

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Физические основы обобщенной бoльцмановской кинетической теории газов

Б.В. Алексеев

Рассматриваются принципиальные основы обобщенной бoльцмановской физической кинетики, основанной на введении в уравнение Больцмана членов, ответственных за изменение функции распределения на временах порядка времени столкновения. Цель работы состоит прежде всего в разъяснении качественных основ теории, математический аппарат которой был создан автором в предшествующие годы. Устанавливается связь между обобщенным уравнением Больцмана, полученным в рамках метода многих масштабов, и другими альтернативными подходами к выводу кинетических уравнений. Обобщенное уравнение Больцмана применяется к решению некоторых классических задач процессов переноса.

PACS numbers: 05.20.Dd, 51.10.+y

Содержание

1. Введение (649).
 2. Обобщенное уравнение Больцмана (654).
 3. Обобщенная H -теорема и проблема необратимости времени (657).
 4. Обобщенное уравнение Больцмана и "физический" вывод уравнения Больцмана (658).
 5. Обобщенное уравнение Больцмана и итеративное построение уравнений высших приближений в бoльцмановской кинетической теории (660).
 6. Обобщенное уравнение Больцмана и теория кинетических уравнений с запаздыванием (661).
 7. Обобщенные гидродинамические уравнения и теория турбулентных течений (664).
 8. Численное моделирование вихревого течения газа с помощью обобщенных уравнений Эйлера (670).
 9. Исследование распространения звука в рамках обобщенных уравнений гидродинамики (672).
 10. Расчет структуры ударной волны на основе обобщенных уравнений гидродинамики (677).
- Список литературы (678).

1. Введение

В 1872 г. Л. Больцман (в то время ему было всего лишь 28 лет) опубликовал свое знаменитое кинетическое уравнение относительно одночастичной функции распределе-

ния $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ в виде [1]

$$\frac{Df}{Dt} = J^{\text{st}}(f). \quad (1.1)$$

Здесь J^{st} — столкновительный интегральный член,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \quad (1.2)$$

— субстанциональная производная (\mathbf{v} и \mathbf{r} — скорость частицы и радиус-вектор, соответствующий ее положению).

Уравнение (1.1) определяет процессы переноса в однокомпонентном газе, который считается настолько разреженным, что существенны только парные столкновения частиц. Для нас сейчас не существен явный вид интеграла столкновений, определяющий изменение функции распределения f в результате парных столкновений. Однако отметим, что интеграл столкновений должен удовлетворять законам сохранения. Для простейшего случая упругих столкновений в однокомпонентном газе выполняются соотношения

$$\int J^{\text{st}} \psi_i \, d\mathbf{v} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad d\mathbf{v} \equiv dv_x dv_y dv_z, \quad (1.3)$$

где ψ_i — инварианты столкновений ($\psi_1 = m$, $\psi_2 = m\mathbf{v}$, $\psi_3 = m^2 v^2/2$, m — масса частицы), связанные с законами сохранения массы, импульса и энергии.

Интегралы от функции распределения, ее моменты определяют макроскопические гидродинамические характеристики системы, в частности плотность числа частиц

$$n = \int f \, d\mathbf{v} \quad (1.4)$$

Б.В. Алексеев, Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова
117571 Москва, просп. Вернадского 86, Российская Федерация
Тел. (095) 246-46-42, 247-16-56
E-mail: bvalexeev@unesco.mitht.rssi.ru,
root@bvalexeev.msk.ru

Статья поступила 8 декабря 1999 г.,
после доработки 21 марта 2000 г.

и температуру T :

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \int f(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 d\mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, \mathbf{v}_0 — гидродинамическая скорость течения.

Следовательно, если умножить почленно уравнение Больцмана на инварианты столкновения ψ_i , проинтегрировать по всем скоростям частиц и воспользоваться законами сохранения в форме (1.3), то из интегродифференциального уравнения Больцмана вытекают дифференциальные уравнения гидродинамики, общая форма которых называется гидродинамическими уравнениями Энского.

Внешняя простота символической записи уравнения Больцмана является, конечно, обманчивой. Лишь в немногих случаях частного характера удается найти решение уравнения Больцмана. Одним из них является распределение Максвелла, которое устанавливается в локально термодинамически равновесном газе в отсутствие внешних сил. Для указанного случая выполняется равенство

$$J^{\text{st}} = 0, \quad (1.6)$$

откуда следует распределение Максвелла

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mV^2}{2kT} \right), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ есть тепловая скорость.

Много позже (уже после смерти Больцмана в 1906 г.) был разработан аналитический метод решения уравнения Больцмана для расчета транспортных коэффициентов. Метод, созданный в 1916–1917 гг. Чемпеном и Энскогом [2–5], при наличии в системе малого параметра (каковым для рассматривавшегося ими нереагирующего газа является число Кнудсена — отношение средней длины пробега частиц к характерному гидродинамическому размеру) позволял получать явные представления для коэффициентов вязкости, теплопроводности, диффузии, а позже и термодиффузии.

Однако и современникам Больцмана было совершенно ясно, что речь идет о фундаментальном уравнении физики, сфера влияния которого простирается от процессов переноса, гидродинамики вплоть до космологии. Это объясняет то ревностное внимание, которым пользовалось кинетическое уравнение Больцмана, и те дискуссии, которые оно вызывало.

Одним из наиболее сильных результатов, установленных Больцманом на основе его кинетического уравнения, является молекулярно-кинетическое истолкование второго начала термодинамики, в частности статистического смысла понятия энтропии. Оказалось, что можно ввести такую функцию

$$H = \int f \ln f d\mathbf{v}, \quad (1.8)$$

которая монотонно изменяется в изолированной системе (H — от англ. Heat — теплота).

Если установить связь между энтропией S единицы объема идеального газа и H -функцией в виде

$$S = -kH + \text{const}, \quad (1.9)$$

то доказывается неравенство

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0. \quad (1.10)$$

Лаконичная формула

$$S = k \ln W, \quad (1.11)$$

связывающая энтропию S и термодинамическую вероятность W , выбита на постаменте памятника Больцману.

С момента своего создания больцмановская физическая кинетика, уравнение Больцмана подвергались весьма серьезной критике, актуальность которой во многом сохранилась и до настоящего времени. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Прежде всего, современникам Больцмана не была ясна связь уравнения Больцмана с классической механикой, в частности с уравнением Ньютона. Уравнение Больцмана было выведено из разумных физических соображений феноменологическим путем и отображает тот факт, что функция распределения не изменяется вдоль траектории движения частицы между столкновениями; изменение функции распределения реализуется в акте "мгновенного" взаимодействия сталкивающихся частиц.

В 1876 г. Лошмидт обратил внимание на то обстоятельство, что H -теорема была доказана из уравнения Больцмана, содержащего только первую производную по времени, в то время как уравнение Ньютона содержит вторую производную по времени ("квадрат времени"), что приводит к обратимости уравнений движения. Это означает, что, если для системы частиц — твердых сфер в какой-то момент времени начинается "попятное" движение в результате обращения направления движения частиц на противоположное, система проходит все предшествующие состояния вплоть до первоначального, что должно вести к росту H -функции, изменение которой изначально обусловлено обратимыми уравнениями движения. При этом наблюдатель не может отдать предпочтение одной из рассматриваемых ситуаций — движению по времени "вперед" и отвергнуть вторую возможность — движение "назад". Иначе говоря, возникает проблема обратимости времени.

В другой формулировке, но в той же концепции по существу это возражение прозвучало в 1896 г. у Цермело (ученика Планка), который обратил внимание на противоречие между H -теоремой и доказанной в 1890 г. "возвратной" теоремой Пуанкаре, утверждающей, что любая физическая система, даже при наличии в ней необратимых термодинамических процессов, имеет отличную от нуля вероятность вернуться в первоначальное состояние. Сам Больцман вполне осознавал такую возможность и во второй части "Лекций по теории газов" (см. [6], с. 251) писал: "В результате движения газовых молекул H -функция всегда уменьшается. Содержащаяся в этом односторонность процесса не является следствием уравнений движения, которым подчиняются молекулы. Действительно, эти уравнения не меняются, если время изменяет свой знак".

Дискуссии с Цермело, Планком, Оствальдом иногда принимали весьма острый характер. В качестве аргумента Больцман приводил известный пример теории вероятностей. Пусть производится 6000 бросаний игральной кости. Следует ожидать, что при такой выборке каждая из граней окажется наверху примерно 1000 раз.

Вероятность того, что, скажем, шестерка выпадет 6000 раз подряд, исчезающе мала и равна $(1/6)^{6000}$. На самом деле этот пример не проясняет ситуации, как не объясняют ее и две статьи Эренфеста (ученика Больцмана) и Афанасьевой-Эренфест, написанные уже после смерти великого австрийского физика.

Изложение первой модели Эренфестов было осуществлено Афанасьевой-Эренфест 12 февраля 1908 г. на заседании Русского физико-химического общества. Речь шла о трактовке H -теоремы для "плоского" движения газа [7]. Пусть прозрачные друг для друга P -молекулы исходят по нормали к оси y и движутся с одинаковыми скоростями в направлении оси x . P -молекулы испытывают упругие столкновения с непроницаемыми для молекул неподвижными Q -частицами, представляющими собой квадраты, стороны которых ориентированы под углом 45° по отношению к оси y .

Легко убедиться в том, что вскоре все частицы разбиваются на четыре группы. При этом не составляет труда записать изменение числа P -молекул в каждой группе за некоторое время Δt и затем ввести аналог H -функции для "плоского" газа

$$H = \sum_{i=1}^4 f_i \ln f_i, \quad (1.12)$$

где f_i — число молекул данного сорта, т.е. движущихся по одному из четырех возможных в данном случае направлений. При обращении направлений всех скоростей H -функция начинает возрастать и возвращается к тому значению, которое соответствовало моменту старта P -молекул с оси y . Тем самым на простейшей модели подтверждается теорема Пуанкаре–Цермело, но вовсе не объясняется неизбежность убывания H -функции при использовании несравненно более сложной модели Больцмана.

Вторую модель Эренфестов [8] называют "лотерейной". Речь идет о двух урнах (A и B) и N пронумерованных шарах, которым соответствуют "лотерейные билеты", содержащиеся в некоем ящике. Первоначально все шары находятся в урне A . Шары изымаются поштучно из урны A и помещаются в урну B в соответствии с номером "лотерейного билета", выгаданного наугад. Билет не изымается, а возвращается назад в ящик. В случае если вновь выгаданный билет соответствует шару, содержащемуся в B , шар возвращается в A . В итоге каждая из урн будет содержать примерно $N/2$ шаров.

Пусть N — полное число шаров и пусть на каком-то шаге s , отвечающем этапу розыгрыша, в одной из урн содержится n шаров, тогда в другой их будет $N - n$. В результате, можно образовать функцию Δ , определяющую разность шаров в урнах: $\Delta = n - (N - n) = 2n - N$. В "статистическом" равновесии $\Delta = 0$ и $n = N/2$. Если построить зависимость $\Delta(s)$, то она будет имитировать поведение H -функции в больцмановском газе.

Этот пример также не является достаточно убедительным, поскольку продолжение подобной "лотереи" неизбежно ведет к флуктуации Δ -функции, в то время как в больцмановской кинетической теории флуктуации H -функции полностью исключены. К концу жизни Больцман встал на позицию флуктуационной теории, трактующей убывание H -функции со временем лишь как наиболее вероятный процесс. Однако такая трактовка не

подкрепляется больцмановской кинетической теорией, поскольку не ясно, как образовалась первичная флуктуация (включая галактический масштаб подобной флуктуации).

Одним из первых, кто понял необходимость видоизменения уравнений Больцмана в целях устранения возникающих противоречий, был Максвелл, который исключительно высоко ценил результаты Больцмана, который, в свою очередь, много сделал для популяризации электродинамики Максвелла и ее экспериментального обоснования.

Рассмотрим аргументацию Максвелла. Уравнения гидродинамики являются следствием уравнения Больцмана. Если обратиться к уравнению энергии и пренебречь некоторыми механизмами передачи энергии (в частности, конвективной теплопередачей), то из уравнения энергии вытекает хорошо известное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.13)$$

записанное нами, для простоты, для одномерного случая.

Фундаментальное решение уравнения (1.13) с точностью до размерной постоянной

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \quad (1.14)$$

представляет собой температуру в точке x в момент времени t , если в момент времени $t = 0$ в начале координат выделяется некоторое количество теплоты cp , где ρ и a — плотность и температуропроводность среды. Вводя аргумент функции T в виде $\theta = a^2 t$, имеющем размерность квадрата координаты, получаем

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\theta}\right). \quad (1.15)$$

С физической точки зрения соотношение (1.15), отражающее распределение температуры, не является удовлетворительным. При малых θ температура в точке $x = 0$, где выделяется теплота, неограниченно велика. С другой стороны, из (1.15) следует, что в любой сколь угодно удаленной точке x температура, созданная мгновенным источником теплоты, будет отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Это отличие может быть малым, но принципиально важно, что оно имеет конечную величину.

В классическом курсе "Теоретическая физика" Ландау и Лифшица отмечается (см. [9], с. 283): "Процесс теплопроводности, описываемый полученными здесь формулами, обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на все пространство". Это означает, что происходит бесконечно быстрое распространение теплоты, что абсурдно с молекулярно-кинетической точки зрения. В курсах математической физики такой результат объясняют обычно следствием феноменологического вывода уравнения теплопроводности, при котором не учитывается молекулярно-кинетический механизм распространения теплоты. Однако, как уже отмечалось, параболическое уравнение (1.13) является следствием уравнения

Больцмана. Некоторые предложения Максвелла, носящие феноменологический характер и направленные на обобщение уравнения Больцмана, обсуждаются в монографии Вудса [10].

Разумеется, приведенные выше примеры не исчерпывают, а лишь иллюстрируют трудности больцмановской кинетической теории. И все же после напряженных дискуссий начала XX века постепенно сходят на нет поиски альтернативного кинетического уравнения для одночастичной функции распределения или, если выражаться точнее, эти работы уходят на периферию физики. Дискутирующие стороны исчерпали аргументы. Уравнение Больцмана показало свою эффективность при решении ряда задач и прежде всего в расчетах кинетических коэффициентов. В результате больцмановская кинетическая теория прошла путь, типичный для революционной физической теории, — от отрицания до признания, а затем и до известной "канонизации".

Работы по гиперболическому уравнению теплопроводности уже не связывались непосредственно с уравнением Больцмана и носили феноменологический характер. Не вдаваясь в изложение этого направления, укажем, что смысл "исправления" уравнения теплопроводности (1.13) заключался во введении второй производной по времени, что сводит уравнение (1.13) к гиперболическому виду [11]:

$$\tau_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.16)$$

где τ_p трактуется как некоторый релаксационный кинетический параметр, имеющий размерность времени. Волновое уравнение (1.16) приводит к конечным скоростям распространения тепловых возмущений (на самом деле квазилинейные параболические уравнения также могут приводить к волновым решениям).

Для гиперболического уравнения теплопроводности разрабатываются специальные численные схемы, обеспечивающие устойчивый счет высокой точности [12]. Укажем, например, исследование двухтемпературных моделей нелокальной теплопроводности и телеграфного уравнения как возможной парадигмы обобщенной гидродинамики [13, 14]. Этим работам присущ общий принципиальный недостаток, заключающийся в их феноменологическом интуитивном характере и полной оторванности от классической больцмановской кинетической теории. Вместе с тем один принципиальный вывод вытекает с непреложностью: попытка "исправить" уравнение теплопроводности неизбежно ведет к новой гидродинамической теории, которая, в свою очередь, должна быть следствием кинетического уравнения, отличного от уравнения Больцмана.

Революционный этап в развитии кинетической теории относится к концу 30-х и началу 40-х годов, когда усилиями многих ученых и прежде всего Боголюбова удалось показать, каким образом из уравнения Лиувилля для многочастичной функции распределения f_N , описывающей состояние системы N взаимодействующих частиц, удается перейти к одночастичному представлению, введя малый параметр $\varepsilon = nv_B$, где n — число частиц в единице объема, v_B — объем взаимодействия [15–19]. Обычно эту иерархию уравнений называют цепочкой Боголюбова или цепочкой ББГКИ (Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона).

Мы адресуем читателя за техническими деталями к цитированным классическим работам или, например, к книге [20]. Отметим лишь принципиальные моменты, следующие из указанного выше вывода.

1. Применение последовательного интегрирования уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{v}_i} = 0 \quad (1.17)$$

по фазовым объемам $d\Omega_{s+1}, \dots, d\Omega_N$ ($d\Omega_j \equiv d\mathbf{r}_j d\mathbf{v}_j$) приводит к кинетическому уравнению для s -частичной функции распределения. При этом интегральная часть соответствующего уравнения будет содержать функцию распределения f_{s+1} .

Иначе говоря, система интегро-дифференциальных уравнений оказывается зацепляющейся. В младшем приближении функция распределения f_1 зависит от f_2 . Формально это означает, что решение подобной системы, строго говоря, необходимо строить следующим образом. Вначале нужно найти функцию распределения f_N , а затем решать систему уравнений ББГКИ последовательно, переходя к распределениям все более низкого порядка. Но если известна функция f_N , вовсе нет необходимости искать решение уравнений относительно f_s , достаточно воспользоваться определением функции

$$f_s = \int f_N(t, \Omega_1, \dots, \Omega_N) d\Omega_{s+1} \dots d\Omega_N. \quad (1.18)$$

Итак, строгий подход к решению системы уравнений ББГКИ по-прежнему эквивалентен решению уравнений Лиувилля. Вместе с тем кажущийся логически несостоятельным метод решения, когда находится функция распределения f_1 , имеет важное значение в кинетической теории и неравновесной статистической механике. Такой подход связан с разрывом цепочки уравнений ББГКИ при помощи дополнительных предположений, имеющих, впрочем, прозрачный физический смысл. Эти предположения подробно обсуждаются ниже.

2. В случае нереагирующего газа уравнение Больцмана справедливо для двух масштабов изменения функций распределения: на временах порядка времени между столкновениями частиц и на гидродинамическом времени течения. Уравнение Больцмана не справедливо на временах порядка времени столкновения. Разумеется, терминологию временных масштабов можно перевести в масштабы линейных размеров.

3. После разрыва цепочки ББГКИ и представления f_2 как произведения одночастичных функций распределения (что вполне разумно для разреженного газа) уравнение Больцмана не может быть записано в классической форме (с использованием лишь одного малого параметра ε) и сводится к уравнению Власова в самосогласованном поле.

4. Поскольку уравнение Больцмана "не работает" на расстояниях порядка радиуса взаимодействия частиц (или в r_B -масштабе), больцмановские частицы есть точечные бесструктурные частицы. При этом возникающие сечения столкновений частиц появляются через интеграл столкновений, что является одним из противоречий больцмановской теории.

5. Обычно одночастичная функция распределения нормируется на число частиц в единице объема. Для

больцмановских частиц функция распределения "автоматически" нормируется на *целое* число, так как точечная частица может находиться либо внутри пробного контура в газе, либо снаружи (в отличие от частиц конечного диаметра, которые при своем движении в определенный момент времени могут перекрывать границу пробного контура). Это противоречие больцмановской теории Власов [21] пытался разрешить путем введения дополнительных динамических переменных в одночастичную функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}, \dots, t)$.

К этому можно добавить, что средняя длина пробега в больцмановской кинетической теории имеет смысл лишь для модели твердых упругих сфер. Для других моделей возникают трудности, которые, впрочем, связаны с уровнем одночастичного описания. Переход к одночастичной модели требует введения предположения о существовании молекулярного хаоса до столкновения частиц.

После появления цепочки уравнений ББГКИ стало очевидным, что любые обобщения больцмановской кинетической теории должны следовать логике, в которой увязаны все элементы цепочки: уравнение Лиувилля, кинетические уравнения относительно f_s -частичных функций распределения, гидродинамические уравнения. Это логическое построение, как правило, не выдерживалось.

В 1951 г. появились статьи Слезкина [22, 23], направленные на вывод альтернативных уравнений движения газа. Идея заключалась в попытке использования результатов Мещерского [24] для динамики материальной точки переменной массы, которые нашли свое применение в теории реактивного движения.

Предположение о переменности массы частицы означает, что в каждой точке к жидкой частице, расположенной в окрестности этой точки и имеющей скорость \mathbf{v} , присоединяется или отсоединяется некоторая масса, вектор \mathbf{U} абсолютной скорости которой отличается на какую-то, как пишет Слезкин, заметную величину от вектора \mathbf{v} скорости самой частицы. Поскольку масса может присоединяться (или исчезать) с различных направлений, вводится вектор \mathbf{Q} плотности потока присоединяемой массы.

Далее, следуя обычным рассуждениям, основанным на уравнениях баланса массы, импульса и энергии, Слезкин формулирует систему гидродинамических уравнений, из которых мы приведем уравнение неразрывности для однокомпонентного не реагирующего газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v} + \mathbf{Q}) = 0. \quad (1.19)$$

Плотность потока массы \mathbf{Q} феноменологическим образом представляется через градиент плотности и температуры.

Итак, из интуитивных соображений в уравнение неразрывности вводится источниковый член

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(D \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} + \beta \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (1.20)$$

содержащий коэффициент самодиффузии D и коэффициент β , связанный с термодиффузией. Таким образом, в правой части (1.20) появляются флуктуационные члены, пропорциональные, вообще говоря, среднему времени τ

между столкновениями и, следовательно, после обезразмеривания (1.20), числу Кнудсена, малому по величине в гидродинамическом пределе.

Практически одновременно с работой Слезкина [23] появилась статья Валландера [25], в которой утверждалось, что известные уравнения движения получены из недостаточно полных физических представлений и должны быть заменены другими уравнениями, которые основаны на введении дополнительных потоков массы Q_i и энергии t_i ($i = 1, 2, 3$):

$$Q_i = D_1 \frac{\partial \rho}{\partial r_i} + D_2 \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad t_i = k_1 \frac{\partial \rho}{\partial r_i} + k_2 \frac{\partial T}{\partial r_i},$$

где " D_1 — коэффициент плотностной самодиффузии, D_2 — коэффициент термосамодиффузии, k_1 — коэффициент плотностной теплопроводности, k_2 — коэффициент температурной теплопроводности".

Работы Слезкина и Валландера встретили достаточно жесткую критику, поскольку они носили эвристический характер и противоречили выводам больцмановской кинетической теории. В частности, Шапошников [26] отмечал, что в упомянутых статьях Слезкина и Валландера, "почти совпадающих по содержанию, ...существо дела заключается в том, что для плотности потока массы вместо обычного выражения ρv_0 вводятся дополнительные эффекты — "концентрационная самодиффузия" и термическая "самодиффузия", обуславливающие дополнительный к макроскопическому молекулярный перенос массы, подобно тому как к макроскопическому переносу энергии и импульса движущейся жидкости присоединяется их молекулярный перенос (теплопроводность и вязкость)". Далее Шапошников дает вывод уравнения неразрывности из уравнений Больцмана для однокомпонентного газа и устанавливает противоречие гидродинамических уравнений Слезкина и Валландера выводам больцмановской кинетической теории.

Отметим, что Слезкин и Валландер подвергли аналогичным модификациям (путем введения эффектов самодиффузии) также уравнения движения и энергии однокомпонентного газа. Вопрос о возможных последствиях для больцмановской кинетической теории введения дополнительных механизмов переноса массы в работах Слезкина и Валландера не рассматривался.

К "флуктуационной гипотезе" Больцмана неоднократно возвращался в своих работах Терлецкий (см., например, [27, 28]). Идея заключалась в использовании для оценки флуктуаций выражения для среднеквадратичного отклонения произвольной обобщенной координаты, следующего из общих теорем Гиббса (см. [29], с. 85–88). Для того чтобы флуктуации в статистическом равновесии не оказались малыми, Терлецкий вводит в уравнение состояния идеального газа гравитационный член, что на самом деле немедленно выводит за пределы больцмановской кинетической теории и оставляет открытым вопрос о необратимом изменении H -функции Больцмана.

В последние годы вопрос о возможных обобщениях уравнения Больцмана неоднократно возникал в литературе. Как правило, все модификации имели название обобщенного уравнения Больцмана. Во избежание недоразумений мы в дальнейшем будем называть обобщенным уравнением Больцмана кинетическое уравнение, выведенное в [30–32].

В теории Вудса (см., например, [33]), следуя идеям, восходящим к Максвеллу, предлагается ввести феноменологическую поправку в субстанциональную первую производную в левой части уравнения Больцмана в целях учета дополнительного влияния давления на процессы переноса. Утверждается, что уравнение движения жидкой частицы может быть записано как

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \mathbf{P},$$

где \mathbf{P} — некоторая дополнительная сила, пропорциональная градиенту давления: $\mathbf{P} = -\rho^{-1} \partial p / \partial \mathbf{r}$, что ведет к представлению левой части уравнений Больцмана в форме

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1.21)$$

а столкновительный член не видоизменяется. Феноменологическое уравнение (1.21) не имеет серьезного обоснования и не является следствием иерархии кинетических уравнений Боголюбова.

Рассмотрение ряда других предложений по обобщению уравнения Больцмана удобнее проводить в контексте основных принципов обобщенной больцмановской физической кинетики, разработанной автором данного обзора. К изложению этих принципов мы и переходим.

2. Обобщенное уравнение Больцмана

Если отвлечься от множества масштабов, которые могут быть свойственны реагирующему газу, то можно выделить три группы масштабов, связанных с длинами, скоростями и временами. При этом масштаб взаимодействия частиц r_B есть лишь один (и наименьший) из иерархии масштабов для молекулярных систем, в которых всегда присутствуют еще λ -масштаб, связанный со средней длиной пробега частиц между столкновениями, и гидродинамический L -масштаб, например длина или радиус трубы, по которой течет газ, характерный размер обтекаемого тела и т.д. Обычно в газовой динамике выполняются условия

$$r_B \ll \lambda \ll L. \quad (2.1)$$

При желании неравенства (2.1) можно переписать, используя характерные время столкновения, среднее время между столкновениями, гидродинамическое время течения. Возникает принципиально важная проблема об адекватном описании кинетических процессов на всех трех масштабах эволюции системы, поскольку уравнение Больцмана справедливо лишь в λ - и L -масштабах.

Соответствующее обобщенное уравнение Больцмана было выведено автором данного обзора в 1987 г., докладывалось на лекциях по физической кинетике, прочитанных для научных сотрудников Софийского университета (Болгария) в том же году, и опубликовано вместе с выводом в тезисах докладов 7-го Совещания по механике реагирующих сред (Красноярск, 1988). Это уравнение имеет вид

$$\frac{Df}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\tau \frac{Df}{Dt} \right) = J^{\text{st}}. \quad (2.2)$$

Здесь τ — среднее время между столкновениями, J^{st} — больцмановский интеграл столкновений, оператор D/Dt определяется соотношением (1.2).

Для многокомпонентного реагирующего газа обобщенное уравнение Больцмана переписывается в виде

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\tau_\alpha \frac{Df_\alpha}{Dt} \right) = J_\alpha^{\text{st,el}} + J_\alpha^{\text{st,r}}, \quad (2.3)$$

где f_α — функция распределения для частиц сорта α , τ_α — среднее время между столкновениями для частиц сорта α , $J_\alpha^{\text{st,el}}$ и $J_\alpha^{\text{st,r}}$ — больцмановские интегралы столкновений для упругих и неупругих соударений частиц соответственно.

В дальнейшем вывод и ряд приложений обобщенных уравнений Больцмана неоднократно публиковался в отечественной и зарубежной печати (см., например, [30–32, 34–38]), и здесь мы, опуская громоздкие детали выкладок, сосредоточим в основном внимание на принципиальных физических особенностях и тонкостях вывода этого уравнения. Исходным является классическое уравнение Лиувилля (1.17), отображающее эволюцию в $6N$ -мерном пространстве N -частичной функции распределения f_N системы, состоящей из N частиц, для описания движения которых достаточно информации об их положениях \mathbf{r}_i в некоторый момент времени и импульсах \mathbf{p}_i .

Далее применяется процедура Боголюбова и записывается безразмерное уравнение относительно одночастичной функции распределения. При этом, следуя методу многих масштабов [39], мы вводим три группы масштабов:

на r_B -уровне — радиус взаимодействия r_B , характерную скорость столкновения v_{B0} , характерное время столкновения r_B/v_{B0} ;

на λ -уровне — среднюю длину пробега между столкновениями λ , среднюю скорость частиц между столкновениями $v_{\lambda 0}$, характерный масштаб времени $\lambda/v_{\lambda 0}$;

на L -уровне — характерный гидродинамический размер L , гидродинамическую скорость v_{L0} , гидродинамическое время L/v_{L0} .

Будем считать, что s -частичная функция \hat{f}_s есть функция трех групп масштабированных переменных и малого параметра $\varepsilon = nv_B = nr_B^3$. Крышечка над символом означает обезразмеривание, а нормировка функции распределения дается соотношением

$$\hat{f}_s = f_s \frac{v_{B0}^{3s}}{n}. \quad (2.4)$$

Функция \hat{f}_s представляется в виде асимптотического ряда

$$\hat{f}_s = \sum_{v=0}^{\infty} \hat{f}_s^v(\hat{t}_B, \hat{\mathbf{r}}_{iB}, \hat{\mathbf{v}}_{iB}; \hat{t}_\lambda, \hat{\mathbf{r}}_{i\lambda}, \hat{\mathbf{v}}_{i\lambda}; \hat{t}_L, \hat{\mathbf{r}}_{iL}, \hat{\mathbf{v}}_{iL}) \varepsilon^v. \quad (2.5)$$

Вычисляя производные, входящие в левую часть s -го уравнения ББГКИ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{t}} + \sum_{i=1}^s \hat{\mathbf{v}}_{iB} \cdot \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{iB}} + \sum_{i=1}^s \hat{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{iB}} + \alpha \sum_{i=1}^s \hat{\mathbf{F}}_{iB} \cdot \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{iB}} = \\ = -\varepsilon \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N \int \hat{\mathbf{F}}_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{iB}} \hat{f}_{s+1}(\hat{t}, \hat{\Omega}_1, \dots, \hat{\Omega}_s, \hat{\Omega}_j) d\hat{\Omega}_j, \end{aligned} \quad (2.6)$$

по правилу вычисления производных от сложных функций и приравнявая коэффициенты при ε^0 и ε^1 , находим

$$\frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_B} + \hat{\mathbf{v}}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1B}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1B}} = 0, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{t}_B} + \hat{\mathbf{v}}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1B}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1B}} + \\ & + \varepsilon_2 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_\lambda} + \hat{\mathbf{v}}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1\lambda}} + \varepsilon_2 \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1\lambda}} + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_L} + \varepsilon_1 \hat{\mathbf{v}}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1L}} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1L}} = \\ & = - \sum_{\delta=1}^{\mu} \frac{N_\delta}{N} \int \hat{\mathbf{F}}_{1,j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1B}} \hat{f}_{2,j \in N_\delta}^0 d\Omega_{j \in N_\delta}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\varepsilon_1 = \lambda/L$ обозначает число Кнудсена, $\varepsilon_2 = v_{\lambda 0}/v_{B0}$, $\varepsilon_3 = v_{L0}/v_{\lambda 0}$, $\alpha = F_{\lambda 0}/F_0$; в качестве масштаба внутренних сил F_0 использована величина v_{B0}^2/r_B . Уравнение (2.8) записано для многокомпонентной смеси газов, индекс j определяет принадлежность частиц к группе N_δ ($\delta = 1, \dots, \mu$) μ -компонентной смеси газов.

Преобразование уравнения (2.8) приводит к следующему результату:

$$\frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_B} + \frac{d_1 \hat{f}_1^0}{d \hat{t}_{\lambda,L}} = \hat{J}^{\text{st},0}, \quad (2.9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_B} &= \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{t}_B} + \hat{\mathbf{v}}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1B}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^1}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1B}}, \\ \frac{d_1 \hat{f}_1^0}{d \hat{t}_{\lambda,L}} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_\lambda} + \hat{\mathbf{v}}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1\lambda}} + \varepsilon_2 \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1\lambda}} + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{t}_L} + \varepsilon_1 \hat{\mathbf{v}}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{1L}} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_1^0}{\partial \hat{\mathbf{v}}_{1L}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для развиваемой теории принципиальный характер имеют следующие замечания.

1. Никакие ограничения на величины ε_1 , ε_2 , ε_3 не вводятся, включая число Кнудсена ε_1 .

2. Безразмерные функции распределения \hat{f} имеют два индекса: верхний, отображающий номер приближения в разложении по малому параметру ε , и нижний, отвечающий номеру уравнения и числу частиц, одновременный учет которых необходим для построения функции распределения.

3. Уравнение (2.9) содержит зацепление не только по нижнему индексу, но и по верхнему индексу. Следовательно, для использования кинетического уравнения необходимы дополнительные предположения, приводящие уравнение к одной зависимой переменной.

4. Интеграл столкновений $\hat{J}^{\text{st},0}$ преобразуется в больцмановский интеграл столкновений, если парные корреляционные функции нулевого порядка в разложении по ε равны нулю и можно пренебречь в r_B -масштабе явным влиянием самосогласованной силы внутреннего происхождения, действующей на выделенную пробную частицу. Этот вопрос подробно рассматривается ниже при обсуждении связи обобщенных уравнений Больцмана с альтернативными выводами кинетических уравнений. В больцмановском интеграле столкновений двух-

частичная функция распределения нулевого порядка вычисляется в λ -масштабе и, как обычно, представляется в виде произведения одночастичных функций нулевого порядка; это означает, что перед столкновением взаимодействующие частицы не коррелированы.

5. Использование этого представления позволяет записать интеграл столкновений $\hat{J}^{\text{st},0}$ в больцмановской форме. Наличие верхнего индекса "0" в интеграле столкновений $\hat{J}^{\text{st},0}$ физически означает, что, несмотря на учет изменения функции распределения в r_B -масштабе (первый член слева в (2.9)), вид больцмановского интеграла столкновения, содержащего функции f_1^0 , не изменяется.

6. Принципиально важно, что член $D_1 \hat{f}_1^1 / D \hat{t}_B$ в уравнении (2.9), учитывающий изменение функции распределения в r_B -масштабе, того же порядка, что и члены, соответствующие λ - и L -масштабам. Этот факт не связан ни с какими последующими возможными аппроксимациями $D_1 \hat{f}_1^1 / D \hat{t}_B$ в целях расщепления цепочки Боголюбова. Формальное (и не оправданное) пренебрежение членом $D_1 \hat{f}_1^1 / D \hat{t}_B$ переводит (2.9) в уравнение Больцмана. В свою очередь, это означает, что функция распределения в r_B -масштабе в больцмановской кинетической теории не рассматривается; частицы больцмановской кинетической теории являются точечными и бесструктурными. Описание системы возможно с помощью независимых переменных \mathbf{r} , \mathbf{p} , t , а изменение функции распределения в результате столкновений мгновенно и представляется источниковым членом $\hat{J}^{\text{st},0}$.

Теперь обратимся к расщеплению цепочки Боголюбова в r_B -масштабе по верхнему индексу в $D_1 \hat{f}_1^1 / D \hat{t}_B$. Для рассматриваемого члена возможно точное представление с помощью ряда (2.5):

$$\frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_B} = \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (2.11)$$

Однако при "полевом" описании функция распределения f_1 в масштабе взаимодействия (r_B -масштабе) зависит от ε через динамические переменные \mathbf{r} , \mathbf{v} , t , связанные законами классической механики. Следовательно, возможна аппроксимация

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left[\left(\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] &= \frac{D_1}{D(-\hat{t}_B)} \left[\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial(-\hat{t}_B)} \left(\frac{\partial(-\hat{t}_B)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\mathbf{r}}_B} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_B}{\partial(-\hat{t}_B)} \left(\frac{\partial(-\hat{t}_B)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\mathbf{v}}_B} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}_B}{\partial(-\hat{t}_B)} \left(\frac{\partial(-\hat{t}_B)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] = \\ & = - \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left[\left(\frac{\partial \hat{t}_B}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{D_1 \hat{f}_1}{D \hat{t}_B} \right] = \\ & = - \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left[\left(\frac{\partial \hat{t}_B}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} \right] = - \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В (2.12) введена аппроксимация против направления времени, что соответствует условию отсутствия корреляций при $t_0 \rightarrow -\infty$, где t_0 — некоторый момент времени в r_B -масштабе, определяющий начало взаимодействия частиц. В больцмановской кинетической теории условие ослабления корреляций имеет вид

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} W_2[\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_1(t - t_0), \mathbf{v}_1; \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}_2(t - t_0), \mathbf{v}_2; t_0] = 0, \quad (2.13)$$

где W_2 — парная корреляционная функция. При $t_0 \rightarrow -\infty$ (но не при $t_0 \rightarrow +\infty$!) [15] условие ослабления корреляций (2.13) вместе с аппроксимацией (2.12) выделяет направление времени и приводит к необратимости времени в реальных физических процессах. Этот вопрос подробно рассматривается в следующем разделе в связи с доказательством обобщенной H -теоремы.

Возвращаясь к размерному виду уравнения, используя нормировку функции распределения на плотность числа частиц и (2.12), запишем уравнение (2.9) так:

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\tau_\alpha \frac{Df_\alpha}{Dt} \right) = \sum_{\beta=1}^{\mu} \int [f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta] g_{\alpha\beta} b db d\varphi dv_\beta. \quad (2.14)$$

Здесь $g_{\alpha\beta}$ — относительная скорость сталкивающихся частиц α и β , b — прицельное расстояние, φ — азимутальный угол.

Прокомментируем обобщенное уравнение Больцмана (2.14).

1. Выделенная под номером 1 частица в многокомпонентной системе, принадлежит некоторому компоненту α смеси газов, что отмечено нижним индексом α при символе функции распределения; при этом у символа f опущен верхний индекс "0", сохранение которого не имеет смысла, поскольку обобщенное уравнение Больцмана содержит только функции нулевого приближения в разложении по параметру плотности ε .

2. Для определения физического смысла параметра τ_α имеем соотношение

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (2.15)$$

Здесь ε — число частиц всех сортов, оказавшихся в объеме взаимодействия частицы α к моменту времени t . Правая часть (2.15) расшифровывается следующим образом: это есть число частиц, которое окажется в сфере взаимодействия некоторой частицы, принадлежащей компоненту α , за единицу времени (вычисление соответствующей производной проводится при дополнительном условии $\varepsilon = 0$). Очевидно, их будет столько, сколько столкновений испытывает частица α за единицу времени с остальными частицами.

Таким образом, параметр τ_α есть среднее время между последовательными столкновениями частицы сорта α с частицами всех сортов, которое определяется как

$$\tau_\alpha = \frac{n_\alpha}{\sum_{\beta=1}^{\mu} N_{\alpha\beta}}. \quad (2.16)$$

Число столкновений $N_{\alpha\beta}$ частиц сортов α и β , происходящих в единице объема за единицу времени, вычисляется через функции f_α и f_β . Для максвелловских функций распределения [40]

$$N_{\alpha\beta} = 2n_\alpha n_\beta \sigma_{\alpha\beta}^2 \left(\frac{2\pi kT}{m_{\alpha\beta}} \right)^{1/2}, \quad (2.17)$$

где σ_α — диаметр частицы α , $m_{\alpha\beta}$ — приведенная масса.

3. В гидродинамическом пределе для модели твердых сфер в первом (максвелловском) приближении

$$\tau^{(0)} p = 0,8\mu, \quad (2.18)$$

где p — статическое давление, μ — динамическая вязкость.

4. Обобщенное уравнение Больцмана содержит не только вторые производные по времени, но и перекрестные производные "время-скорость", "время-координата". Если ввести "усредненную" функцию распределения

$$f^a = f - \tau \frac{Df}{Dt}, \quad (2.19)$$

то обобщенное уравнение Больцмана записывается в форме, напоминающей уравнение Больцмана (1.1):

$$\frac{Df^a}{Dt} = J^{\text{st}}(f). \quad (2.20)$$

Теперь становится ясным, что уравнение Больцмана, не содержащее флуктуационных членов, является незамкнутым, и проблема замыкания моментных уравнений в теории турбулентности, основанной на гидродинамических уравнениях, которые получены из уравнений Больцмана, не имеет, мягко говоря, строгого решения.

5. Параметр τ в обобщенном уравнении Больцмана имеет строгий физический смысл и в отличие от так называемых кинетически согласованных разностных схем [41], к обсуждению которых мы еще вернемся, не приводит к секулярным членам.

6. Обобщенное уравнение Больцмана в безразмерном виде записывается как [2]

$$\frac{D\hat{f}_\alpha}{D\hat{t}} - \frac{D}{D\hat{t}} \left(\text{Kn} \hat{\tau}_\alpha \frac{D\hat{f}_\alpha}{D\hat{t}} \right) = \frac{1}{\text{Kn}} \hat{J}^{\text{st}}, \quad \text{Kn} = \varepsilon_1. \quad (2.21)$$

Из уравнения (2.21) следует, что второй член имеет порядок числа Кнудсена Kn и с ростом числа Кнудсена оказывается доминирующим в левой части обобщенного уравнения Больцмана. Естественно, это не нарушает свободномолекулярного предела уравнения, поскольку

$$\frac{D}{Dt} \frac{D\hat{f}_\alpha}{D\hat{t}} = 0 \quad \text{при} \quad \text{Kn} \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Решением (2.22) является уравнение свободномолекулярного течения (аналог уравнения Лиувилля для одночастичной функции распределения)

$$\frac{D\hat{f}_\alpha}{D\hat{t}} = 0. \quad (2.23)$$

Однако второй член в (2.21) не может быть изъят из рассмотрения и при малых числах Кнудсена, поскольку в этом случае число Кнудсена Kn выступает как малый коэффициент при старших производных, что неизбежно приводит к появлению областей сильного влияния этого члена. Пренебрежение формально малыми членами означает, в частности, изъятие из рассмотрения колмогоровской (мелкомасштабной) турбулентности.

В заключение настоящего раздела подчеркнем фундаментальный факт: введение в рассмотрение третьего масштаба, описывающего изменение функции распределения на временах порядка времени столкновения, приводит до аппроксимаций (расцепляющих цепочку Боголюбова) к однопорядковым членам в уравнении Больцмана, а после аппроксимаций — к членам, пропорциональным среднему времени между столкновениями.

Следовательно, уравнение Больцмана нуждается в радикальном видоизменении, каковым, по нашему убеждению, является обобщенное уравнение Больцмана.

3. Обобщенная H -теорема и проблема необратимости времени

H -теорема Больцмана имеет принципиальное значение для кинетической теории, являясь по сути кинетическим обоснованием энтропии. Обобщенная H -теорема была доказана в 1992 г. (см., например, [37]), и здесь мы приводим основные фрагменты вывода, обсуждая его с позиций проблемы необратимости времени.

Рассмотрим вначале простой газ, состоящий из сферических молекул. Состояние газа предполагается однородным, а внешние силы — отсутствующими. Тогда обобщенное уравнение Больцмана приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\tau \frac{\partial f}{\partial t} \right) = J^{\text{st}}. \quad (3.1)$$

Введем H -функцию Больцмана

$$H = \int f \ln f \, dv. \quad (3.2)$$

Умножая обе части (3.1) на $\ln f$, преобразуем уравнение к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f \ln f) - \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f \ln f) + \tau \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - \\ - \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (f \ln f) = (1 + \ln f) J^{\text{st}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Проинтегрируем теперь уравнение (3.3) почленно по всем значениям скоростей и воспользуемся определением H -функции

$$\frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\tau \frac{dH}{dt} \right) = -\tau \int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \, dv + \int (1 + \ln f) J^{\text{st}} \, dv. \quad (3.4)$$

Поскольку выполняется неравенство

$$-\tau \int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \, dv + \int (1 + \ln f) J^{\text{st}} \, dv \leq 0, \quad (3.5)$$

оказывается, что

$$\frac{d}{dt} \left(H - \tau \frac{dH}{dt} \right) \leq 0. \quad (3.6)$$

Введем H^a -функцию в соответствии с определением

$$H^a = H - \tau \frac{dH}{dt}. \quad (3.7)$$

Тогда справедливо неравенство, которое составляет утверждение обобщенной H -теоремы:

$$\frac{dH^a}{dt} \leq 0. \quad (3.8)$$

Обобщенная H^a -функция ограничена снизу по тем же соображениям, по которым обосновывается ограничение

снизу для H -функции. Можно доказать два следующих утверждения [32]:

1) если

$$\frac{dH}{dt} \leq 0, \quad \text{то и} \quad \frac{dH^a}{dt} \leq 0; \quad (3.9)$$

2) если же на каком-либо участке кривой эволюции¹

$$\frac{dH}{dt} \geq 0, \quad \text{то и} \quad \frac{dH^a}{dt} \geq 0, \quad (3.10)$$

что запрещено неравенством (3.8).

Для многокомпонентного газа аналог уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\tau_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right) = J_\alpha^{\text{st}}. \quad (3.11)$$

В результате H -функция для компонента α смеси газа ($\alpha = 1, \dots, \mu$) записывается как

$$H_\alpha = \int f_\alpha \ln f_\alpha \, dv_\alpha. \quad (3.12)$$

Последующие выкладки совершенно аналогичны, поэтому неравенство (3.8) становится таким:

$$\frac{dH_\alpha^a}{dt} \leq 0. \quad (3.13)$$

Суммирование по всем компонентам приводит к H -функции для многокомпонентной смеси газов

$$H = \sum_\alpha f_\alpha \ln f_\alpha \, dv_\alpha, \quad (3.14)$$

причем

$$H^a = H - \sum_{\alpha=1}^{\mu} \tau_\alpha \frac{dH_\alpha}{dt}, \quad (3.15)$$

и неравенству

$$\frac{dH^a}{dt} \leq 0, \quad (3.16)$$

являющемуся следствием (3.13).

Пусть в многокомпонентной смеси газов протекают бимолекулярные химические реакции

$$A_\alpha + A_\beta \leftrightarrow A_\gamma + A_\delta \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, \mu).$$

Используя принцип микроскопической обратимости, вновь приходим к формулировке H -теоремы в виде (3.16).

Если перейти к энтропийному описанию, то с точностью до непринципиальной константы S_0 , связанной только с уровнем отсчета энтропии, имеем классическое соотношение

$$S = -kH + S_0,$$

¹ Возможность появления в равновесном состоянии (при $H^a = 0$) экспоненциально растущей во времени флуктуации H исключается обращением в нуль постоянной интегрирования, поскольку в этом случае пространственно однородная модель физической системы не корректна (см. с. 669).

что ведет к термодинамическому неравенству

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \quad (3.17)$$

Исследуем теперь термодинамическое неравенство (3.17) с позиций существующих причинно-следственных связей и направления времени. Для этого следует ответить на вопрос, как в обобщенной больцмановской физической кинетике появилось неравенство (3.16), которое ведет к возрастанию энтропии (3.17) и существованию необратимых процессов. Этот эффект есть прямое следствие аппроксимации (2.12), в которую было введено движение против направления "стрелы времени" так, что состояние системы в данный момент времени определяется детерминированным образом столкновениями, происшедшими в прошлом.

Введем физический принцип причинности как некоторый оператор, который "вырезает" из всех возможных в данный момент событий только то достоверное событие, причины которого существуют в прошлом и которое переводит рассматриваемое достоверное событие в настоящем в класс причинных связей для некоторого возможного события в будущем. Тем самым вводится необратимость времени. Иначе говоря, невозможно говорить о принципе причинности, не используя понятия о необратимости времени.

К чему может привести формальный отказ от принципа причинности в данном конкретном случае? Если отказаться от дополнительного утверждения, что причина предшествует следствию, то в соотношении (3.4) можно формально провести замену τ на $-\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{dH^{a'}}{dt} - \tau \int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dv &= \\ &= \frac{1}{4} \int \ln \frac{ff_1}{f'f'_1} (f'f'_1 - ff_1) gb db d\varphi dv_1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$H^{a'} = H + \tau \frac{dH}{dt},$$

или иначе:

$$\frac{dH^{a'}}{dt} - \tau \int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dv \leq 0. \quad (3.19)$$

Здесь уже ничего нельзя сказать о знаке производной $dH^{a'}/dt$.

Неравенство (3.19) может сохраняться и в случае, если

$$\frac{dH^{a'}}{dt} > 0,$$

поскольку из этой величины вычитается неотрицательный интеграл

$$\tau \int \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 dv,$$

не изменяющийся при замене t на $-t$.

Итак, принцип возрастания энтропии есть прямое следствие принципа необратимости времени.

Перейдем теперь к исследованию связи обобщенного уравнения Больцмана, полученного методом многих масштабов, с альтернативными подходами к выводу кинетических уравнений.

4. Обобщенное уравнение Больцмана и "физический" вывод уравнения Больцмана

Исследуем проблему связи обобщенного уравнения Больцмана с так называемым "физическим" выводом уравнения Больцмана. Конечно, последующие рассуждения уже не будут носить строгий характер, но тем не менее полезны для понимания ситуации. С этой целью рассмотрим изменение числа частиц сорта α , находившихся в момент времени t в объеме $dr^t dv_\alpha^t$ фазового пространства. В отсутствие столкновений через интервал времени dt частицы будут находиться в объеме $dr^{t+dt} dv_\alpha^{t+dt}$; при этом разность

$$\begin{aligned} f_\alpha [r(t+dt), v_\alpha(t+dt), t+dt] dr^{t+dt} dv_\alpha^{t+dt} - \\ - f_\alpha (r, v_\alpha, t) dr^t dv_\alpha^t \end{aligned}$$

обратится в нуль.

При наличии внешних сил F_α , например сил Лоренца, нет оснований, вообще говоря, считать, что элементы фазового объема сохраняются с течением времени, и уравнение Больцмана записывается так:

$$\begin{aligned} f_\alpha \left[r + v_\alpha dt + \frac{1}{2} F_\alpha (dt)^2, v_\alpha + F_\alpha dt + \frac{1}{2} \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} (dt)^2, t+dt \right] \times \\ \times \frac{d[r^{t+dt}, v_\alpha^{t+dt}]}{d[r^t, v_\alpha^t]} - f_\alpha (r, v_\alpha, t) = J_\alpha^{st} dt. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В уравнении Больцмана (4.1) сохранены члены $O[(dt)^2]$, а вычисление якобиана приводит к результату

$$\frac{d[r^{t+dt}, v_\alpha^{t+dt}]}{d[r^t, v_\alpha^t]} = 1 + \left[\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 B^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \cdot F_\alpha \right]. \quad (4.2)$$

Здесь q_α — заряд частицы сорта α , B — магнитная индукция, F_α — внешняя сила, действующая на единицу массы частицы сорта α .

Разлагая функцию распределения в ряд и сохраняя члены $O[(dt)^2]$, получаем следующее интегро-дифференциальное разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + F_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} + \tau \left[F_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 B^2 f_\alpha - f_\alpha \frac{\partial}{\partial r} \cdot F_\alpha + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} F_\alpha : \frac{\partial}{\partial v_\alpha} F_\alpha + \right. \\ \left. + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\alpha} v_\alpha : \frac{\partial}{\partial r} F_\alpha + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_\alpha \partial v_\alpha} : F_\alpha F_\alpha + 2 \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_\alpha \partial r} : v_\alpha F_\alpha + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_\alpha \partial t} \cdot F_\alpha + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial r \partial t} \cdot v_\alpha + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial r \partial r} : v_\alpha v_\alpha \right] = J_\alpha^{st}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\tau = \Delta t/2$ — шаг разностной схемы.

Уравнение (4.3) следует рассматривать как источник дифференциально-разностных аппроксимаций для левой части уравнения Больцмана (4.1). Конечно, дифферен-

циально-разностный оператор в (4.3) не совпадает с дифференциальным оператором обобщенного уравнения Больцмана (2.14): параметр τ есть просто временной шаг разностной схемы, и при формальном росте τ в левой части (4.3) появляются секулярные члены. Дифференциальный оператор в (4.3), содержащий τ в качестве параметра, формально совпадает с соответствующим оператором обобщенного уравнения Больцмана, если $\tau = \text{const}$, магнитная индукция $B = 0$, внешние силы, действующие на систему, не зависят от \mathbf{r} .

Пусть теперь внешние силы \mathbf{F}_α равны нулю, тогда уравнение (4.3) принимает вид

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} + \tau \frac{D}{Dt} \frac{Df_\alpha}{Dt} = J_\alpha^{\text{st}}, \quad (4.4)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4.5)$$

Вопрос об аппроксимации повышенной точности для J_α^{st} при формальном "физическом" выводе уравнения Больцмана остается открытым. В уравнении (4.4) параметр τ есть константа, имеющая противоположный знак по сравнению с аналогичным членом в (2.14).

Можно ли получить дифференциально-разностную аппроксимацию с отрицательным знаком при второй субстанциональной производной? Несомненно: аппроксимация "назад" по времени в виде

$$\begin{aligned} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha) - f_\alpha(t - \Delta t, \mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha - \Delta \mathbf{v}_\alpha) = \\ = \left[\frac{Df_\alpha}{Dt} \right]_t \Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[\frac{D}{Dt} \frac{Df_\alpha}{Dt} \right]_t + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

приводит к уравнению баланса

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} - \tau \frac{D}{Dt} \frac{Df_\alpha}{Dt} = J_\alpha^{\text{st}}, \quad \tau = \frac{\Delta t}{2}. \quad (4.7)$$

С математических позиций обе дифференциально-разностные аппроксимации совершенно эквивалентны, а предпочтение той или иной аппроксимации может быть отдано лишь с точки зрения устойчивости применяемой разностной схемы. В указанных предположениях происходит совпадение дифференциально-разностной аппроксимации с обобщенным уравнением Больцмана, если, конечно, формально из обобщенной больцмановской кинетической теории использовать временной шаг $\Delta t = \text{const}$ разностной схемы в виде удвоенного среднего времени между столкновениями.

Таким образом, две математически эквивалентные разностные аппроксимации (4.4) и (4.7) имеют разный физический смысл (см. (2.12)): одна соответствует аппроксимации по "прогнозируемому будущему", другая — "детерминированному прошлому", отвечающему принципу необратимости времени. Важно отметить, что для "физического" вывода уравнения Больцмана этот факт не имеет значения, поскольку эволюция функции распределения в r_B -масштабе вообще не рассматривается и, как следствие, обе аппроксимации ведут к одному и тому же результату.

Итак, результат Больцмана $dH/dt \leq 0$ (являющийся следствием феноменологического вывода уравнения

Больцмана) может быть получен без явного использования предположения о необратимости времени, в то время как аналогичный результат в теории обобщенных уравнений Больцмана требует явного использования предположения о необратимости времени или, что то же самое, принципа причинности.

Рассмотрим теперь теорию кинетически согласованных разностных схем (см., например, [41–43]). Идеи теории восходят к работам Райца (см., в частности, [44]), в которых использовался метод расщепления для решения задач теории процессов переноса на кинетическую и гидродинамическую стадии. В отличие от [44] в теории кинетически согласованных разностных схем используется разложение функции распределения в ряд Тейлора по параметру $v\tau$, где τ — некоторый произвольный параметр, определяемый отношением шага сетки по пространству h к характерной гидродинамической скорости v_t с точностью до членов третьего порядка:

$$f^{j+1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t^{j+1}) = f_0^j - \tau \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f_0^j}{\partial r_\alpha} + \frac{\tau^2}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 f_0^j}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} v_\alpha v_\beta + \dots, \quad (4.8)$$

где f_0^j — максвелловская функция, а индекс j определяет номер шага по времени.

В работе [41] по теории кинетически согласованных разностных схем вводятся три параметра

$$\tau^x = \frac{h^x}{2v_t}, \quad \tau^y = \frac{h^y}{2v_t}, \quad \tau^z = \frac{h^z}{2v_t}, \quad (4.9)$$

определяемых пространственными шагами по координатам x, y, z . Чтобы найти значения газодинамических параметров на новом слое по времени $t = t^{j+1}$, произведенное разложение умножается на сумматорные инварианты и интегрируется по скоростям молекул однокомпонентного газа. В результате получается система дифференциально-разностных уравнений с дополнительными членами (в отличие от классических гидродинамических уравнений в правых частях), которые в силу выбранной аппроксимации представляют собой комбинацию вторых производных по пространству, умноженных на шаг по времени.

Изложенный в [43] подход не ведет к новому гидродинамическому описанию. Более того, как следует из вывода (4.3), этот подход даже не доставляет в общем случае аппроксимацию второго порядка ни для уравнения Больцмана, ни для обобщенных гидродинамических уравнений, которые на самом деле являются прямым следствием обобщенных уравнений Больцмана (см. также [35, 36]). Попытки обосновать теорию кинетически согласованных разностных схем модифицированным уравнением Больцмана с дополнительным релаксационным членом не верны, поскольку уравнение Больцмана "работает" на временах порядка времени релаксации. В частности, при такой аппроксимации (по сравнению с обобщенным гидродинамическим уравнением и обобщенным уравнением Больцмана) отсутствуют все перекрестные по пространству и времени производные, вторые производные по времени. Как следствие, теорию кинетически согласованных разностных схем невозможно использовать для: а) корректного моделирования турбулентных течений; б) построения

обобщенного навье-стоксовского приближения; в) введения внешних сил; г) выяснения физического смысла параметра τ , из-за которого в уравнениях появляются секулярные члены; д) оценки вклада в гидродинамические уравнения от неизбежной модификации столкновительного члена. Как отмечается в [45], "...общим недостатком работ [41, 46] является, в частности, то, что введенные в них дополнительные члены нарушают инвариантность кинетического уравнения относительно преобразований Галилея. Дополнительные члены и здесь вводились без достаточного обоснования".

Можно провести такую аналогию. Пусть записывается конечно-разностная аппроксимация второго закона Ньютона $\dot{x} = F/m$. В зависимости от точности используемой схемы в конечно-разностной аппроксимации могут появляться конечно-разностные приращения третьего и более высокого порядков. Но это не означает, конечно, что возврат к дифференциальной записи дает новый закон природы типа $\ddot{x} + \tau\ddot{\dot{x}} = F/m$. Причина подобного положения совершенно очевидна: невозможно получить качественно новое физическое описание, используя формально более высокую разностную аппроксимацию для классического уравнения.

В подходе, развитом Климонтовичем [45, 47], вместо уравнения Лиувилля используется кинетическое уравнение с источником членом (или "затравочным" членом в терминологии [45], с. 319), которое отличается от уравнения Лиувилля источником членом, записанным в τ -форме как

$$\frac{f_N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \tilde{f}_N(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)}{\tau_{ph}}.$$

Этот член, согласно [45], "описывает "подстройку" микроскопического распределения частиц к соответствующему сглаженному распределению".

В дальнейшем, при переходе к одночастичному описанию параметр τ_{ph} выбирается равным τ . Результирующее уравнение оказывается комбинацией больцмановского и фоккер-планковского описания (дифференциальная часть уравнения Больцмана остается неизменной) с дополнительным "интегралом столкновений" (см. [45], с. 251)

$$I_{(R)}(R, v, t) = \frac{\partial}{\partial R} \left[D \frac{\partial f}{\partial R} - bF(R)f \right], \quad (4.10)$$

учитывающим сглаживание по размерам "точки", где D — один из трех кинетических коэффициентов (кинематическая вязкость, температуропроводность, коэффициент самодиффузии), b — подвижность. Предполагается, что все три кинетических коэффициента одинаковы, а различие между ними можно учесть, используя некоторую другую, более сложную функцию сглаживания.

Можно усмотреть аналогию между уравнениями неразрывности Слезкина [22, 23] и Климонтовича [45]. Остальные аналогии гидродинамических уравнений, как нам представляется, обсуждать нецелесообразно. На самом деле источник член в уравнении Лиувилля может появиться при неполном статистическом описании реагирующей системы или при наличии специального вида неголономных связей и излучения, а размер "точки" (по терминологии Климонтовича) определяется

неучтенным ранее l_B -масштабом в уравнениях Больцмана.

5. Обобщенное уравнение Больцмана и итеративное построение уравнений высших приближений в больцмановской кинетической теории

Рассмотрим связь обобщенного уравнения Больцмана с итеративным построением уравнений высших приближений в больцмановской кинетической теории. Запишем уравнение Больцмана с правой частью в форме БГК для пространственно однородного случая, пренебрегая действием внешних сил:

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{\tau_p}, \quad (5.1)$$

где τ_p есть время релаксации, f_0 — равновесная функция распределения. Из (5.1) следует, что

$$f = f_0 - \tau_p \frac{\partial f}{\partial t} \cong f_0 - \tau_p \frac{\partial f_0}{\partial t}. \quad (5.2)$$

Вторая итерация строится аналогично:

$$f = f_0 - \tau_p \frac{\partial}{\partial t} \left(f_0 - \tau_p \frac{\partial f_0}{\partial t} \right) \cong f_0 - \tau_p \frac{\partial f_0}{\partial t} + \tau_p^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}. \quad (5.3)$$

Таким образом, возникает представление функции распределения в виде ряда

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\partial^i f_0}{\partial t^i} \tau_p^i, \quad (5.4)$$

где оператор производной нулевого порядка отвечает функции распределения f_0 .

Из (5.3) следует аналог кинетического уравнения (5.1) для второго приближения

$$-\tau_p \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} + \frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{\tau_p}. \quad (5.5)$$

Важно отметить, что вторая производная по времени от функции распределения f_0 присутствует в (5.5) со знаком минус.

В общем случае возникает разложение

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_p^{i-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial^i f_0}{\partial t^i} = -\frac{f - f_0}{\tau_p}. \quad (5.6)$$

Покажем, что для обобщенного уравнения Больцмана возможна итеративная процедура, аналогичная изложенной выше. С этой целью обратимся к аппроксимации (2.12), с учетом которой второе приближение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_B} &= -\frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_B} \right) \cong -\frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left[\tau \frac{D_1}{D \hat{t}_B} (\hat{f}_1^0 + \hat{f}_1^1) \right] = \\ &= -\frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} + \tau \frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_B} \right) = \\ &= -\frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} \right) + \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left[\tau \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} \right) \right]. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Аналогично строятся последующие приближения. Итак, имеем

$$\frac{D_1 \hat{f}_1^1}{D \hat{t}_B} = -\frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} \right) + \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left[\tau \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} \right) \right] - \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left\{ \tau \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left[\tau \frac{D_1}{D \hat{t}_B} \left(\tau \frac{D_1 \hat{f}_1^0}{D \hat{t}_B} \right) \right] \right\} + \dots \quad (5.8)$$

Если пренебречь силами, действующими в пространственно однородной системе, то из (5.8) при $\tau = \text{const}$ получаем

$$\frac{\partial f_1^1}{\partial t} = \sum_{i=2}^{\infty} \tau^{i-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_1^0}{\partial t^i}. \quad (5.9)$$

Следовательно, в этом частном случае обобщенное уравнение Больцмана приобретает вид

$$\sum_{i=2}^{\infty} \tau^{i-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_1^0}{\partial t^i} + \frac{\partial f_1^0}{\partial t} = J^{\text{st},0} \quad (5.10)$$

или, после объединения членов слева,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau^{i-1} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_1^0}{\partial t^i} = J^{\text{st},0}. \quad (5.11)$$

Налицо аналогия уравнений (5.6) и (5.11).

В физике твердого тела, например при исследовании переноса заряда и энергии в невырожденных полупроводниках, используется итеративное построение решения уравнения Больцмана для пространственно однородных систем при наличии внешнего электромагнитного поля. Если для интеграла столкновений ввести БГК-аппроксимацию, то уравнение Больцмана записывается как

$$F \frac{\partial f}{\partial v_z} = -\frac{f - f_0}{\tau_p} \quad (5.12)$$

(внешняя сила F действует вдоль направления z), а функция распределения — как

$$f = f_0 - \tau_p F \frac{\partial f}{\partial v_z}. \quad (5.13)$$

В первом приближении

$$f = f_0 - \tau_p F \frac{\partial f_0}{\partial v_z}. \quad (5.14)$$

После подстановки (5.14) в левую часть (5.12) получаем второе приближение функции распределения

$$f = f_0 - \tau_p F \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \tau_p^2 F^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2} + \dots \quad (5.15)$$

при условии, что внешняя сила F , действующая на частицу, не зависит от скорости. Многоточие в (5.15) означает, что процесс построения ряда по указанному алгоритму может быть продолжен. Из (5.15) во втором приближении следует уравнение

$$F \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \tau_p F^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2} = -\frac{f - f_0}{\tau_p}. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) оказывается частным случаем обобщенного уравнения Больцмана, если рассматривается стационарная пространственно однородная система, находящаяся под воздействием достаточно слабого поля внешних сил, что позволяет надеяться на сходимость ряда (5.15), в котором соответствующие производные вычисляются от равновесной функции распределения. Представление функции распределения в виде ряда (5.15) или (5.4) возможно только при использовании БГК-модели для больцмановского интеграла столкновений.

Таким образом, обобщенное уравнение Больцмана автоматически захватывает второе итеративное приближение в теории Больцмана при $\tau = \tau_p$, однако, разумеется, обобщенное уравнение Больцмана не требует выполнения всех перечисленных выше условий. Обратим внимание также на то обстоятельство, что появление в уравнениях (5.1), (5.12) знака минус в правой части при БГК-аппроксимации имеет глубокий физический смысл: знак минус позволяет доказать H -теорему для уравнения Больцмана при БГК-аппроксимации и прямо связан с аппроксимацией против направления времени.

6. Обобщенное уравнение Больцмана и теория кинетических уравнений с запаздыванием

Исследуем связь обобщенного уравнения Больцмана и теории кинетических уравнений с запаздыванием. Запишем уравнение Боголюбова, определяющее эволюцию s -частичной функции распределения в однокомпонентном газе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^s \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_i} + \sum_{ij=1}^s \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_i} = \\ = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^s \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_i}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

При записи (6.1) учтена нормировка

$$\int f_s d\Omega_1 \dots d\Omega_s = N^s. \quad (6.2)$$

При этом предполагалось, что для описания динамического состояния системы достаточно использования фазовых переменных Ω_i .

Вводя корреляционные функции W , для двухчастичной функции распределения имеем

$$f_2(\Omega_1, \Omega_2, t) = f_1(\Omega_1, t) f_1(\Omega_2, t) + W_2(\Omega_1, \Omega_2, t). \quad (6.3)$$

В r_B -масштабе переменные Ω_1 и Ω_2 оказываются коррелированными, однако в силу определения (6.3) этот эффект учитывается функцией W_2 . Следовательно, при таком подходе именно интегральный член, содержащий W_2 , должен приводить к больцмановскому (или более общему) интегралу столкновений.

Уравнение БГКИ-1 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} + \frac{1}{N} \sum_{j=2}^N \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \mathbf{F}_{ij} f_1(2) d\Omega_2 = \\ = -\frac{1}{N} \sum_{j=2}^s \int \mathbf{F}_{ij} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{v}_1} d\Omega_2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Внутренняя сила $\mathbf{F}_1^{(in)}$, действующая на частицу, выделенную под номером 1, со стороны частицы 2 при ее произвольном положении в фазовом пространстве может быть записана так:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=2}^N \int \mathbf{F}_{1j} f_1(2) d\Omega_2 = \mathbf{F}_1^{(in)}. \quad (6.5)$$

Как обычно, символ "2" в аргументе одночастичной функции распределения $f_1(2)$ отвечает фазовым переменным частицы, обозначенной номером 2. Для тождественных частиц

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{(in)} &= \frac{N-1}{N} \int \mathbf{F}_{12} f_1(2) d\Omega_2 \cong \int \mathbf{F}_{12} f_1(2) d\Omega_2 = \\ &= \int \mathbf{F}_{1j} f_1(j) d\Omega_j \quad (j = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Если ввести самосогласованную силу

$$\mathbf{F}_1^{(sc,1)} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^{(in)}, \quad (6.7)$$

действующую на выделенную частицу при одночастичном описании, как сумму внешней силы \mathbf{F}_1 и внутренней силы $\mathbf{F}_1^{(in)}$, определенной уравнением (6.5), то

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_1^{(sc,1)} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} = -\frac{1}{N} \sum_{j=2}^N \mathbf{F}_{1j} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{v}_1} d\Omega_2. \quad (6.8)$$

Уравнение ББГКИ-2 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2} + \\ + \mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_{21} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2} = \\ = -\frac{1}{N} \sum_{j=3}^N \int \left[\mathbf{F}_{1j} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_{2j} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{v}_2} \right] d\Omega_3. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Функцию распределения f_3 представляем через корреляционные функции:

$$\begin{aligned} f_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, t) &= f_1(\Omega_1, t) f_1(\Omega_2, t) f_1(\Omega_3, t) + \\ &+ f_1(\Omega_1, t) W_2(\Omega_2, \Omega_3, t) + f_1(\Omega_2, t) W_2(\Omega_1, \Omega_3, t) + \\ &+ f_1(\Omega_3, t) W_2(\Omega_1, \Omega_2, t) + W_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, t). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Применим теорию корреляционных функций для аппроксимации интегралов столкновений.

Предположение 1. Корреляционной функцией W_3 можно пренебречь.

Используя (6.2), записываем (6.10) в форме

$$f_3(1, 2, 3) = f_1(3) f_2(1, 2) + f_1(2) W_2(1, 3) + f_1(1) W_2(2, 3). \quad (6.11)$$

Подставляя (6.11) в (6.9) и вводя самосогласованные силы при двухчастичном описании ($j = 3, 4, 5, \dots$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{(sc,2)} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \int \mathbf{F}_{1j} f_1(j) d\Omega_j, \\ \mathbf{F}_2^{(sc,2)} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} + \int \mathbf{F}_{2j} f_1(j) d\Omega_j, \end{aligned} \quad (6.12)$$

приходим к уравнению относительно $f_2(1, 2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{F}_1^{(sc,2)} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_2^{(sc,2)} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2} = \\ = f_1(2) \left[\frac{\partial f_1(1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1(1)}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_1^{(sc,1)} \cdot \frac{\partial f_1(1)}{\partial \mathbf{v}_1} \right] + \\ + f_1(1) \left[\frac{\partial f_1(2)}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f_1(2)}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{F}_2^{(sc,1)} \cdot \frac{\partial f_1(2)}{\partial \mathbf{v}_2} \right], \end{aligned} \quad (6.13)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1(1)}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_1^{(sc,1)} \cdot \frac{\partial f_1(1)}{\partial \mathbf{v}_1} = \\ = - \int \mathbf{F}_{13} \cdot \frac{\partial W_2(1, 3)}{\partial \mathbf{v}_1} d\Omega_3, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(2)}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f_1(2)}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{F}_2^{(sc,1)} \cdot \frac{\partial f_1(2)}{\partial \mathbf{v}_2} = \\ = - \int \mathbf{F}_{23} \cdot \frac{\partial W_2(2, 3)}{\partial \mathbf{v}_2} d\Omega_3. \end{aligned} \quad (6.15)$$

При записи (6.13) использовано следующее предположение.

Предположение 2. Поляризационные эффекты, приводящие к интегралам

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N} \sum_{j=3}^N \int \mathbf{F}_{1j} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} (f_1(1) W_2(2, 3)) d\Omega_3, \\ -\frac{1}{N} \sum_{j=3}^N \int \mathbf{F}_{2j} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} (f_1(2) W_2(1, 3)) d\Omega_3, \end{aligned}$$

не учитываются.

Введем субстанциональные производные

$$\begin{aligned} \frac{Df_2(1, 2)}{Dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_2} + \\ &+ \mathbf{F}_1^{(sc,2)} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_2^{(sc,2)} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}_2}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\frac{D_1 f_1(1)}{Dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_1^{(sc,1)} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1}, \quad (6.17)$$

$$\frac{D_2 f_1(2)}{Dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_2} + \mathbf{F}_2^{(sc,1)} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_2}. \quad (6.18)$$

Тогда (6.13) принимает вид

$$\frac{Df_2(1, 2)}{Dt} = f_1(2) \frac{D_1 f_1(1)}{Dt} + f_1(1) \frac{D_2 f_1(2)}{Dt}. \quad (6.19)$$

Проведем интегрирование по времени вдоль фазовой траектории в шестимерном пространстве:

$$\begin{aligned} f_2(1, 2) &= f_{2,0}(1, 2) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} f_1(2) \frac{D_1 f_1(1)}{Dt} dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+\tau} f_1(1) \frac{D_2 f_1(2)}{Dt} dt, \end{aligned} \quad (6.20)$$

где $f_{2,0}(1, 2)$ соответствует значению двухчастичной функции распределения в начальный момент времени.

Предположение 3. Вводится условие Боголюбова об ослаблении начальных корреляций, соответствующих

некоторому начальному моменту времени t_0 (см. (2.13)):

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} W_2[\mathbf{r}_1(t_0-t), \mathbf{v}_1(t_0-t); \mathbf{r}_2(t_0-t), \mathbf{v}_2(t_0-t); t_0-t] = 0. \quad (6.21)$$

Выполнение условия (6.21) означает, что: а) рассматривается инфинитное движение в задаче двух тел; б) выполняется условие молекулярного хаоса до столкновения частиц (выделенных под номерами 1 и 2), что соответствует аппроксимации против направления времени в (2.12); в) по сути (6.21) записано в r_B -масштабе, хотя явно масштаб не вводится.

С учетом предположения 3 возможна запись (6.20) в виде

$$f_2(1, 2) = f_1(\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{v}_1(t_0), t_0) f_1(\mathbf{r}_2(t_0), \mathbf{v}_2(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} f_1(2) \frac{D_1 f_1(1)}{Dt} dt + \int_{t_0}^{t_0+\tau} f_1(1) \frac{D_2 f_1(2)}{Dt} dt. \quad (6.22)$$

Предположение 4. При столкновении выделенных частиц 1 и 2 силы их внутреннего взаимодействия являются определяющими, так что (см. (6.7), (6.12))

$$\mathbf{F}_1^{(sc,2)} = \mathbf{F}_1^{(sc,1)}, \quad \mathbf{F}_2^{(sc,2)} = \mathbf{F}_2^{(sc,1)}. \quad (6.23)$$

С учетом предположения 4 уравнение (6.22) преобразуется к виду

$$f_2(1, 2) = f_1(\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{v}_1(t_0), t_0) f_2(\mathbf{r}_2(t_0), \mathbf{v}_2(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{D_{12}}{Dt} [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) f_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t)] dt. \quad (6.24)$$

Интегрируя в (6.24) по частям, находим

$$f_2(1, 2) = f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) f_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t) + \tau \left\{ \frac{D_{12}}{Dt} [f_1(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{v}_1(t), t_0) f_1(\mathbf{r}_2(t), \mathbf{v}_2(t), t_0)] \right\}_{t=t_0} - \int_{t_0}^{t_0+\tau} t \frac{D_{12}}{Dt} \frac{D_{12}}{Dt} [f_1(1) f_1(2)] dt. \quad (6.25)$$

Предположение 5. Запаздывание по времени достаточно мало, так что возможно использование линейного приближения по запаздыванию.

Сумма первых двух членов (6.25) определяет в линейном приближении по τ величину $f_1(1) f_1(2)$ для момента времени t , при этом скорости частиц 1 и 2 в произведении функций распределения соответствуют начальным скоростям частиц в момент времени t_0 , который в r_B -масштабе относят к моменту времени $t_0 = -\infty$.

Подставляя теперь $f_2(1, 2)$ из (6.25) в уравнение ББГКИ-1, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1(1)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1(1)}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial f_1(1)}{\partial \mathbf{v}_1} = \\ & = - \int \mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1(-\infty), t) f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2(-\infty), t)] d\Omega_2 + \\ & + \int \mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\tau} t \frac{D_{12}}{Dt} \frac{D_{12}}{Dt} [f_1(1) f_1(2)] dt \right\} d\Omega_2. \quad (6.26) \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части (6.26) соответствует классической форме записи интеграла столкновений в

форме Боголюбова и известным образом преобразуется в больцмановский интеграл столкновений [15]. Второй интеграл столкновений в правой части (6.26) учитывает эффект запаздывания и допускает дифференциальную аппроксимацию, аналогичную (2.12). С этой целью введем следующее предположение.

Предположение 6. При произвольном положении частицы 2 в фазовом пространстве взаимодействующих частиц 1 и 2 зависимость от подынтегрального выражения в фигурной скобке интеграла запаздывания

$$J_2^{st} = \int \mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\tau} t \frac{D_{12}}{Dt} \frac{D_{12}}{Dt} [f_1(1) f_1(2)] dt \right\} d\Omega_2 \quad (6.27)$$

определяется действующей внутренней силой F_{12} через изменение скоростей частиц².

С учетом (6.27) имеем (ср. с (4.7))

$$\begin{aligned} J_2^{st} &= \int \mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left\{ \int_{t_0}^t t' \frac{D_{12}}{Dt'} \frac{D_{12}}{Dt'} [f_1(1) f_1(2)] dt' \right\} d\Omega_2 = \\ &= \int \left(\mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_{21} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right) \times \\ &\times \left\{ \int_{t_0}^t t' \frac{D_{12}}{Dt'} \frac{D_{12}}{Dt'} [f_1(1) f_1(2)] dt' \right\} d\Omega_2 \cong \\ &\cong \tau_3 \int \frac{D_{12}}{Dt} \frac{D_{12}}{Dt} [f_1(1) f_1(2)] d\Omega_2 = \tau_3 \frac{D_1}{Dt} \frac{D_1 f_1(1)}{Dt}, \quad (6.28) \end{aligned}$$

где вновь использовано предположение 5 и введено некоторое эффективное время запаздывания τ_3 .

Вообще говоря, интегрирование по времени в (6.28) "снимается" субстанциональной производной, которая содержит и дифференцирование по пространственным координатам. Однако в линейном приближении по времени запаздывания этим вкладом можно пренебречь. Действительно,

$$\begin{aligned} J_2^{st} &= \int \left\{ \left[\mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} + \mathbf{F}_{21} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{21}} \right] \times \right. \\ &\times \int_{t_0}^t t' \frac{D_{12}}{Dt'} \frac{D_{12}}{Dt'} [f_1(1) f_1(2)] dt' \left. \right\} d\Omega_2 - \\ &- \int \left\{ (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{21}} \int_{t_0}^t t' \frac{D_{12}}{Dt'} \frac{D_{12}}{Dt'} [f_1(1) f_1(2)] dt' \right\} d\Omega_2 = \\ &= \tau_3 \frac{D_1}{Dt} \frac{D_1 f_1(1)}{Dt} - \\ &- \int \left\{ (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{21}} \int_{t_0}^t t' \frac{D_{12}}{Dt'} \frac{D_{12}}{Dt'} [f_1(1) f_1(2)] dt' \right\} d\Omega_2 = \\ &= \tau_3 \frac{D_1}{Dt} \frac{D_1 f_1(1)}{Dt} + \\ &+ \int \left\{ (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{21}} [f_1(1) f_1(2)] - [f_1(1) f_1(2)]_{t_0} \right. \\ &\left. - \tau_3 \frac{D_1}{Dt} [f_1(1) f_1(2)]_{t_0} \right\} d\Omega_2 \cong \tau_3 \frac{D_1}{Dt} \frac{D_1 f_1(1)}{Dt}, \quad (6.29) \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

² Это предположение содержится в теории Боголюбова (см. [48], с. 203).

Итак, появление второй субстанциональной производной по времени в обобщенном уравнении Больцмана можно рассматривать как дифференциальную аппроксимацию интеграла запаздывания, появляющегося в теории корреляционных функций для кинетических уравнений.

Может сложиться впечатление, что изложенная теория вообще не требует применения метода многих масштабов и разложения функции распределения в ряд по малому параметру $\varepsilon = nr_B^3$. Однако это не так. Как мы убедились, интегрирование в r_B -масштабе все равно приходится использовать, а отказ от разложения функции распределения по ε не позволяет оценить величину τ_3 . На самом деле каждый из представленных выше подходов к выводу обобщенного уравнения Больцмана дополняют друг друга и позволяют установить их взаимную связь. Обобщенное уравнение Больцмана можно рассматривать и с позиций больцмановской теории в высших приближениях, и как результат дифференциальных аппроксимаций интеграла столкновений с запаздыванием.

Обратим также внимание на то обстоятельство, что сравнение уравнения относительно функции распределения f_2^0 в нулевом приближении по ε (следующего из (2.6))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial t_B} + \mathbf{v}_{1B} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \mathbf{r}_{1B}} + \mathbf{v}_{j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \mathbf{r}_{j \in N_\delta, B}} + \hat{\mathbf{F}}_{1, j \in \delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \mathbf{v}_{1B}} + \\ + \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta, 1} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \mathbf{v}_{j \in N_\delta, B}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \mathbf{v}_{1B}} + \alpha \hat{\mathbf{F}}_{j \in N_\delta} \cdot \frac{\partial \hat{f}_2^0}{\partial \mathbf{v}_{j \in N_\delta, B}} = 0 \end{aligned} \quad (6.30)$$

и уравнений (6.9), (6.10) позволяет установить, что корреляционные функции нулевого приближения по ε равны нулю, а в r_B -масштабе в нулевом приближении силы, действующие на сталкивающиеся частицы 1 и 2 со стороны других частиц, не учитываются. Этот результат используется в методе многих масштабов при преобразовании интеграла столкновений $\hat{J}^{st,0}$ к больцмановскому виду.

Подводя некоторые итоги, отметим, что вывод кинетического уравнения в рамках теории корреляционных функций для одночастичных функций распределения приводит к кинетическому уравнению вида

$$\frac{Df}{Dt} = J^B + J^{td}, \quad (6.31)$$

где J^B — больцмановский интеграл столкновений, J^{td} — интеграл столкновений, учитывающий эффект запаздывания.

Популярность БГК-аппроксимации для больцмановского интеграла столкновений объясняется тем колоссальным упрощением, которое достигается при ее использовании:

$$J^B = \frac{f^{(0)} - f}{\tau}. \quad (6.32)$$

По сути в обобщенной больцмановской физической кинетике предлагается локальная аппроксимация для второго интеграла столкновений

$$J^{td} = \frac{D}{Dt} \left(\tau \frac{Df}{Dt} \right). \quad (6.33)$$

Таким образом, в "простейшем" варианте уравнение (6.31) принимает вид

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{f^{(0)} - f}{\tau} + \frac{D}{Dt} \left(\tau \frac{Df}{Dt} \right). \quad (6.34)$$

Порядок величины отношения второго и первого членов правой части (6.34) $J^{td}/J^B \approx O(Kn^2)$, и, казалось бы, при малых числах Кнудсена Kn , отвечающих гидродинамическому описанию, вкладом второго члена правой части (6.34) можно пренебречь. Однако при переходе к гидродинамическому приближению (после умножения кинетического уравнения на инварианты столкновений и последующего интегрирования по скоростям) больцмановский интегральный член обращается в нуль, а второй член правой части (6.34) дает однопорядковый вклад при обобщенном навье-стоксовском описании (не говоря уже о роли малого параметра при старшей производной).

В кинетической теории известен пример локальной аппроксимации для нелокального интегрального члена — теория Энскога для процессов переноса в плотном газе, состоящем из твердых сфер. Для получения локального варианта теории Энскога использовал разложение по малому параметру σ/λ , где σ — диаметр молекулы, λ — средняя длина пробега (см. [49]). Например, для водорода $\sigma \approx 3 \times 10^{-8}$ см, $\lambda \approx 1,1 \times 10^{-5}$ см (при н.т.д.), а отношение $\sigma/\lambda = 2,7 \times 10^{-3}$ соответствует типичному диапазону изменения числа Кнудсена Kn при гидродинамическом описании. При разложении по Kn отношение σ/λ соответствовало бы выбору характерного гидродинамического размера (на котором производится сглаживание) в виде $L \approx 0,4 \times 10^{-2}$ см.

7. Обобщенные гидродинамические уравнения и теория турбулентных течений

Обобщенное уравнение Больцмана неизбежно ведет к новой формулировке гидродинамических уравнений, которые мы будем называть обобщенными гидродинамическими уравнениями. Классические гидродинамические уравнения Энскога, Эйлера, Навье–Стокса являются частными случаями упомянутых уравнений. Вывод обобщенных гидродинамических уравнений содержится в [31, 38]; опуская громоздкие технические детали вывода, мы рассмотрим здесь только вопросы принципиального характера на примере использования обобщенных уравнений Эйлера в теории турбулентных течений.

Турбулентное движение жидкости является предметом интенсивного изучения уже более сотни лет, что связано с огромным числом приложений в аэродинамике, гидравлике, физике горения и взрыва, а следовательно, и с процессами в современных технических устройствах — турбинах, двигателях, компрессорах и т.д. Литература по этому вопросу исключительно обширна, и в нашу задачу не входит детальный анализ существующих моделей. Целью настоящего раздела является обсуждение существующей концепции турбулентности с позиций обобщенных гидродинамических уравнений. Изложим "классическую" картину турбулентного движения, которое рассматривается, как правило, на основе уравнений Навье–Стокса, моментных методов и теории подобия. Выясним, как эта картина соответствует обобщенной больцмановской кинетиче-

ской теории, какие из известных подходов можно сохранить, а от чего придется отказаться.

Обычно считается, что развитая турбулентность характеризуется нерегулярным изменением скорости со временем в каждой точке потока. Вводится представление о флуктуациях (турбулентных флуктуациях или пульсациях) гидродинамических величин, причем масштаб флуктуаций может быть самым различным: от флуктуаций, соответствующих внешнему (по терминологии [9]) масштабу, сопоставимому с характерным размером течения, до мелкомасштабной турбулентности, где определяющую роль начинает играть динамическая вязкость жидкости.

Поскольку основная роль в теории турбулентности отводится критерию Рейнольдса, движение жидкости на различных характерных масштабах связано с построением числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{v_l l}{\nu}.$$

Здесь l — масштаб флуктуаций, v_l — порядок величины скорости, ν — кинематическая вязкость. Если $l \sim L$, где L — характерный гидродинамический размер, то число Рейнольдса Re велико, влияние молекулярной вязкости мало, что позволяет полностью ею пренебречь и получить некоторые представления о флуктуациях, исходя из теории подобия (закон Колмогорова — Обухова).

От крупномасштабных флуктуаций энергия, практически не диссипируясь, переходит в мелкомасштабные флуктуации, где происходит вязкостная диссипация (модель Ричардсона, относящаяся к 1922 г.). И хотя диссипация механической энергии ε , приходящаяся на единицу массы за единицу времени, происходит на самом малом масштабе l_K (который мы в дальнейшем будем называть колмогоровским масштабом турбулентности), считается, что величина ε определяет свойства турбулентного движения и на больших масштабах. Между колмогоровским или внутренним (по терминологии [9]) масштабом l_K и внешним масштабом $l_L \sim L$ располагается инерционный интервал, в котором характерный размер l удовлетворяет неравенству

$$l_K \ll l \leq l_L.$$

За неимением лучшей модели предполагается, что турбулентное движение описывается теми же уравнениями механики жидкости (уравнениями Навье — Стокса), что и ламинарные течения. Следовательно, турбулентность возникает как неустойчивость течения или, в данном случае, как неустойчивость навье-стоксовской модели течения. Это приводит ко многим противоречиям. Известно, например, что "для течения в трубе кругового сечения полное теоретическое исследование устойчивости еще отсутствует, но имеющиеся результаты дают веские основания полагать, что это движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям (как в абсолютном, так и в конвективном смысле) при любых числах Рейнольдса" [9]. Этот факт противоречит экспериментальным данным.

В 1924 г. Гейзенберг опубликовал результаты своих исследований неустойчивости ламинарных течений [50]. Год спустя Нётер, как пишет Гейзенберг [51], "опубликовала другую статью, в которой строгими математическими методами доказала, что задача вообще не имеет

нестабильных решений: поток должен быть стабилен всюду... Как же быть со строгой математикой? И вот я думаю, что даже и теперь никто не знает, какая ошибка содержится в работе Нётер". Следует полагать, что дело не в ошибке Нётер, а в недостатках навье-стоксовской модели течения.

Представление об усредненном и флуктуационном движениях побудило Рейнольдса [52] провести процедуру явного выведения флуктуационных членов из уравнений Навье — Стокса с их последующим усреднением по некоторому промежутку времени. Ни процедура Рейнольдса (временное усреднение), ни введенное позже усреднение по массам жидких объемов (иногда называемое усреднением по Фавру [53]) не ведут к замкнутым результатам и более того неверно по существу, поскольку, как мы убедимся, уравнения Навье — Стокса не записаны относительно истинных величин.

Существует подход, основанный на оценке корреляционных функций скорости. Цель состоит в определении связи между скоростями в двух близких точках потока в теории локальной турбулентности. Например, простейшей корреляционной функцией является тензор второго ранга

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle,$$

где \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 есть скорости жидкости в двух близких точках, а угловые скобки соответствуют усреднению по времени. Остается под вопросом, что означает "близкие точки" и как реализуется временное усреднение. Теория корреляционных функций, введенных в гидродинамику турбулентных движений Келлером и Фридманом в 1924 г., привлекла многих исследователей.

Исчерпывающая оценка указанного направления была дана Ландау в 1944 г. (цитируется по [9], с. 200): "Можно было бы думать, что существует принципиальная возможность получить универсальную (применимую к любому турбулентному движению) формулу, определяющую B_{rr} , B_{ii} для всех расстояний r , малых по сравнению с l_L . В действительности, однако, такой формулы вообще не может существовать, как это явствует из следующих соображений. Мгновенное значение величины $(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})$ можно было бы, в принципе, выразить через диссипацию энергии ε в тот же момент времени t . Однако при усреднении этих выражений будет существенным закон изменения ε в течение периодов крупномасштабных (масштабы порядка l_L) движений, различный для различных конкретных случаев движения. Поэтому и результат усреднения не может быть универсальным".

С приведенным мнением можно только согласиться. Иными словами, если на колмогоровском масштабе, как мы покажем, существует возможность явной универсальной записи турбулентных флуктуаций, то крупномасштабные флуктуации определяются в результате решения конкретной краевой задачи.

Колмогоров ввел гипотезу о том, что статистический режим мелкомасштабных компонент является универсальным и определяется лишь двумя размерными параметрами — средней скоростью диссипации энергии ε и кинематической вязкостью ν . Из соображений размерности следует, что колмогоровский масштаб флуктуаций l_K имеет порядок $\nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ и соответствует средней длине пробега частицы в газе.

Применим обобщенные гидродинамические уравнения в теории турбулентности. Покажем, что обобщенные гидродинамические уравнения позволяют получить явное представление для флуктуаций всех гидродинамических величин на колмогоровском масштабе турбулентности l_K . При этом указанные турбулентные флуктуации табулируются вне зависимости от конкретного характера течения и в этом смысле (по терминологии [9]) будут являться "универсальными формулами". Начнем реализацию этой программы с записи обобщенных гидродинамических уравнений и для простоты используем обобщенные уравнения Эйлера для частного случая течения однокомпонентного газа в поле силы тяжести. С этой целью умножим обобщенные уравнения Больцмана на инварианты упругих столкновений частиц ($m, mv, mv^2/2$) и проведем почленное интегрирование по скорости полученных уравнений.

Вычисление моментов через максвелловскую функцию распределения ведет к системе обобщенных уравнений Эйлера, в которую входят:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \Pi \frac{\mu}{p} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho \mathbf{v}_0 - \Pi \frac{\mu}{p} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \vec{\mathbf{I}} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \rho \mathbf{g} \right] \right\} = 0, \quad (7.1)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \mathbf{v}_0 - \Pi \frac{\mu}{p} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \rho \mathbf{g} \right] \right\} - \mathbf{g} \left[\rho - \Pi \frac{\mu}{p} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + p \vec{\mathbf{I}} - \Pi \frac{\mu}{p} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + p \vec{\mathbf{I}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho (\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) \mathbf{v}_0 + 2 \vec{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\vec{\mathbf{I}} p \mathbf{v}_0) - \rho \mathbf{g} \mathbf{v}_0 - \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{g} \right] \right\} = 0, \quad (7.2)$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho v_0^2}{2} + \frac{3}{2} p - \Pi \frac{\mu}{p} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v_0^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v_0^2 \mathbf{v}_0 + \frac{5}{2} p \mathbf{v}_0 \right) - \mathbf{g} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \rho v_0^2 \mathbf{v}_0 + \frac{5}{2} p \mathbf{v}_0 - \Pi \frac{\mu}{p} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_0^2 \mathbf{v}_0 + \frac{5}{2} p \mathbf{v}_0 \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v_0^2 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{7}{2} p \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} p v_0^2 \vec{\mathbf{I}} + \frac{5}{2} \frac{p^2}{\rho} \vec{\mathbf{I}} \right) - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 - p \mathbf{g} \cdot \vec{\mathbf{I}} - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \mathbf{g} - \frac{3}{2} \mathbf{g} p \right] \right\} - \left\{ \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_0 - \Pi \frac{\mu}{p} \left[\mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot p \vec{\mathbf{I}} - \rho \mathbf{g} \right) \right] \right\} = 0, \quad (7.3)$$

где в гидродинамическом приближении использовано представление $\tau^{(0)} = \Pi \mu / p$ (для модели твердых сфер $\Pi = 0,8$), а $\vec{\mathbf{I}}$ — единичный тензор.

Введем масштабы плотности ρ_∞ , скорости v_∞ , давления p_∞ , вязкости μ_∞ и характерный размер L ; масштаб времени выберем как L/v_∞ . Тогда безразмерное уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left\{ \hat{\rho} - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\mu_\infty v_\infty}{p_\infty L} \left[\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \left\{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\mu_\infty v_\infty}{p_\infty L} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 \hat{\mathbf{v}}_0 + \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2} \vec{\mathbf{I}} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\mathbf{r}}} - \frac{L g}{v_\infty^2} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \right] \right\} = 0. \quad (7.4)$$

Безразмерные комбинации из введенных масштабов величин образуют критерии подобия:

$$\frac{\mu_\infty v_\infty}{p_\infty L} = \frac{\mu_\infty}{L v_\infty \rho_\infty} \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{p_\infty} = \text{Re}^{-1} \text{Eu}^{-1}, \quad \frac{v_\infty^2}{L g} = \text{Fr}.$$

Таким образом, в уравнение неразрывности (7.4) входят критерии Рейнольдса, Эйлера и Фруда, с учетом которых его можно переписать как

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left\{ \hat{\rho} - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\text{Eu}^{-1}}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \left\{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\text{Eu}^{-1}}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 \hat{\mathbf{v}}_0 + \text{Eu} \vec{\mathbf{I}} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\mathbf{r}}} - \frac{1}{\text{Fr}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \right] \right\} = 0. \quad (7.5)$$

Аналогично записываются безразмерное уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left\{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\text{Eu}^{-1}}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 \hat{\mathbf{v}}_0 + \text{Eu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{\mathbf{r}}} - \frac{1}{\text{Fr}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \right] \right\} - \frac{1}{\text{Fr}} \hat{\mathbf{g}} \left[\hat{\rho} - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\text{Eu}^{-1}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \left\{ \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 \hat{\mathbf{v}}_0 + \text{Eu} \hat{p} \vec{\mathbf{I}} - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\text{Eu}^{-1}}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 \hat{\mathbf{v}}_0 + \text{Eu} \hat{p} \vec{\mathbf{I}}) + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \hat{\rho} (\hat{\mathbf{v}}_0 \hat{\mathbf{v}}_0) \hat{\mathbf{v}}_0 + 2 \text{Eu} \vec{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) \right) + \text{Eu} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot (\vec{\mathbf{I}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0) - \frac{1}{\text{Fr}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \hat{\mathbf{v}}_0 - \frac{1}{\text{Fr}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 \hat{\mathbf{g}} \right] \right\} = 0, \quad (7.6)$$

и безразмерное уравнение энергии:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left\{ \frac{\hat{\rho} \hat{v}_0^2}{2} + \frac{3}{2} \text{Eu} \hat{p} - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{p}} \frac{\text{Eu}^{-1}}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\frac{\hat{\rho} \hat{v}_0^2}{2} + \frac{3}{2} \text{Eu} \hat{p} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \left(\frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{v}_0^2 \hat{\mathbf{v}}_0 + \frac{5}{2} \text{Eu} \hat{p} \hat{\mathbf{v}}_0 \right) - \frac{1}{\text{Fr}} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}}_0 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{v}_0^2 \hat{\mathbf{v}}_0 + \frac{5}{2} \text{Eu} \hat{p} \hat{\mathbf{v}}_0 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \frac{Eu^{-1}}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{v}_0^2 \hat{v}_0 + \frac{5}{2} Eu \hat{\rho} \hat{v}_0 \right) + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \left(\frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{v}_0^2 \hat{v}_0 \hat{v}_0 + \frac{7}{2} Eu \hat{\rho} \hat{v}_0 \hat{v}_0 + \frac{1}{2} Eu \hat{\rho} \hat{v}_0^2 \hat{\mathbf{I}} + \frac{5}{2} Eu^2 \frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\rho}} \hat{\mathbf{I}} \right) - \\
& - \frac{1}{Fr} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{v}_0 \hat{v}_0 - \frac{Eu}{Fr} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\mathbf{I}} - \frac{1}{2} \frac{1}{Fr} \hat{\rho} \hat{v}_0^2 \hat{\mathbf{g}} - \frac{3}{2} \frac{Eu}{Fr} \hat{\mathbf{g}} \hat{\rho} \left. \right] - \\
& - \left\{ \frac{1}{Fr} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{v}_0 - \Pi \frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \frac{Eu^{-1}}{Re} \left[\frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{g}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\rho} \hat{v}_0) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \hat{\rho} \hat{v}_0 \hat{v}_0 + Eu \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{r}}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{I}} - \frac{1}{Fr} \hat{\rho} \hat{\mathbf{g}} \right) \right] \right\} = 0. \quad (7.7)
\end{aligned}$$

Структура уравнений (7.5)–(7.7) весьма примечательна. Все обобщенные уравнения гидродинамики Эйлера содержат числа (критерии подобия) Рейнольдса, Эйлера и Фруда. Естественно, учет сил электромагнитного происхождения привел бы к дополнительным критериям подобия. Каждой гидродинамической величине — плотности, энергии, импульса и потокам гидродинамических величин — соответствуют флуктуационные во времени и пространстве члены, пропорциональные Re^{-1} и, следовательно, вязкости.

При переходе к мелкомасштабным флуктуациям (при уменьшении характерного размера l , входящего в число Рейнольдса) роль вязкости становится весьма существенной и определяющей диссипацию ε механической энергии. Таким образом, указанные флуктуационные члены определяют турбулентные флуктуации в масштабе Колмогорова (мелкомасштабные флуктуации, или, по терминологии вычислительной гидродинамики, подсеточную турбулентность), носящие универсальный характер, не зависящий от специфики задачи.

Однако для окончательного решения вопроса необходимо ответить на следующие вопросы.

1. Нет ли противоречий в системе флуктуаций, определяемых таким образом. Иначе говоря, является ли система флуктуаций самосогласованной?

2. Можно ли, имея систему базовых (независимых) флуктуаций, получить явные выражения для других гидродинамических величин и их моментов?

3. Как выглядят обобщенные гидродинамические уравнения для средних величин и как процедура получения усредненных уравнений согласуется с привычной в теории турбулентности процедурой Рейнольдса?

Ответим на все эти вопросы, используя для большей ясности обобщенные уравнения Эйлера в случае однокомпонентного газа. Как уже отмечалось, речь идет о системе мелкомасштабных флуктуаций, и этот факт далее не будет специально оговариваться.

Подлежат исследованию уравнения:

уравнение неразрывности

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \tau \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right) \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \rho \mathbf{v}_0 - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \rho \mathbf{g} \right) \right\} = 0; \quad (7.8)
\end{aligned}$$

уравнение движения

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho v_{0\beta} - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_{0\beta}) + \frac{\partial}{\partial r_x} (p \delta_{x\beta} + \rho v_{0x}) - \rho g_\beta \right] \right\} - \\
& - \left\{ \rho - \tau \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_x} (\rho v_{0x}) \right] \right\} g_\beta + \frac{\partial}{\partial r_x} \left\{ p \delta_{x\beta} + \rho v_{0x} v_{0\beta} - \right. \\
& - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (p \delta_{x\beta} + \rho v_{0x} v_{0\beta}) + \frac{\partial}{\partial r_\gamma} (p \delta_{x\gamma} v_{0\beta} + \rho v_{0x} \delta_{\beta\gamma} + \right. \\
& \left. \left. + \rho v_{0\gamma} \delta_{x\beta} + \rho v_{0x} v_{0\beta} v_{0\gamma}) - g_x \rho v_{0\beta} - g_\beta \rho v_{0x} \right] \right\} = 0, \quad (7.9)
\end{aligned}$$

в котором по повторяющимся индексам $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, отвечающим компонентам векторов в декартовой системе координат, предполагается суммирование (правило Эйнштейна);

уравнение энергии

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 3p + \rho v_0^2 - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (3p + \rho v_0^2) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}_0 (\rho v_0^2 + 5p)) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\mathbf{g} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \mathbf{v}_0 (\rho v_0^2 + 5p) - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_0 (\rho v_0^2 + 5p)) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\hat{\mathbf{I}} \rho v_0^2 + \rho v_0^2 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + 7p \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + 5 \hat{\mathbf{I}} \frac{p^2}{\rho} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{g} - 5p \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g} - \rho v_0^2 \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{g} \right] \right\} - \\
& - 2\mathbf{g} \cdot \left\{ \rho \mathbf{v}_0 - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) - \rho \mathbf{g} \right] \right\} = 0. \quad (7.10)
\end{aligned}$$

Для расчета флуктуаций гидродинамических величин применяем процедуру Рейнольдса. Например, произведение истинной плотности ρ и истинной скорости \mathbf{v}_0 может быть использовано для вычисления флуктуационной величины \mathbf{v}_0^f . Действительно,

$$\rho \mathbf{v}_0 = (\rho^a + \rho^f) (\mathbf{v}_0^a + \mathbf{v}_0^f), \quad (7.11)$$

где индексом "а" отмечаются средние гидродинамические величины. Пренебрегая квадратами флуктуационных величин и оставляя, следовательно, только малые первого порядка в соотношениях типа (7.11), находим

$$(\rho \mathbf{v}_0)^f = \rho \mathbf{v}_0 - \rho^a \mathbf{v}_0^a = \rho^a \mathbf{v}_0^f + \rho^f \mathbf{v}_0^a. \quad (7.12)$$

Таким образом,

$$\mathbf{v}_0^f = \frac{(\rho \mathbf{v}_0)^f - \rho^f \mathbf{v}_0^a}{\rho^a}. \quad (7.13)$$

Из уравнения неразрывности (7.8) имеем

$$\rho^f = \tau \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right\}, \quad (7.14)$$

$$(\rho \mathbf{v}_0)^f = \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \rho \mathbf{g} \right\}. \quad (7.15)$$

Поэтому применение (7.13) дает результат

$$\mathbf{v}_0^f = \tau \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{g} \right\}. \quad (7.16)$$

Из (7.9) следует, что флуктуация комбинации гидродинамических величин $p\delta_{z\beta} + \rho v_{0z}v_{0\beta}$ находится по формуле

$$\begin{aligned} (p\delta_{z\beta} + \rho v_{0z}v_{0\beta})^f &= \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (p\delta_{z\beta} + \rho v_{0z}v_{0\beta}) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial r_\gamma} (p\delta_{z\gamma}v_{0\beta} + p v_{0z}\delta_{\beta\gamma} + p v_{0\gamma}\delta_{z\beta} + \rho v_{0z}v_{0\beta}v_{0\gamma}) - \\ &\left. - g_z \rho v_{0\beta} - g_\beta \rho v_{0z} \right]. \quad (7.17) \end{aligned}$$

С учетом (7.17) имеем

$$\begin{aligned} (3p + \rho v_0^2)^f &= \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (3p + \rho v_0^2) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}_0(\rho v_0^2 + 5p)) - 2\mathbf{g} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \right]. \quad (7.18) \end{aligned}$$

Найдем теперь $(\rho v_0^2)^f$:

$$\begin{aligned} (\rho v_0^2)^f &= \rho v_0^2 - \rho^a v_0^{a2} = (\rho^a + \rho^f)(\mathbf{v}_0^a + \mathbf{v}_0^f)^2 - \rho^a v_0^{a2} \cong \\ &\cong (\rho^a + \rho^f)(v_0^{a2} + 2\mathbf{v}_0^a \cdot \mathbf{v}_0^f) - \rho^a v_0^{a2} \cong \\ &\cong \rho^f v_0^{a2} + 2\rho^a \mathbf{v}_0^a \cdot \mathbf{v}_0^f. \quad (7.19) \end{aligned}$$

Используя (7.14) и (7.16), получаем

$$\begin{aligned} (\rho v_0^2)^f &= \tau \left\{ v_0^{a2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right] + \right. \\ &\left. + 2\rho^a \mathbf{v}_0^a \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{g} \right] \right\}. \quad (7.20) \end{aligned}$$

Аналогичным образом находятся флуктуации остальных гидродинамических величин. В таблице приводится сводка колмогоровских турбулентных флуктуаций (независимые флуктуации подчеркнуты).

Необходимость появления гидродинамических флуктуаций (пропорциональных времени между столкновениями τ , а следовательно, и вязкости) в обобщенных гидродинамических уравнениях легко понять с молекулярно-кинетической точки зрения. Рассмотрим газ твердых сфер, заключенный в полости, ограниченной твердыми стенками (рис. 1). Введем контрольный контур, находящийся на расстоянии от стенки порядка диаметра частицы. Обратимся, например, к уравнению неразрывности (являющаяся следствием уравнения Больцмана, а в механике сплошных сред — балансовых уравнений) справедлива только для точечных бесструктурных частиц, которые могут находиться либо внутри контрольного контура, либо снаружи.

Для частиц конечного диаметра в некоторый момент времени возможно положение, при котором молекула находится частично внутри контрольного контура, а частично снаружи, что неизбежно ведет к флуктуации массы в контрольном контуре. Математическое ожидание числа частиц, движущихся перпендикулярно стенке, равно нулю, поэтому флуктуации в линейном приближе-

Таблица. Флуктуации гидродинамических величин в масштабе Колмогорова в рамках модели обобщенных уравнений Эйлера

Но- мер	Гидродинамическая величина A	Флуктуация A^f
1	ρ	$\tau \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) \right]$
2	$\rho \mathbf{v}_0$	$\tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \rho \mathbf{g} \right]$
3	\mathbf{v}_0	$\tau \left[\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{g} \right]$
4	$p\delta_{z\beta} + \rho v_{0z}v_{0\beta}$	$\tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (p\delta_{z\beta} + \rho v_{0z}v_{0\beta}) + \frac{\partial}{\partial r_\gamma} (p v_{0z}\delta_{\beta\gamma} + p v_{0\gamma}\delta_{z\beta} + \rho v_{0z}v_{0\beta}v_{0\gamma}) - g_\beta \rho v_{0z} - g_z \rho v_{0\beta} \right]$
5	$3p + \rho v_0^2$	$\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (3p + \rho v_0^2) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot [\mathbf{v}_0(\rho v_0^2 + 5p)] - 2\mathbf{g} \cdot \rho \mathbf{v}_0 \right\}$
6	p	$\tau \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0) + \frac{2}{3} p \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_0 \right]$
7	$\mathbf{v}_0(\rho v_0^2 + 5p)$	$\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{v}_0(\rho v_0^2 + 5p)] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\rho v_0^2 \mathbf{v}_0 + \bar{\Gamma} p v_0^2 + 7p \mathbf{v}_0 + 5\bar{\Gamma} \frac{p^2}{\rho} \right) - 2\rho \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{g} - 5p \bar{\Gamma} \cdot \mathbf{g} - \rho v_0^2 \bar{\Gamma} \cdot \mathbf{g} - p \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(5 \frac{p}{\rho} + v_0^2 \right) + 2 \left(\mathbf{v}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}_0 - \frac{4}{3} \mathbf{v}_0 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_0 \right) \right] \right\}$

нии будут пропорциональны средней длине пробега (или, иначе, времени между столкновениями τ).

Определим число Кнудсена Kn_l как отношение средней длины пробега λ к расстоянию l от границы контура до стенки. После обезразмеривания уравнения (7.8)–(7.10) будут содержать число Кнудсена Kn_l как коэффициент флуктуационных членов. Если $l \rightarrow 0$, $Kn_l \rightarrow \infty$ и контрольный контур совпадает с полостью, то интегральные флуктуации в объеме отсутствуют; следова-

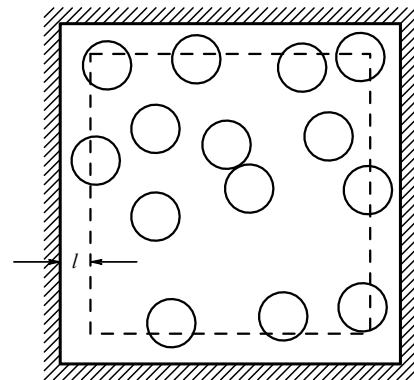


Рис. 1. Замкнутая полость и контрольный контур, содержащий частицы конечного диаметра.

тельно, на стенке должны выполняться классические уравнения неразрывности и движения. Так оно и есть: флуктуационные члены в обобщенном уравнении неразрывности (7.8) содержат левые части классических уравнений неразрывности и движения. Обращение флуктуационных членов в нуль на стенке доставляет необходимые дополнительные граничные условия для обобщенных гидродинамических уравнений.

Отметим также, что появление вторых производных по времени в обобщенных уравнениях Эйлера позволяет использовать теорему Коши–Ковалевской для доказательства существования и единственности решения этих уравнений.

Исследуем процесс рождения и сглаживания флуктуаций, основываясь на обобщенном уравнении неразрывности. Прежде всего отметим, что обобщенное уравнение Больцмана является уравнением параболического типа; запишем его для одномерного нестационарного случая в БГК-приближении при условии $\tau = \text{const}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \tau \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{f^{(0)} - f}{k\tau}. \quad (7.21)$$

После перехода к характеристическим переменным $\zeta = x - vt$, $\xi = t$ уравнение (7.21) записывается как

$$\tau \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{f - f^{(0)}}{k\tau} \quad (7.22)$$

и немедленно интегрируется:

$$f = f_0 + C_1(\xi) \exp\left(-\frac{\sqrt{1+4k^{-1}}-1}{2\tau} \zeta\right). \quad (7.23)$$

Вторая постоянная интегрирования C_2 , соответствующая экспоненциально растущей части общего решения, по физическому смыслу решения полагается равной нулю.

В пространственно однородном случае при тех же предположениях (например, при $k = 5$) имеем для обобщенного больцмановского и больцмановского описания соответственно

$$f^{\text{GBE}} = f_0 + C(v) \exp\left(-0,17 \frac{t}{\tau}\right), \quad (7.24)$$

$$f^{\text{BE}} = f_0 + C(v) \exp\left(-0,2 \frac{t}{\tau}\right). \quad (7.25)$$

Обращает на себя внимание близость решений, найденных в рамках обобщенного больцмановского и больцмановского описаний.

Что происходит с рождающимися флуктуациями? Обратимся к обобщенному уравнению неразрывности (7.8), которое запишем для одномерного нестационарного случая в обобщенном эйлеровском приближении (внешние силы отсутствуют):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \tau^{(0)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_0) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_0) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \tau^{(0)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_0) + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v_0^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

где $\tau^{(0)}$ есть среднее время между столкновениями, вычисленное в локально максвелловском приближении:

$\tau^{(0)} p = \Pi \mu$ (Π — множитель порядка единицы; для модели твердых сфер в первом приближении по полиномам Сонина $\Pi = 0,8$ [49]).

Будем считать, что на временах порядка времени между столкновениями гидродинамические величины изменяются не слишком сильно (исключаются области типа ударной волны; структура ударной волны исследуется в рамках обобщенного уравнения Больцмана ниже):

$$\frac{\rho}{\tau^{(0)}} \gg \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\rho}{\tau^{(0)}} \gg \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_0),$$

изменение температуры невелико, конвективным переносом можно пренебречь, а энергия хаотического движения существенно больше кинетической энергии потока: $\overline{V^2}/v_0^2 \gg 1$ (например, для водорода при н.т.д. и $v_0 = 10$ см с^{-1} это отношение равно $3,4 \times 10^8$). Тогда уравнение (7.26) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau^{(0)} p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (7.27)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (7.28)$$

где коэффициент самодиффузии $D = \Pi \mu / \rho$ (см. [49], с. 134). Уравнение (7.28) есть уравнение диффузии; следовательно, локально возрастающая флуктуация плотности немедленно включает механизм диффузии, сглаживающий флуктуацию, а доказанная обобщенная H -теорема Больцмана обосновывает выход на равновесие для сглаженных флуктуаций.

Аналогичное рассмотрение для пространственно неоднородного случая может быть реализовано относительно обобщенного уравнения баланса энтропии.

Введем тензор сдвига \mathbf{S} с компонентами

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{0i}}{\partial r_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial r_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7.29)$$

и запишем обобщенное уравнение Эйлера в терминах средних величин:

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}_0)^a = 0, \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}_0)^a + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot [p^a \overline{\mathbf{I}} + (\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0)^a] = \rho^a \mathbf{g}, \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (3p + \rho v_0^2)^a + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot [\mathbf{v}_0 (\rho v_0^2 + 5p)]^a - 2\mathbf{g} \cdot (\rho \mathbf{v}_0)^a = \\ = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \tau p \left[\frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{p}{\rho} \right) + 2\mathbf{v}_0 \cdot \overline{\mathbf{S}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Из системы обобщенных уравнений Эйлера в форме (7.30)–(7.32) вытекает следующее.

1. Запись гидродинамических уравнений в терминах средних величин является целью "классической" теории турбулентности. Однако строгий подход, основанный на использовании обобщенных уравнений Эйлера приводит к невязке (записанной относительно истинных величин) в правой части уравнения энергии (7.32).

2. Невязка в (7.32)

$$P^e = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \tau p \left[\frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{p}{\rho} \right) + 2 \mathbf{v}_0 \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{S}} \right] \right\} \quad (7.33)$$

оказывается пропорциональной τp и, значит, вязкости (см. (2.18)). Если

$$P^e = 0, \quad (7.34)$$

то система уравнений (7.30)–(7.32) формально сводится к уравнениям Эйлера для усредненных величин. Следовательно, невязка P^e , представляющая собой изменение в пространстве диссипации тепловой энергии и энергии сдвига, провоцирует развитие турбулентности в рассматриваемой физической системе.

3. Так называемые "мягкие" граничные условия, обычно выставляемые на выходе из расчетной области течения, являются следствием условия (7.34):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left\{ \mu \left[\frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{p}{\rho} \right) + 2 \mathbf{v}_0 \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{S}} \right] \right\} = 0. \quad (7.35)$$

4. Даже при условии (7.34) уравнения (7.30)–(7.32) не сводятся в точности к классическим уравнениям Эйлера, поскольку средняя величина произведения гидродинамических величин не равна произведению средних. Следовательно, система уравнений (7.30)–(7.32) содержит больше неизвестных величин (а именно, ρ^a , $(\rho \mathbf{v}_0)^a$, p^a , $(\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0)^a$, $[\mathbf{v}_0 (\rho v_0^2 + 5p)]^a$), чем уравнений, и мы приходим к типичной для классической теории турбулентности проблеме замыкания моментных уравнений.

В нашей теории решение этой проблемы состоит просто в возврате к записи уравнений гидродинамики относительно истинных величин. И лишь в случае, когда турбулентные флуктуации полностью отсутствуют или, что то же самое, когда средняя величина произведения гидродинамических величин равна произведению средних, мы приходим к классической записи уравнений Эйлера и, конечно, Навье–Стокса. Таким образом, классические уравнения Эйлера и Навье–Стокса не записаны относительно истинных величин, и попытка "вытащить" мелкомасштабные флуктуации из этих уравнений, используя формальную процедуру Рейнольдса, лишена физического смысла.

8. Численное моделирование вихревого течения газа с помощью обобщенных уравнений Эйлера

Для демонстрации возможностей численного моделирования вихревых течений с помощью обобщенных уравнений гидродинамики рассмотрим двумерное нестационарное течение сжимаемого газа в полости [54–56]. Используем следующую постановку задачи. Пусть при обтекании некоторой плоской поверхности внезапно появляется (например, в результате механического воздействия) некоторая полость квадратного поперечного сечения, длина которой много больше ширины полости (рис. 2). Предполагается, что в некоторый момент времени на отрезке OL оси x внезапно появляется движение газа со скоростью V_s , которая затем поддерживается постоянной.

Запишем систему обобщенных уравнений Эйлера для двумерного нестационарного неизотермического тече-

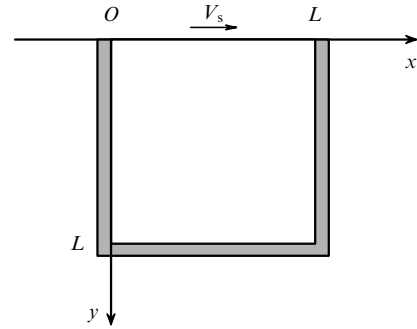


Рис. 2. Нестационарное течение сжимаемого газа в полости.

ния сжимаемого газа:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \tau \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho u - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) + \frac{\partial p}{\partial x} \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho v - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial y} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho u - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) + \frac{\partial p}{\partial x} \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p + \rho u^2 - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (p + \rho u^2) + 3 \frac{\partial}{\partial x} (p u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} (\rho u^2 v) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (p v) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho uv - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho uv) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 v) + \frac{\partial}{\partial y} (p u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv^2) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho v - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial y} \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho uv - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial x} (p v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 v) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv^2) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ p + \rho v^2 - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (p + \rho v^2) + 3 \frac{\partial}{\partial y} (p v) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^3) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv^2) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (p u) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho v_0^2 + 3p - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_0^2 + 3p) + \frac{\partial}{\partial x} (u (\rho v_0^2 + 5p)) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} (v (\rho v_0^2 + 5p)) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u (\rho v_0^2 + 5p) - \right. \\ & - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (u (\rho v_0^2 + 5p)) + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 \rho v_0^2 + p v_0^2 + 7p u^2 + 5 \frac{p^2}{\rho}) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} (u v \rho v_0^2 + 7p u v) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v (\rho v_0^2 + 5p) - \right. \\ & - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (v (\rho v_0^2 + 5p)) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v v_0^2 + 7p u v) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} (v^2 \rho v_0^2 + p v_0^2 + 7p v^2 + 5 \frac{p^2}{\rho}) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Здесь $v_0^2 = u^2 + v^2$, u и v — составляющие гидродинамической скорости течения \mathbf{v}_0 , $\tau = \Pi\mu/p$.

Система обобщенных уравнений (8.1)–(8.4) была приведена к безразмерному виду. При этом использовались безразмерные переменные $\hat{p} = p/p_\infty$, $\hat{\rho} = \rho/\rho_\infty$, $\hat{u} = u/V_s$, $\hat{v} = v/V_s$, $\hat{t} = tV_s/L$.

Влиянием силы тяжести пренебрегается, поэтому появляются два критерия подобия: $Eu = p_\infty/(\rho_\infty V_s^2)$, $Re = LV_s\rho_\infty/\mu_\infty$, где V_s — скорость внешнего течения. Параметр Π соответствует первому приближению в модели твердых сфер: $\Pi = 0,8$.

Начальные условия ($t = 0$):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\infty, & p &= p_\infty, & v &= 0, \\ u &= V_s \text{ при } y = 0, & u &= 0 \text{ при } y > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= V_s, & v(x, 0) &= 0, \\ u(x, L) &= 0, & v(x, L) &= 0; \text{ для } x \in [0, L], \\ u(0, y) &= 0, & v(0, y) &= 0, \\ u(L, y) &= 0, & v(L, y) &= 0 \text{ для } y \in [0, L], \\ \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{x=0} &= 0, & \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{x=L} &= 0 \text{ для } y \in [0, L], \\ \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \right]_{y=0} &= 0, & \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \right]_{y=L} &= 0 \text{ для } x \in [0, L], \\ \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{x=0} &= 0, & \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{x=L} &= 0 \text{ для } y \in [0, L], \\ \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=0} &= 0, & \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=L} &= 0 \text{ для } x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве граничных условий использовались условия прилипания, непротекания стенки для сжимаемого газа и условие абсолютно нетеплопроводной стенки. Введение указанных условий, носящих модельный характер, достаточно для демонстрации больших возможностей обобщенных гидродинамических уравнений. Расчеты осуществлялись в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса. Многие при-

меры расчетов, в том числе течений другого типа (около нагретого цилиндра и уступа), содержатся в [54–56], и здесь мы приведем только некоторые характерные результаты.

Расчеты проводились параллельно с использованием обобщенных уравнений Эйлера и уравнений Навье–Стокса. В существенно нестационарной области картины течения газа в полости качественно различаются, сближение картин течения начинается для достаточно больших значений моментов времени. С ростом числа Рейнольдса картины течения для гидродинамических моделей обобщенных уравнений Эйлера и уравнений Навье–Стокса становятся все более различными. Рисунок 3 отвечает расчетам по обобщенным уравнениям Эйлера, а рис. 4 — по уравнениям Навье–Стокса для режима $Re = 3200$, $Eu = 1,0$, $Kn = 0,0003915$, $M = 0,775$ в безразмерные моменты времени \hat{t} , равные 4,0, 9,5, 230,0. При этом понятие квазистационарного режима становится достаточно условным.

На рисунке 5 показано положение центра центрального вихря для больших моментов времени. Точки I–II на рисунке соответствуют расчетам по обобщенным гидродинамическим уравнениям для безразмерных моментов времени \hat{t} , равных 201,0, 202,0, 203,5, 204,0, 205,0, 205,8, 207,0, 208,0, 209,0, 210,0, 211,5. Оказывается, что центр этого вихря совершает вращательное движение. Известен факт, что двумерные расчеты течения несжимаемой изотермической жидкости (воды) для центрального сечения полости, выполненные по уравнениям Навье–Стокса, чрезвычайно плохо коррелируют с экспериментальными данными [57–59] даже в случае, когда длина полости существенно больше ее ширины. Трехмерные расчеты по уравнениям Навье–Стокса не приводят к взаимно согласующимся результатам [60, 61]. Отмечался эффект, когда трехмерные расчеты по уравнениям Навье–Стокса, выполненные на более грубых сетках, лучше соответствовали экспериментальным данным, чем расчеты формально более высокой точности [60].

К сожалению, мы не располагаем экспериментальными данными по рассматриваемому течению газа в полости, а к сравнению экспериментальных и теоретических данных (даже при одном и том же числе Re) для течений газов и жидкости следует относиться с осторожностью. Тем не менее расчетная зависимость отношения

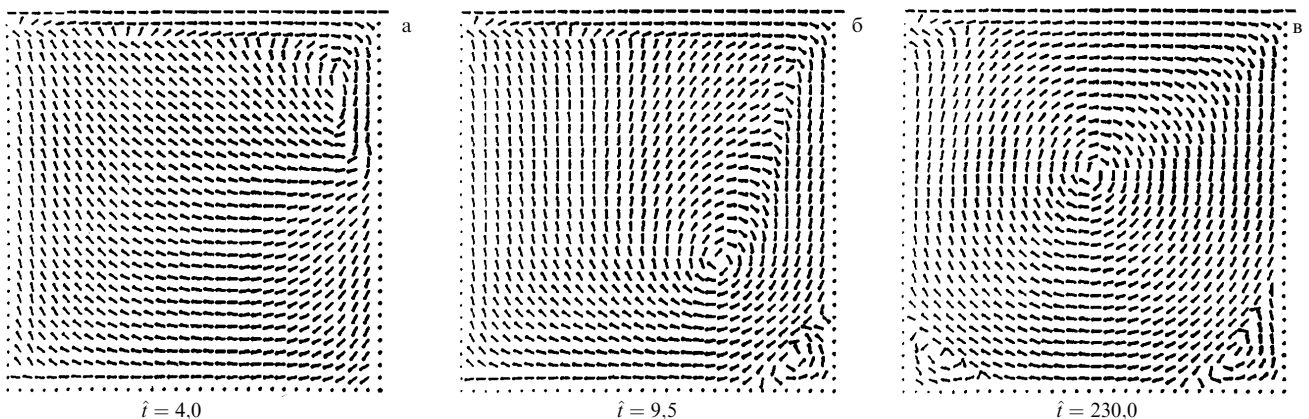


Рис. 3. Течение газа в полости для моментов времени \hat{t} , равных 4,0, 9,5, 230,0. Расчеты по обобщенным уравнениям Эйлера при $Re = 3200$, $Eu = 1$.

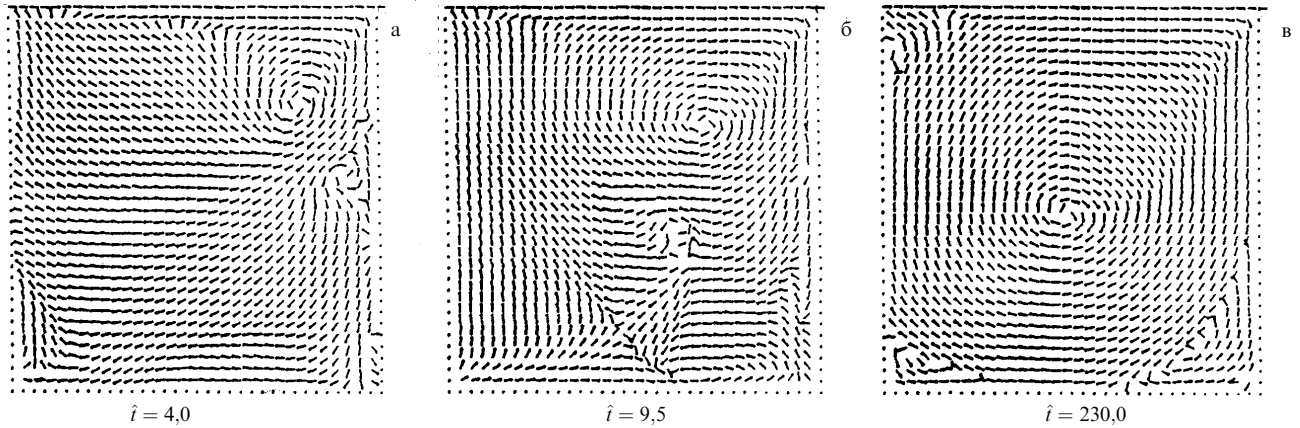


Рис. 4. Течение газа в полости для моментов времени \hat{t} , равных 4,0, 9,5, 230,0. Расчеты по уравнениям Навье – Стокса при $Re = 3200$, $Eu = 1$.

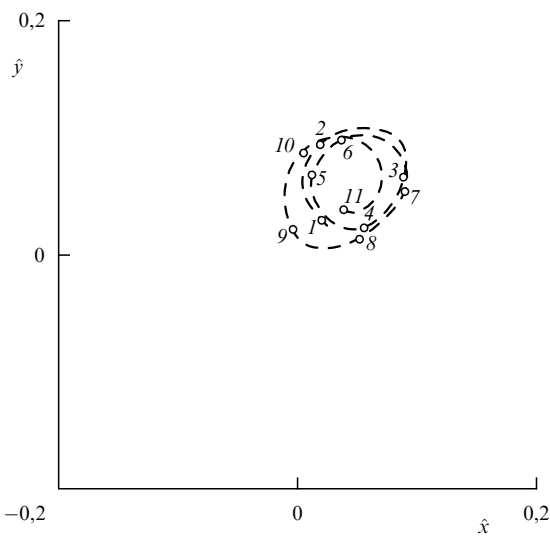


Рис. 5. Положение центра центрального вихря (относительно центра полости) для моментов времени \hat{t} , равных 201,0, 202,0, 203,5, 204,0, 205,0, 205,8, 207,0, 208,0, 209,0, 210,0, 211,5 (точки 1–11 соответственно). Расчеты по обобщенным гидродинамическим уравнениям при $Re = 3200$, $Eu = 1$.

даже в квазистационарном режиме флуктуации положения вихря D_3/L становятся все большими. Область флуктуаций представляет собой расширяющуюся полосу, изображенную на рис. 6 и свидетельствующую о переходе к развитой турбулентности.

Рисунок 7 демонстрирует колебания модуля безразмерной скорости \hat{v}_0 в точке ($\hat{x} = 0,13$, $\hat{y} = 0,87$) за безразмерный период времени $\hat{t} = 0,6$ при $Re = 3200$. Колебания носят нерегулярный характер. Таким образом, уже при $Re = 3200$ течение начинает приобретать типичные черты турбулентного режима.

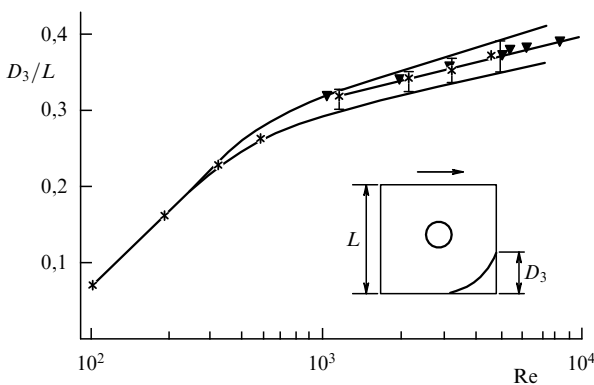


Рис. 6. Зависимость относительного размера донного вихря D_3/L от числа Рейнольдса Re ($Eu = 1$). Сплошная линия — теоретические результаты.

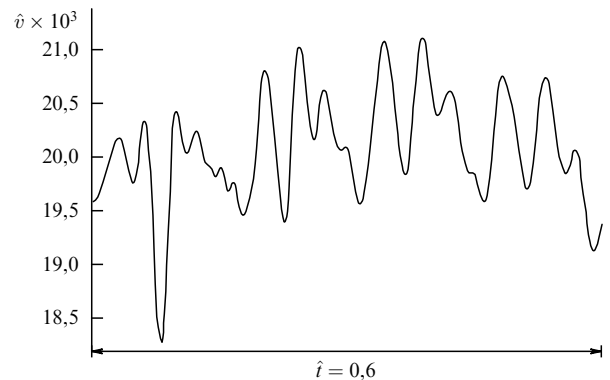


Рис. 7. Колебания модуля скорости \hat{v}_0 в точке ($\hat{x} = 0,13$, $\hat{y} = 0,87$) за период времени 0,6 в режиме течения, близком к "квазистационарному", при $Re = 3200$, $Eu = 1$. Время начала отсчета $\hat{t}_0 = 185,0$.

Отметим, что использование обобщенных гидродинамических уравнений, содержащих вязкость, позволяет строить исключительно эффективные разностные схемы, что делает обобщенные гидродинамические уравнения более привлекательными и с этой точки зрения.

9. Исследование распространения звука в рамках обобщенных уравнений гидродинамики

размера пристеночного донного вихря D_3 к ширине полости L дает в целом хорошее соответствие (рис. 6) с экспериментальными данными [57–59]. При этом из-за развивающихся колебаний гидродинамических величин

Задача о распространении звука является классическим объектом исследования в кинетической и гидродинамической теориях. Пусть бесконечная плоская пластина колеблется в газе в направлении своей нормали с некоторой частотой ω . Введем параметр $a = \omega\tau$, где τ — среднее время между столкновениями. Для модели

твердых сфер в больцмановском газе справедливо соотношение [49]

$$p\tau = P\mu. \quad (9.1)$$

В гидродинамическом соотношении (9.1), помимо статического давления p и динамической вязкости μ , введен параметр P , равный 0,786 в пределе разложения функции распределения в ряд по полиномам Сонина и 0,8 в первом (максвелловском) приближении.

Параметр a можно связать с аналогом числа Рейнольдса

$$r = \frac{P}{a} = \frac{p}{\omega\mu}. \quad (9.2)$$

При достаточно больших значениях r вполне удовлетворительно работает классическая гидродинамика. В линейной акустике при $r \rightarrow \infty$ затухание звука стремится к нулю, и скорость звука определяется соотношением

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (9.3)$$

где ρ_0 — плотность невозмущенного газа, а

$$\gamma = \chi^{-1} = \frac{C_p}{C_V} \quad (9.4)$$

— отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме.

При $r \sim 1$ и тем более при $r \rightarrow 0$ положение становится сложным. Уравнения Эйлера "не замечают" изменившейся ситуации и дают постоянную скорость звука и нулевое затухание во всем диапазоне изменения r . Уравнение Навье–Стокса приводит к совершенно неудовлетворительному результату: после достижения максимума при $r \sim 1$ затухание стремится к нулю, а скорость звука — к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Поэтому при малых числах r исследование распространения звука строится на кинетическом уровне описания. Не вдаваясь в детальный обзор упомянутых методов (см., например, [62]), отметим в целом неудовлетворительную картину.

В частности, увеличение числа моментов при решении уравнения Больцмана моментными методами приводит к ухудшению согласия с экспериментальными данными. Обычно констатируют существование "критических чисел Рейнольдса" $r_{кр}$, после которых при уменьшении числа r не существует решения в виде плоских волн. Для каждого типа модельного или моментного уравнения существует свое число $r_{кр}$, что свидетельствует не о физическом, а о чисто математическом эффекте.

Применим обобщенные уравнения гидродинамики к решению задачи о распространении звуковых волн в одноатомном газе. В линейной акустике возмущение плотности и температуры представляется в виде

$$\rho = \rho_0(1 + s), \quad (9.5)$$

$$T = T_0(1 + \eta), \quad (9.6)$$

а решение обобщенных гидродинамических уравнений записывается так:

$$s = \bar{s} \exp(i\omega t - k'x), \quad (9.7)$$

$$\eta = \bar{\eta} \exp(i\omega t - k'x), \quad (9.8)$$

$$v = \bar{v} \exp(i\omega t - k'x), \quad (9.9)$$

где v — гидродинамическая скорость в рассматриваемой задаче, k' — комплексное волновое число.

Запишем теперь систему одномерных нестационарных обобщенных уравнений Эйлера (см. (7.8)–(7.10)):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho - \tau \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho v - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} \right] \right\} = 0, \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho v - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho v^2 + p - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2 + p) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^3 + 3pv) \right] \right\} = 0, \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho v^2 + 3p - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2 + 3p) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^3 + 5pv) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho v^3 + 5pv - \tau \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^3 + 5pv) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^4 + 8pv^2 + 5 \frac{p^2}{\rho}) \right] \right\} = 0. \quad (9.12)$$

Из уравнения состояния

$$p = \rho RT \quad (9.13)$$

(R — универсальная газовая постоянная), справедливого для максвелловской функции распределения, следует

$$p = p_0(1 + s + \eta). \quad (9.14)$$

После линеаризации уравнения (9.10)–(9.12) приобретают вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \tau \left[\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (s + \eta) + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right] = 0, \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (s + \eta) - \tau \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2 \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (s + \eta) + 3 \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (9.16)$$

$$3 \frac{\partial}{\partial t} (s + \eta) + 5 \frac{\partial v}{\partial x} - \tau \left[3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (s + \eta) + 5 \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (s + 2\eta) + 10 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right] = 0. \quad (9.17)$$

Рассмотрим подробнее линеаризацию, например, уравнения неразрывности (9.10), которое может быть представлено как

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) - \tau \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p + \rho v^2) + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (\rho v) - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) \right) \frac{\partial \ln \tau}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) \right) \frac{\partial \ln \tau}{\partial x} \right] = 0. \quad (9.18)$$

Поскольку в однокомпонентном ("простом") газе для модели твердых сфер

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\sigma^2} \sqrt{\frac{\pi m}{2kT}} = \frac{\text{const}}{n\sqrt{T}}, \quad (9.19)$$

имеем

$$\frac{\partial \ln \tau}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (9.20)$$

$$\frac{\partial \ln \tau}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (9.21)$$

Поэтому в линейной акустике члены, содержащие производные от $\ln \tau$, не дают вклада в уравнения первого приближения.

Используя теперь представления (9.7)–(9.9), находим

$$i\omega s - k'v - \tau \left[-\omega^2 s + \frac{p_0}{\rho_0} k'^2 (s + \eta) - 2i\omega k'v \right] = 0, \quad (9.22)$$

$$i\omega v - \frac{p_0}{\rho_0} k' (s + \eta) - \tau \left[-\omega^2 v - 2i\omega \frac{p_0}{\rho_0} k' (s + \eta) + 3 \frac{p_0}{\rho_0} k'^2 v \right] = 0, \quad (9.23)$$

$$3i\omega (s + \eta) - 5k'v - \tau \left[-3\omega^2 (s + \eta) + 5 \frac{p_0}{\rho_0} k'^2 (s + 2\eta) - 10i\omega k'v \right] = 0. \quad (9.24)$$

Система однородных алгебраических уравнений (9.22)–(9.24) имеет только нулевое решение, если ранг матрицы равен числу уравнений, в противном случае имеются ненулевые решения. Следовательно, определитель должен обращаться в нуль:

$$\begin{vmatrix} i\omega + \omega^2 \tau - \tau \frac{p_0}{\rho_0} k'^2 & -\tau \frac{p_0}{\rho_0} k' \\ -\frac{p_0}{\rho_0} k' + 2i\omega \tau \frac{p_0}{\rho_0} k' & -\frac{p_0}{\rho_0} k' + 2i\omega \tau \frac{p_0}{\rho_0} k', \\ 3i\omega + 3\omega^2 \tau - 5\tau \frac{p_0}{\rho_0} k'^2 & 3i\omega + 3\omega^2 \tau - 10\tau \frac{p_0}{\rho_0} k'^2 \\ & -k + 2i\omega \tau k' \\ & i\omega + \omega^2 \tau - 3\tau \frac{p_0}{\rho_0} k'^2 \\ & -5k' + 10i\omega \tau k' \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует алгебраическое уравнение шестой степени относительно волнового числа k' :

$$\begin{aligned} 5\tau^3 \frac{p_0^3}{\rho_0^3} k'^6 - \frac{p_0^2}{\rho_0^2} \left[5i\omega \tau^2 + 5\omega^2 \tau^3 + \frac{5}{3} \tau \right] k'^4 + \\ + \frac{p_0}{\rho_0} \left[\frac{5}{3} i\omega + 2\omega^2 \tau - \frac{2}{3} i\omega^3 \tau^2 - \frac{1}{3} \omega^4 \tau^3 \right] k'^2 + \\ + i\omega^3 + 3\omega^4 \tau - 3i\omega^5 \tau^2 - \omega^6 \tau^3 = 0. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Уравнение (9.25) приводится к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} 3a^3 \chi^2 \hat{k}^6 - [3ia^2 + 3a^3 + a] \chi \hat{k}^4 + \\ + \left[i + \frac{6}{5} a - \frac{2}{5} ia^2 - \frac{1}{5} a^3 \right] \hat{k}^2 + \\ + \frac{3}{5\chi} i + \frac{9}{5\chi} a - \frac{9}{5\chi} a^2 - \frac{3}{5\chi} a^3 = 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Здесь введено безразмерное волновое число $\hat{k} = k'c_0/\omega$, где характерная скорость

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (9.27)$$

Разделение действительной и мнимой частей в (9.26) в соответствии с равенством

$$\hat{k} = \alpha + i\beta, \quad (9.28)$$

приводит к системе уравнений относительно α и β :

$$\begin{aligned} 3a^3 \chi^2 (\alpha^2 - \beta^2) (\alpha^4 + \beta^4 - 14\alpha^2 \beta^2) + 12\alpha\beta a^2 (\alpha^2 - \beta^2) \chi - \\ - (3a^3 + a) \chi (\alpha^4 + \beta^4 - 6\alpha^2 \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(\frac{6}{5} a - \frac{1}{5} a^3 \right) - \\ - 2\alpha\beta \left(1 - \frac{2}{5} a^2 \right) + \frac{9}{5\chi} - \frac{3}{5\chi} a^3 = 0, \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} 6a^3 \chi^2 \alpha\beta (3\alpha^4 + 3\beta^4 - 10\alpha^2 \beta^2) - 3a^2 \chi (\alpha^4 + \beta^4 - 6\alpha^2 \beta^2) - \\ - 4(3a^3 + a) \chi \alpha\beta (\alpha^2 - \beta^2) + \left(1 - \frac{2}{5} a^2 \right) (\alpha^2 - \beta^2) + \\ + 2\alpha\beta \left(\frac{6}{5} a - \frac{1}{5} a^3 \right) + \frac{3}{5\chi} - \frac{9}{5\chi} a^2 = 0. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Из (9.7) следует, что

$$s = \bar{s} \exp\left(-\omega \frac{\alpha}{c_0} x\right) \exp\left[i\omega \left(t - \frac{\beta}{c_0} x\right)\right].$$

Таким образом, коэффициент α характеризует затухание звука, а $\beta = c_0/c$ есть отношение скорости звука в классическом эйлеровском приближении к расчетной скорости звука.

Рассмотрим два асимптотических решения уравнений (9.29) и (9.30).

1. Если параметр $a = \omega\tau \rightarrow 0$, то в предельном случае $a = 0$ из (9.29) и (9.30) находим

$$\hat{k}^2 = -\frac{3}{5} \chi^{-1}. \quad (9.31)$$

Используя для одноатомного газа (см. (9.4)) значение

$$\chi = \frac{5}{3}, \quad (9.32)$$

приходим к классическому эйлеровскому пределу

$$k' = \pm i \frac{\omega}{c_0}. \quad (9.33)$$

Волновое число k' оказывается мнимым; например, для возмущения плотности решение записывается как

$$s = \bar{s} \exp\left[i\omega \left(t \pm \frac{x}{c_0}\right)\right]. \quad (9.34)$$

Таким образом, в классическом эйлеровском описании затухание звука отсутствует, а скорость звука постоянна и равна c_0 (см. (9.27)). Иначе говоря, для колебаний, распространяющихся в сторону положительных значений x , имеем

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1. \tag{9.35}$$

2. Если параметр $a \rightarrow \infty$, то из (9.26) следует

$$\hat{k}^6 - \frac{5}{3} \hat{k}^4 - \frac{5}{27} \hat{k}^2 = \frac{25}{27}, \tag{9.36}$$

или (см. (9.29) и (9.30))

$$\begin{aligned} -x(x^2 - 12y) - \frac{5}{3}x^2 + \frac{20}{3}y + \frac{5}{27}x &= \frac{25}{27}, \\ 3x^2 - 4y + \frac{10}{3}x &= \frac{5}{27}, \end{aligned} \tag{9.37}$$

где

$$\beta^2 - \alpha^2 = x, \quad \alpha^2 \beta^2 = y. \tag{9.38}$$

Из (9.37) находим

$$x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{35}{54}x - \frac{25}{162} = 0. \tag{9.39}$$

Теперь не составляет труда найти асимптотическое решение:

$$\alpha = 0,509, \quad \beta = 0,650. \tag{9.40}$$

На рисунках 8 и 9 представлены результаты численного расчета безразмерной скорости звука β и безразмерного коэффициента затухания α в рамках обобщенного уравнения Эйлера [31, 63], обобщенного уравнения Навье–Стокса и уравнения Навье–Стокса и проведено их сравнение с экспериментами Гринспена [66], Мейера и Сесслера [67]. Детали расчетов в обобщенном навье-стоксовском приближении содержатся в работе [64] и здесь не приводятся из-за громоздкости формул.

Перейдем к обсуждению результатов численных расчетов, выполненных в рамках обобщенных гидродинамических уравнений и сравнению их с литературными

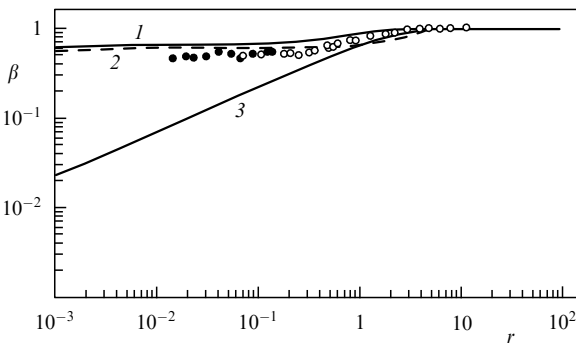


Рис. 8. Зависимость безразмерной скорости звука $\beta = c_0/c$ от аналога числа Рейнольдса r в сравнении с экспериментом: 1 — обобщенное уравнение Эйлера, 2 — обобщенное уравнение Навье–Стокса, 3 — уравнение Навье–Стокса. Светлые кружки — эксперимент Гринспена; темные кружки — эксперимент Мейера и Сесслера.

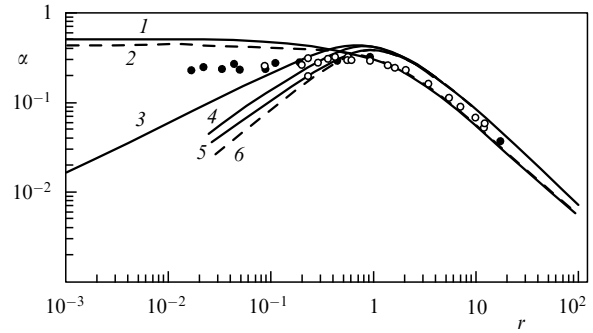


Рис. 9. Зависимость безразмерного коэффициента затухания α от аналога числа Рейнольдса r в сравнении с экспериментом: 1 — обобщенное уравнение Эйлера, 2 — обобщенное уравнение Навье–Стокса, 3 — уравнение Навье–Стокса, 4 — уравнение Барнетта, 5 — уравнение супер-Барнетта, 6 — моментные уравнения (число моментов $N = 105$). Светлые кружки — эксперимент Гринспена; темные кружки — эксперимент Мейера и Сесслера.

данными. Рассмотрим характерные особенности, возникающие при применении метода моментов к уравнениям Больцмана в задаче о распространении звука. Воспользуемся результатами Сировича и Тёрбера [65], представленными на рис. 10–12, где используются введенные нами обозначения.

На рисунке 10 проведено сравнение результатов численного расчета безразмерной скорости звука $\beta = c_0/c$ и безразмерного коэффициента затухания α в зависимости от аналога числа Рейнольдса r для 8- и 11-моментных моделей с потенциалом взаимодействия максвелловских молекул и взаимодействием, описываемым моделью твердых сфер. Отметим, что обе модели дают весьма близкие результаты.

На рисунках 11 и 12 представлены аналогичные данные для твердых сфер и максвелловских молекул и про-

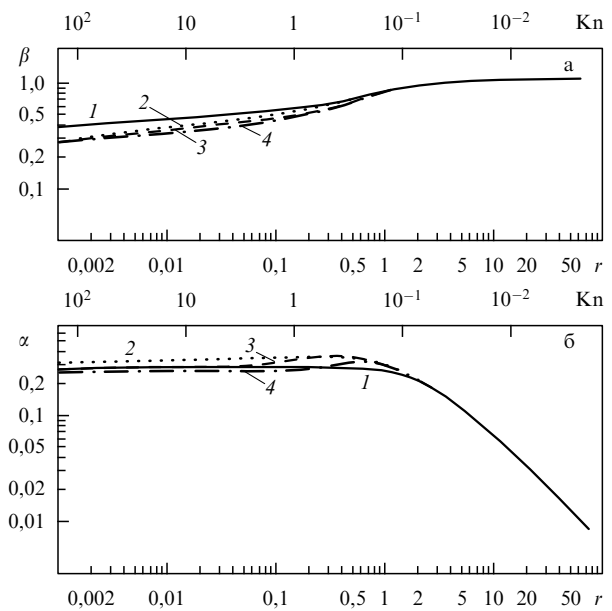


Рис. 10. Сравнение результатов расчета скорости звука (а) и коэффициента затухания (б) в рамках уравнения Больцмана для двух моделей: 1 — 11-моментная модель твердых сфер; 2 — 11-моментная модель максвелловских молекул; 3 — 8-моментная модель твердых сфер; 4 — 8-моментная модель максвелловских молекул.

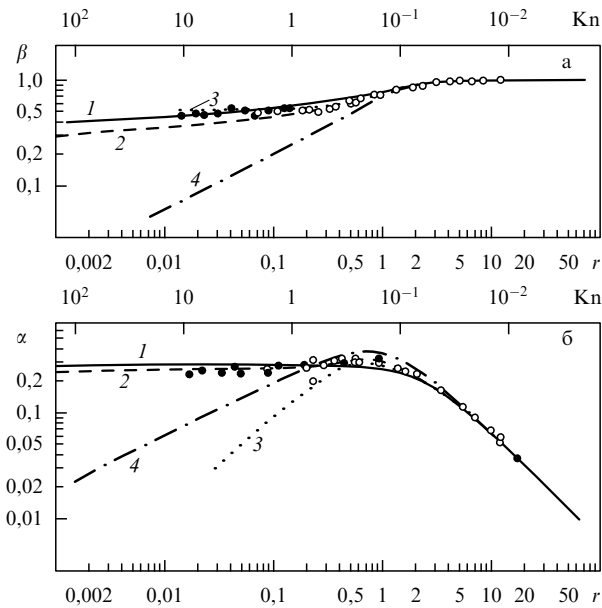


Рис. 11. Сравнение решений уравнений Больцмана с экспериментом для скорости звука (а) и коэффициента затухания (б) в модели твердых сфер: 1 — модель 11 моментов; 2 — модель 8 моментов; 3 — модель 105 моментов; 4 — расчет по уравнению Навье–Стокса. Светлые кружки — эксперимент Гринспена, темные кружки — эксперимент Мейера и Сесслера.

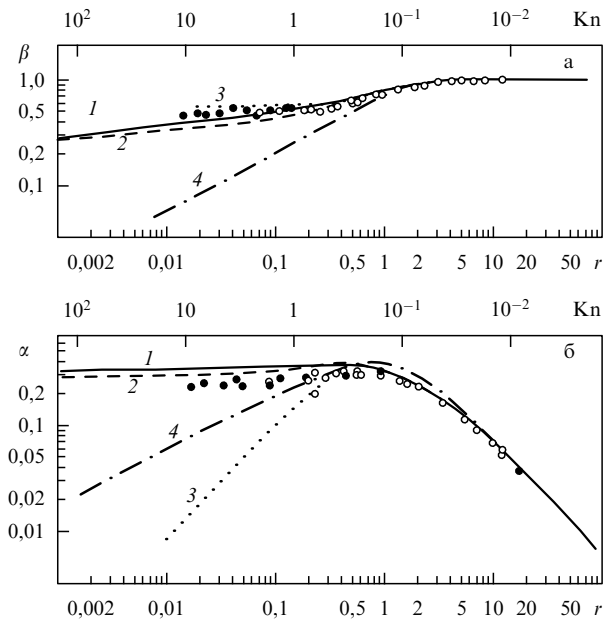


Рис. 12. Сравнение решений уравнений Больцмана с экспериментом для скорости звука (а) и коэффициента затухания (б) в модели максвелловских молекул: 1 — модель 11 моментов; 2 — модель 8 моментов; 3 — модель 483 моментов; 4 — расчет по уравнению Навье–Стокса. Светлые кружки — эксперимент Гринспена, темные кружки — эксперимент Мейера и Сесслера.

ведено их сравнение с экспериментами Гринспена [66], Мейера и Сесслера [67], выполненными для одноатомных газов. На этих же рисунках показаны результаты расчета по уравнению Навье–Стокса и рекордные по объему вычислений данные моделей 105 моментов и 483 моментов, полученные Пекерисом и др. [68, 69].

Из сравнения теоретических данных, найденных с помощью уравнений Больцмана, с экспериментом следует на первый взгляд парадоксальный вывод: чем "точнее" теоретическая модель, тем хуже согласование с экспериментом. Действительно, результаты Сировича и Тёрбера [65] для 8-моментной модели твердых сфер ближе к экспериментальным, чем те же результаты для 11-моментной модели. Данные Пекериса и др. [68, 69] для модели 105 моментов намного хуже.

Если принять во внимание слабое влияние модели взаимодействия молекул на расчеты скорости звука и коэффициента затухания, то результаты, полученные по модели 483 моментов для максвелловских молекул в области $r < 1$ следует признать просто катастрофическими. При этом с ростом числа использованных моментов "критическое" число r становится все меньшим [65], что, казалось бы, должно улучшать конечный результат.

Аналогичная ситуация наблюдается для гидродинамических результатов: уравнения Навье–Стокса при $r < 1$ совершенно неприменимы, но "уточняющие" модели (например, уравнение Барнетта) дают еще худшие результаты. Можно высказать парадоксальную мысль, что в классической теории лучше всего работает уравнение Эйлера, выдающее нулевое затухание и постоянную скорость звука: по крайней мере нет расхождений и "критических" точек, не имеющих физического смысла.

С позиций обобщенной бальцмановской кинетической теории происхождение подобного эффекта совершенно очевидно. Введем число Кнудсена как отношение средней длины пробега λ для частиц, удовлетворяющих модели твердых сфер, к длине волны λ_b , определяемой соотношением

$$\lambda_b = 2\pi \frac{c_0}{\omega}. \quad (9.41)$$

Поскольку для модели твердых сфер

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n \sigma^2}, \quad \mu = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{mkT}}{\sqrt{\pi}\sigma^2}, \quad (9.42)$$

где σ — диаметр частицы, используя (9.2) и (9.3), находим

$$\text{Kn} = \frac{\lambda_b}{\lambda} = \frac{8}{5\pi\sqrt{2}\pi\gamma} \frac{1}{r}. \quad (9.43)$$

Отношение теплоемкостей $\gamma = C_p/C_V$ при постоянных давлении и объеме в данном случае равно $5/3$, и с помощью (9.42) возможен пересчет шкалы аналога числа Рейнольдса r в эквивалентную шкалу числа Кнудсена, что показано на рис. 10–12.

Таким образом, рассогласование теоретических и экспериментальных данных при "уточнении" моделей, основанных на уравнениях Больцмана, начинается в области значений числа Кнудсена $\text{Kn} \sim 1$. Этого и следовало ожидать, поскольку дополнительные члены в кинетическом уравнении обобщенной бальцмановской кинетической теории становятся однопорядковыми, а при увеличении числа Кнудсена — преобладающими по отношению к членам левой части уравнений Больцмана. Это означает, в частности, что нет надежды продвинуться в сторону больших значений числа Кнудсена с помощью уравнений Барнетта и тем более уравнений супер-Барнетта.

Обобщенное уравнение Больцмана приводит к гораздо лучшим результатам. Обобщенные уравнения Эйлера и Навье–Стокса дают вполне удовлетворительное согласование экспериментальных и теоретических данных во всем диапазоне числа Кнудсена Kn , включая асимптотики. Данные, найденные по обобщенному уравнению Навье–Стокса ближе к экспериментальным точкам, чем данные, полученные с помощью обобщенных уравнений Эйлера. Этот результат важен еще и потому, что он получен на гидродинамических уравнениях, что дает надежду на возможность сквозного расчета гидродинамических течений, включая ударные слои, ударные волны и область промежуточных чисел Кнудсена. Это позволило бы избежать необходимости сращивания гидродинамических решений и решений, найденных для свободномолекулярных режимов.

Вопросы сращивания подобных решений сейчас широко обсуждаются в литературе (см., например, [70, 71]). В следующем разделе мы убедимся, что обобщенные гидродинамические уравнения могут обеспечить с хорошей точностью сквозной счет через ударную волну, или, иначе говоря, обобщенные гидродинамические уравнения применимы для расчета структуры ударной волны.

10. Расчет структуры ударной волны на основе обобщенных уравнений гидродинамики

Рассмотрим структуру ударной волны в одноатомном газе [31, 72] на основе решения обобщенных гидродинамических уравнений. Решение обычных уравнений газовой динамики представляет собой в этом случае разрывные функции плотности, скорости и температуры, которые связаны между собой уравнениями Ренкина–Гюгонно.

Эта классическая задача кинетической теории давно стала своеобразным тестом, на котором могут быть проверены различные методы решения уравнения Больцмана и приближенные кинетические теории. Заметим, что решение данной задачи также было получено и на уравнениях Навье–Стокса, однако при не слишком близких к единице значениях числа Маха условия применимости уравнений Навье–Стокса (малые изменения гидродинамических величин на длине свободного пробега молекул) заведомо не выполняются, и в лучшем случае можно надеяться только на качественное описание переходного слоя. При этом вязкие члены в уравнениях Навье–Стокса играют роль членов искусственной вязкости в уравнениях Эйлера, используемых при расчете течений с ударными волнами.

Запишем обобщенные уравнения Эйлера (см. (7.8)–(7.10)) в одномерном стационарном случае:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \rho v_0 - \tau^{(0)} \frac{d}{dx} (\rho v_0 + p) \right\} = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \rho v_0^2 + p - \tau^{(0)} \frac{d}{dx} (\rho v_0^3 + 3p v_0) \right\} = 0, \quad (10.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \rho v_0^3 + 5p v_0 - \tau^{(0)} \frac{d}{dx} \left(\rho v_0^4 + 8p v_0^2 + 5 \frac{p^2}{\rho} \right) \right\} = 0. \quad (10.3)$$

Напомним, что для модели твердых сфер в первом приближении метода Энскога $\tau^{(0)} p = 0,8\mu$.

Уравнения (10.1)–(10.3) в одномерном стационарном случае легко интегрируются один раз:

$$\rho v_0 = \tau^{(0)} \frac{d}{dx} (p + \rho v_0^2) + C_1, \quad (10.4)$$

$$p + \rho v_0^2 = \tau^{(0)} \frac{d}{dx} [v_0(3p + \rho v_0^2)] + C_2, \quad (10.5)$$

$$v_0(5p + \rho v_0^2) = \tau^{(0)} \frac{d}{dx} \left(8p v_0^2 + 5 \frac{p^2}{\rho} + \rho v_0^4 \right) + C_3. \quad (10.6)$$

При интегрировании уравнений (10.1)–(10.3) необходимо задать два крайних условия для гидродинамической скорости, плотности и давления, каковыми являются условия Гюгонно. Константы C_1 , C_2 и C_3 для уравнений (10.4)–(10.6) определяются условиями до ударной волны:

$$(\rho v_0)_b = C_1, \quad (10.7)$$

$$(p + \rho v_0^2)_b = C_2, \quad (10.8)$$

$$[v_0(5p + \rho v_0^2)]_b = C_3, \quad (10.9)$$

где индексом "b" отмечены параметры течения до ударной волны.

Однако при численном интегрировании уравнений (10.4)–(10.6) возникают трудности, связанные с необходимостью удовлетворить граничным условиям на противоположном конце интервала интегрирования. В этом случае проще решать непосредственно крайнюю задачу, используя метод прогонки для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, что и было выполнено совместно с Полевым в 1988 г.

Определим толщину ударной волны соотношением

$$d = \frac{\rho_a - \rho_b}{(d\rho/dx)_{\max}}, \quad (10.10)$$

где индексом "a" отмечены параметры течения после ударной волны, $(d\rho/dx)_{\max}$ соответствует максимальному значению градиента плотности в ударной волне.

Введем безразмерную толщину ударной волны

$$\bar{d} = \frac{\lambda_b}{d}. \quad (10.11)$$

Здесь λ_b — средняя длина свободного пробега до ударной волны. Для модели твердых сфер

$$\lambda_b = \frac{m}{\sqrt{2} \pi \rho_b \sigma^2}, \quad (10.12)$$

или (см. (9.3), (9.42))

$$\lambda_b = \frac{16}{5} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{\mu_b}{c_b \rho_b}, \quad (10.13)$$

где c_b — скорость звука в эйлеровском приближении до ударной волны. Полезно ввести еще безразмерную плотность

$$\bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_a - \rho_b}. \quad (10.14)$$

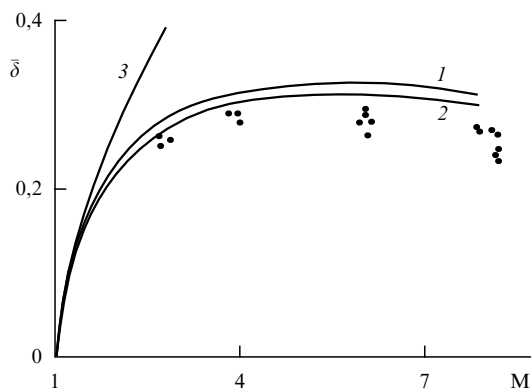


Рис. 13. Зависимость безразмерной толщины $\bar{\delta}$ ударной волны от числа Маха M в сравнении с экспериментальными данными Шмидта. Кривые 1, 2 и 3 отвечают расчетам по обобщенным уравнениям Навье–Стокса, обобщенным уравнениям Эйлера и уравнениям Навье–Стокса соответственно.

На рисунке 13 показана зависимость безразмерной толщины $\bar{\delta}$ ударной волны от числа Маха M . Отметим вполне удовлетворительное совпадение расчетных кривых и экспериментальных данных Шмидта [73]. Кривая 1 соответствует расчетам по обобщенным уравнениям Эйлера, кривая 2 — расчетам по обобщенным уравнениям Навье–Стокса. Кривые 1 и 2 идут несколько выше экспериментальных данных; при этом результаты, полученные в рамках обобщенного уравнения Навье–Стокса, лежат ближе к экспериментальным точкам. Кривая 3 отвечает расчетам по уравнениям Навье–Стокса, которые становятся неудовлетворительными при числе Маха $M \gtrsim 1,6$.

Применение метода Грэда также оказывается неудовлетворительным. Самим Гредом решалась задача о структуре ударной волны в тринадцатимомментном приближении [74] и было установлено, что решение этой задачи не существует при $M > 1,65$; позже Холвей [75] установил, что ряд Грэда, аппроксимирующий функцию распределения в уравнении Больцмана, расходится при $M > 1,85$.

Важно отметить, что полученные результаты по структуре ударной волны найдены в рамках обобщенных гидродинамических уравнений, что позволяет надеяться на эффективное их использование при сквозном счете для произвольных чисел Маха и Кнудсена.

На этом мы заканчиваем изложение обобщенной больцмановской кинетической теории. Приведенные выше результаты составляют лишь небольшую часть теории, которая развивается уже более десяти лет. Хотелось бы сделать лишь одно общее заключительное замечание — многолетний опыт использования обобщенного уравнения Больцмана и его приложений показывает, что обобщенное уравнение Больцмана является исключительно эффективным средством решения многих физических задач там, где классическая теория приводит к затруднениям.

Автор считает своим долгом принести глубокую благодарность В.Л. Гинзбургу за внимание к работе и ценные советы, редакции журнала *УФН* за помощь при подготовке обзора к опубликованию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-16071).

Список литературы

1. Boltzmann L *Sitzungsber. Kaiserl. Akad. Wiss.* **66** (2) 275 (1872)
2. Chapman S *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **216** 279 (1916)
3. Chapman S *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **217** 115 (1917)
4. Enskog D *The Kinetic Theory of Phenomena in Fairly Rare Gases* (Upsala, 1917)
5. Enskog D *Svensk. Vet. Akad. Arkiv f. Math. Ast. Fys.* **16** 1 (1921)
6. Boltzmann L *Vorlesungen über Gastheorie 2 Teil* (Leipzig: J.A. Barth, 1912)
7. Эренфест П *Относительность, кванты, статистика* (М.: Наука, 1972)
8. Ehrenfest P *Collected Scientific Papers* (Ed. M J Klein) (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1959)
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (Теоретическая физика; Т. VI) (М.: Наука, 1988)
10. Woods L C *An Introduction to the Kinetic Theory of Gases and Magnetoplasmas* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1993)
11. Cattaneo C C R. *Acad. Sci.* **247** 431 (1958)
12. Jarzebski A B, Thull J W J. *Comp. Phys.* **63** 236 (1986)
13. Sobolev S L J. *Phys. III (France)* **3** 2261 (1993)
14. Rosenau Ph J. *Am. Phys. Soc.* **48** (7) 655 (1993)
15. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.: Л.: Гостехиздат, 1946)
16. Born M, Green H S A *Proc. R. Soc. London Ser. A* **188** (1012) 10 (1946)
17. Green H S *The Molecular Theory of Fluids* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1952)
18. Kirkwood J G J. *Chem. Phys.* **15** (1) 72 (1947)
19. Yvon J La *Theorie Statistique des Fluides et l'Equation d'Etat* (Paris: Hermann & cie, 1935)
20. Алексеев Б В *Математическая кинетика реагирующих газов* (М.: Наука, 1982)
21. Власов А А *Нелокальная статистическая механика* (М.: Наука, 1978)
22. Слезкин Н А *ДАН СССР* **79** (1) 33 (1951)
23. Слезкин Н А *ДАН СССР* **77** (2) 205 (1951)
24. Мещерский И В *Динамика точки переменной массы* (Санкт-Петербург, 1897)
25. Валландер С В *ДАН СССР* **78** (1) 25 (1951)
26. Шапошников И Г *ЖЭТФ* **21** 1310 (1951)
27. Терлецкий Я П *ЖЭТФ* **22** 506 (1952)
28. Терлецкий Я П *Статистическая физика* (М.: Высшая школа, 1994)
29. Гиббс Дж *Основные принципы статистической механики* (М.: Гостехиздат, 1946)
30. Алексеев Б В, в кн. *7-е Совещание по механике реагирующих сред* Тез. докл. (Красноярск, 1988) с. 3
31. Alexeev B V *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **349** 417 (1994)
32. Alexeev B V *Physica A* **216** 459 (1995)
33. Woods L C, in *17th Intern. Symp. RGD. Book of Abstracts Vol. 2* (Aachen, 1990) p. 442
34. Alexeev B V, in *17th Intern. Symp. RGD. Book of Abstracts Vol. 2* (Aachen, 1990) p. 448
35. Алексеев Б В *ЖВМФ* **27** 730 (1987)
36. Алексеев Б В, в кн. *Механика и электродинамика сплошных сред* (Под ред. Б В Алексеева) (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990) с. 110
37. Alexeev B V, in *Proc. IUTAM Symp. Aerothermochemistry of Spacecraft and Associated Hypersonic Flows* (Marseille, France, 1992) p. 85
38. Алексеев Б В *ТВТ* **31** (4) 626 (1993)
39. Найфе А Х *Методы возмущений* (М.: Мир, 1976)
40. Chapman S, Cowling T G *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* 2nd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952)
41. Елизарова Т Г, Четверушкин Б Н, в кн. *Математическое моделирование* (М.: Наука, 1986) с. 261
42. Elizarova T G, Chetverushkin B N, in *Intern. Symp. on Comp. Fluid Dynamics* (Japan, Nagoya, 1989)
43. Elizarova T G, in *Proc. IUTAM Symp. Aerothermochemistry of Spacecraft and Associated Hypersonic Flows* (Marseille, France, 1992) p. 211

44. Reitz R D *J. Comp. Phys.* **42** (1) 103 (1981)
45. Климонтович Ю Л *Статистическая теория открытых систем* (М.: Янус-К, 1995)
46. Wieser W *An Existence Theorem for Perturbed Boltzmann Equation* (Mathematische Forschung Institute Oberwolfach, 1982)
47. Климонтович Ю Л *ТМФ* **92** (2) 312 (1992)
48. Силин В П *Введение в кинетическую теорию газов* (М.: Наука, 1971)
49. Чепмен С, Каулинг Т *Математическая теория неоднородных газов* (М.: ИЛ, 1960)
50. Heisenberg W *Ann. Phys.* **74** (5) 577 (1924)
51. Гейзенберг В "Жизнь в науке" *УФН* **102** (2) 298 (1970)
52. Reynolds O *Philos. Trans. R. Soc. London* **176** 123 (1894)
53. Favre A I A, in *Studies in Turbulence* (Eds T B Gatski, S Sarkar, C G Speziale) (New York: Springer-Verlag, 1992) p. 324
54. Алексеев Б В, Михайлов В В *ТБТ* **37** (2) 274 (1999)
55. Fedoseyev A I, Alexeev B V, in *Proc. of Advances in Scientific Computing Modelling* (Special Proceedings of IMACS'98, Eds S K Dey, G Ziebarth, Ferrandiz) (Spain: Alicante, 1998) p. 158
56. Fedoseyev A I, Alexeev B V, in *Proc. of the Int. Symp. on Continuum Models and Discrete Systems* (Turkey, 1998) (Eds E Inan, K Z Markov) (River Edge, N.J.: World Scientific Publ. Co., 1998) p. 130
57. Koseff J R, Street R L *J. Fluids Eng.* **106** 21 (1984)
58. Koseff J R, Street R L *Trans. SAME* **106** 390 (1984)
59. Koseff J R, Street R L *J. Fluids Eng.* **106** 285 (1984)
60. Arnal M, Laurel O, Liek Z, Peric M, in *A GAMM Workshop* (Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 36, Eds M Devill, T-H Le, Yu Morchois) (Baunschweig: F. Vieweg, 1992) p. 13
61. Verstappen R W C P, Veldman A E P, in *Proc. of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conf.* (Paris, France, 9–13 Sept. 1996) (Eds J A Dosidori et al.) (New York: Wiley, 1996) p. 1073
62. Cercignani C *Theory and Application of the Boltzmann Equation* (Edinburgh: Scottish Academic Press, 1975)
63. Алексеев Б В, Поддоскин А Б, Михайлов В В, в кн. *Механика и электродинамика сплошных сред* (Под ред. Б В Алексеева) (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990) с. 25
64. Алексеев Б В *ДАН СССР* **313** 1078 (1990)
65. Sirovich L, Thurber J K *J. Acoust. Soc. Am.* **37** 329 (1965)
66. Greenspan M J *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 644 (1956)
67. Meyer E, Sessler G Z *J. Phys.* **149** (15) 15 (1957)
68. Pekeris C L, Alterman Z, Finkelstein L, in *Symp. on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-differential Equations of PACC* (Basel: Birkhauser Verlag, 1960) p. 338
69. Pekeris C L, Alterman Z, Finkelstein L, Frankowski K *Phys. Fluids* **5** 1608 (1962)
70. Longo E, Preziosi L, Bellomo N, in *Aerotherochemistry of Spacecraft and Associated Hypersonic Flows: Proc. IUTAM Symp.* (Marseille, France, 1992) p. 41
71. Bourgat J F, Le Tallec P, Malinger F, Tidriri D, Qiu Y, in *Aerothermochemistry of Spacecraft and Associated Hypersonic Flows: Proc. IUTAM Symp.* (Marseille, France, 1992) p. 60
72. Алексеев Б В, Полев В В *ТБТ* **28** 614 (1990)
73. Schmidt B J *Fluid Mech.* **39** (2) 361 (1969)
74. Grad H *Commun. Pure Appl. Math.* **2** (4) 38 (1949)
75. Holway L H *Phys. Fluids* **7** (6) 141 (1964)

Physical principles of the generalized Boltzmann kinetic theory

B.V. Alekseev

*M.V. Lomonosov Moscow Fine Chemical Technology Institute
prosp. Vernadskogo 86, 117571 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 246-46 42, 247-16 56
E-mail: bvalexeev@unesco.mitht.rssi.ru, root@bvalexeev.msk.ru*

This paper addresses the fundamental principles of generalized Boltzmann kinetics, in which terms accounting for the variation of the distribution function over times of the order of the collision time are introduced into the Boltzmann equation. The paper is primarily aimed at clarifying the qualitative aspects of the theory, whose mathematical formalism has been developed in the author's earlier work. There is a detailed discussion of how the generalized Boltzmann equation obtained by the multiscale method relates to other approaches used in the development of kinetic equations. The application of the generalized Boltzmann equation to certain classical transport problems is discussed.

PACS numbers: 05.20.Dd, **51.10.+y**

Bibliography — 75 references

Received 8 December 1999, revised 21 March 2000