

НОБЕЛЕВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ — 1998

Дробное квантование

Р.Б. Лафлин

(Нобелевская лекция. Стокгольм, 10 декабря 1998 г.)

PACS number: 73.40.Hm

Содержание

1. Введение (292).
 2. Солитоны (293).
 3. Локализация (295).
 4. Дробный квантовый эффект Холла (298).
 5. Дробная статистика (301).
 6. Заключение (302).
- Список литературы (303).

1. Введение

Ранняя весна — одно из самых любимых мною времен учебного года. Именно тогда я устраиваю домашний экзамен моей группе блестящих аспирантов, которые овладели квантовой механикой, но во всем остальном вполне невинны и ничего не подозревают, и прошу их вывести сверхтекучесть из первых принципов. Несомненно, что именно в тот момент, когда я делаю этот низкий трюк, для меня уготовляется специальное место в аду, потому что задание это невыполнимо. Сверхтекучесть, как и дробный квантовый эффект Холла, — это непредсказуемое¹ явление, низкоэнергетический коллективный эффект в системе из большого числа частиц. Такой эффект не может быть выведен строгим образом из микроскопических уравнений движения и полностью исчезает, если систему разобрать на составные части. Конечно, существуют модели сверхтекучих жидкостей, и те студенты, которые изучили их, сделали первый шаг на долгом пути понимания этого явления. Но все эти модели очень приблизительные и, в конце концов, получены совсем не дедуктивным путем, а представляют собой подгонку под эксперимент. Мои аспиранты чувствуют себя обманутыми и уязвленными этим опы-

¹ В оригинале emergent, буквально — неожиданно возникающий. Здесь и далее автор обозначает этим термином качественно новое коллективное явление, возникающее на сложном уровне организации, которое не может быть предсказано только на основании изучения более низких уровней. (Примеч. ред.)

том, потому что их учили мыслить в духе редукционизма и, следовательно, считать несущественным все, что не поддается такому способу познания. Но природа гораздо бессердечнее меня, и те из них, кто останется в физике настолько долго, чтобы всерьез принять вызов эксперимента, в конце концов поймут, что редукционистская концепция чаще всего, а может быть и вообще всегда не верна. Те, кто только начинает изучение, часто отвечают, что сверхтекучесть и квантовый эффект Холла не фундаментальные явления, и поэтому их не стоит принимать всерьез. Когда это случается, я просто открываю Справочник Американского института физики и показываю такому неверующему, что принятые значения e и h определяются именно этими явлениями, на чем спор и заканчивается. Мир полон вещей, которые становится труднее понимать (т.е. уметь предсказывать, что случится в эксперименте), когда мы их подробно анализируем, и это относится даже к самой стандартной модели. Я подозреваю, что все выдающиеся проблемы в физике, включая квантовую гравитацию, по сути связаны именно с такими коллективными явлениями, которые нельзя вывести из свойств, составляющих систему частей.

Помимо прочего, новые коллективные явления могут "создавать" новые частицы. Когда большое число атомов конденсируется в кристалл, то фонон — элементарный квант звука — становится совершенно "законной" частицей в области низких энергий. Он свободно распространяется, не распадается, переносит импульс и энергию, известным образом связанные с длиной волны и частотой, взаимодействует по простым правилам, которые можно проверить экспериментально, служит переносчиком притягивающего взаимодействия, ответственного за сверхпроводимость, и так далее, — и ни одно из этих свойств не зависит существенным образом от исходных уравнений движения. Это все просто общие свойства кристаллов. Если же кристалл разобрать на составные части, то никакого фонона не останется, потому что для изолированного атома понятие звука лишено смысла. Несколько более сложный, хотя и более подходящий пример — квазичастица Ландау в металле. Это возбужденное квантовое состояние, которое ведет себя как дополнительный электрон, добавленный к холодному фермиевскому морю, а в действительности

представляет собой некое сложное движение всех электронов. Невозможно вывести существование квазичастиц из первых принципов. Они существуют как общее свойство металлического состояния и исчезают вместе с ним. Это происходит не только в твердых телах. Даже простой электрон, самая элементарная частица, какую можно представить, двигаясь, несет с собой поляризацию дираковского моря и, таким образом, сам есть сложное движение всех электронов этого моря. В квантовой физике нет логического способа отличить реальную частицу от возбужденного состояния системы, которое ведет себя как частица. Поэтому мы используем для них одно и то же слово.

Всякий раз, когда мы сталкиваемся с непредсказуемым явлением, — т.е. почти всегда, — нам требуется разумное определение тождества, чтобы сравнивать два состояния материи. Большинство из нас предпочитает в качестве такового принцип обратимого адиабатического отображения. При этом представляют себе медленное изменение исходных уравнений движения, проверяя на каждом этапе, чтобы при эволюции основного состояния и низколежащих возбуждений сохранялось взаимно однозначное соответствие. Если число частиц в системе невелико, то в такой проверке на самом деле нет необходимости — здесь взаимная однозначность отображения гарантируется адиабатическим принципом. Но если система содержит термодинамически большое число частиц, то может так случиться, что небольшое изменение уравнений движения приведет к кардинальной перестройке основного состояния и спектра возбуждений, и однозначное соответствие нарушится. Это квантовый фазовый переход. Мы говорим, что два состояния находятся в одной фазе, если они могут быть медленно преобразованы друг в друга таким образом, чтобы по пути не встретился квантовый фазовый переход. В противном случае эти состояния принадлежат разным фазам. Согласно этому определению металлы, диэлектрики, сверхпроводники — это все разные фазы материи, а два металла со слегка различающимися константами электрон-электронного взаимодействия — одна и та же фаза. Такое определение сходства — одна из самых мощных идей в физике, поскольку оно освобождает нас от необходимости вычислять свойства сложных систем из первых принципов, чтобы понять их. Вместо этого мы можем просто найти такой прототип нашей системы, для которого легко получить решение, а затем адиабатически преобразовать ответ.

2. Солитоны

Идея о том, что возможны необычные коллективные явления, в которых будут возникать частицы, несущие часть элементарного заряда, принадлежит не мне. Уже в конце 1970-х годов существовала серьезная теоретическая литература по этому вопросу, восходящая к основополагающей работе Джакива и Ребби [1], но в более общем плане связанная с быстрым прогрессом в теории поля, обусловленным решением проблемы сильных взаимодействий. Топологический солитон или "кинк" Джакива и Ребби концептуально подобен монополю Т'Хуфта – Полякова [2, 3] и скирмиону [4], которые были предложены как упрощенные модели для реальных элементарных частиц. Физики-твердотельщики впервые познакомились с этими идеями, благодаря работе Су,

Шриффера и Хеегера [5], в которой солитоны предлагались на роль носителей заряда в проводящем полимере полиацетилене. Я впервые услышал об этом от моего коллеги Джина Мила (Gene Mele), который работал в то время над теорией полиацетилена в сотрудничестве с Майклом Райсом в Исследовательском центре корпорации "Ксерокс" в Уэбстере [6]. Джин был одержим солитонами и так далеко продвинулся в создании реалистических моделей, что мог убедить любого разумного человека в том, что они существуют, — ему быстро удалось убедить и меня. Конечно, это высказывание теоретика. Те, кто не были специалистами в квантовой механике, скорее находили саму идею возмутительной, в особенности из-за того, что экспериментальные свидетельства в пользу существования солитонов были лишь косвенными. Так случилось, что энтузиазм в отношении солитонов среди тех, кто выделяет деньги, пошел на убыль, специалисты по теории частиц переключились на струны, и солитоны были, по сути, забыты. Сейчас трудно найти кого-нибудь моложе меня, кто знает что-нибудь о них. Я всегда считал историю солитонов ярким примером влияния количества денег, выделяемых правительством, на научную мысль, поскольку среди хорошо информированных физиков не было сомнения, что идея правильная и потенциально очень важная.

Основная идея солитона иллюстрируется на рис. 1. Полиацетилен — это загагообразная плоская цепочка из блоков СН, такая, что каждая вторая связь слегка сжата. Поскольку существует два эквивалентных способа сжать связи, могут существовать доменные стенки между областями, в которых сжаты соответственно четные и нечетные связи. Это и есть солитоны. При построении реалистической модели обнаруживается, что эти доменные стенки должны быть довольно подвижны, с массой порядка десяти электронных масс, причем они либо несут полный электрический заряд e и не несут спина, либо имеют спин $1/2$ и нулевой заряд. Это разделение квантовых чисел заряда и спина электрона является важным и неожиданным эффектом, так как возбуждение, несущее заряд, но не имеющее спина (или наоборот), не может быть в принципе адиабатически преобразовано в свободный электрон. Возбуждения же

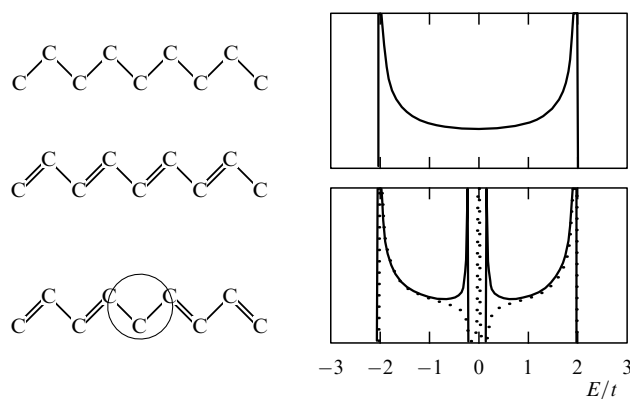


Рис. 1. Физика полиацетилена. Симметричная конфигурация атомов, показанная сверху слева, абсолютно нестабильна по отношению к деформации, которая сжимает каждую вторую связь. Из-за этого в одноэлектронной плотности состояний, показанной справа, появляется щель. Формирование доменной стенки приводит к образованию состояния в центре щели (пунктирная линия на рисунке справа) и к электрическому заряду $+e$, если это состояние не занято.

в обычной диэлектрике с необходимостью преобразуются в свободные электроны и поэтому всегда имеют заряд e и спин $1/2$. Итак, свойства, которые приписывали солитонам, были совершенно беспрецедентными и необычными.

Солитоны в полиацетилене появляются из-за того, что там нарушена дискретная симметрия. Если мы свернем молекулу с четным числом сегментов в кольцо, то обнаружим, что вместо одного квантовомеханического основного состояния, она имеет два эквивалентных, которые переходят друг в друга при повороте одного из сегментов по часовой стрелке. Это симметрия исходных уравнений движения. Обычный диэлектрик имел бы одно основное состояние и при таком преобразовании переходил бы сам в себя. В термодинамическом пределе два основных состояния становятся независимыми. Когда кольцо маленькое, локальные возмущения, например, сила, приложенная только к одному атому, могут перемешивать эти два основных состояния произвольным образом, приводя, в частности, к туннелированию между ними. Но когда размер кольца растет, туннелирование экспоненциально подавляется, пока не станет совсем несущественным. Эта независимость и двукратное вырождение делают состояние с нарушенной симметрией принципиально другим, чем обычное диэлектрическое состояние. В термодинамическом пределе одно не может быть преобразовано в другое без того, чтобы по пути не произошел квантовый фазовый переход.

Солитон имеет необычные квантовые числа из-за появления состояния в центре щели в электронном спектре. Задача с N -электронным модельным гамильтонианом [5]

$$\mathcal{H} = \sum_j^N \left[t \left(1 - \frac{x_{j+1} - x_j}{\ell} \right) \sum_{\sigma} (c_{j,\sigma}^{\dagger} c_{j+1,\sigma} + c_{j+1,\sigma}^{\dagger} c_{j,\sigma}) - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} k(x_{j+1} - x_j)^2 \right] \quad (1)$$

может быть решена в пределе больших M , если взять фиксированные смещения $x_{j+1} - x_j = \pm \delta \ell$, а затем минимизировать среднюю энергию на узле

$$\frac{\langle \mathcal{H} \rangle}{N} = \frac{1}{2} k(\ell \delta)^2 - \frac{t}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \delta^2) + (1 - \delta^2) \cos \theta} d\theta. \quad (2)$$

Для любого значения k получается ненулевое δ , так как цепочка абсолютно нестабильна относительно нарушения симметрии из-за эффекта Пайерлса. Электронный спектр с щелью, показанный на рис. 1, соответствует плотности состояний при $\delta = 0,1$. Если уравнения решить теперь для случая солитона, то окажется, что в центре щели появляется дополнительное состояние. Солитон имеет заряд $+e$, когда это состояние не занято. Получающиеся зарядовые и спиновые состояния просто соответствуют разным способам заполнения электронами этого состояния в щели.

Тот факт, что солитон имеет заряд $+e$, когда состояние не занято, был впервые обнаружен в численном расчете [7], а затем объяснен Шриффером с использованием хорошо известного сегодня адиабатического аргумента [8]. Эта идея необходима для теории дробного квантового эффекта Холла, и поэтому я кратко расскажу о ней. Представим себе такое возмущение гамильтониана, которое вдали от начала координат приводит к

параметру порядка с фазой ϕ . Затем представим, что фаза на левом конце молекулы фиксирована и равна нулю, а на правом конце адиабатически увеличивается от нуля до π . При этом основное состояние на правом конце медленно сдвигается вправо, в процессе чего электрический заряд выталкивается на бесконечность. Вытолкнутый заряд при повороте фазы на π должен равняться одному заряду электрона, т.е. половине заряда в элементарной ячейке, поскольку двойной такой поворот привел бы к сдвигу ячейки как целого. Но результирующего переноса спина при этом не происходит. Система все время остается в синглетном состоянии с щелью. Поскольку такой поворот фазы как раз и создает солитон, мы заключаем, что он имеет нулевой спин и заряд равный $+e$. Очень важно, что это доказательство совершенно не зависит от конкретной модели и опирается только на дискретную нарушенную симметрию в объеме и на возможность преобразования гамильтониана к простому виду на концах образца без схлопывания щели в спектре.

Был предложен интересный вариант идеи солитона, который можно считать прообразом дробного квантового эффекта Холла. Это гипотетическая ситуация, когда полиацетилен так сильно р-допирован, что число электронов в π -зоне равно не N , а $2N/3$ [8]. Тогда в результате нестабильности сжимается каждая третья связь, и имеется два солитона: в одном фаза поворачивается на $2\pi/3$, а в другом — на то же значение в обратном направлении. Когда состояния в центре запрещенной зоны не заняты, заряды этих солитонов равны $+2e/3$ и $+4e/3$. Таким образом, разделение спиновых и зарядовых степеней свободы электрона в исходном полиацетилене — это частный случай более общего явления, при котором квантовое число заряда становится дробным. Тенденция пайерлсовской неустойчивости к соизмеримости на самом деле настолько сильна, что появление дробных зарядов ожидается и при других рациональных степенях заполнения, например при $3N/4$ и $3N/5$. Действительно, единственная причина, по которой это не будет происходить при всех рациональных заполнениях, — возможная малость щели для большинства из этих случаев, так что щель может стать меньше кинетической энергии ионов (которой мы до сих пор пренебрегали), температуры или беспорядка, обусловленного наличием примесей. Все эти эффекты работают в пользу дробей с малыми знаменателями.

То, что эти красивые и разумные идеи Шриффера и Су не стали широко признанными, обусловлено, в конечном счете, одной ключевой проблемой: дальний порядок, связанный с сжатием связей, так и не был обнаружен в полиацетилене. Солитоны прекрасно могут существовать, если нарушение дискретной симметрии не произошло глобально, когда, например, она нарушается на каждом шагу несовершенством образца. И многие эксперименты проводились в сильно дефектных и неупорядоченных образцах полиацетилена именно по этим соображениям. Но существование солитонов неизбежно только в том случае, когда образец все же упорядочивается. Это красивый пример той особой роли, которую играют процессы упорядочения в физике твердого тела: их наличие не всегда необходимо, но часто достаточно, чтобы доказать справедливость чего-либо. В этом контексте проблема с полимерами заключается в том, что большинство их интересных свойств связано с некри-

сталличностью, и они специально создавались так, чтобы быть спутанными и неупорядоченными, т.е. не такими, чтобы доказать существование солитонов. В этом смысле надежда продемонстрировать дробное квантование в реальном полиацетилене была обречена с самого начала.

3. Локализация

Двумерный электронный газ кремниевого полевого транзистора или гетероструктуры GaAs, в котором разыгрывается целочисленный и дробный квантовый эффект Холла, — далеко не идеальная сцена. Это важно, так как сразу приходится отбросить возможность того, что великолепный эффект Клауса фон Клитцинга — необычайно точное квантование холловской проводимости на целые кратные e^2/h [9] — может определяться микроскопическим строением системы. Полевой транзистор, например, изготавливается путем окисления поверхности кремния, и эта операция всегда приводит к микроскопическим напряжениям и разупорядочению связей на поверхности, так как параметры решеток кремния и SiO₂ не совпадают. Это настолько мучительная проблема, что обычно окисление проводят при небольшом парциальном давлении воды, чтобы водород мог садиться на случайные свободные связи кремния. Гетероструктуры GaAs в этом отношении лучше, так как номинально поверхность раздела между GaAs и сплавом Al_xGa_{1-x}As является эпитаксиальной, но атомы алюминия все же замещают Ga случайным образом в решетке GaAs и, таким образом, служат рассеивающими центрами. В обеих системах существует проблема легирующих ионов, которые всегда являются сильными рассеивателями, так как потеряли часть электронов и создают кулоновское поле. Техника модулированного легирования, придуманная одним из нынешних лауреатов, Хорстом Штёрмером, очень сильно подавляет этот эффект, но все же не может устранить его полностью. И конечно, есть химические примеси, присутствующие на поверхности раздела в неизвестных количествах. Это правда, что современные гетероструктуры имеют гигантские подвижности, о которых раньше и мечтать было нельзя, но и они несовершенны.

Но, как оказалось, они и не должны быть такими. Неоднородности необходимы, чтобы можно было наблюдать квантовый эффект Холла в обычной экспериментальной постановке. Рассмотрим показанную на рис. 2 ситуацию, когда к трансляционно-инвариантной полоске с плотностью заряда ρ приложено перпендикулярное магнитное поле B . Из-за трансляционной инвариантности системы можно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью v , в которой мы будем иметь



Рис. 2. Когда двумерный электронный газ в отсутствие беспорядка помещается в магнитное поле, можно перейти в движущуюся систему отсчета, в которой появится ток и перпендикулярное к нему электрическое поле. Их отношение дается равенством (3), которое противоречит всем экспериментам по квантовому эффекту Холла. Это показывает, что беспорядок играет существенную роль при формировании плато.

ток $j = v\rho$, электрическое поле $E = vB/c$ и холловскую проводимость

$$\sigma_{xy} = \frac{J}{E} = \frac{\rho c}{B}. \quad (3)$$

В реальном полевом транзисторе или в гетероструктуре ρ фиксируется легированием и напряжением затвора, и не квантуется, а даже может быть переменной величиной, в зависимости от которой рисуют холловские плато. Поэтому полученный результат противоречит всем наблюдениям квантового эффекта Холла. Неоднородности образца необходимы для формирования плато, поскольку только они (кроме концов образца) могут разрушить трансляционную инвариантность.

Самая очевидная вещь, которую может произвести беспорядок — это вызвать локализацию Андерсона [10]. Когда идеализированный металл со невзаимодействующими электронами помещается в достаточно сильный случайный потенциал, локализация вызывает переход в диэлектрическое состояние. Это означает, что все собственные значения одноэлектронного гамильтониана ниже некоторой энергии имеют конечную протяженность в пространстве, так что заполняющие их электроны ничего не вносят в проводимость на нулевой частоте. В реальных металлах, где электроны взаимодействуют, существует подобный же переход металл — диэлектрик и считается, что эти два состояния вещества можно адиабатически перевести в их невзаимодействующие аналоги, хотя сам переход, возможно, происходит по-другому. Уже во времена открытия квантового эффекта Холла существовала обширная литература по локализации в двумерных системах, особенно в полупроводниках, и было известно, что в отсутствие магнитного поля эффекты локализации настолько сильны, что при нулевой температуре может существовать только диэлектрическое состояние [11–14]. Поэтому было много причин подозревать, что квантовый эффект Холла, будучи неожиданным явлением, как и андерсоновский диэлектрик, может быть полностью понят исключительно в терминах одноэлектронной квантовой механики и локализации.

Существуют два важных точных результата, которые особенно важны для развития этой идеи. Первый — это решение тривиальной модели

$$\mathcal{H} = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \right]^2 + E v_j \right\}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = B y \hat{x}. \quad (5)$$

Если измерять длину в единицах

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \quad \left(\omega_c = \frac{eB}{mc} \right), \quad (6)$$

то решением будет слэтеровский детерминант из орбиталей

$$\psi_{k,n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} L_x} \exp(ikx) \exp\left[\frac{(y - y_0 - k)^2}{2}\right] \times \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \exp[-(y + y_0 - k)^2] \quad (7)$$

($y_0 = eE\ell/\hbar\omega_c$), энергии которых равны

$$E_{k,n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \hbar ck \left(\frac{E}{B}\right) - \frac{mc^2}{2} \left(\frac{E}{B}\right)^2. \quad (8)$$

Если электрическое поле E мало, так что имеется большая щель между уровнями Ландау n и $n+1$, а химический потенциал лежит в щели, то число электронов в образце равно $N = nL_xL_y/(2\pi\ell^2)$, плотность заряда равна $\rho = ne/(2\pi\ell^2)$ и уравнение (3) дает $\sigma_{xy} = \rho c/B = ne^2/h$. Для проверки этого результата заметим, что

$$\frac{1}{m} \iint \psi_{k,n}^*(x, y) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right) \psi_{k,n}(x, y) dx dy = c \frac{E}{B}. \quad (9)$$

Таким образом ток, переносимый каждой орбиталью, равен заряду e , умноженному на классическую дрейфовую скорость cE/B . Суммируя по всем орбиталям и деля на площадь образца, находим, что

$$J = \frac{ne^2}{h} E. \quad (10)$$

Второй важный результат — это точное решение задачи с гамильтонианом

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - V_0 \ell^2 \sum_j \delta^2(\mathbf{r}_j), \quad (11)$$

первоначально полученное Пренджем [15]. Оказывается, что δ -образный примесный потенциал образует одно связанное локализованное состояние, которое отщепляется вниз от каждого уровня Ландау, и это состояние не переносит электрический ток, что соответствует интуитивным ожиданиям. Однако остальные делокализованные состояния теперь переносят больший ток, и суммарная добавка как раз такая, что в точности компенсирует потерю одного состояния! Поэтому примесь не оказывает влияния на холловскую проводимость. Я всегда находил этот результат удивительным. Как будто состояния, оставшиеся делокализованными, понимают, что один из их товарищей убит и работают старательнее, чтобы восполнить его потерю.

Когда ответ уже известен, можно доказать, что эффект Пренджа имеет место для широкого класса примесных потенциалов. Для этой цели нам придется привлечь некоторые более общие принципы, поскольку едва ли удастся диагонализировать все возможные гамильтонианы с примесями и почленно вычислить ток, переносимый термодинамически большим количеством орбиталей. Вместо этого заметим, что оператор тока формально является производной от гамильтониана по векторному потенциалу [16]. То есть, если мы положим

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} + A_0 \hat{x}, \quad (12)$$

где A_0 — константа, то

$$\frac{e}{m} \sum_j \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x(\mathbf{r}_j) \right] = -c \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_0}. \quad (13)$$

В действительности это верно и для взаимодействующих частиц, что позднее нам пригодится. Обычно от соотношения (13) мало пользы, поскольку добавление постоянного векторного потенциала — это просто калибровоч-

ное преобразование, не имеющее физического смысла. Но если образец свернут в петлю, как показано на рис. 3, то A_0 приобретает смысл магнитного потока $\phi = A_0 L_x$ сквозь петлю. Представим теперь, что мы фиксируем разные потоки и решаем задачу

$$\mathcal{H}_\phi |\Psi_\phi\rangle = E_\phi |\Psi_\phi\rangle \quad (14)$$

для каждого потока, так что многочастичное основное состояние $|\Psi_\phi\rangle$ и соответствующее собственное значение E_ϕ будут функциями от ϕ . Тогда по теореме Геллмана — Фейнмана имеем

$$\left\langle \Psi_\phi \left| \frac{\partial \mathcal{H}_\phi}{\partial \phi} \right| \Psi_\phi \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \Psi_\phi | \mathcal{H}_\phi | \Psi_\phi \rangle = \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}. \quad (15)$$

То есть ток при заданном значении ϕ просто равен адиабатической производной от полной энергии по ϕ . На самом деле это не удивительно, поскольку медленное изменение потока создает электродвижущую силу вдоль петли, которая совершает работу, если в системе течет ток. Тогда, если нет диссипации, собственное значение энергии должно возрастать. Это просто фарадеевский закон индукции. Если теперь петля большая, так что осцилляции Ааронова — Бома подавлены и при включении потока ток меняется незначительно, адиабатическую производную можно заменить отношением приращений

$$I = c \frac{\Delta E}{\Delta \phi}, \quad (16)$$

где в знаменателе стоит квант потока hc/e . Преимущество такой записи в том, что теперь $\mathcal{H}_{\Delta\phi}$ — это тот же самый гамильтониан \mathcal{H}_0 с точностью до калибровочного преобразования. Это означает, что энергия увеличилась только из-за изменения заселенностей первоначальных состояний. На рисунке 3 показано, как это происходит в трансляционно-инвариантном случае. Орбитали при отличном от нуля ϕ имеют вид

$$\psi_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} L_x} \exp(ikx) \exp\left[\frac{(y + y_0 - k - \alpha)^2}{2}\right] \times \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \exp[-(y + y_0 - k - \alpha)^2], \quad (17)$$

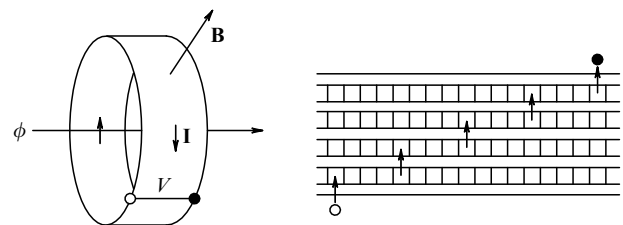


Рис. 3. Иллюстрация мысленного эксперимента, связывающего холловскую проводимость с зарядом электрона. Когда магнитный поток сквозь петлю адиабатически увеличивается до $\Delta\phi = hc/e$, один электрон из каждого уровня Ландау переносится от одного края к другому. В отсутствие беспорядка этот перенос сопровождается сдвигом одноэлектронных волновых функций, при котором каждая функция переходит в соседнюю. Когда есть хотя бы малый беспорядок, число перенесенных электронов должно быть в точности тем же самым, хотя механизм переноса изменится из-за сильного возмущения волновых функций, связанного с вырождением уровня Ландау.

где $\alpha = e\ell\phi/(\hbar cL_x)$. Когда ϕ увеличивается от нуля до $\Delta\phi$, они просто сдвигаются, как в сдвиговом регистре, и в результате одно состояние из каждого уровня Ландау переносится с левого края образца на правый. Это означает, что от одного края образца к другому переходит столько электронов, сколько заполненных уровней Ландау имеется в системе. Если разность потенциалов между двумя краями равна V , то ток равен

$$I = c \frac{neV}{\Delta\phi} = n \frac{e^2}{h} V. \quad (18)$$

Теперь представим, что внутри полосы включается слабый примесный потенциал. Если этот потенциал достаточно мал по сравнению с щелью между уровнями Ландау, то результат нашего мысленного эксперимента не должен измениться. Действительно, адиабатическое изменение ϕ вталкивает слева ровно одно состояние на каждом уровне Ландау в неупорядоченную область и выталкивает одно состояние справа. Сохранение состояний требует, чтобы они как-то прошли сквозь эту область. Это рассуждение применимо не только к случайным потенциалам, но и к регулярным, включая δ -функцию из задачи Пренджа. Мы показали, таким образом, что любой одноэлектронный гамильтониан, спектр которого может быть адиабатически преобразован в идеальные уровни Ландау, так, чтобы состояния не пересекали уровень Ферми, будет приводить к точному квантованию холловской проводимости.

Эти аргументы можно существенно усилить, если потенциал является случайным. На рисунке 4 показана одноэлектронная плотность состояний для гамильтониана

$$\mathcal{H} = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \right]^2 + V_{\text{random}}(\mathbf{r}_j) \right\} \quad (19)$$

при различных значениях V_{random} . Точная форма плотности состояний зависит от модели, но основные черты вполне универсальны. Когда потенциал V_{random} мал, он лишь снимает вырождение уровней Ландау. Состояния на краях получающегося распределения локализованы. Легче всего это можно увидеть в пределе, когда потенциал V_{random} гладкий и изменяется медленно, так что одноэлектронные состояния хорошо аппроксимируются

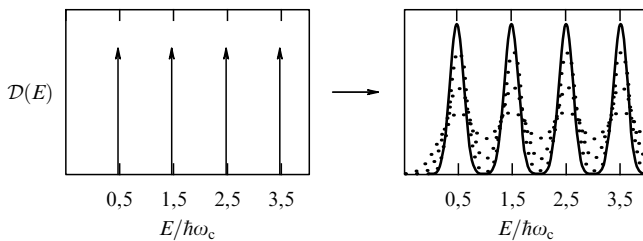


Рис. 4. Влияние беспорядка на одноэлектронную плотность состояний. Уровни Ландау с энергиями $(n + 1/2)\hbar\omega_c$, которые сильно вырождены, вначале слегка уширяются без закрытия щели, и правило сумм квантового эффекта Холла работает и без локализации. Состояния на краях локализованы, и уровень Ферми может попадать туда без всяких проблем. Добавление беспорядка приводит к перекрытию уширенных уровней. Но квантование все равно остается точным, потому что все состояния на уровне Ферми локализованы. Это позволяет наблюдать квантовый эффект Холла даже тогда, когда в спектре нет истинных щелей.

дорожками вдоль эквипотенциальных линий. Здесь обычно используют аналогию с горным рельефом, заполненным водой до определенной высоты [17]. Если уровень воды низок, то мы получаем маленькие изолированные озера, которые становятся все меньше, по мере того, как уровень воды падает, так как очень глубокие долины встречаются редко. Если же уровень высок, то получаются маленькие изолированные острова тем меньшего размера, чем выше уровень воды, потому что высокие горы также встречаются редко. Где-то посередине располагается точка протекания, определяемая на больших масштабах длинной и изрезанной береговой линией, которая уже не разделяет острова и озера. Важность локализации на краях заключается в том, что локализованные состояния не участвуют в мысленном эксперименте с увеличением потока. Состояние, связанное у одного края петли, не может "знать", что адиабатически включаемый векторный потенциал связан с потоком ϕ сквозь петлю. Оно "считает", что мы делаем калибровочное преобразование, и просто меняет свою фазу. Оно не движется в ответ на увеличение ϕ , а его энергия не изменяется. Это означает, что такое состояние не дает вклада в наше правило сумм, а поэтому для нашего мысленного эксперимента не важно, занято оно или нет. Таким образом, теорема о точном квантовании справедлива не только тогда, когда вообще нет состояний на уровне Ферми, но и в случае, когда все состояния на уровне Ферми локализованы.

Возможность обобщить теорему о точном квантовании на случай, когда истинная щель в плотности состояний отсутствует, имеет решающее значение для объяснения реальных экспериментов по квантовому эффекту Холла. Полевой транзистор по существу представляет собой конденсатор. Он накапливает заряд в ответ на приложенное к затвору напряжение, согласно формуле $Q = CV_g$, где C определяется толщиной оксидного слоя, площадью образца и другими параметрами. Соответственно, изменение напряжения на затворе в действительности означает изменение Q , а не химического потенциала. В эксперименте химический потенциал подстраивается таким образом, чтобы заряд равнялся Q . И если бы не локализация, химический потенциал всегда был бы привязан к некоторому уровню Ландау, а тогда этот уровень был бы занят лишь частично и условия, необходимые для наблюдения квантового эффекта Холла, не были бы выполнены. Но если уровень Ферми лежит в области локализованных состояний, то химический потенциал может свободно перемещаться в этой области: при этом локализованные состояния будут заполняться или освобождаться, но это никак не будет влиять на холловскую проводимость. Другая сторона эксперимента, которая вполне объясняется локализацией — это отсутствие параллельной проводимости. В пределе невзаимодействующих электронов параллельная проводимость σ_{xx} обусловлена дипольными переходами из состояний непосредственно под уровнем Ферми, в те, которые лежат прямо над ним. Если эти состояния локализованы, то σ_{xx} должна равняться нулю. Локализация приводит к образованию диэлектрика. Однако сопротивление и проводимость являются тензорами, обратными друг к другу, так что если $\sigma_{xy} = ne^2/h$, то

$$\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{h}{ne^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Заметим, что эксперименты, в которых вместо V_g изменяют магнитное поле, по сути ничем не отличаются, так как в них просто изменяется масштаб длины, по отношению к которому измеряется плотность заряда. Это опять требует, чтобы химический потенциал подстраивался так, чтобы обеспечить постоянство Q .

Эксперимент по изменению потока также показывает, что слабый беспорядок не может полностью локализовать все состояния на уровне Ландау. Там должны существовать протяженные состояния — в противном случае весь уровень Ландау был бы выключен и не мог бы переносить ток. Это очень нетривиальный результат, поскольку есть весьма убедительные аргументы в пользу полной локализации в двумерной системе без магнитного поля. Предметом некоторой дискуссии может быть только вопрос о том, где конкретно располагаются протяженные состояния в пределе слабого беспорядка. Большая часть экспериментов согласуется с идеей Левина, Либби и Пруискена [18] о существовании скейлинговой теории локализации для этой задачи (хотя она и отличается от аналогичной теории без магнитного поля), а также с тем, что протяженные состояния существуют лишь при одном значении энергии вблизи центра уширенного уровня Ландау. Предел сильного беспорядка споров не вызывает — ясно, что в этом случае должна иметь место полная локализация. Поэтому одним из важных следствий нашего рассуждения с включением потока является утверждение, что протяженные состояния не могут просто исчезнуть, но должны "всплывать" из-под уровня Ферми при увеличении примесного потенциала, поскольку наше рассуждение не работает лишь тогда, когда такие состояния появляются на уровне Ферми. Эффект всплывания, предсказанный одновременно Давидом Хмельницким и мною [19, 20], в конце концов наблюдался экспериментально [21].

Более глубокая идея, лежащая в основании этих соображений состоит в том, что квантовый эффект Холла, — это новое и неожиданное явление, характеризующееся способностью материи переносить целое число электронов через образец в эксперименте с увеличением потока. Модели с невзаимодействующими электронами, которые мы обсуждали, — не более чем прототипы. Когда они поняты, мы можем сказать, что реальные эксперименты — это их адиабатические продолжения. Это не слишком радикальная идея, так как, за исключением того, что в ней есть магнитное поле, система идеальных уровней Ландау не очень сильно отличается от зонного диэлектрика, а про это состояние известно, что оно может быть продолжено до своего невзаимодействующего прототипа, или, что более точно, именно этим и определяется. Стабильность низколежащих возбуждений в обоих случаях обеспечивается наличием щели, вследствие чего не существует других состояний, в которые эти возбуждения могли бы распадаться. Мы не доказали, что другие состояния невозможны — и это хорошо, потому что открытие дробного квантового эффекта Холла как раз и показало обратное, — но такое состояние имеет смысл. В частности потому, что в физике твердого тела существует множество случаев, когда возможно адиабатически преобразовать взаимодействующую систему в невзаимодействующую. Если рассматриваемое состояние дей-

ствительно отображается в свой невзаимодействующий прототип, то эксперимент с включением потока или приводит к диссипации энергии, или переносит целое число электронов через образец. Когда происходит последнее, холловская проводимость точно квантуется. Причина этого в том, что она по сути определяет заряд той частицы, которая переносится, в данном случае заряд электрона.

4. Дробный квантовый эффект Холла

Состояние дробного эффекта *не может быть* адиабатически преобразовано в какое-либо состояние невзаимодействующих электронов. Я всегда удивлялся тому, насколько это утверждение расстраивает людей, но при правильном определении состояния материи и полном понимании целочисленного квантового эффекта Холла к другому заключению прийти невозможно. Иначе холловская проводимость с необходимостью квантовалась бы на целые числа, так как она сохраняется при адиабатическом преобразовании и равна целому числу в невзаимодействующей системе из-за калибровочной инвариантности и дискретности заряда электрона. Поэтому состояние, отвечающее дробному эффекту, представляет собой что-то беспрецедентное — это новое состояние материи.

Внешне все выглядит, однако, почти так же, как в целочисленном эффекте, почти во всех деталях [22]. Существуют плато. Холловская проводимость на плато — это просто число, умноженное на e^2/h . Параллельные сопротивление и проводимость на плато равны нулю. Отклонения от точного квантования из-за конечности температуры либо имеют активационную природу, либо подчиняются моттовскому закону для прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка, в зависимости от температуры. Единственное качественное различие между двумя эффектами — это сама холловская проводимость.

С учетом этих фактов самое простое и очевидное объяснение, а в действительности и единственно возможное, состоит в том, что это новое состояние может быть адиабатически преобразовано во что-то подобное заполненному уровню Ландау, но только с возбуждениями несущими дробный заряд. Адиабатическое увеличение потока на квант, которое снова переводит гамильтониан в себя, должно переносить целое число этих объектов через образец. Локализация этих объектов должна объяснять появление плато. Все соображения о точности квантования должны работать, как и прежде. Как это обычно бывает с непредсказуемыми явлениями, именно эксперименты, а не теории, скажут нам, так это или нет. Теории могут помочь нам лучше понять эксперимент, в особенности если обеспечат хороший модельный вакуум, но главное основание для этих выводов состоит в том, что эксперименты не оставляют нам альтернативы.

Основное состояние, предложенное мною как прототип для эффекта с $1/3$, открытого Цуи, Штёрмером и Госсардом, выглядит следующим образом [23]:

$$\Psi_m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^m \exp \left[-\frac{1}{4\ell^2} \sum_j^N |z_j|^2 \right], \quad (21)$$

где m — нечетное целое число, в данном случае 3, а $z_j = z_j + iy_j$ — координата j -й частицы в комплексном

представлении. Хорст любит шутить, что весь его эффект укладывается в одно маленькое уравнение, и мне всегда очень лестно, когда он шутит так на публике, но правда состоит в том, что это уравнение только потому такое простое, что Хорсту и Дэну посчастливилось сначала найти состояние с $1/3$. Большинство других вакуумов с 30 нечетными знаменателями, которые открыты теперь, не имеют таких простых прототипов, и я был бы недобросовестен, если бы не указал, что сейчас существуют и разумные альтернативы [24]. Все эти основные состояния могут быть, однако, адиабатически преобразованы друг в друга, и в этом смысле одинаковы. Волновая функция (21) была изначально предложена мною как вариационное основное состояние для модельного гамильтониана

$$\mathcal{H} = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \right]^2 + V_{\text{ion}}(\mathbf{r}_j) \right\} + \sum_{j < k} v(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \quad (22)$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}(x\hat{y} - y\hat{x}), \quad V_{\text{ion}}(\mathbf{r}) = -\rho \int_{\text{sample}} v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (23)$$

Ионный потенциал присутствует только из-за того, что мы хотим рассмотреть, в частности, кулоновское взаимодействие $v(r) = e^2/r$ и для стабильности системы должны добавить нейтрализующий фоновый заряд с плотностью ρ . Дункан Холдейн показал потом, что волновая функция (21) является точным основным состоянием для некоторого класса гамильтонианов с нелокальными потенциалами [25].

Главная черта этой волновой функции в том, что в термодинамическом пределе она описывает систему электронов с плотностью, в точности равной $1/(2\pi m\ell^2)$. В этом можно убедиться, заметив, что квадрат этой волновой функции совпадает с функцией распределения классической однокомпонентной плазмы. Полагая, что

$$|\Psi(z_1, \dots, z_N)|^2 = \exp[-\beta\Phi(z_1, \dots, z_N)], \quad (24)$$

и выбирая $\beta = 1/m$, чтобы аналогия стала более наглядной, получаем

$$\Phi(z_1, \dots, z_N) = -2m^2 \sum_{j < k} \ln |z_j - z_k| + \frac{m}{2\ell^2} \sum_j |z_j|^2. \quad (25)$$

Это потенциальная энергия частиц с "зарядом" m , которые отталкиваются логарифмически (это естественный двумерный кулоновский потенциал) и притягиваются к началу координат однородной плотностью "заряда" $1/(2\pi\ell^2)$. Для локальной электронейтральности, необходимой в плазме, частицы должны иметь плотность $\rho = 1/(2\pi m\ell^2)$.

Также очень важно, что при малых m это состояние не кристаллическое. Для случая $m = 1$, когда наша волновая функция описывает полностью заполненный уровень Ландау, это очевидно. Для других значений m следует обратиться к обширной литературе по классической однокомпонентной плазме [27]. Численные исследования показали, что кристалл (точнее, степенные корреляции, так как истинный кристалл не может существовать в

двух измерениях при ненулевой температуре) образуется при константе связи $\Gamma = 2m$ порядка 140. Поэтому при $m = 3$, и вообще при малых нечетных m , мы находимся далеко в жидкой фазе. Частично именно на основе этого факта я предсказал существование холловского состояния при $1/5$, которое потом и было обнаружено экспериментально [28].

Другая важная черта этого состояния — щель в спектре возбуждений, или, говоря иначе, выделенное значение плотности. На эту щель указывают эксперименты и вид Ψ_m , которая дает только плотности, равные $1/(2\pi m\ell^2)$, но строго существование щели было доказано только Холдейном и Резайи, когда они численно диагонализировали гамильтониан (22) на сфере [29]. В точности то же значение для этой щели, около $0,08e^2/\ell$ для кулоновского случая при $m = 3$, было получено Гирвином, Макдональдом и Плацманом [30] с помощью гидродинамических соображений. Последний вывод особенно важен, поскольку он отождествляет низлежащие возбуждения со звуком. В большинстве квантовых жидкостей оператор плотности ρ_q , специальным образом спроектированный, с большой вероятностью рождает фонон. Если предположить, что это единственное возбуждение, то можно использовать правило сумм, чтобы выразить энергию возбуждения E_q только через характеристики основного состояния [31]. Тогда, полагая

$$\hat{\rho}_q = P \left[\sum_j^N \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_j) \right] P, \quad (26)$$

где P — проектор на нижний уровень Ландау, и обозначая через $|x\rangle$ произвольное возбужденное состояние с энергией E_x , имеем

$$E_q = \frac{\sum_x E_x |\langle x | \hat{\rho}_q | \Psi_m \rangle|^2}{\sum_x |\langle x | \hat{\rho}_q | \Psi_m \rangle|^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi_m | [\hat{\rho}_{-q}, [\mathcal{H}, \hat{\rho}_q]] | \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_m | \hat{\rho}_{-q} \hat{\rho}_q | \Psi_m \rangle}. \quad (27)$$

Несжимаемость классической плазмы, неявно описываемая функцией Ψ_m , приводит к необычно быстрому убыванию знаменателя при $\mathbf{q} \rightarrow 0$, в результате чего оказывается, что E_q выходит в этом пределе на константу. Спектр как функция импульса имеет неглубокий минимум при $q = 1,4/\ell$ для $m = 3$, что близко к волновому вектору $q = 1,56/\ell$, соответствующему упорядочению в вигнеровский кристалл. Этот минимум вполне аналогичен ротонному минимуму в жидком гелии. Зависимость E_q от q вполне подобна закону дисперсии обычного экситона на полностью заполненном уровне Ландау [32].

Для доказательства того, что наше состояние имеет элементарные возбуждения с дробным зарядом, достаточно существования щели в спектре. Представим мысленный эксперимент, показанный на рис. 5, в котором образец протыкается тонким соленоидом, и магнитный поток ϕ в нем адиабатически увеличивается. То, что происходит при этом вблизи соленоида, зависит от модели, но вдали от него все сводится к переносу каждой электронной орбиты внутрь, как это было и в целочисленном эффекте Холла в случае петли. Поскольку гамильтониан при увеличении фазы от нуля до $\Delta\phi = hc/e$ возвращается в начальное состояние с точно-

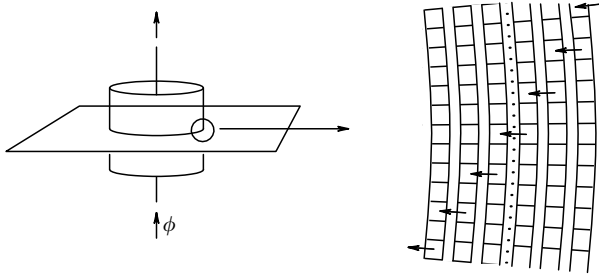


Рис. 5. Иллюстрация мысленного эксперимента, демонстрирующего существование возбуждений с дробным зарядом. Система, находящаяся в основном состоянии, протыкается бесконечно тонким соленоидом, в котором адиабатически включается магнитный поток Φ . Вдали от соленоида это приводит к движению состояний по направлению к соленоиду. При увеличении потока до $\Delta\Phi = hc/e$ гамильтониан снова переходит в себя с точностью до калибровки. Это означает, во-первых, что в точности одно состояние должно пройти сквозь замкнутую поверхность, окружающую соленоид, и, во-вторых, что соленоид в конце процесса можно свободно удалить. Результат такого включения потока — создание собственного состояния исходного гамильтониана с зарядом e/m , равным среднему заряду на одно состояние на бесконечности.

стью до несущественного калибровочного преобразования, то ровно одно состояние из каждого уровня Ландау переносится в результате сквозь замкнутую поверхность, окружающую соленоид. При этом внутрь вносится заряд e/m , т.е. средний заряд на одно состояние на бесконечности, и располагается где-то в окрестности соленоида. После этого соленоид можно удалить, и мы получаем точное возбужденное состояние исходного гамильтониана, несущее заряд e/m , соответствующий плотности заряда в основном состоянии.

Небольшое изменение этого рассуждения показывает, что квантование дробного заряда является точным. Представим себе ситуацию, показанную на рис. 6, когда затравочная масса электрона медленно изменяется вдоль образца от реального значения в области A , до столь малой величины в области C , что там уравнение (21) становится точным, причем будем считать, что щель существует везде. Проведем теперь такой же эксперимент с соленоидом, только замкнутую поверхность выберем такой большой, чтобы она проходила в области C . При этом в области A будет происходить что-то сложное, что невозможно предсказать, исходя из общих

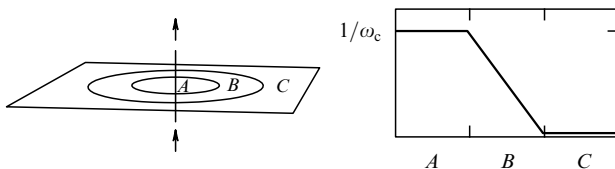


Рис. 6. Иллюстрация мысленного эксперимента, показывающего, что дробное квантование является точным. Представим себе, что какой-либо параметр гамильтониана, например затравочная масса, медленно меняется в пространстве, непрерывно связывая систему A с идеальной системой C на бесконечности. Эксперимент с включением потока, проведенный в области A , приводит к переносу заряда e/m сквозь замкнутую поверхность, расположенную в области C , независимо ни от каких деталей, и этому заряду просто некуда деваться, кроме как собраться где-то около соленоида. Таким образом, область A наследует точные свойства от области C , благодаря сохранению щели в области B .

принципов, зато в области C , согласно предыдущему рассуждению, внутрь пройдет заряд, в точности равный e/m . Но этому заряду просто некуда деваться, кроме как уйти к соленоиду, по крайней мере, если область A достаточно велика. Таким образом, включение соленоида создает возбуждение в области A с зарядом, в точности равным e/m , независимо от микроскопических деталей системы. В действительности мы доказали даже нечто большее. Если поместить вторую замкнутую поверхность в области A , то можно убедиться, что заряд возбуждения должен быть фундаментальным образом связан с плотностью заряда в A . Поэтому эта плотность также квантуется на идеальное значение, хотя уравнение (21) там уже не выполняется точно. Приведенные аргументы имеют вполне общий характер и применимы к любым параметрам гамильтониана, а не только к затравочной массе. Заряд не меняется при любом адиабатическом изменении гамильтониана, сохраняющем щель, а поэтому характеризует всю рассматриваемую фазу, а не просто ее определенный прототип.

Волновые функции, разумным образом описывающие эти возбуждения с дробным зарядом, которые я неосторожно назвал "квазичастицами", выглядят так:

$$\Psi_{z_0}^+(z_1, \dots, z_N) = \exp\left(-\frac{1}{4\ell^2} \sum_j |z_j|^2\right) \times \prod_j (z_j - z_0) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \quad (28)$$

для положительно заряженного возбуждения в точке z_0 и

$$\Psi_{z_0}^-(z_1, \dots, z_N) = \exp\left(-\frac{1}{4\ell^2} \sum_j |z_j|^2\right) \times \prod_j \left(2\ell^2 \frac{\partial}{\partial z_j} - z_0^*\right) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \quad (29)$$

для отрицательно заряженного. Я первоначально оценил энергии этих возбуждений соответственно как $0,022e^2/\ell$ и $0,025e^2/\ell$ для кулоновского взаимодействия при $m = 3$ [23]. Последующие численные расчеты Холдейна и Резайи [29], а также Морфа и Гальперина [33] дали уточненные значения $0,026e^2/\ell$ и $0,073e^2/\ell$. Сумма этих энергий немного выше, чем ротонная щель, как и должно быть, если считать коллективную моду связанным состоянием квазичастицы и квазидырки, т.е. экситоном. Щели такого типа были экспериментально обнаружены при измерении проводимости [34], но они оказались раза в два меньше теоретических значений, пересчитанных с учетом конечной толщины двумерного слоя. Это расхождение не принципиально, так как беспорядок, по-видимому, сильно подавляет щель. Легко показать, что квазидырочная волновая функция описывает возбуждение с зарядом $1/3$. Поступая так же, как при выводе уравнения (24), получим:

$$\Phi(z_1, \dots, z_N) = -2 \sum_j \ln |z_j - z_0| - 2m^2 \sum_{j < k} \ln |z_j - z_k| + \frac{m}{2\ell^2} \sum_j |z_j|^2. \quad (30)$$

Частицы плазмы теперь "видят" воображаемый единичный "заряд" в точке z_0 и перераспределяются таким образом, чтобы заэкранировать его равным по величине и противоположным по знаку "зарядом". Несколько сложнее показать, что квазиэлектронная волновая функция также описывает возбуждение с зарядом $1/3$, но подход остается прежним [35].

Сейчас уже существует целый ряд экспериментальных работ, в которых непосредственно наблюдались квазичастицы с зарядом $e/3$. Самые свежие и широко цитируемые из них — измерения дробового шума, выполненные Саминадаяром и др. [36] и Де Пиччиотто и др. [37], в которых заряд определялся по флуктуациям тока утечки через узкую часть холловского образца. Эти очень впечатляющие эксперименты не так просты, как кажется на первый взгляд, поскольку процессы туннелирования происходят между краями образца, а на краях спектр не имеет щели, как это было в объеме, но соответствует бесщелевой киральной жидкости Латтинджера [38]. Носители в этом странном одномерном металле имеют заряд $e/3$, унаследованный от объема, но физически несколько отличаются от объемных квазичастиц, и даже могут быть интерпретированы как совсем другое явление. Дробовой шум, ожидаемый при туннелировании этих возбуждений, имеет, как оказывается, классический вид с зарядом электрона, замененным на $e/3$ [39]. Более спорные, но, на мой взгляд, вполне серьезные эксперименты — это работы Голдмана и Су [40] по резонансному туннелированию, которые представляют собой усовершенствование старого эксперимента Симмонса и др. [41]. В этих экспериментах тоже измеряется ток через сужение холловского образца, но уже не флуктуации, а ток на нулевой частоте как функция плотности носителей и магнитного поля [42]. Я должен упомянуть также знаменитую работу Кларка [43], в которой сообщалось об обнаружении дробного заряда по высокотемпературному поведению активационной параллельной проводимости на холловских плато. Это поразительные измерения, но спорные из-за того, что не удается найти простого теоретического описания этого эффекта. Я, однако, продолжаю считать, что лучшее наблюдение этого заряда — сама квантованная холловская проводимость. В особенности, когда образец настолько грязный, что соображения, использующие идеальные края, теряют смысл, тогда как правило сумм, связанное с увеличением потока, определяет заряд переносимого через образец объекта, независимо ни от каких деталей системы.

5. Дробная статистика

Квазичастицы в дробном квантовом эффекте Холла действуют друг на друга дальнедействующими силами, зависящими от скорости, — калибровочными силами, которые уникальны, поскольку не имеют ни предшественника в исходных уравнениях движения, ни связанной с ними нарушенной непрерывной симметрии. Эти силы появляются спонтанно, вместе с дробным зарядом, и существенны для рассматриваемого эффекта, поскольку, если бы их не было, квантовые состояния квазичастиц подсчитывались бы неправильно. Эти силы, называемые также дробной статистикой [44], имеют измеримое следствие, а именно, значения дочер-

них дробей $2/5$ и $2/7$ и их порождений в иерархии дробных состояний.

Изолированная квазичастица физически ведет себя как обычный электрон или дырка на уровне Ландау, за исключением того, что ее магнитная длина равна $\sqrt{m}\ell$. Это следует из вырождения по z_0 , вида недиагонального матричного элемента

$$\frac{\langle \Psi_{z_0}^+ | \Psi_{z'_0}^+ \rangle}{\sqrt{\langle \Psi_{z_0}^+ | \Psi_{z_0}^+ \rangle \langle \Psi_{z'_0}^+ | \Psi_{z'_0}^+ \rangle}} = \exp \left[-\frac{1}{4m\ell^2} (|z_0|^2 - 2z_0^* z'_0 + |z'_0|^2) \right] \quad (31)$$

и эквивалентности волновой функции при $m = 1$ обычной дырке на уровне Ландау

$$\phi_{z_0}(z) = \exp \left[-\frac{1}{4\ell^2} (|z|^2 + |z_0|^2 + 2z_0^* z) \right]. \quad (32)$$

Такое соответствие взаимно однозначно и физически очень понятно.

С другой стороны, пара квазичастиц ведет себя как пара обычных электронов или дырок на уровне Ландау, но с прикрепленными соленоидами, несущими часть кванта потока [45]. Волновая функция двух квазичастиц имеет вид

$$\Psi_{z_A z_B}^{++}(z_1, \dots, z_N) = \exp \left(-\frac{1}{4\ell^2} \sum_j |z_j|^2 \right) \times \prod_j (z_j - z_A)(z_j - z_B) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \quad (33)$$

и при $m = 1$ эквивалентна паре обычных дырок в заполненном уровне Ландау. Она очевидным образом симметрична относительно перестановок квантовых чисел z_A и z_B и выглядит как волновая функция двух бозонов. Это, однако, не означает, что квазичастицы являются бозонами, так как в особом случае двух измерений фермионы могут иметь бозевское представление и наоборот. Для того, чтобы определить бозоны это или фермионы, мы должны использовать более хитрую концепцию фазы Берри. Предположим, что гамильтониан изменяется так, чтобы две квазичастицы находились в точках z_A и z_B . Например, можно добавить потенциальные ямы около этих точек. Если затем параметр гамильтониана z_A адиабатически описывает замкнутую петлю P , то волновая функция переходит в себя с точностью до фазы

$$\phi = \oint_P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad \mathbf{A}(z_A) = \lim_{z'_A \rightarrow z_A} \nabla_A \langle \Psi_{z'_A z_B}^{++} | \Psi_{z_A z_B}^{++} \rangle. \quad (34)$$

Это выражение дает

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{r} \times \hat{z}) - \frac{1}{m} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \times \hat{z}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|^2} \quad (35)$$

для \mathbf{r} далеких от \mathbf{r}_B . Ротор этого вектора равен локальной плотности заряда, умноженной на 2π , так что дополнительная соленоидальная компонента возникает просто из-за того, что в точке z_B не хватает заряда, так как там расположена дырка. При $m = 1$ дополнительная фаза Берри, возникшая из-за движения A вокруг B , равна

просто 2π . Это означает, что фаза, набегаящая при проходе половины пути, т.е. при перестановке частиц, равна π . В этом случае частицы являются фермионами. Если бы мы выбрали фермиевское представление, умножив, например, волновую функцию на $(z_A - z_B)$, то добавочная фаза равнялась бы нулю, но окончательный результат был бы одинаков: волновая функция приобрела бы знак минус при перестановке частиц. Но при $m \neq 1$ ни фермиевское, ни бозевское представления не позволяют полностью избавиться от соленоидальной компоненты в векторном потенциале (35). В этом случае это уже не артефакт выбора представления, а реальная сила, зависящая от скорости.

Важное экспериментальное следствие дробной статистики — изменение способа заполнения состояний квазичастицами. Если бы, например, квазидырки были фермионами, так чтобы аналогия с уровнями Ландау была полной, то заполняя все доступные состояния, мы получили бы плотность заряда $e/(2\pi m^2 \ell^2)$. Это правильно при $m = 1$, но не в других случаях, так как волновая функция

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \exp\left(-\frac{1}{4\ell^2} \sum_j |z_j|^2\right) \prod_j z_j^M \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^m, \quad (36)$$

которая описывает M квазидырок, расположенных так плотно вблизи начала координат, как только можно, просто выталкивает жидкость из диска площадью $2\pi M \ell^2$, создавая жидкость с равномерной плотностью заряда $e/(2\pi m \ell^2)$. Поскольку бозоны могли бы, конечно, упаковаться как угодно плотно, реальное поведение квазичастиц соответствует чему-то среднему. Именно на основе подобных наблюдений Гальперин [46] впервые понял, что эффект упаковки может хорошо объяснить наблюдаемые дочерние дроби $2/5$ и $2/7$, если считать, что квазичастицы сами конденсируются в нечто, подобное состоянию $1/m$. Волновая функция квазичастиц, сконденсированных в аналог состояния $1/3$ при дробной статистике $\pm 1/3$, в бозе-представлении имеет вид

$$\Psi_{\pm}(\eta_1, \dots, \eta_N) = \prod_{j < k}^N (\eta_j - \eta_k)^2 |\eta_j - \eta_k|^{\pm 1/3} \times \exp\left(-\frac{1}{4\ell^2} \sum_j |\eta_j|^2\right). \quad (37)$$

Соответствующие плотности заряда равны

$$\rho = \frac{e}{2\pi \ell^2} \left[\frac{1}{3} \mp \frac{1}{9(2 \pm 1/3)} \right] = \frac{1}{2\pi \ell^2} \left[\frac{2/7}{2/5} \begin{matrix} \text{(квазидырки)} \\ \text{(квазиэлектроны)} \end{matrix} \right]. \quad (38)$$

Повторяя затем это рассуждение снова и снова, Гальперин смог предсказать последовательность дробных состояний, согласующуюся с экспериментом и с более математическим выводом Холдейна [25]. Затем Джейн [24] обнаружил, что последовательность основных состояний в дробном квантовом эффекте Холла может быть сконструирована другим способом, который совсем не использует понятие квазичастиц. Поэтому

очевидный вывод, что появление этих дробей *доказывает* существование дробной статистики, был поставлен под вопрос. Тем не менее сомневаться в этом не следует. В состояниях с дробями $2/7$ и $2/5$ квазичастицы расположены достаточно далеко друг от друга — на расстоянии порядка 3ℓ , а щель, связанная с их образованием, велика, так что не следует думать, что они просто исчезают, когда формируются эти дочерние конденсаты. Если бы квазичастицы были фермионами, эти плотности равнялись бы $10/27 = 0,370$ вместо $2/5 = 0,40$ и $8/27 = 0,296$ вместо $2/7 = 0,286$. Поэтому эффект дробной статистики, хотя и мал, но измерим, и составляет около 5 % от наблюдаемой дроби.

6. Заключение

Дробный квантовый эффект Холла является интересным по многим причинам, но важен он, на мой взгляд, только по одной: экспериментально установлено, что как частицы, несущие дробную часть заряда электрона e , так и сильные калибровочные взаимодействия между этими частицами (два центральных постулата стандартной модели) могут неожиданно возникать как свойства нового состояния материи. Другие важные аспекты стандартной модели, такие как свободные фермионы, относительность, перенормируемость, спонтанное нарушение симметрии и механизм Хиггса, уже имели яркие аналогии в физике твердого тела и их даже иногда предлагали исходя из этих аналогий, но дробные квантовые числа и калибровочные поля считались чем-то фундаментальным, в том смысле, что их нужно изначально вводить в гамильтониан. Теперь очевидно, что это не так. Я не имею представления, являются ли известные нам свойства вселенной фундаментальными или вот так неожиданно возникающими, но я знаю, что если справедливо последнее, то это плохая новость для Теории Всего. Это означало бы, что с экспериментом согласуется более одного набора микроскопических уравнений — и мы не определим эти уравнения, пока не будут разработаны лучшие эксперименты, — а также то, что истинная природа микроскопических уравнений несущественна для нашего мира. Поэтому вызов привычному описанию вселенной, который представляет собой эти открытия в "малой" науке, на самом деле очень глубокий и серьезный.

Квазичастицы в дробном квантовом эффекте Холла — это элементарные возбуждения определенного состояния материи, которое не может быть преобразовано в систему невзаимодействующих электронов без пересечения некоторой фазовой границы. Это означает, что они отличны от электронов в том единственном смысле, в каком мы говорим о чем-то отличающемся. В частности, они не являются адиабатическими образами электронов, как это имеет место для квазичастиц в металлах и зонных диэлектриках. Некоторые энтузиасты теории композитных фермионов утверждают обратное, а именно, что эти частицы суть не что иное, как экранированные электроны [24], однако это неверно. Этот подозрительный процесс экранирования всегда наталкивается в некоторой точке на фазовую границу, приводя к радикальной перестройке основного состояния и низколежащих возбуждений. Я специально подчеркиваю это потому, что в физике твердого тела существует прискорбная тенденция приравнивать понимание природы к возможности смодели-

ровать ее — отношение, которое иногда приводит к недооценке или неправильной интерпретации более высокого организующего принципа, в действительности определяющего тот или иной эффект. В случае целочисленного или дробного квантового эффекта Холла нужно прежде всего обратить внимание на точность квантования. Никакое моделирование на современных или будущих компьютерах никогда само по себе не даст объяснения этой точности. Это может сделать только общий принцип. Мнение, что квазичастицы — это просто экранированные электроны, к сожалению, не совместимо с основным принципом, который работает в этих экспериментах. Если тщательно проанализировать этот подход, то становится понятно, что он приводит к неверному заключению о целочисленном квантовании холловской проводимости.

Работа, за которую мы трое удостоены Нобелевской премии, стала результатом совместных усилий многих первоклассных ученых — в лучших традициях науки. Вместе с моими коллегами я сожалею о том, что Арт Госсард не смог разделить с нами эту премию, поскольку все в физике твердого тела понимают, что материалы — это душа нашей науки, и никакой серьезный интеллектуальный прогресс без них невозможен. Я благодарен Дункану Холдейну и Эду Резайи за их численные расчеты [29], которые были крайне важны для доказательства существования щели и для проверки величин энергий квазичастиц. Я также признателен Берту Гальперину за его выдающийся вклад, в особенности за открытие дробной статистики квазичастиц [46]. Перечень важнейших результатов в этой области, полученных другими, настолько велик, что я не знаю, как воздать должное всем. Есть множество работ Стива Гирвина и Алана Макдоналда, в частности, их совместная работа с Филом Платцманом, где они впервые дали точную оценку величины щели [30]. Есть работа Эда Пруискена по локализации в магнитном поле и впервые предложенная им соответствующая модификация скейлинговой теории [18]. Есть работа Сяо-Ган Вэня по киральным краевым возбуждениям [38] и последующая модификация его теории, предложенная Чарлзом Кейном и Мэтью Фишером и описывающая туннелирование квазичастиц через мезоскопические барьеры [39]. Нужно вспомнить и о великолепной глобальной фазовой диаграмме дробного квантового эффекта Холла, предложенной Стивом Кивелсоном, Дун-Хай Ли и Шучэн Чжаном [47]. И, конечно, открытие необычной ферми-поверхности при половинном заполнении и ее объяснение в терминах композитных фермионов Бертом Гальперином, Патриком Ли и Ником Ридом [48] — сегодня это передовая линия исследований в данной области. Я надеюсь, что все мои коллеги, занимавшиеся этой темой на протяжении многих лет, как те, кого я упомянул, так и не упомянутые здесь, примут мою благодарность и признательность за все, что они сделали, а также мое смиренное признание, что теория дробного квантового эффекта Холла, как и любая хорошая наука, — это результат работы многих.

Перевел с англ. С.М. Апенко

Список литературы

1. Jackiw R, Rebbi C *Phys. Rev. D* **13** 3398 (1976)
2. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **79** 276 (1974)
3. Поляков А М *Письма в ЖЭТФ* **20** 430 (1974)
4. Skyrme T H R *Proc. R. Soc. London Ser. A* **262** 233 (1961)
5. Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698 (1979)
6. Rice M J, Bishop A B, Krumhans J A, Trullinger S E *Phys. Rev. Lett.* **36** 432 (1976)
7. Pople J A, Walmsley J H *Mol. Phys.* **5** 15 (1962)
8. Su W P, Schrieffer J R *Phys. Rev. Lett.* **46** 738 (1981)
9. Von Klitzing K, Dorda G, Pepper M *Phys. Rev. Lett.* **45** 494 (1980)
10. Anderson P W *Phys. Rev.* **112** 1900 (1958)
11. Abrahams E, Anderson P W, Licciardello D C, Ramakrishnan T V *Phys. Rev. Lett.* **42** 673 (1979)
12. Dolan G J, Osheroff D D *Phys. Rev. Lett.* **43** 721 (1979)
13. Bishop D J, Tsui D C, Dynes R C *Phys. Rev. Lett.* **44** 1153 (1980)
14. Bergman G *Phys. Rev. Lett.* **48** 1046 (1982)
15. Prange R E *Phys. Rev. B* **23** 4802 (1981)
16. Laughlin R B *Phys. Rev. B* **23** 5632 (1981)
17. Trugman S A *Phys. Rev. B* **27** 7539 (1983)
18. Levine H, Libby S B, Pruisken A M M *Phys. Rev. Lett.* **51** 1915 (1983)
19. Laughlin R B *Phys. Rev. Lett.* **52** 2034 (1984)
20. Khmel'nitskii D E *Phys. Lett. A* **106** 182 (1984)
21. Glotzman I et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 594 (1995)
22. Tsui D C, Störmer H L, Gossard A C *Phys. Rev. Lett.* **48** 1559 (1982)
23. Laughlin R B *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395 (1983)
24. Jain J K *Phys. Rev. Lett.* **63** 199 (1989)
25. Haldane F D M *Phys. Rev. Lett.* **51** 605 (1983)
26. Laughlin R B *Phys. Rev. B* **27** 3383 (1983)
27. Caillol J M, Levesque D, Weis J J, Hansen J P *J. Stat. Phys.* **28** 325 (1982)
28. Chang A M et al. *Phys. Rev. Lett.* **53** 997 (1984)
29. Haldane F D M, Rezayi E H *Phys. Rev. Lett.* **54** 237 (1985)
30. Girvin S M, Macdonald A H, Platzman P M *Phys. Rev. Lett.* **54** 581 (1985)
31. Feynman R P *Statistical Mechanics* (Reading: Benjamin, 1972) [Русский перевод: Фейнман Р *Статистическая механика* (М.: Мир, 1978)]
32. Kallin C, Halperin B I *Phys. Rev. B* **30** 5655 (1984)
33. Morf R, Halperin B I *Phys. Rev. B* **33** 1133 (1986)
34. Boebinger G S et al. *Phys. Rev. Lett.* **55** 1606 (1985)
35. Laughlin R B, in *The Quantum Hall Effect* (Eds R E Prange, S M Girvin) (Heidelberg: Springer, 1987) p. 233
36. Saminadayar L et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 2526 (1997)
37. De Picciotto R et al. *Nature* (London) **389** 162 (1997)
38. Wen X-G *Phys. Rev. Lett.* **64** 2206 (1990)
39. Kane C L, Fisher M P A *Phys. Rev. Lett.* **72** 724 (1994)
40. Goldman V J, Su B *Science* **267** 1010 (1995); Goldman V J *Surf. Sci.* **361** 1 (1996)
41. Simmons J A et al. *Phys. Rev. Lett.* **63** 1731 (1989)
42. Jain J K, Kivelson S A, Thouless D J *Phys. Rev. Lett.* **71** 3003 (1993)
43. Clark R G et al. *Phys. Rev. Lett.* **60** 1747 (1988)
44. Leinaas J M, Myrheim J *Nuovo Cimento B* **37** 1 (1977); Wilczek F *Phys. Rev. Lett.* **48** 957 (1982)
45. Arovas D, Wilczek F, Schrieffer J R *Phys. Rev. Lett.* **53** 722 (1984)
46. Halperin B I *Phys. Rev. Lett.* **52** 1583 (1984)
47. Kivelson S, Lee D-H, Zhang S *Phys. Rev. B* **46** 2223 (1992)
48. Halperin B I, Lee P A, Read N *Phys. Rev. B* **47** 7312 (1993)