9б) имеет вид

$$\xi^\sigma|_{\sigma=1} = \exp(i0\psi) - \frac{1}{na_j} (\exp(i\psi) - \exp(-i\psi)) + O(\mu). \quad (3.17)$$

Бочкообразные моды с $n = 1$ дают интересный и, на первый взгляд, неожиданный вариант движения вихре-

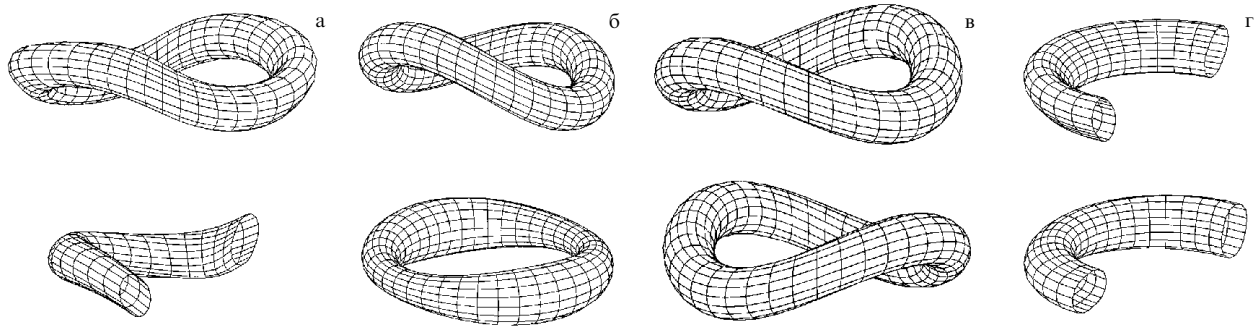


Рис. 9. Форма возмущений границы вихревого ядра: бesselевские моды $l = 1, n = 2, j \geq 1$ (а); бочкообразные моды (две фазы колебаний), $l = 0, n = 2, j \geq 1$ (б); изгибная мода $l = 0, n = 2, j = 0$ (две фазы колебаний) (в); изолированная мода $l = 1, n = 1, j = 0$ (г) в сравнении с осесимметричной.

вого кольца. Перейдем от рассмотрения бегущих волн вида $\exp(in\theta - i\omega t)$ к стоячим волнам вида

$$\cos(n\theta) \exp(-i\omega t).$$

Это легко сделать, взяв полусумму двух бегущих волн с числами n противоположных знаков. В случае $n = 1$ такая стоячая бочкообразная мода имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^\sigma \Big|_{\sigma=1} &= \operatorname{Re} \left\{ \left[\exp(i0\psi) - \frac{1}{a_j} (\exp(i\psi) - \exp(-i\psi)) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos \theta \exp(-i\omega t) \right\} = \\ &= \left(\cos \omega t - \frac{2}{a_j} \sin \psi \sin \omega t \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

При $t = 0$ возмущение определяется первым членом в (3.18) и имеет характерную бочкообразную форму (рис. 10а) с различными площадями сечения ядра при разных θ , а через четверть периода (при $t = \pi/(2\omega)$) это возмущение определяется вторым членом в (3.18) и сводится к простому наклону плоскости кольца (рис. 10б). Действительно, в линейном по возмущениям приближении член с $\sin \psi$ эквивалентен сдвигу сечения вихря как целого вдоль оси z . Тогда множитель $\cos \theta$ будет соответствовать наклону плоскости кольца под углом, определяемым множителем $(2/a_j) \sin \omega t$ по отношению к невозмущенному положению. На первый взгляд это кажется невозможным, поскольку импульс невозмущенного кольца направлен вдоль его оси, и без учета внутренней структуры возмущений импульс течения при таких колебаниях не сохранялся бы.

Ответ на этот кажущийся парадокс заключается в том, что возмущение импульса во второй фазе колебаний связано не только с наклоном оси кольца [38], но и с изменением внутренней структуры вихря, т.е. возмущение импульса имеет две составляющие. Используя выражение (2.26), получим, что первая составляющая, связанная с наклоном оси кольца, равна

$$\delta^2 P = \mathbf{e}_x \frac{2\pi^2}{\mu^2} \omega \sin \omega t,$$

где $\mathbf{e}_x$ — единичный вектор в плоскости кольца, соответствующий азимутальному углу $\theta = 0$. Вклад в импульс второй составляющей связан с реальным переносом

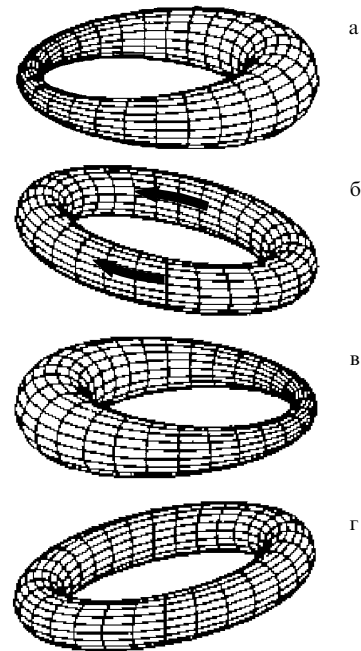


Рис. 10. Бочкообразная стоячая мода, $l = 0, n = \pm 1, j \geq 1$; бочкообразная деформация сопровождается в том же приближении изгибной деформацией, сдвинутой по фазе на $\pi/2$.

жидкости внутри вихревого кольца (поток жидкости изображен на рис. 10б стрелками), который характеризуется потоком жидкости $\Pi = (2\pi/a_j) \sin \theta \sin \omega t$ через сечение ядра. Это вторичное течение, приводящее к изменению площади сечения ядра, имеет, очевидно, импульс, направленный в противоположную сторону по отношению к импульсу, связанному с наклоном оси кольца. Вычисления импульса этого вторичного течения дают величину

$$\delta^2 P = -\mathbf{e}_x \frac{2\pi^2}{\mu^2} \omega \sin \omega t,$$

т.е. вклады двух составляющих равны по величине и противоположны по знаку. Таким образом, вклады в импульс двух составляющих возмущения (наклон плоскости кольца и течение в ядре кольца вдоль его средней линии) в точности компенсируют друг друга. Этот

пример особенно важен, поскольку демонстрирует наличие в главном приближении одновременно двух гармоник в собственных колебаниях вихревого кольца и позволяет независимым образом подтвердить правильность вычислений для этого конкретного случая.

Для изолированных колебаний с $l \geq 1$ возмущение границы вихря (рис. 9в, г) имеет вид

$$\xi^\sigma \Big|_{\sigma=1} = \exp[i(l+1)\psi] - \frac{\mu}{4} \exp(i\psi) - \frac{(2l+3)\mu}{4(l+1)} \exp[i(l+2)\psi] + O(\mu^2), \quad l \geq 1, \quad (3.19a)$$

$$\xi^\sigma \Big|_{\sigma=1} = \cos \psi - i \left(\frac{B_n}{A_n} \right)^{1/2} \sin \psi + O(\mu), \quad l = 0. \quad (3.19б)$$

В отличие от бесселевских (бочкообразных) колебаний, изолированные (изгибные) моды вихревого кольца в главном приближении совпадают с изолированными модами цилиндрического вихря не только по частоте, но и по форме.

Сравнение бесселевских и изолированных колебаний с соседними числами l и одинаковыми n дает еще один пример того, что динамика колебаний вихревого кольца определяется не только глобальной формой деформации средней линии кольца, но и структурой возмущений внутри ядра. Так, например, на рис. 11 приведены бесселевская мода с $l = 1, n = 2$ и изгибная мода с $l = 0, n = 2$ в последовательных фазах. Легко видеть, что изгибная

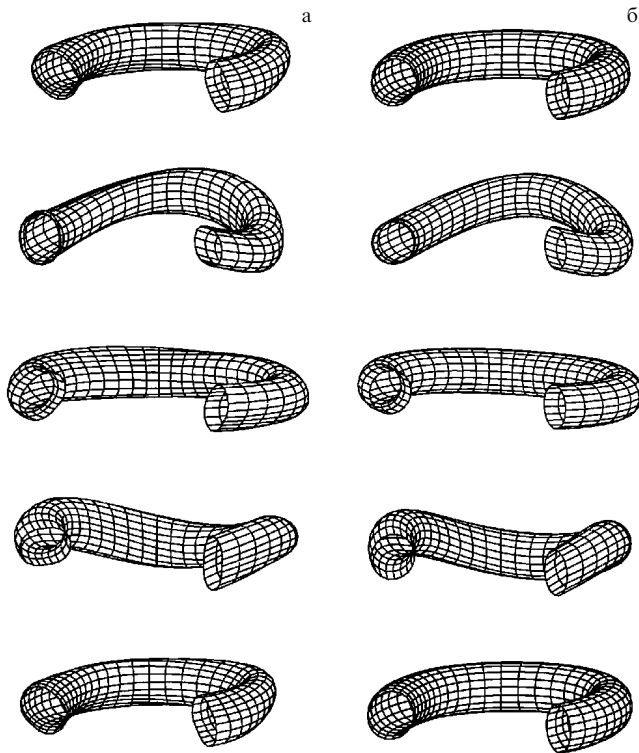


Рис. 11. Четыре фазы (один период) собственных колебаний для быстрых бесселевских мод $(1, 2, j)$ (а) и медленной изгибной моды $(0, 2, 0)$ (б). Для бесселевской моды изгиб сопровождается вращением эллиптической деформации ядра. Один и тот же изгиб средней линии соответствует собственным колебаниям, частоты которых различаются на несколько порядков.

деформация средней линии кольца для этих колебаний совпадает. Однако в бесселевской моде этот изгиб дополнительно сопровождается эллиптической деформацией сечения ядра. В результате эти моды, будучи похожими в отношении деформации средней линии, имеют частоты, отличающиеся на несколько порядков по μ .

3.4. Энергия возмущений

Найдем энергию возмущений для описанных выше колебаний вихревого кольца. Для вычисления энергии будем использовать выражение (2.35). Собственные колебания вихревого кольца представим в виде $\mathbf{e} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \exp(in\theta - i\omega t)$ где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы с действительными компонентами, зависящими от координат σ, ψ . Интегрирование по θ приводит к выражению

$$E = \frac{\pi\omega}{\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sigma^2 (a^\psi b^\sigma - a^\sigma b^\psi) d\sigma d\psi. \quad (3.20)$$

После интегрирования по ψ остаются вклады только от произведений одинаковых азимутальных гармоник.

Для бесселевских колебаний основной вклад в энергию дает l -я ψ -гармоника. Вычисляя интеграл (3.20), для случая $l \geq 1$ получим

$$E = \frac{\pi^2 l}{2\mu^2 n} a_j + O(\mu^{-1}). \quad (3.21)$$

Знак энергии зависит от знака a_j . Для опережающих бесселевских мод ($a_j > 0$) энергия положительна, а для отстающих ($a_j < 0$) отрицательна.

Для бочкообразных мод ($l = 0$) энергия положительна и имеет вид

$$E = \frac{\pi^2}{\mu} + O(1). \quad (3.22)$$

Для изолированных колебаний (включая осесимметричную моду) основной вклад в энергию дает $(l+1)$ -я ψ -гармоника. Вычисляя интеграл (3.20) для случая $l \geq 1, n \geq 0$, получим, что энергия отрицательна и имеет вид

$$E = -\frac{\pi^2}{2\mu} \frac{l}{l+1} + O(1). \quad (3.23)$$

И, наконец, для изгибных мод энергия положительна и определяется выражением

$$E = \frac{\pi^2 \mu}{4} B_n + O(\mu^2). \quad (3.24)$$

Таким образом, для вихревого кольца имеет место следующая ситуация. Все колебания с частотами вблизи нуля (бочкообразные и изгибные моды, $l = 0$) имеют положительную энергию. Все изолированные колебания с $l \geq 1$ имеют отрицательную энергию. Бесселевские моды могут иметь положительную или отрицательную энергию в зависимости от того, являются они опережающими или отстающими. Обратим внимание на то, что изолированная мода с отрицательной энергией может находиться как среди бесселевских мод с положительной энергией, так и среди бесселевских мод с отрицательной энергией в зависимости от соотношения величин n и l в формуле (3.11).

Выражения (3.21)–(3.24) получены для бегущих азимутальных волн вида $\exp(-i\omega t + in\theta)$. Для стоячих волн вида $\exp(-i\omega t) \cos(n\theta)$ интегрирование по θ в выражении (3.20) дает в два раза меньшую величину. То есть энергия стоячей волны оказывается равной половине энергии бегущей волны.

Аналогичные вычисления для цилиндрического вихря показывают, что энергия соответствующих колебаний на единицу длины в продольном направлении определяется выражениями (3.21)–(3.24), деленными на длину кольца $2\pi/\mu$.

Как будет видно из дальнейшего анализа, знак энергии колебаний определяет устойчивость или неустойчивость собственного колебания при рассмотрении профилей завихренности более общего вида.

4. Неустойчивость вихревого кольца со сглаженным профилем завихренности и возникновение турбулентности

В разделе 3 рассматривались колебания вихревого кольца в случаях, когда завихренность сосредоточена в тонком тороидальном ядре, и это ядро обтекается потенциальным течением. Представляет интерес выяснить, как влияют на свойства колебаний добавление слабого поля завихренности в обтекающее ядро вихря поток (в атмосфере кольца). Такое сглаживание профиля завихренности соответствует также и физике процесса. Действительно, по мере движения вихревого кольца завихренность должна проникать из вихревого ядра в окружающее течение вследствие вязкой диффузии.

Для выяснения механизма влияния завихренности на свойства колебаний сначала рассмотрим простейший осциллятор — круговой цилиндр, способный совершать самостоятельные упругие колебания, в двумерном циркуляционном потоке (потенциальном или завихренном). Для этой задачи может быть получено как точное решение (разделы 4.1.2, 4.1.3), так и приближенное решение (раздел 4.1.4), основанное на рассмотрении энергетического баланса в системе.

Оказалось, что появление монотонно убывающей завихренности в круговом потоке, обтекающем колеблющуюся границу цилиндра, может приводить к неустойчивости. Механизм этой неустойчивости легко понять в случае слабой завихренности, когда задача может быть решена методами возмущений. Показано, что неустойчивость рассматриваемого типа должна реализовываться всякий раз, когда одновременно выполняются два условия: во-первых, колебания осциллятора при потенциальном обтекании имеют положительную энергию, и, во-вторых, эти колебания при появлении монотонно убывающей завихренности сопровождаются появлением критических слоев.

Аналогичной неустойчивостью могут обладать и вихревые течения, в которых роль осциллятора играет колеблющаяся граница вихревого ядра, обтекаемая циркуляционным потоком. Оказалось, что простейшим вихрем, в котором может реализовываться такая неустойчивость, является вихревое кольцо (раздел 4.2). При этом в вихревом кольце потеря устойчивости происходит одновременно для множества мод, имеющих положительную энергию. В разделе 4.2.2 показано, что критическими слоями оказывается заполнена вся область от границы ядра до границы атмосферы кольца. В то же

время критические слои отсутствуют внутри вихревого ядра. В критических слоях амплитуды смещения жидких частиц достигают большой величины, что приводит к интенсивному перемешиванию жидкости в области атмосферы. Показано, что одновременно с этим в окрестности каждого критического слоя происходит интенсификация поля завихренности. Этот результат качественно согласуется с экспериментальными данными по структуре турбулентных вихревых колец [18, 19], обнаружившими резкую границу между ламинарным вихревым ядром и турбулентной атмосферой кольца. В разделе 4.3 рассмотрено возможное влияние нелинейности и вязкости на исследуемые процессы.

4.1. Влияние монотонно убывающей завихренности на свойства колебаний осциллятора.

Неустойчивость колеблющегося цилиндра в циркуляционном потоке идеальной жидкости

Исследуем прежде всего наиболее простую задачу, в которой проявляются характерные особенности неустойчивости, возникающей при колебаниях осциллятора в циркуляционном потоке. В этой задаче рассматривается жесткий цилиндр, колебания которого поддерживаются не динамикой завихренности, а непосредственно упругой пружиной. Предполагается, что циркуляционный поток имеет монотонно убывающий профиль завихренности. Оказалось, что такая простая система может оказаться неустойчивой. Рассматриваемая задача может быть решена без каких-либо приближений, и инкремент удастся получить непосредственно из точного дисперсионного соотношения [69]. В то же время в случае, когда завихренность мала, решение можно получить из рассмотрения энергетического баланса в системе. Такой подход позволяет не только найти правильное выражение для инкремента, но и понять физический механизм реализующейся неустойчивости. Полученная неустойчивость связана с возможностью передачи энергии от возмущений в критическом слое к колебаниям цилиндра. При этом суммарная энергия, естественно, не меняется, поскольку происходит одновременное нарастание возмущений, имеющих энергию разных знаков. Подробно механизм неустойчивости обсуждается в разделе 4.1.4.

4.1.1. Дисперсионное соотношение. Задача о колебаниях цилиндра в циркуляционном потоке является частным случаем общей задачи о движении произвольного тела в жидкости, которая подробно исследовалась, начиная с работ Кельвина и Тэта [5, 70, 71]. В то же время, как отмечено в [5], эта задача становится исключительно сложной в случае произвольного завихренного потока и, вообще говоря, допускает общее решение лишь в случае равномерно вращающейся жидкости. Из результатов этого направления отметим работы [72, 73] об устойчивости движения сферы в неоднородном потоке идеальной жидкости и работу [74] об устойчивости коаксиальных цилиндров с равномерно вращающейся жидкостью между ними. Отметим также новый подход в задаче исследования устойчивости системы "тело + жидкость", развиваемый в [75] и основанный на обобщении теорем Арнольда на случай движения произвольного твердого тела в завихренном потоке. Такой подход позволил сформулировать общие критерии устойчивости течения при весьма широких предположениях,

однако, как и для всех работ этого направления, такой подход не дает критериев неустойчивости системы.

Рассмотрим колебания простой системы в двумерном потоке с циркуляцией. Колебательная система состоит из кругового цилиндра, имеющего единичный радиус и массу M , способного смещаться в плоскости с декартовыми координатами x, y (рис. 12). Возвращающая сила характеризуется жесткостью пружины χ . Цилиндр обтекается несжимаемой идеальной жидкостью с единичной плотностью. В цилиндрической системе координат среднее течение имеет поля угловой скорости $U_0(\rho)$ и завихренности $\Omega_0(\rho)$, связанные соотношением $\Omega_0(\rho) = 2U_0 + \rho U'_0$. Предполагается, что $U_0(\rho)$ и $\Omega_0(\rho)$ являются монотонно убывающими функциями. Задача решается в линейном приближении по амплитуде возмущений.

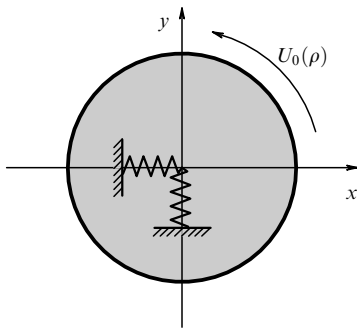


Рис. 12. Осциллятор (круговой цилиндр на пружинах) в циркуляционном потоке.

Как известно [76], плоское круговое течение с монотонно убывающим профилем завихренности около неподвижного цилиндра устойчиво по отношению к двумерным возмущениям. Также устойчивыми являются, очевидно, и колебания осциллятора при отсутствии циркуляционного течения жидкости. Вместе с тем, как будет показано, совместные колебания этой системы в широком диапазоне параметров, характеризующих систему, оказываются неустойчивыми.

Для вычисления возмущений, создаваемых в потоке колеблющимся цилиндром, воспользуемся уравнениями для поля смещения ξ (2.9а). Применяя к уравнению (2.9а) операцию rot и используя условие бездивергентности поля смещения, для возмущений вида $\exp(-i\omega t + im\varphi)$ получим следующее уравнение для ρ -компоненты поля ξ с условиями непротекания на границе колеблющегося цилиндра и убывания возмущений на бесконечности:

$$\frac{d^2 \xi^\rho}{d\rho^2} + \left(\frac{3}{\rho} + \frac{2mU'_0}{mU_0 - \omega} \right) \frac{d\xi^\rho}{d\rho} + \frac{1 - m^2}{\rho^2} \xi^\rho = 0, \quad \xi^\rho|_{\rho=1} = \xi_0, \quad \xi^\rho|_{\rho=\infty} = 0. \quad (4.1)$$

Это уравнение является аналогом известного уравнения Рэлея для потоков с круговыми линиями тока, записываемого обычно для функции тока A [76] в виде

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - \left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{m\Omega'_0}{\rho(mU_0 - \omega)} \right) A = 0. \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1) и (4.2) имеют особенность в критическом слое $\rho = \rho_c$, определяемом из соотношения $U_0(\rho_c) =$

$= \omega/m$. Эти уравнения эквивалентны с учетом соотношения $v^\rho = imA/\rho = (-i\omega + imU_0)\xi^\rho$, которое следует из определения функции тока и уравнения (2.9а).

Преимущество уравнения (4.1) для описания возмущений проявляется для гармоник $m = \pm 1$. В этом случае последнее слагаемое в (4.1) обращается в нуль, что позволяет сразу выписать общее решение

$$\xi^\rho(\rho) = C_1 + C_2 I(\rho), \quad (4.3)$$

$$I(\rho) = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho^3 (mU_0 - \omega)^2}.$$

Возможность получения общего решения в случае $m = \pm 1$ показана в [76]. Первое слагаемое в (4.3) соответствует постоянному векторному полю ξ с контравариантными компонентами $\xi^\rho(\rho, \varphi) = C_1 \exp(\pm i\varphi)$, $\xi^\varphi(\rho, \varphi) = (\pm i/\rho)C_1 \exp(\pm i\varphi)$ и представляет собой простой сдвиг течения как целого. Именно наличие этого элементарного возмущения среди решений позволяет получить в аналитическом виде общее решение для течения с произвольным профилем скорости $U_0(\rho)$.

Ограничимся далее случаем $m = 1$. Этому случаю при $\omega > 0$ соответствует вращение цилиндра по потоку (против часовой стрелки; см. рис. 12). Константы C_1 и C_2 в решении (4.3) найдем из граничных условий (4.1). В результате получим, что возмущения, создаваемые в потоке колеблющимся цилиндром, имеют вид

$$\xi^i(\rho, \varphi, t) = \xi^i(\rho) \exp(-i\omega t + i\varphi),$$

$$\xi^\rho(\rho) = \frac{I(\rho, \omega)}{I_0(\omega)} \xi_0, \quad (4.4)$$

где $I_0(\omega)$ есть значение функции $I(\rho, \omega)$ при $\rho = 1$. Компонента ξ^φ может быть найдена из условия бездивергентности поля ξ .

Для получения уравнения, описывающего колебания системы, найдем возмущение давления p_b на границе колеблющегося цилиндра. Используя систему уравнений Эйлера, выразим возмущение давления через поле смещения:

$$p = (\omega^2 - U_0^2) \rho \xi^\rho + (U_0 - \omega)^2 \rho^2 \frac{d\xi^\rho}{d\rho}. \quad (4.5)$$

Суммарное давление в каждой точке пространства будет $P_0 + p$, где P_0 — стационарное поле давления в исходном положении, p — возмущение давления в потоке (4.5). Поскольку нас интересует величина давления не в фиксированной точке пространства, а на поверхности движущегося цилиндра, то для этой величины в линейном приближении получим $p_b = \xi_0 dP_0/d\rho + p$, где $dP_0/d\rho$ и p взяты на невозмущенной границе цилиндра $\rho = 1$. Используя точное соотношение $dP_0/d\rho = \rho U_0^2$ и уравнение (4.5), получим

$$p_b = \left[\omega^2 - \frac{1}{I_0(\omega)} \right] \xi_0. \quad (4.6)$$

Возвращающая сила складывается из силы пружины и силы давления, которая находится интегрированием (4.6) по границе цилиндра. Баланс сил, действующих на цилиндр, выражается соотношением $(-M\omega^2 + k)\xi_0 = -\pi p_b$. Отсюда и из (4.6) получим дисперсионное

соотношение

$$D(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + \gamma \left(\omega^2 - \frac{1}{I_0(\omega)} \right) = 0, \quad (4.7)$$

$$I_0(\omega) = \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^3 [U_0(\rho) - \omega]^2}, \quad (4.8)$$

где $\gamma = \pi/M$ — отношение массы вытесненной жидкости к массе цилиндра, $\omega_0^2 = \chi/M$. Подынтегральное выражение в (4.8) имеет особенность в точке $\rho = \rho_c$, где $U_0(\rho_c) = \omega$.

В частном случае потенциального течения угловая скорость имеет вид $U_0(\rho) = U_M/\rho^2$, и интеграл (4.8) легко вычисляется:

$$I_0 = [2\omega(\omega - U_M)]^{-1}. \quad (4.9)$$

Тогда из дисперсионного соотношения (4.7) получим

$$\omega_{1,2} = \frac{\gamma U_M}{1 + \gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma U_M}{1 + \gamma} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{1 + \gamma}}. \quad (4.10)$$

Следовательно, в случае потенциального потока рассматриваемая колебательная система обладает двумя действительными собственными частотами $\omega_{1,2}$ при любых параметрах системы. В случае если жидкость покоится, из (4.10) получим $\omega_{1,2} = \pm \omega_0/\sqrt{1 + \gamma}$. Этот результат соответствует колебаниям осциллятора с учетом присоединенной массы жидкости. Наконец, случай $\gamma = 0$ соответствует невесомой жидкости, которая, очевидно, не влияет на частоту колебаний осциллятора, равную ω_0 .

4.1.2. Точное решение для частного случая завихренности вида $\Omega_0 = \Omega_M/\rho$. Для этого течения поле угловой скорости имеет вид $U_0 = \Gamma/\rho^2 + \Omega_M/\rho$, где первое слагаемое соответствует потенциальной составляющей течения, а второе — вкладу завихренности. В рассматриваемом случае интеграл (4.8) вычисляется точно и равен

$$I_0 = \frac{2\Gamma + \Omega_M}{4Q^2(\omega - \Gamma - \Omega_M)} + \frac{\Omega_M}{8Q^3} \ln \frac{P - Q}{P + Q}, \quad (4.11)$$

где $P = \omega - \Omega_M/2$, $Q = \sqrt{\Gamma\omega + \Omega_M^2/4}$. Логарифмическая функция в комплексной плоскости ω имеет разрез на отрезке $0 < \omega < U_M$, где $U_M = \Gamma + \Omega_M$. Для выбора ветви логарифмической функции использовано то, что $I_0(\omega)$ является положительной действительной величиной при $\omega > U_M$. Подставляя (4.11) в равенство (4.7), получим трансцендентное уравнение, определяющее собственные частоты системы. Мы не будем проводить полное исследование уравнения (4.11). Ограничимся исследованием того, как влияет циркуляционный поток на две собственные частоты осциллятора в зависимости от параметров γ и ω_0 .

При $\gamma = 0$ (очень тяжелый цилиндр) жидкость не влияет на колебания осциллятора и система имеет два собственных колебания с частотами $\omega_{1,2} = \pm \omega_0$. При увеличении γ (уменьшение массы цилиндра) частота ω_2 остается действительной, а частота ω_1 ведет себя поразному в зависимости от соотношения величин ω_0 и U_M .

Если $\omega_0 < U_M$, то при $0 < \gamma < \gamma_0$, где $\gamma_0 = 1 - \omega_0^2/U_M^2$, эта собственная частота расщепляется на две комплексно сопряженные частоты (рис. 13), одна из которых соответ-

ствует неустойчивым, а другая — затухающим колебаниям; при $\gamma = \gamma_0$ эти частоты становятся действительными и сливаются в одну собственную частоту $\omega_1 = U_M$; при $\gamma > \gamma_0$ эта частота является действительной и возрастает от U_M до ω_∞ , где ω_∞ есть решение уравнения $\omega_\infty^2 I(\omega_\infty) = 1$.

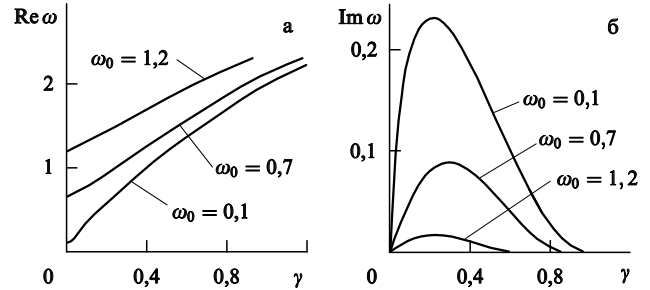


Рис. 13. (а) Действительная часть, (б) мнимая часть собственной частоты для неустойчивой моды в зависимости от параметра γ . Мнимая часть затухающей моды зеркально симметрична относительно оси γ .

Если $\omega_0 > U_M$, то собственная частота ω_1 так же, как и ω_2 , остается действительной при всех значениях γ , т.е. рассматриваемые колебания остаются устойчивыми при любой массе цилиндра.

Таким образом, при $\gamma < 1$ существует диапазон частот ω_0 , при которых возникает неустойчивость. При приближении γ к единице этот диапазон сужается, а при $\gamma \geq 1$ неустойчивость исчезает.

4.1.3. Случай слабой завихренности (решение дисперсионного уравнения). Далее будем предполагать, что обтекающий поток слабозавихрен ($\Omega_M \ll U_M$). В этом случае удастся получить общие выражения для интеграла (4.8) и величины инкремента. С помощью точных соотношений $\Omega_0 = 2U_0 + \rho U_0'$, $\Omega_0' = (U_0' \rho^3)' / \rho^2$ и интегрирования по частям выражение (4.8) преобразуется к виду

$$I_0 = \frac{1}{2\omega(\omega - U_M)(1 - \Omega_M/(2U_M))} - \int_0^{U_M} \frac{f(z)}{z - \omega} dz, \quad (4.12)$$

где

$$f(z) = \frac{U_0 \Omega_0'}{\omega U_0'^3 \rho^4}, \quad z = U_0(\rho),$$

штрихом обозначено дифференцирование по ρ . Поскольку завихренность и ее производная предполагаются малыми, то можно пренебречь величиной $\Omega_M/(2U_M)$ в первом члене, а также, казалось бы, всем вторым членом. Однако, отбрасывая второй член, следует соблюдать осторожность, поскольку интеграл типа Коши [77] может принимать не только действительные, но и комплексные значения. В то же время наличие даже малой мнимой добавки в дисперсионном соотношении может вызвать неустойчивость, т.е. качественно изменить всю картину течения.

Рассмотрим интегральный член в (4.12). Как известно, интеграл типа Коши имеет разрыв вдоль контура интегрирования (здесь контуром интегрирования является отрезок действительной оси от 0 до U_M),

определяемый формулами Сохоцкого. Следуя [77], выделяем под интегралом особенность и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_0^{U_M} \frac{f(z) dz}{z - \omega} &= \int_0^{U_M} \frac{f(\omega)}{z - \omega} dz + \int_0^{U_M} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz = \\ &= f(\omega) \ln \frac{\omega - U_M}{\omega} + \int_0^{U_M} \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} dz. \end{aligned}$$

В последнем равенстве интеграл определяет регулярную функцию, действительную и конечную для всех действительных значений ω , а первый член — многозначную функцию, регулярная ветвь которой может быть выбрана с помощью аналитического продолжения от действительных значений $\omega > U_M$, при которых интеграл $\int_0^{U_M} dz/(\omega - z)$ является неособым и имеет действительную положительную величину. На разрезе от 0 до U_M разрывной является только мнимая часть интеграла. Поскольку при аналитическом продолжении при переходе от больших значений ω к значению на разрезе точка U_M обходится сверху и логарифм получает приращение аргумента $+i\pi$, то мнимая часть интеграла равна на верхнем берегу разреза величине $+i\pi f(\omega)$. На нижнем берегу мнимая часть равна $-i\pi f(\omega)$, поскольку точка U_M обходится снизу.

Теперь воспользуемся условием малости завихренности и ее производных. Оставляя в реальной и мнимой частях I_0 только главные по величине малой завихренности члены, получим, что на действительной оси ω

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2\omega(\omega - U_M)} \pm i\pi f(\omega) + O\left(\frac{\Omega_M}{U_M}\right), \\ f(\omega) &= \frac{\Omega'_0}{\rho^4(U'_0)^3} \Big|_{\rho=\rho_c(\omega)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где координата критического слоя ρ_c определяется из соотношения $U_0(\rho_c) = \omega$, знаки $\pm$ соответствуют верхнему и нижнему берегам разреза $0 < \omega < U_M$. Появление чисто мнимой части в интеграле (4.13) и соответственно в дисперсионном соотношении показывает, что частота колебаний в интервале от 0 до U_M не может оставаться действительной, в отличие от случая потенциального обтекания. Отметим также, что выражение (4.11) в случае малой завихренности естественно переходит в общее выражение (4.13).

Поскольку мнимая добавка к I_0 мала, то мала будет и мнимая добавка к частоте, т.е. собственную частоту можно представить в виде $\omega = \omega_R + i\delta$, $\delta/\omega_R \ll 1$. Ограничиваясь главными членами, получим в результате систему уравнений для нахождения действительной ω_R и мнимой δ частей собственной частоты:

$$(\gamma + 1)\omega_R^2 - 2\omega_R\gamma U_M - \omega_0^2 = 0, \quad (4.14a)$$

$$\begin{aligned} (\gamma + 1) \left(\omega_R - \frac{\gamma U_M}{\gamma + 1} \right) \delta &= \pm 2\pi\gamma f(\omega_R) \omega_R^2 (\omega_R - U_M)^2, \\ 0 < \omega_R < U_M. \end{aligned} \quad (4.14b)$$

Если $\omega_R \leq 0$ или $\omega_R \geq U_M$, то $\delta = 0$. В уравнении (4.14b) для нарастающих колебаний надо брать знак плюс, а для убывающих — минус.

Уравнение (4.14a) совпадает с уравнением для случая потенциального потока и приводит к двум корням вида

(4.10). Один из этих корней положительный, а другой отрицательный. Отрицательный корень для нас не представляет интереса, поскольку для него не возникает мнимой части в I_0 и такое колебание всегда устойчиво. Учет малой завихренности в следующем приближении может лишь несколько смещать эту частоту вдоль действительной оси. Рассмотрим далее только корень с положительной реальной частью

$$\omega_R = \frac{\gamma U_M}{1 + \gamma} + \sqrt{\left(\frac{\gamma U_M}{1 + \gamma} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{1 + \gamma}}. \quad (4.15)$$

Если параметры системы таковы, что $0 < \omega_R < U_M$, то частота ω является комплексной, и для вычисления ее мнимой части используем (4.14b). При этом знак плюс, соответствующий верхнему берегу разреза, надо брать для растущих колебаний ($\delta > 0$), а знак минус — для затухающих ($\delta < 0$). Решения существуют, если эти знаки соответствуют знаку δ , определяемому из уравнения (4.14b). Поскольку в рассматриваемом случае $\omega_R - \gamma U_M/(\gamma + 1) > 0$ и $f(\omega_R) > 0$, то знак δ , получаемый из (4.14b), согласуется с предположением о знаке правой части в этом уравнении. В результате получим

$$\delta = \pm \frac{2\pi\gamma f(\omega_R) \omega_R^2 (\omega_R - U_M)^2}{\sqrt{\omega_0^2(1 + \gamma) + \gamma^2 U_M^2}}. \quad (4.16)$$

Таким образом, собственная частота ω_1 расщепляется на пару комплексно сопряженных частот, одна из которых соответствует неустойчивому колебанию, а другая — затухающему (рис. 14).

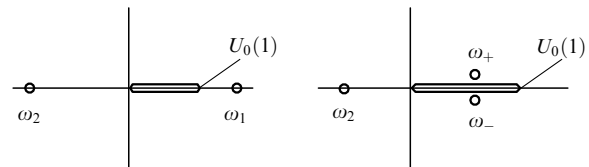


Рис. 14. Расщепление собственной частоты ω_1 при попадании ее на разрез.

Отметим, что если бы знаки левой и правой частей в (4.16) различались (например, в случаях $\gamma < 0$ или $\Omega'_0(\rho_c) > 0$), то это означало бы, что непрерывных решений уравнения (4.1), убывающих на бесконечности, не существует. Такая ситуация имеет место в задаче о колебаниях вихря Кельвина в слабо завихренном потоке. Появление убывающей завихренности в среднем течении вне ядра вихря приводит к уходу собственных частот с верхнего (причинного) листа плоскости ω под разрез на нефизический лист [78].

Пренебрегая слабой завихренностью в выражении для среднего течения, из (4.16) получим

$$\delta = - \frac{\gamma \pi \rho_0 \Omega'_0(\rho_0) (\omega_R - U_M)^2}{4U_M [(1 + \gamma)\omega_R - \gamma U_M]}, \quad (4.17)$$

где $\rho_0 = \text{Re}(\rho_c)$, величина ρ_0 в главном приближении определяется соотношением $\omega_R = U_M/\rho_0^2$.

Заметим, что описанная неустойчивость не может реализовываться для течений с $\gamma > 1$ (легкий цилиндр).

Действительно, для возникновения неустойчивости необходимо выполнение условия $\omega_R < U_M$. Это условие с использованием (4.15) легко переписывается в виде $\omega_0^2/U_M < 1 - \gamma$, что при $\gamma \geq 1$ невозможно, так как U_M — положительная величина. Напротив, при $\gamma < 1$ (тяжелый цилиндр) всегда существует диапазон параметров осциллятора, при которых течение будет неустойчиво. Этот результат согласуется с численным анализом рассмотренного выше случая завихренности произвольной величины и полностью соответствует критерию устойчивости для легкого цилиндра, полученному в [75].

4.1.4. Случай слабой завихренности (энергетический подход). Исследуем полученный выше эффект потери устойчивости осциллятора в циркуляционном потоке с точки зрения баланса энергии в системе. В случае слабозавихренного течения ($\Omega_0 \ll U_0$) закон сохранения энергии позволяет сравнительно простым образом найти мнимые добавки к собственным частотам. Кроме того, энергетический подход одинаково хорошо применим как для колебаний с $m = 1$, так и для произвольного m , когда решение вида (4.3) построить не удается.

Рассмотрим возмущения вида $\exp(-i\omega t + im\varphi)$ с произвольным номером гармоники m . В случае слабой завихренности для описания возмущений с произвольным m удобнее использовать не поле смещения ξ , как это делалось выше, а функцию тока A , поскольку в уравнении (4.2) влияние малой завихренности локализовано в последнем члене, который мал почти везде, кроме окрестности особой точки. Используя методы возмущений, можно показать, что решение, удовлетворяющее граничному условию на поверхности цилиндра и условию на бесконечности, представляется в виде [79]

$$A = A_0(\rho)(1 + \alpha g(\rho)), \quad g(\rho) = (\rho - \rho_c) \ln(\rho - \rho_c) + g_1(\rho), \quad \alpha = \frac{\Omega'_0(\rho_c)}{\rho_c U'_0(\rho_c)} \ll 1, \quad (4.18)$$

где $A_0(\rho) = (U_M - \omega/m)\xi_0 \rho^{-m}$ — решение задачи о колебаниях цилиндра с амплитудой ξ_0 в потенциальном потоке; $g_1(\rho)$ — непрерывно дифференцируемая на действительной оси и ограниченная при $\rho \rightarrow \infty$ функция; регулярная особая точка $\rho = \rho_c$ определяется условием $mU_0(\rho_c) = \omega$.

Выражение (4.18) показывает, что само решение остается непрерывным в окрестности особой точки. Разрывной оказывается только производная функции тока. Этот разрыв связан с наличием логарифмического члена в $A(\rho)$ и обуславливает скачок мнимой части φ -компоненты скорости на критическом слое. В потенциальном течении этот скачок отсутствует, а для завихренного течения, как будет показано ниже, он приводит к появлению потока энергии из окрестности критического слоя, в результате чего система теряет устойчивость. Найдем величину скачка $\text{Im } v^\varphi$.

Для слабозавихренного течения ($\alpha \ll 1$) частоты собственных колебаний мало отличаются от собственных частот осциллятора в потенциальном потоке ω_u , т.е. $\omega = \omega_u + O(\alpha)$ (для колебаний с $m = 1$ частоты ω_u определяются соотношением (4.10)). Для комплексной частоты ω особая точка ρ_c также является комплексной

и расположена вблизи действительной оси в точке

$$\rho_c = \rho_0 + i \frac{\delta}{m U'_0(\rho_0)} + O(\alpha^2), \quad (4.19)$$

где $\delta = \text{Im } \omega = O(\alpha)$, $\rho_0 = \text{Re } \rho_c$, линия тока $\rho = \rho_0$ соответствует критическому слою в течении. Рассмотрим окрестность критического слоя $\rho_0 - \Delta < \rho < \rho_0 + \Delta$, где $\alpha \ll \Delta \ll 1$. Поскольку сдвиг особой точки ρ_c в комплексную область, определяемый соотношением (4.19), имеет величину, много меньшую, чем Δ , то на этом интервале функция $\ln(\rho - \rho_c)$ получает приращение $\pm i\pi$, где знак определяется расположением особой точки — в верхней или нижней полуплоскости. Поскольку $U'_0 < 0$, то для нарастающих колебаний особенность лежит в нижней полуплоскости, а для убывающих — в верхней. В соответствии с этим знак минус выбирается для $\delta > 0$, а знак плюс — для $\delta < 0$. Используя (4.18) и выражения, связывающие поле скорости с функцией тока, получим

$$\text{Im } v^\varphi \Big|_{\rho=\rho_0+\Delta} - \text{Im } v^\varphi \Big|_{\rho=\rho_0-\Delta} = \pm \frac{\pi\alpha}{m} |v_0^\rho(\rho_0)| + O(\alpha\Delta), \quad (4.20)$$

где $v_0^\rho = imA_0/\rho$ — ρ -компонента скорости, вычисленная для случая потенциального потока, знаки плюс и минус соответствуют случаям $\delta > 0$ и $\delta < 0$.

Рассмотрим теперь баланс энергии между малой областью $|\rho - \rho_0| < \Delta$ и всем остальным течением. Величина потока энергии через произвольную линию $\rho = \text{const}$ является квадратичной величиной по амплитуде возмущений и равна [80]

$$J = \int_0^{2\pi} \text{Re}(p + \rho^2 U_0 v^\varphi) \text{Re}(v^\rho) \rho d\varphi = \frac{\pi\rho^3}{m} \text{Re}(\omega v^{\rho*} v^\varphi).$$

В этом выражении положительным выбрано направление внешней нормали. Поток энергии из окрестности критического слоя определяется разницей значений J на границах этой области, т.е. $\Delta J = J|_{\rho=\rho_0+\Delta} - J|_{\rho=\rho_0-\Delta}$. Для собственных колебаний в потенциальном течении $\Delta J = 0$, поскольку частота колебаний системы ω_u и компонента поля скорости v_u^φ действительные, а компонента v_0^ρ чисто мнимая. В случае завихренного течения поток энергии ΔJ отличен от нуля. В главном приближении он определяется скачком $\text{Im } v^\varphi$. Используя выражение (4.20), получим

$$\Delta J = \pm \frac{\pi^2 \alpha \omega_u \rho_0^3}{m^2} |v_0^\rho(\rho_0)|^2 + O(\alpha^2). \quad (4.21)$$

Таким образом, величина потока энергии ΔJ для слабозавихренного течения может быть выражена через ρ -компоненту скорости v_0^ρ , найденную из решения более простой задачи с $\alpha = 0$, а влияние завихренности на колебания системы определяется только величиной параметра α .

Будем теперь рассматривать окрестность критического слоя как отдельную подсистему, которая является источником или стоком энергии в зависимости от знака потока энергии ΔJ . Тогда оставшаяся область течения является другой подсистемой с изменяющейся энергией E . Очевидно, что величины ΔJ и E связаны уравнением энергетического баланса $\Delta J = dE/dt$.

Вне окрестности критического слоя форма возмущений и их энергия в главном приближении находятся из решения с $\alpha = 0$. Поскольку энергия потенциальных

возмущений около колеблющегося цилиндра определяется только амплитудой колебаний, то медленное изменение энергии возмущений E в слабозавихренном течении может происходить только за счет изменения амплитуды $\varepsilon(t) = \varepsilon(0) \exp(\delta t)$. Энергия E квадратично зависит от амплитуды колебаний, поэтому уравнение баланса энергии приведет к следующему выражению для инкремента (декремента) колебаний:

$$\delta = \frac{\Delta J}{2E}. \quad (4.22)$$

Таким образом, рассмотрение энергетического баланса в системе позволяет определить сдвиг δ собственных частот в комплексную плоскость, не решая полную задачу о возмущениях в завихренном потоке. Для этого оказывается достаточно решить задачу о возмущениях в потенциальном циркуляционном течении, с помощью которого определяется поток энергии ΔJ и энергия E .

Заметим, что в отличие от внешней области, где энергия возмущений мало изменяется при переходе от потенциального к слабозавихренному течению, во внутренней области (в окрестности критического слоя), наоборот, происходит сильное изменение энергии возмущений. Действительно, для потенциального течения энергия возмущений E' в малой окрестности линии $\rho = \rho_c$ пропорциональна площади этой области, т.е. $E' \ll E$. В случае слабозавихренного течения суммарная энергия неустойчивых колебаний должна быть равна нулю, так как иначе при возрастании амплитуды колебаний энергия не сохранялась бы; в этом случае должно быть $E + E' = 0$, т.е. $E' \approx -E$.

Соотношение (4.22) является следствием закона сохранения энергии и поэтому имеет универсальный характер. Преимущества описанного подхода особенно важны в задачах об устойчивости течений со сложной структурой поля завихренности (например, вихревого кольца). Действительно, при вычислении потока энергии ΔJ в уравнении (4.22) достаточно знать возмущение скорости в приближении потенциального внешнего обтекания осциллятора и использовать формулу (4.21), поскольку поток энергии определяется только локальной структурой течения в окрестности критического слоя. При этом, очевидно, не важно, какова причина колебаний — упругость цилиндра или колебания вихревого ядра. В свою очередь энергия возмущений E зависит от характера осциллятора (цилиндр на пружине, колебания вихря и т.д.), и ее необходимо вычислять в каждом конкретном случае, однако эту энергию также достаточно вычислить лишь в приближении потенциального обтекания.

Обратим внимание на то, что знак величины ΔJ определяется в (4.21) в зависимости от знака δ . В свою очередь знак δ в соответствии с (4.22) определяется соотношением знаков ΔJ и E . Это обстоятельство может приводить к двум существенно различным ситуациям (ср. замечание после (4.16)).

В случае $E > 0$ уравнения (4.21) и (4.22) имеют два решения: с $\delta > 0$, $\Delta J > 0$ и с $\delta < 0$, $\Delta J < 0$. То есть в этом случае появление критического слоя приводит к расщеплению собственной частоты на пару комплексно сопряженных частот, и система становится неустойчивой. Механизм такой неустойчивости аналогичен механизму неустойчивости Майлса ветровых волн на воде [47, 81],

при котором волна на поверхности тяжелой жидкости (с положительной энергией) взаимодействует с критическим слоем в неоднородном ветровом потоке. В случае $E < 0$ соотношение (4.22) будет несовместно с выражением (4.21) для потока энергии ΔJ ни для положительных, ни для отрицательных δ .

Используя результаты [82], получим, что для собственных колебаний с $m = 1$ (вращение центра цилиндра вокруг положения равновесия в потенциальном потоке) энергия E имеет вид

$$E = \frac{M}{2} [(\gamma + 1)\omega_{1,2}^2 + \omega_0^2] \xi_0^2,$$

где $\omega_{1,2}$ — собственные частоты, определяемые из уравнения (4.10). Поскольку E положительна, то система может стать неустойчивой в области частот $0 < \omega < U_M$. Неустойчивым будет колебание с частотой ω_1 , поскольку именно у него имеется критический слой. Из (4.21) и (4.22) в главном приближении получим

$$\delta = -\frac{\pi\gamma\omega_1(\omega_1 - U_M)^2\rho_0\Omega'_0(\rho_0)}{2U_M[(\gamma + 1)\omega_1^2 + \omega_0^2]}. \quad (4.23)$$

С учетом выражения (4.15) эта формула полностью совпадает с (4.17). Таким образом, рассмотрение энергетического баланса в системе позволяет не только понять механизм неустойчивости, но и получить точное выражение для инкремента.

4.2. Неустойчивость бесселевских и бочкообразных колебаний вихревого кольца

Описанная выше неустойчивость упругого цилиндра в циркуляционном потоке с убывающей завихренностью реализуется за счет того, что окрестность критического слоя оказывается источником энергии для нестационарных возмущений. Как мы видим, механизм этой неустойчивости имеет достаточно общий характер. Он реализуется всякий раз, когда колеблющийся осциллятор обладает положительной энергией, и эти колебания сопровождаются появлением критических слоев. При этом, очевидно, не имеет значения, что является причиной возмущений в течении — колеблющийся жесткий цилиндр или какой-либо другой осциллятор. Появление критического слоя связано только с соотношением фазовой скорости колебаний и угловой скорости среднего потока.

4.2.1. Устойчивость вихря Ранкина. На первый взгляд, неустойчивость рассматриваемого типа могла бы быть реализована для цилиндрического вихря Ранкина, рассмотренного в разделе 3.2. Граница вихревого ядра в этом течении играла бы роль осциллятора, обтекаемого циркуляционным потоком. Добавление слабого поля завихренности в поток, обтекающий ядро, могло бы приводить к появлению критических слоев и к сдвигу действительных частот в комплексную плоскость. Однако более тщательный анализ показывает, что рассмотренный механизм неустойчивости не реализуется ни для каких колебаний цилиндрического вихря. Действительно, для изолированных колебаний с $l \geq 1$ хотя и возникает критический слой, но энергия этих колебаний отрицательна (см. раздел 3.4). Изгибная мода имеет положительную энергию, но ее угловая фазовая скорость направлена против потока, и поэтому критичес-

кий слой не возникает (см. (3.46)). Очевидно, не возникает критический слой и для бочкообразных колебаний (угловая фазовая скорость ω/m у этих колебаний равна бесконечности), имеющих положительную энергию. Бесселевские колебания с $l \geq 1$ могут быть двух типов — опережающие и отстающие с угловой фазовой скоростью, соответственно большей или меньшей, чем скорость потока на границе вихря (см. замечание после (3.3)). Положительной энергией обладают только опережающие моды, но для них не возникает критический слой, так как их фазовая скорость больше, чем угловая скорость потока во всем течении. Отстающие бесселевские колебания, наоборот, обладают критическим слоем, но их энергия отрицательна. Таким образом, вихрь Ранкина со сглаженным профилем завихренности не обладает описанной выше неустойчивостью, чего, впрочем, можно было ожидать, поскольку известно, что цилиндрический вихрь с монотонно убывающим профилем завихренности устойчив [76, 83].

4.2.2. Неустойчивость вихревого кольца. Для вихревого кольца ситуация оказывается принципиально иной, что связано с различием в форме колебаний цилиндрического вихря и вихревого кольца. Оба условия возникновения описанной неустойчивости выполняются для целого семейства колебаний вихревого кольца.

Как было показано (см. замечание после формулы (3.15)), для бесселевских колебаний вихревого кольца с частотным числом l (включая бочкообразные моды с $l = 0$) деформация границы ядра в главном приближении представляет собой сумму l -й и $(l + 1)$ -й гармоник, а возмущение скорости вне ядра — $(l + 1)$ -ю гармонику. Это отличает бесселевские колебания вихревого кольца от аналогичных колебаний цилиндрического вихря, содержащих одну только l -ю гармонику. Присутствие $(l + 1)$ -й гармоники приводит к тому, что критический слой возникает для всех бесселевских колебаний вихревого кольца, а не только для отстающих, как это было для цилиндрического вихря.

Таким образом, для опережающих бесселевских колебаний вихревого кольца (включая бочкообразные моды) выполняются оба условия возникновения сдвиговой неустойчивости: колебания имеют положительную энергию и сопровождаются возникновением критического слоя. Это означает, что при добавлении монотонно убывающей завихренности в поток, обтекающий ядро вихря, эти колебания теряют устойчивость.

Полное рассмотрение спектральной задачи для вихревого кольца с произвольным профилем завихренности представляет собой очень сложную задачу. Однако в том случае, когда завихренность в области вне ядра мала ($\alpha \ll 1$), можно найти инкремент неустойчивости на основе рассмотрения баланса энергии в системе, т.е. тем методом, который был использован выше для колеблющегося цилиндра в циркуляционном потоке.

Отметим некоторые особенности возникновения критических слоев для вихревого кольца по сравнению с течением цилиндрической геометрии. Во-первых, линии тока в вихревом кольце имеют круговую форму только в главном приближении по параметру $\mu\rho$. Поэтому условием резонансного взаимодействия между средним течением и нестационарными возмущениями, вообще говоря, является не условие совпадения скорости течения с фазовой скоростью возмущений, а условие совпа-

дения периода колебаний с периодом обращения жидких частиц. Во-вторых, колебания вихревого кольца представляют собой сумму различных гармоник $\exp(im\psi)$, каждой из которых соответствует свой период обращения $T_m = 2\pi m/\omega$. Таким образом, для каждого собственного колебания возникает множество критических слоев, соответствующих различным гармоникам. Однако эти особенности проявляются не в главном, а в более высоких приближениях по μ . В главном приближении динамику каждого колебания определяет только один критический слой, форма которого в этом приближении является круговой.

Таким образом, для вычисления величин инкрементов неустойчивости для колебаний вихревого кольца достаточно:

а) иметь решение для случая потенциального потока вне ядра и на основе этого решения найти энергию E колебаний;

б) найти поток энергии ΔJ из окрестности критического слоя.

Решения задачи а) для колебаний вихревого кольца приведены в разделе 3 и величины энергии E получены в разделе 3.5. Для вычисления потока энергии ΔJ в задаче б) мы можем воспользоваться общим выражением (4.21), полученным при рассмотрении задачи о колебаниях цилиндра, для чего необходимо только найти те линии тока, на которых располагаются критические слои, соответствующие различным модам.

Для бесселевских мод возмущение скорости вне ядра в соответствии с (3.16) имеет вид $(l + 1)$ -й гармоники. Учитывая, что такие возмущения имеют фазовую угловую скорость $U_p = \omega/(l + 1)$, а угловая скорость стационарного течения вне ядра есть

$$U_0 = \frac{1}{2\rho^2} [1 + O(\rho\mu)],$$

получим, что для бесселевских (и бочкообразных) мод критические слои расположены на линиях тока $\rho = \rho_0 [1 + O(\mu)]$, где

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{l+1}{2\omega}}, \quad \omega = \frac{l}{2} + \frac{\mu n}{a_j} + O(\mu^2), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Легко видеть, что все критические слои располагаются вне ядра вихревого кольца и при увеличении числа l сгущаются к его границе. Вычислим величины инкрементов неустойчивости. Для этого воспользуемся уравнением (4.22). Выражение (4.21) дает поток энергии из окрестности критического слоя на единицу длины по координате s , направленной вдоль средней линии кольца. Умножив это выражение на длину кольца $2\pi/\mu$ и используя (3.16) для возмущений скорости, найдем суммарный поток энергии:

$$\Delta J = \frac{\pi^3 (3l+2)^2 (l+1)^2}{16n^2 a_j^2 \mu \rho_0^{2l+1}} |\Omega'_0(\rho_0)|. \quad (4.25)$$

Энергию бочкообразных и опережающих бесселевских мод, определяемую из (2.3), (2.4), представим единым выражением

$$E = \frac{\pi^2 a_j \omega}{\mu^2 n} [1 + O(\mu)]. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.25) и (4.26) в (4.22), получим инкремент неустойчивости

$$\delta = \frac{(3l+2)^2(l+1)^2\pi\mu}{2^5na_j^3\rho_0^{2l+1}\omega} |\Omega'_0(\rho_0)|. \quad (4.27)$$

Величина инкремента (4.27) оказывается пропорциональной производной от завихренности в критическом слое и зависит от параметров колебания l, n, j .

Из (4.24) следует, что критические слои бесселевских мод с $l \geq 1$ расположены на линиях $\rho = \sqrt{(l+1)/l} + O(\mu)$ и заполняют область $1 < \rho < \sqrt{2}$, примыкающую к вихревому ядру. Чем выше частотное число l , тем ближе к границе ядра располагается соответствующий критический слой. Для бесселевских мод с одинаковыми l и различными радиальными числами j критические слои покрывают область шириной $\Delta\rho = O(\mu)$ в соответствии с разбросом частот этих мод.

Бочкообразные моды имеют частоту, меньшую, чем бесселевские моды с $l \geq 1$. В соответствии с этим критические слои бочкообразных мод заполняют более далекую область $\rho = O(\mu^{-1/2})$. Из (4.24) следует, что эти критические слои располагаются на линиях

$$\rho = \sqrt{\frac{a_j}{2n\mu}} [1 + O(\mu)],$$

т.е. тем дальше от вихревого ядра, чем больше радиальное число j . Для частот, сгущающихся к нулю, критические слои приближаются к границе атмосферы кольца. Таким образом, критические слои заполняют всю область атмосферы от ее границы до границы ядра.

Оценим теперь характерные величины возмущений вблизи критического слоя. Дифференцируя формулу (4.18), получим, что возмущения поля скорости оцениваются во всем потоке функцией $A_0(\rho)$ и ее производной, т.е. значением возмущений в потенциальном потоке. Поле смещения

$$\begin{aligned} \varepsilon^\rho &= -\frac{i}{mV_0 - \omega} v^\rho, \\ \varepsilon^\varphi &= -\frac{i}{mV_0 - \omega} v^\varphi - \frac{V'_0}{(mV_0 - \omega)^2} v^\rho \end{aligned} \quad (4.28)$$

вблизи критического слоя определяется возмущениями скорости в потенциальном потоке и инкрементом колебаний $\delta = \text{Im } \omega$. Вблизи критического слоя ρ -компонента поля смещения достигает величины $O(\varepsilon/\mu\alpha)$, а φ -компонента — величины $O(\varepsilon/\mu^2\alpha^2)$, где ε — амплитуда возмущения, μ и α — малые параметры, произведение которых определяет величину инкремента. Эта оценка показывает, что амплитуда смещений жидких частиц при малой амплитуде колебаний ядра может достигать большой величины. Большая амплитуда смещений вблизи критического слоя приводит к интенсивному перемешиванию жидких частиц (см. раздел 4.2.3). Следует заметить, что такое поведение жидких частиц связано только с резонансными свойствами течения с круговыми линиями тока и совпадением периода обращения жидких частиц с периодом колебаний (т.е. возможно и при потенциальном обтекании, если осциллятор раскачивается внешней силой). Присутствие слабой завихренности в обтекающем ядро потоке мало влияет на возмущения скорости, входящие в формулу

для смещения лагранжевых частиц (4.28), а учитывается опосредовано через величину инкремента, стоящего в знаменателе этого выражения.

В отличие от поля скорости и поля смещения, для возмущений завихренности дифференцирование потенциальной части A_0 функции тока (4.18) даст нуль. Появление возмущений завихренности связано только со вторым членом в (4.18), который вблизи критического слоя имеет логарифмическую особенность. Продифференцировав этот член, легко оценить амплитуду возмущений завихренности, которая во всем течении имеет порядок $\varepsilon\alpha$, за исключением критического слоя, где возмущение завихренности интенсифицируется и имеет порядок ε/α .

Следовательно, вблизи критического слоя описанная выше неустойчивость сопровождается двумя процессами: первый связан с интенсивным перемешиванием за счет большой величины лагранжевых смещений жидких частиц, второй связан с интенсификацией поля завихренности.

4.3. Нелинейная стадия развития неустойчивости вихревого кольца и переход к турбулентности

Выше были рассмотрены неустойчивые колебания вихревого кольца на линейной стадии их развития. Колебания этого типа характеризуются большой амплитудой смещения жидких частиц в окрестности критического слоя. Поэтому при увеличении амплитуды нелинейные эффекты начинают проявляться прежде всего в этой области. Нелинейное взаимодействие колебаний и среднего течения приводит к тому, что с увеличением амплитуды колебаний поток энергии из окрестности критического слоя уменьшается, а при достижении некоторой предельной амплитуды этот поток энергии обращается в нуль.

Действительно, в окрестности критического слоя с учетом нелинейных эффектов образуется область конечного размера, в которой происходит процесс интенсивного перемешивания жидких частиц, приводящий к сглаживанию профиля средней завихренности. Аналогичная ситуация возникает в фазовом пространстве гамильтоновых систем в случае нелинейного резонанса. Для таких систем область интенсивного перемешивания определяется *резонансным слоем* (см., например, [84]). В случае когда в системе имеется несколько резонансных слоев, они могут перекрываться, образуя целые области стохастического движения, в пределах которых осуществляется интенсивный перенос жидких частиц вдоль и поперек основной системы линий тока.

Поскольку критические слои (4.24) лежат очень близко друг к другу, разумно предположить, что для вихревого кольца множество колебаний с различными значениями чисел l, n, j на нелинейной стадии достигает предельных амплитуд, образуя систему перекрывающихся резонансных слоев, сгущающихся к границе ядра и заполняющих всю область атмосферы кольца. Таким образом, хаотизация движения жидких частиц в вихревом кольце очень похожа на лагранжевый хаос, возникающий при колебательных режимах гамильтоновых систем [85, 86] с тем отличием, что в вихревом кольце хаотизация лагранжевых смещений сопровождается реальной интенсификацией возмущений поля завихренности. В то же время в соответствии с (4.24) резонансные слои не возникают внутри ядра, т.е. ядро остается

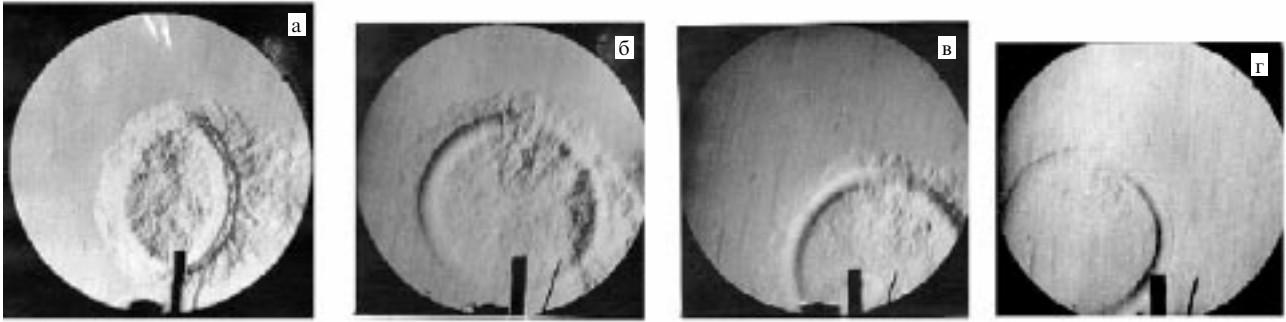


Рис. 15. Вихревое кольцо на различных расстояниях от среза сопла генератора вихрей (25, 35, 40 и 50 калибров соответственно). Визуализация добавками гелия (по материалам работы [87]). По мере удаления от среза сопла окрашенная гелием турбулентность уходит в след, оголяя ламинарное ядро.

ламинарным. Этот результат качественно соответствует упоминавшимся выше экспериментальным данным о структуре турбулентного вихревого кольца, показывающим, что резкая граница между турбулентной атмосферой кольца и ламинарным ядром (рис. 15) сохраняется на большом участке траектории вихревого кольца. С этой точки зрения правильнее было бы говорить не о подавлении турбулентности в ядре вихря [19], а о генерации турбулентности вне ядра за счет образования большого числа критических слоев и интенсификации в них возмущений завихренности.

Обратим внимание на то, что интенсивное нелинейное перемешивание в резонансном слое в силу (4.27) может вызываться очень малыми деформациями ядра вихревого кольца. Это означает, что линейная теория колебаний вихревого кольца с потенциальной атмосферой применима для вихревого кольца со слабозавихренной атмосферой даже при интенсивных нелинейных процессах в окрестности критического слоя.

4.3.1. Оценка роли вязкости. Выше были рассмотрены неустойчивые колебания вихревого кольца в приближении идеальной жидкости. Оценим область чисел Рейнольдса, при которых справедливо такое рассмотрение. Малые возмущения в вязкой жидкости описываются уравнением Орра–Зоммерфельда

$$-i\nu\nabla^4 A - (mU_0 - \omega)\nabla^2 A + \frac{m\Omega'_0}{\rho} A = 0, \quad (4.29)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}.$$

Вязкостью можно пренебречь тогда, когда первый член в этом уравнении мал по сравнению с другими членами во всей области течения. В этом случае уравнение Орра–Зоммерфельда (4.29) сводится к уравнению Рэлея (4.2), т.е. возмущения могут быть описаны в рамках идеальной жидкости. При проведении оценок необходимо учитывать, что вязкий член в уравнении (4.29) имеет старшие производные по ρ . То есть этот член имеет наибольшую величину в той области течения, где максимальных значений достигают градиенты возмущений. Такой областью, как мы видели, является окрестность критического слоя. Именно здесь вязкость оказывает

наибольшее влияние на свойства колебаний. Это влияние проявится в изменении величины потока энергии ΔJ по сравнению с невязким решением. В свою очередь это приведет к уменьшению величины инкремента δ и в конечном счете — к исчезновению неустойчивости.

Рассмотренное выше решение уравнения Рэлея (4.2) будет справедливо в вязкой жидкости при условии, что при его подстановке в уравнение Орра–Зоммерфельда (4.28) вязкий член окажется мал. Решение (4.2) вблизи критического слоя $\rho = \rho_c$ имеет вид (4.18):

$$A \sim (\rho - \rho_c) \ln(\rho - \rho_c).$$

Подставляя это решение в (4.29), получим, что первый член этого уравнения (вязкий член) имеет величину порядка $O(\nu/(\rho - \rho_c)^3)$, а второй член — величину порядка $O(U'_0(\rho_c))$. Для неустойчивых колебаний собственная частота является комплексной и соответственно точка ρ_c также является комплексной с мнимой частью $\text{Im}(\rho_c) \sim \delta/U$. Поэтому при действительных ρ в области, ближайшей к особой точке, первый член уравнения (4.29) имеет величину порядка $O(\nu U_0'^3/\delta^3)$, а второй — порядка $O(U'_0)$. Таким образом, вязким членом в уравнении Орра–Зоммерфельда можно пренебречь при условии

$$\frac{\nu U_0'^2}{\delta^3} \leq 1.$$

Отметим, что это условие также можно получить из условия малости характерного времени вязкого расплывания возмущений в окрестности критического слоя [88] по сравнению с характерным временем неустойчивости $1/\delta$.

Для вихревого кольца с малой завихренностью вне ядра (раздел 4.2) инкремент определяется выражением (4.27) и имеет величину $\delta = O(\alpha\mu U_0)$. В том случае, когда вихревое кольцо не имеет выраженного ядра, а профиль завихренности плавно убывает, параметр α , характеризующий величину градиента завихренности в критическом слое, будет уже не мал. Хотя для вихревого кольца с $\alpha = O(1)$ решение не было получено, следует ожидать, что и в этом случае неустойчивость будет иметь место. На это, в частности, указывает решение задачи о колеблющемся цилиндре в циркуляционном потоке с не малой завихренностью (раздел 4.1.2). Таким образом, полагая, что для вихревого кольца с $\alpha = O(1)$ механизм неустойчивости остается в силе, и распространяя на этот

случай приведенную выше оценку, получим $\delta = O(\mu U_0)$. Заметим, что величина инкремента и в этом случае оказывается малой, что связано с высокой энергетичностью бесселевских колебаний (из результатов раздела 3.5 следует, что при равной амплитуде энергия бесселевских колебаний оказывается в $O(\mu^{-1})$ раз больше, чем энергия колебаний других типов). Определяя число Рейнольдса по радиусу вихревого кольца и его переносной скорости и используя приведенные выше оценки, получим, что пренебрежение вязкими эффектами возможно при числах Рейнольдса $Re \geq Re_0$, где

$$Re_0 = O(\mu^{-3}). \quad (4.30)$$

Таким образом, существует пороговое значение числа Рейнольдса Re_0 , начиная с которого должен проявляться описанный выше механизм неустойчивости и хаотизации движения жидких частиц в атмосфере кольца. При числах Рейнольдса $Re < Re_0$ вязкие эффекты будут доминировать и неустойчивость будет отсутствовать. Полученная оценка (4.30) вполне согласуется с величиной $Re_0 = 10^3$, известной из экспериментов по образованию ламинарных и турбулентных вихревых колец, где исследовались кольца с характерным значением $\mu \sim 0,1$ [15].

5. Турбулентное вихревое кольцо как источник звука.

Возможность бесконтактной диагностики нестационарных процессов в вихрях

Представленные в предыдущем разделе фотографии турбулентного вихревого кольца показывают, что его турбулентность действительно могла бы быть устроена в соответствии с предложенным сценарием, по которому хаотическое поведение жидких частиц в области атмосферы вихревого кольца происходит при сохранении ламинарного течения в ядре. Однако помимо визуализации существует другой бесконтактный метод диагностики нестационарных процессов в вихрях — это их акустическое излучение. Представляет интерес рассмотреть, как согласуются развитые выше представления с теорией излучения звука вихревым кольцом и с экспериментальными работами в этом направлении. Поскольку наблюдается хорошее совпадение, следует дать краткий обзор этих результатов.

5.1. Теория звукового излучения, создаваемого вихревым кольцом

Как известно, нестационарное движение вихрей в сжимаемой среде сопровождается излучением звука, имеющим квадрупольный характер [89–91]. Если характерное число Маха потока мало, а завихренность локализована в области с характерным размером, много меньшим, чем длина звуковой волны, то звуковое поле может быть выражено через нестационарное поле скорости, вычисляемое в приближении несжимаемой жидкости. Для вычисления звукового поля, генерируемого вихрем, оказалось возможным связать звуковое поле только с той частью несжимаемого течения, завихренность в которой отлична от нуля [92, 93]. Наиболее удобное выражение для звукового поля, которое линейно связывает звуковое поле с нестационарным полем завихренности, было получено в [94, 95].

Теория, описывающая акустическое излучение нестационарных вихрей, основана на том, что при малых

числах M в задаче имеется два различных пространственных масштаба: размер l той области, где завихренность отлична от нуля, и длина звуковой волны λ . Действительно, при характерной скорости в ядре вихря u характерная частота имеет порядок u/l , а длина звуковой волны — $\lambda = c_0/\omega \cong c_0 l/u = l/M$ (где c_0 — скорость звука). Из этой оценки следует, что $\lambda \gg l$ при $M \ll 1$. Пространственные масштабы l и λ определяют две области: внутреннюю, где течение определяется динамикой завихренности, и внешнюю, где формируются акустические возмущения, имеющие волновую структуру. Решение задачи излучения может быть получено с помощью сращивания дальней асимптотики несжимаемого решения во внутренней области и ближней асимптотики волнового поля во внешней области [96–99]. В случае низкочастотных пульсаций объема или колебаний тела, когда главными членами в мультипольном разложении источника являются монополь или диполь, такое решение легко построить (см. [80, гл. 8]). Однако в случае акустического излучения нестационарных вихрей главным членом разложения является квадруполь, и в задаче появляется ряд особенностей, которые делают процедуру сращивания существенно более сложной [96, 100].

Окончательное выражение для звукового поля имеет следующий вид:

$$p = \rho_0 c_0^2 \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} C_{ij} \left(t - \frac{x}{c_0} \right), \quad (5.1)$$

где p — звуковое давление, ρ_0 — плотность среды,

$$C_{ij} = \frac{1}{12\pi} \frac{d}{dt} \int [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{y}]_i y_j d^3 \mathbf{y}$$

— квадрупольный момент, выписанный в форме Меринга [94], $\mathbf{\Omega}(t)$ — нестационарное поле завихренности, найденное в приближении несжимаемой жидкости, $\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки наблюдения. Таким образом, для вычисления звукового поля в слабосжимаемом приближении достаточно найти динамику нестационарного вихревого движения в несжимаемой жидкости и подставить полученное выражение $\mathbf{\Omega}(t)$ в (5.1).

На основе этой теории в работе [32] было найдено звуковое излучение, создаваемое колебаниями вихревого кольца. Эти колебания подробно рассмотрены в разделе 3. Дадим краткое описание этих результатов. Среди всех колебаний легко выделить те, которые наиболее эффективно излучают звук. Прежде всего сравним медленные колебания, частоты которых лежат вблизи нуля (изгибные моды с $\omega = O(\mu^2 \ln \mu)$ и бочкообразные моды с $\omega = O(\mu)$), и быстрые колебания с частотами $\omega = O(1)$, лежащими вблизи полупелых значений $l/2$ (см. рис. 8). Поскольку в выражение (5.1) для звукового поля частота ω входит в третьей степени, то эффективность звукового излучения бочкообразных и изгибных колебаний на несколько порядков ниже эффективности быстрых колебаний, и их из рассмотрения можно исключить.

Быстрые колебания в свою очередь можно подразделить на различные типы в зависимости от эффективности их акустического излучения. Квадрупольный момент, очевидно, отличен от нуля только для тех колебаний, которые имеют азимутальные числа $n = 0, 1, 2$. Излучение всех колебаний с $n \geq 3$ имеет более высокий порядок мультипольности и малоэффективно в случае $M \ll 1$. Следовательно, из всех быстрых колебаний остаются

только три типа: осесимметричные моды и моды, имеющие вид первой и второй азимутальных гармоник. Непосредственным вычислением можно показать, что среди этих колебаний наиболее эффективными являются колебания с частотным числом $l = 1$. Дело в том, что чем больше число l , тем более высокими гармониками определяется форма колебаний в сечении вихря. В свою очередь, чем больше номер гармоники в сечении ядра, тем больше ее мультипольность в главном приближении, и тем меньший вклад дает эта гармоника в квадрупольный момент $C_{ij}(t)$.

Таким образом, наиболее эффективно излучающими звук модами являются моды с $n = 0, 1, 2$ и частотным числом $l = 1$. Это — множество бесселевских мод двух типов ($n = 1$ и $n = 2$), изолированные моды двух типов ($n = 1$ и $n = 2$), а также осесимметричные моды ($n = 0$) (рис. 16). Все эти моды имеют близкие частоты и заполняют интервал $\Delta\omega/\omega = O(\mu)$. Следовательно, если в вихревом кольце равно возбуждены все колебания, то его звуковое поле должно иметь узкополосный спектр с характерной безразмерной частотой $\omega = 1/2$, соответствующей числу $l = 1$. При этом ширина пика определяется интервалом распределения частот излучающих мод вихревого ядра.

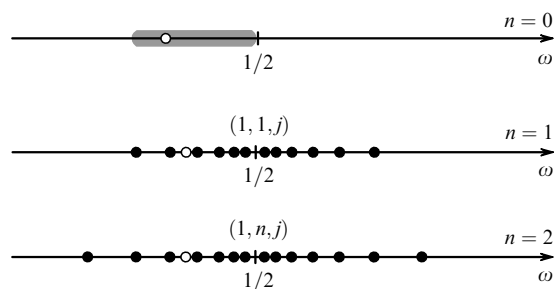


Рис. 16. Спектр излучающих мод.

Легко видеть, что описанные выше результаты по излучению звука можно распространить на вихревое кольцо со сглаженным профилем завихренности. Действительно, в разделе 4.3 было показано, что влияние окружающей ядро слабой завихренности на форму колебаний локализовано в окрестности критического слоя, а в остальной части течения добавление слабой завихренности в средний поток мало влияет на возмущения, создаваемые деформацией границы ядра. Это означает, что малое изменение профиля завихренности слабо влияет на дальнюю асимптотику колебаний несжимаемого течения и соответственно на результаты срачивания этой асимптотики со звуковым полем в слабосжимаемой жидкости. Следовательно, акустические излучения вихревого кольца со слабой завихренностью вне ядра ($\alpha \ll 1$) и вихревого кольца с потенциальным течением вне ядра ($\alpha = 0$) при равной амплитуде деформации ядра будут близкими. Таким образом, теория излучения звука вихревым кольцом, развитая в [32] и описанная выше, будет справедлива также в случае слабой монотонно убывающей завихренности вне ядра, несмотря на то, что в этом случае течение вне ядра будет турбулентным.

Хотя слабая завихренность вне ядра не влияет на характеристики звукового излучения от колебаний вих-

ревого ядра, наличие этой завихренности очень важно с точки зрения излучения звука, поскольку создает условия для возбуждения звукообразующих колебаний. Рассмотренная в разделе 3 неустойчивость превращает вихревое кольцо в реальный осциллятор, множественные колебания которого поддерживаются за счет перекачки энергии из среднего течения в нестационарные пульсации различных масштабов. В свою очередь с точки зрения генерации звука мультипольная структура колебаний оказывается серьезным фильтром, отсекающим почти все колебания, оставляя только малую часть эффективно излучающих мод.

5.2. Возможные механизмы излучения звука турбулентным вихревым кольцом

Как уже отмечалось, получаемые в экспериментах турбулентные вихревые кольца с большими числами Рейнольдса оказываются турбулентными, а движение вихря сопровождается турбулентным следом. Если турбулентность вихревого кольца устроена в соответствии с разработанной выше моделью, то турбулентные пульсации в атмосфере кольца пассивно привязаны к колебаниям вихревого ядра, и излучение звука определяется только собственными колебаниями ламинарного ядра в соответствии с теорией, описанной выше. Такое излучение должно иметь узкополосный характер с частотой пика, определяемой параметрами вихревого ядра.

Если разработанная выше модель не реализуется, а турбулентность в атмосфере кольца определяется ее собственной динамикой, то можно было бы ожидать, что в соответствии с теорией Лайтхилла [90, 91] турбулентность будет сопровождаться широкополосным звуковым излучением, которое создается возмущениями различных масштабов. В этом случае описанное выше излучение, связанное с колебаниями ядра, будет либо соизмеримо с излучением турбулентности, либо окажется существенно меньше этой широкополосной составляющей, и описанная выше картина излучения "потонет" в шуме атмосферы кольца.

Наконец, может проявиться еще один источник звука, связанный с тем, что движение вихревого кольца сопровождается интенсивным следом. Излучение этого следа могло бы иметь узкополосный характер, аналогично золотым тонам, возникающим при срыве вихрей при обтекании препятствий (цилиндра, шара и т.п. [101]).

Таким образом, наиболее вероятные механизмы излучения в реальном вихревом кольце могли бы быть связаны со следующими процессами:

- вихревая дорожка в следе за кольцом, аналогичная вихревой дорожке Кармана (рис. 17а);
- мелкомасштабные турбулентные пульсации в атмосфере вихря (рис. 17б);

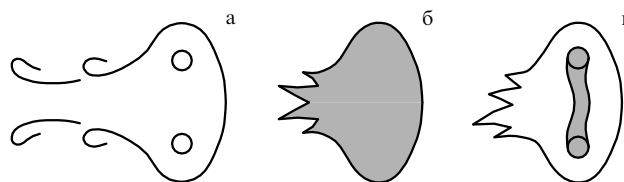


Рис. 17. Возможные механизмы излучения звука: нестационарной завихренностью в следе (а); турбулентными пульсациями в "атмосфере" (б); модами вихревого ядра (в).

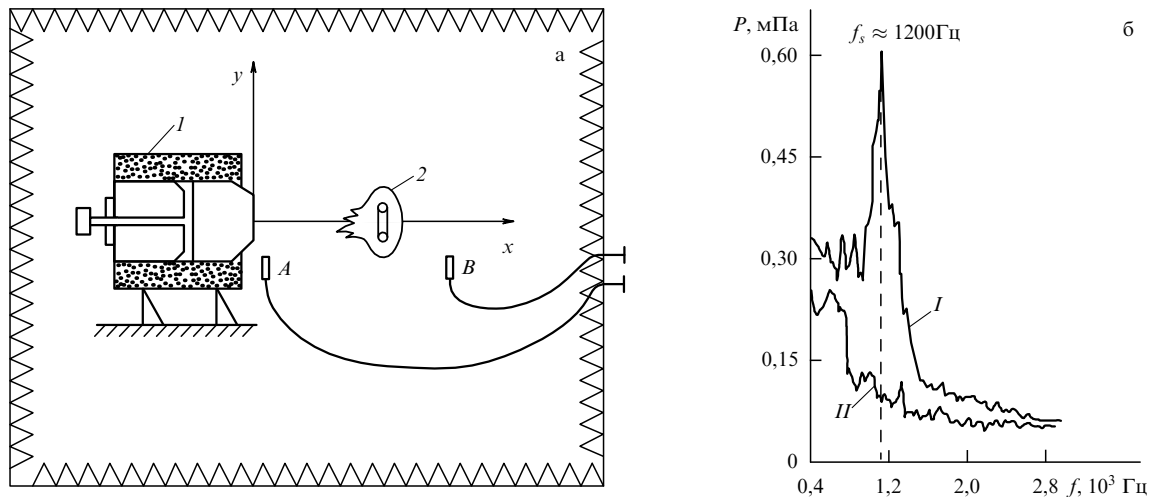


Рис. 18. (а) Схема эксперимента в заглушенной камере: (1) генератор вихрей, погруженный в контейнер с песком, (2) вихревое кольцо, А — триггерный, В — измерительный микрофон; (б) усредненный спектр звукового давления: вихревого кольца (I), фонового шума (II). Время задержки от момента запуска кольца — $\tau = 220$ мс. Начальный диаметр вихревых колец — 4 см.

— собственные колебания вихревого ядра (рис. 17в), возбуждаемые в момент образования кольца или развивающиеся из-за неустойчивости.

Ответ на вопрос, какой из этих трех сценариев реализуется в действительности, оказалось возможным получить из эксперимента.

5.3. Экспериментальные исследования шума вихревого кольца

и сопоставление эксперимента с теорией

Недавно проведенные эксперименты (рис. 18а) в заглушенной (безэховой) камере ЦАГИ показали [102, 103], что акустическое излучение вихревого кольца сосредоточено в достаточно узкой полосе частот с максимумом вблизи частоты, зависящей от средних параметров вихревого кольца — его размеров и циркуляции (рис. 18б). Этот факт означает, что сценарий рис. 17б не реализуется, поскольку излучение от мелкомасштабной турбулентности должно иметь широкополосный спектр.

Сравним полученную в экспериментах характерную частоту пика в спектре излучения $f_0 = 1200$ Гц с теоретической величиной $\omega = \Omega_0/2$. Для этого выразим эту частоту через измеряемые в эксперименте величины — скорость поступательного движения вихря

$$V = \frac{\mu \Omega_0 a}{4} \left(\ln \frac{8}{\mu} - \frac{1}{4} \right),$$

радиус кольца R и радиус ядра вихря a . Отсюда имеем

$$\omega = \frac{\Omega_0}{2} = \frac{2V}{R\mu^2(\ln(8/\mu) - 1/4)}.$$

Подставляя в эту формулу результаты измерений $V = 8 \text{ м с}^{-1}$, $\mu = 0,12$, $R = 0,035 \text{ м}$, получим, что теоретически предсказанная частота $f_0 = (\omega/2\pi)$ удовлетворительно соответствует измеренному значению. Это не только подтверждает сценарий рис. 17в, но и исключает сценарий рис. 17а, поскольку характерная частота схода вихрей при обтекании препятствия с размером порядка размера вихревого кольца $\omega \approx 0,1 V/R$ [101] на несколько порядков меньше измеренной. Сценарий рис. 17в под-

тверждается также шириной пика в спектре. Излучающие звук моды должны заполнять интервал частот

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \left(-\frac{4\mu}{a_1}, \frac{4\mu}{a_1} \right).$$

В размерных переменных этой величине соответствует $\Delta\omega = 300$ Гц, что также соответствует экспериментальным данным.

Таким образом, данные акустического эксперимента показывают, что несмотря на то, что во всей атмосфере кольца происходит турбулентное движение частиц жидкости с большими амплитудами и в широком диапазоне частот, звуковое поле определяется малыми колебаниями ядра вихря, которые оказываются причиной не только турбулентности вихревого кольца, но и звукового излучения.

6. Заключение

Подведем некоторые итоги. В работе рассмотрены колебания вихревых колец, имеющих профиль средней завихренности, близкий к однородному (изохронному). Показано, что при незначительном расплывании профиля средней завихренности большая часть собственных колебаний вихревого кольца становится неустойчивой. Подробно рассмотрена энергетика процесса потери устойчивости, связанная с появлением множества критических слоев в окружающей ядро эллипсоидальной области. Такой механизм становится возможным благодаря сложной форме каждого собственного колебания, допускающей обмен энергией между колебаниями и средним течением, и невозможен в топологически более простых вихревых структурах (например, в цилиндрическом вихре Ранкина). По-видимому, вихревое кольцо является наиболее простым вихрем в безграничной жидкости, в котором может реализоваться такой тип неустойчивости.

Коротко рассмотрена проблема аэродинамической генерации звука колебаниями при учете слабой сжимаемости. Показано, что появление критических слоев мало

влияет на звуковое поле, амплитуда которого оказывается связанной в основном с малой амплитудой колебаний границы вихревого ядра. При этом рассмотренная неустойчивость приводит к генерации колебаний различных пространственных и временных масштабов, а акустическое излучение выделяет узкий круг колебаний, способных эффективно генерировать звук. В результате шум вихревого кольца проявляется в виде довольно узкого пика в спектре, частота которого хорошо согласуется с экспериментом.

Наличие множественной неустойчивости, приводящей к генерации завихренности в критических слоях, и интенсификация лагранжевых смещений жидких частиц в атмосфере вихревого кольца позволили авторам высказать гипотезу о том, что механизм возникновения турбулентности в вихревых кольцах при больших числах Re при одновременном сохранении ламинарного движения в ядре (пульсации в котором согласно разделу 4.2.2 определяются лишь малыми колебаниями его границы) может быть связан с рассмотренными выше процессами. Конечно, для более надежного ответа на поставленные в работе вопросы необходимо полное исследование нелинейной задачи, что позволило бы описать режимы течения, близкие к автоколебательным. Такое рассмотрение позволило бы, с одной стороны, рассчитать предельное состояние нестационарных возмущений в кольце; с другой стороны, такое решение можно было бы сравнить с акустическим экспериментом, выделив среднее соотношение нулевой, первой и второй азимутальных мод в звукообразующих колебаниях вихря. Достижение количественного согласия в такой задаче могло бы оказаться решающим аргументом в пользу того или иного сценария развития турбулентных пульсаций в вихревом кольце.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00199).

Список литературы

- Kelvin Lord *Philos. Mag.* **34** 15 (1867)
- Kelvin Lord *Philos. Mag.* **10** 155 (1880)
- Thomson J J *A Treatise on the Motion of Vortex Rings* (London: Macmillan, 1883)
- Сэффман Ф., в кн. *Современная гидродинамика: Успехи и проблемы* (Под ред. Дж Бэтчелор, Г Моффат) (М.: Мир, 1984) с. 77
- Ламб Г *Гидродинамика* (М.-Л.: Гостехиздат, 1947)
- Бэтчелор Дж *Введение в динамику жидкости* (М.: Мир, 1973)
- Вилля А *Теория вихрей* (М.: ОНТИ, 1936)
- Tung C, Ting L *Phys. Fluids* **10** 901 (1967)
- Saffman P G *Stud. Appl. Math.* **49** (4) 371 (1970)
- Луговцов Б А, в сб. *Некоторые проблемы математики и механики* (Л.: Наука, 1970) с. 76
- Johnson G M *AIAA J.* **9** 763 (1971)
- Maxworthy T J *Fluid Mech.* **51** 15 (1972)
- Maxworthy T J *Fluid Mech.* **64** (2) 227 (1974)
- Maxworthy T J *Fluid Mech.* **81** 465 (1977)
- Тарасов В Ф, Якушев В И *ПМТФ* (1) 130 (1974)
- Ван-Дайк М (Сост.) *Альбом течений жидкости и газа* (М.: Мир, 1986)
- Shariff K, Leonard A *Ann. Rev. Fluid Mech.* **24** 235 (1992)
- Владимиров В А, Тарасов В Ф *ДАН СССР* **245** (6) 1325 (1979)
- Владимиров В А, Луговцов Б А, Тарасов В Ф *ПМТФ* (5) 69 (1980)
- Johari N *Phys. Fluids* **7** 2420 (1995)
- Лаврентьев М А, Шабат Б В *Проблемы гидродинамики и их математические модели* 2-е изд. (М.: Наука, 1977)
- Glezer A, Coles D J *Fluid Mech.* **211** 243 (1990)
- Sallet D, Widmayer R Z *Flugwiss.* **22** 207 (1974)
- Ахметов Д Г, Киссаров О П *ПМТФ* (2) 87 (1966)
- Weigand A, Garib M *Exp. Fluids* **22** 447 (1997)
- Widnall S E, Sullivan I P *Proc. R. Soc. London Ser. A* **332** 335 (1973)
- Saffman P G *J. Fluid Mech.* **84** 625 (1978)
- Widnall S E, Tsai S Y *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **287** (1344) 273 (1977)
- Уиднелл Ш, в сб. *Механика. Новое в зарубежной науке* № 21 *Вихревые движения жидкости* (М.: Мир, 1979) с. 126
- Владимиров В А, Тарасов В Ф *ДАН СССР* **253** 565 (1980)
- Владимиров В А, в кн. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн* (Отв. ред. Овсянников, В Н Монахов) (Новосибирск: Наука, 1985) с. 270
- Kopiev V F, Chernyshev S A *J. Fluid Mech.* **341** 19 (1997)
- Арнольд В И *ДАН СССР* **162** (5) 975 (1965)
- Арнольд В И *ПММ* **29** (5) 846 (1965)
- Holm D D et al. *Phys. Rep.* **123** 1 (1985)
- Drazin P G, Reid W H *Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Cambridge University Press, 1981)
- Chandrasekhar S *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (New Haven, Conn.: Yale Univ. Press, 1969)
- Копьев В Ф, Чернышев С А *Изв. АН СССР. МЖГ* (5) 99 (1991)
- Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1974)
- Moffatt H K *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **333** 321 (1990)
- Фридман А А *Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости* (М.-Л.: Гостехиздат, 1934) с. 367
- Милн-Томсон Л М *Теоретическая гидродинамика* (М.: Мир, 1964)
- Владимиров В А *ПМТФ* (3) 70 (1986)
- Zabusky N J, Hughes M H, Roberts K V *J. Comp. Phys.* **30** 96 (1979)
- Dritchel D G *J. Fluid Mech.* **172** 421 (1986)
- Benjamin T B *J. Fluid Mech.* **16** 436 (1963)
- Степанянц Ю А, Фабрикант А Л *Распространение волн в сдвиговых потоках* (М.: Наука. Физматлит, 1996)
- Кадошцев В Б, Михайловский А Б, Тимофеев А В *ЖЭТФ* **47** 2266 (1964)
- Sturrock P A *J. Appl. Phys.* **31** 2052 (1960)
- Рыбак С А, в кн. *Нелинейная акустика* (Ред. В А Зверев, Л А Островский) (Горький: ИПФ АН СССР, 1980) с. 176
- Копьев В Ф, Леонтьев Е А *Акуст. журн.* **29** (2) 192 (1983)
- Островский Л А, Рыбак С А, Цимринг Л Ш *УФН* **150** (3) 415 (1986)
- Незлин М В *УФН* **120** 481 (1976)
- Копьев В Ф, Леонтьев Е А *Акуст. журн.* **31** (3) 348 (1985)
- Копьев В Ф, Леонтьев Е А *Изв. АН СССР. МЖГ* **22** (3) 83 (1987)
- Moore D W *Proc. R. Soc. London Ser. A* **370** 407 (1980)
- Hama F R *Phys. Fluids* **6** 526 (1963)
- Crow S C *AIAA J.* **8** 2172 (1970)
- Widnall S E, Bliss E, Zalay A, in *Aircraft Wake Turbulence and Its Detection* (Eds J H Olsen, A Goldburg, M Rogers) (New York: Plenum Press, 1971) p. 305
- Klein R, Majda A J *Physica D* **49** 323 (1991)
- Basset A W *A Treatise on Hydrodynamics with Numerous Examples* Vol. 2 (New York: Dover Publ., 1961)
- Ладиков Ю П *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.* **47** (1960)
- Saffman P G *Vortex Dynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
- Градштейн И С, Рыжик И М *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Физматгиз, 1962)
- Копьев В Ф, Чернышев С А *Акуст. журн.* **44** (3) 373 (1998)
- Fraenkel L E *Proc. R. Soc. London Ser. A* **316** 29 (1970)
- Norbury J J *Fluid Mech.* **57** 417 (1973)
- Fraenkel L E *J. Fluid Mech.* **51** 119 (1972)
- Чернышев С А, в сб. *Колебания упругих конструкций с жидкостью VII Симпозиум* (Новосибирск: СибНИА, 1992)
- Kelvin Lord, Tait P G *Treatise on Natural Philosophy* Pt. 1 (Cambridge: Cambridge University Press, 1912)
- Кочин Н Е, Кибель И А, Розе Н В *Теоретическая гидромеханика* Ч. 1 (М.: ГИФМЛ, 1963)
- Петров А Г *Доклады РАН* **359** 769 (1998)
- Петров А Г *ПММ* **63** (3) 481 (1999)
- Чернявский В М, Штемлер Ю М *Изв. АН СССР. МЖГ* **5** 110 (1991)
- Vladimirov V A, Ilin K I *Bull. Hong Kong Math. Soc.* **1** 103 (1996)
- Владимиров В А, в сб. *Динамика сплошной среды* Вып. 37 (Новосибирск: 1978) с. 50

77. Лаврентьев М А, Шабат Б В *Методы теории функций комплексного переменного* (М.: Наука, 1973)
78. Данилов С Д *Акуст. журн.* **35** (6) 1059 (1989)
79. Копьев В Ф, Чернышев С А *Изв. РАН СССР. МЖГ* **6** (2000) (в печати)
80. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теоретическая физика Т. 6 Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
81. Miles J W J. *Fluid Mech.* **3** (2) 165 (1959)
82. Петров А Г, в сб. *Динамика сплошной среды* Вып. 52 (Новосибирск, 1981) с. 88
83. Копьев В Ф, Леонтьев Е А *Акуст. журн.* **34** (3) 475 (1988)
84. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988)
85. Aref H J. *Fluid Mech.* **143** 1 (1984)
86. Rom-Kedar V, Leonard A, Wiggins S J. *Fluid Mech.* **214** 347 (1990)
87. Kopyev V F et al., in *Atlas of Visualization II* (Eds-in-Chief Y Nakayama, Y Tanida; Ed. Visualization Soc. of Japan) (Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1996) p. 139
88. Тимофеев А В *УФН* **102** (2) 185 (1970)
89. Крайтон Д, в кн. *Современная гидродинамика: Успехи и проблемы* (Под ред. Дж Бэтчелор, Г Моффат) (М.: Мир, 1984) с. 359
90. Lighthill M J *Proc. R. Soc. London Ser. A* **212** 564 (1952)
91. Lighthill M J *Proc. R. Soc. London Ser. A* **222** 1 (1954)
92. Powell A J. *Acoust. Soc. Am.* **36** (1) 179 (1964)
93. Howe M S J. *Fluid Mech.* **71** (4) 625 (1975)
94. Mohring W J. *Fluid Mech.* **85** 685 (1978)
95. Obermeier F *Acustica* **42** 56 (1979)
96. Crow S C *Stud. Appl. Math.* **49** (1) 21 (1970)
97. Crighton D G et al. *Modern Methods in Analytical Acoustics: Lecture Notes* (New York: Springer, 1996)
98. Копьев В Ф, Чернышев С А *Акуст. журн.* **41** (4) 622 (1995)
99. Kambe T J. *Fluid Mech.* **173** 643 (1986)
100. Obermeier F, Doctorate Dissertation (Max-Planck-Institut für Stromungsforschung, 1968)
101. Блохинцев Д И *Акустика неоднородной движущейся среды* (М.: Гостехиздат, 1946)
102. Зайцев М Ю, Копьев В Ф и др. *ДАН СССР* **312** (5) 1080 (1990)
103. Зайцев М Ю, Копьев В Ф *Акуст. журн.* **39** (6) 1068 (1993)

Vibrations of the vortex ring: turbulence and sound generation in it

V.F. Kopyev, S.A. Chernyshev

Central Institute of Aerohydrodynamics, Acoustic Division,
ul. Radio 17, 107005 Moscow, Russian Federation

Tel. (7-095) 263-44 72

E-mail: vkopyev@mx.iki.rssi.ru

The state of the art in describing the natural vibrations of a vortex ring in an ideal incompressible fluid is reviewed. To describe vibrations, the displacement field is taken as the basic dynamic variable. A vortex ring with the simplest vorticity distribution in the core and with a potential flow in the atmosphere is the commonest approximation used in treating the vibrations of vortex rings of a more general form. It turns out that allowing for even a very weak degree of core smoothing causes many vibration modes to lose their stability. It is shown that the instability effect is determined by the sign of the vibration energy. The natural vibration energies of the ring are calculated and two kinds of vibrations, those with a negative energy and those with a positive energy, are identified, of which it is the former which become unstable when the core vorticity is smoothed. The multiple instability of vortex ring vibrations together with the details of the spatial structure of its natural vibrations suggest that it is the nonlinear evolution of precisely these processes which might be the origin of vortex ring turbulence. A new method for the study of unsteady processes in a turbulent vortex rings, which utilizes the experimental diagnostics of the ring's sound field, is presented. The structure of the sound field strongly supports the proposed model of the turbulent vortex ring.

PACS numbers: **43.30-k**, **47.27.-i**, **47.27.Sd**, **47.32.-y**

Bibliography — 103 references

Received 12 April 2000, revised 2 June 2000