

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели)

А.Б. Шварцбург

Распространение и отражение электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах рассматривается в рамках единого подхода с помощью точных аналитических решений уравнений Максвелла. При таком подходе пространственная структура волновых полей в неоднородных средах представляется функцией от оптической длины пути, пройденного волной (одномерная задача). Эти решения выявляют сильные эффекты как нормальной, так и аномальной дисперсии волн в заданной среде, зависящие от градиента и кривизны непрерывного гладкого профиля неоднородной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$. Влияние такой нелокальной дисперсии на отражение волн представлено с помощью обобщенных формул Френеля. Построены точно решаемые модели влияния монотонной и осциллирующей зависимости $\varepsilon(t)$ на дисперсию волн, обусловленную конечным временем релаксации диэлектрической проницаемости.

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Sq, 42.25.Bs, 42.25.Gy

Содержание

1. Введение. Оптика несинусоидальных волн (1297).
 2. Нелокальная дисперсия слоистых сред. Метод фазовой координаты (1299).
 3. Когда ВКБ-приближение дает точные решения волнового уравнения? (1303)
 4. Широкополосные безотражательные свойства неоднородных диэлектрических слоев (1303).
 5. Влияние градиента и кривизны профиля $\varepsilon(z)$ на нелокальную дисперсию периодических несинусоидальных диэлектрических структур (1306).
 6. Дисперсия высокочастотных волн в плазме с монотонным и немонотонным распределением плотности (1309).
 7. Поверхностные электромагнитные волны в неоднородном диэлектрике (1312).
 8. Дисперсионные свойства нестационарных диэлектриков (1315).
 9. Телеграфное уравнение для сред с зависящей от времени проводимостью (1319).
 10. Заключение. Фазовые координаты в задачах радиофизики направляющих систем, нелинейной оптики и квантовой механики (1320).
- Список литературы (1324).

1. Введение. Оптика несинусоидальных волн

Настоящий обзор посвящен эффектам дисперсии волн оптического и радиодиапазона в диэлектрической среде, возникающим под действием пространственной неоднородности или временной релаксации ее диэлектрических свойств. Переменная скорость распространения волновых полей в такой среде может полностью изменить спектры отражения волн и пространственно-временную структуру полей внутри среды. Зависимости диэлектрической проницаемости от координат и времени, описываемые непрерывными гладкими функциями этих переменных, определяют область существования нелокальной дисперсии. При некоторых значениях характерных масштабов пространственной неоднородности или времен релаксации эта область может формироваться в диапазоне частот, далеких от собственных резонансов и полос поглощения материала. Исследования таких эффектов в различных частях спектра электромагнитных волн стимулируются задачами геофизики, оптики полупроводников и полимеров, физики лабораторной и космической плазмы. Использование материалов с сильной искусственной дисперсией открывает новые возможности для синтеза оптоэлектронных и радиотехнических систем, развития методов неразрушающего контроля сложных материалов, разработки оптимальных режимов связи и передачи энергии через слоистые и нестационарные среды. Кроме того, физические основы и математический аппарат теории электромагнитных волн в таких средах представляют интерес для анализа волновых полей и в других областях физики сплошных сред.

А.Б. Шварцбург. Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН,
117342 Москва, ул. Бултерова 15, Российская Федерация
E-mail: alexshvarts@mtu-net.ru

Статья поступила 21 июля 2000 г.,
после доработки 27 сентября 2000 г.

Влияние нелокальной дисперсии на распространение и отражение электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах удобно рассматривать с помощью модельных зависимостей диэлектрической проницаемости среды ε от координат $\varepsilon(\mathbf{r})$ и времени $\varepsilon(t)$. Говоря об одномерных задачах для слоистых сред, целесообразно отметить несколько моделей $\varepsilon(z)$, допускающих точные аналитические решения уравнений Максвелла. Эти же зависимости $\varepsilon(z)$ образуют точно решаемые модели для волнового уравнения в среде с переменной скоростью распространения волны $v^2(z) \sim \sim [\varepsilon(z)]^{-1}$. Один из первых таких профилей $v(z)$ был найден Рэлеем в 1880 г. при решении акустической задачи о структуре звукового поля, распространяющегося со скоростью, зависящей от координаты [1],

$$\frac{v^2(z)}{v^2(z=0)} = \left(1 + \frac{z}{L}\right)^2 = \frac{\varepsilon(z=0)}{\varepsilon(z)}. \quad (1.1)$$

Здесь характерная длина L — единственный свободный параметр модели. Точное решение существует и для более пологого профиля $\varepsilon(z)$ [2]

$$\frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon(z=0)} = \left(1 + \frac{z}{L}\right)^{-1}. \quad (1.2)$$

Более сложное распределение, содержащее четыре свободных параметра, образует слой Эпштейна [3]:

$$\frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon(z=0)} = 1 - \frac{Nf}{1+f} - \frac{4Mf}{(1+f)^2}, \quad f = \exp[a(z+z_1)]. \quad (1.3)$$

Подробный анализ моделей (1.1)–(1.3), описывающих среды с незначительной естественной дисперсией скорости волн, выполнен в монографии [4], посвященной проблемам акустики слоистых сред.

В отличие от моделей (1.1)–(1.3) распределения (1.4), (1.5) соответствуют плазмоподобным диэлектрикам с частотной дисперсией

$$\varepsilon(z) = 1 - g(\omega)W(z). \quad (1.4)$$

Здесь множитель $g(\omega)$ зависит от частоты волны и параметров диэлектрика, безразмерная функция W определяет распределение электронов. Точные решения уравнений Максвелла известны для линейного [5], параболического [6] и экспоненциального [7] профилей нормированной плотности W :

$$W = 1 + \frac{z}{L}; \quad W = 1 - \frac{z^2}{L^2}; \quad W = \exp\left(\frac{z}{L}\right). \quad (1.5)$$

Говоря о нелокальной дисперсии, следует отметить, что этот обзор посвящен дисперсионным эффектам, обусловленным макроскопическими значениями масштабов неоднородности среды L ; при этом отношение длины волны в вакууме λ к величине L может быть произвольным. Широко известные эффекты пространственной дисперсии [8], определяемые микроскопической неоднородностью среды на расстояниях порядка a , где a — размер молекул или период кристаллической решетки ($a \ll \lambda$), здесь обсуждаться не будут.

Ограниченный набор точно решаемых моделей слоистых сред привлекает внимание к приближенным мето-

дам, используемым, например, в геометрической оптике [9, 10], и к численному моделированию волновых задач, составляющему сейчас во многих университетах Европы и США основу специального учебного курса "Computer Electromagnetics". Роль численных методов становится еще весомее в оптике нестационарных сред, где аналитические результаты встречаются нечасто. Предельные случаи адиабатических колебаний и быстрых скачкообразных изменений $\varepsilon(t)$ описаны в работах [11, 12]. Примеры амплитудно-фазовой эволюции полей в плазме вблизи пробоя иллюстрируются численно в [13, 14]. Точные решения для быстрых дисперсионных деформаций коротких видеоимпульсов в неоднородных диэлектриках найдены в [15]. Нестационарная дифракция таких импульсов рассмотрена аналитически в [16, 17].

Анализ этих результатов показывает, что пространственно-временные огибающие электрической и магнитной компонент волнового поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , распространяющегося в слоистой или нестационарной среде, испытывают сложную деформацию. Так, при падении волны с гармоническими огибающими \mathbf{E} и \mathbf{H} на поверхность слоистой среды форма пространственной огибающей \mathbf{E} внутри среды становится несинусоидальной и изменяется в процессе распространения. Одновременно искажается и пространственная огибающая \mathbf{H} , форма которой может существенно отличаться от огибающей \mathbf{E} . Темпы такой деформации определяются нелокальной дисперсией среды. Аналогичные эффекты развиваются и для временных огибающих E и H в нестационарной среде.

Таким образом, при исследовании электромагнитных полей в слоистых и нестационарных средах формируется новая ветвь теории волн — оптика несинусоидальных волн. Несколько "горячих" задач, актуальных для развития этого нового направления, обсуждаются ниже.

1. Построение точных аналитических решений уравнений Максвелла для слоисто-неоднородных диэлектриков. Чтобы найти такие решения, в работе систематически используются специальные преобразования уравнений Максвелла, исключающие явную зависимость этих уравнений от распределения $\varepsilon(z)$: при этом пространственная структура поля в точке z внутри среды зависит от длины фазового пути $\eta(z)$, пройденного волной от границы среды до точки z (η — фазовая координата). Условия таких преобразований определяют широкие классы непрерывных распределений $\varepsilon(z)$, допускающих точные аналитические представления для компонент электромагнитного поля. Гибкость таких моделей, представляющих как монотонные, так и модулированные профили $\varepsilon(z)$ с произвольными глубиной и формой модуляции, характеризуется наличием нескольких свободных параметров. Пространственная структура полей в новых переменных — фазовых координатах η — описывается в ряде случаев элементарными функциями (см. разделы 2, 5, 6).

Некоторые ранее известные точно решаемые модели $\varepsilon(z)$ для неоднородных диэлектриков оказываются частными случаями найденных здесь многопараметрических распределений $\varepsilon(z)$.

2. Сильная нелокальная дисперсия электромагнитных волн в слоистых диэлектриках. Использование точно решаемых моделей $\varepsilon(z)$ позволяет представить дисперсию неоднородных диэлектриков с помощью формул волноводного типа. Характерные частоты в этих форму-

лах определяются масштабами неоднородности $\varepsilon(z)$, и в зависимости от профиля $\varepsilon(z)$ такая нелокальная дисперсия может быть как нормальной, так и аномальной. Частота отсечки слоистого диэлектрика, определяемая профилем $\varepsilon(z)$, может возникнуть в области спектра, далекой от резонансных частот и полос поглощения материала (см. раздел 2).

Для особых профилей $\varepsilon(z)$, характеризующих отсутствием нелокальной дисперсии, приближение геометрической оптики дает точное решение волнового уравнения (см. раздел 3).

3. Широкополосные эффекты отражения и пропускания излучения в неоднородных средах. Нелокальная дисперсия неоднородного диэлектрического слоя может полностью изменить отражательные свойства диэлектрика. В таком слое формируются широкие спектральные интервалы безотражательного пропускания и сильного отражения излучения, определяемые профилем $\varepsilon(z)$. Компенсация фазовых сдвигов, возникающих при прохождении волны через неоднородный диэлектрик и диссипативную среду, позволяет оптимизировать параметры широкополосных безотражательных покрытий для поглощающих материалов (см. разделы 4, 7). С помощью фазовых координат рассматривается распространение электромагнитных волн через плазму с модулированной плотностью при симметричной и асимметричной форме профиля плотности и произвольной глубине модуляции (см. разделы 5, 6).

Важная роль градиента и кривизны профиля $\varepsilon(z)$ в формировании широкополосных безотражательных свойств диэлектрика показана с помощью обобщенных формул Френеля.

4. Дисперсия нестационарных сред с конечным временем релаксации. Точно решаемые модели неоднородных диэлектриков, рассмотренные выше, обобщаются на случай сред с зависящей от времени диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(t)$. Дисперсия таких диэлектриков описывается формулами волнового типа с характерными частотами, определяемыми временами релаксации $\varepsilon(t)$. Точные аналитические решения уравнений Максвелла описывают несинусоидальные волны в таких средах. Отмечена возможность полного отражения волны от нестационарного диэлектрика при некоторых соотношениях между частотой волны и временами релаксации $\varepsilon(t)$ (см. раздел 8). На основе точно решаемой модели для телеграфного уравнения с зависящей от времени проводимостью $\sigma(t)$ показано влияние времени релаксации на отражательные свойства проводника (см. раздел 9).

Построена обобщенная модель на основе формул Френеля для нестационарных диэлектриков, описывающая динамические эффекты влияния первой и второй производных от зависимости $\varepsilon(t)$ на колебания амплитуды и уширение спектра отраженной волны.

5. Приложение методов оптики слоистых сред к смежным областям теории волновых процессов. Рассмотрены примеры применения развитого выше математического формализма к теории длинных линий с непрерывно распределенными параметрами и нелинейной оптике, магнитооптике и квантовой механике. Указаны пути расширения классов преобразований уравнений Максвелла в сплошной среде, приводящие к новым точно решаемым моделям $\varepsilon(z)$ (см. раздел 10). Отмечены перспективы использования оптики слоистых и нестационарных сред для оперативного контроля параметров оптоэлектронных материалов.

ационарных сред для оперативного контроля параметров оптоэлектронных материалов.

2. Нелокальная дисперсия слоистых сред. Метод фазовой координаты

В этом разделе строится математическая схема описания крупномасштабных дисперсионных эффектов в слоистых средах. Рассмотрим распространение плоской волны в неоднородном немагнитном диэлектрике, диэлектрическая проницаемость которого ε зависит от координаты z . Чтобы выделить эффекты, связанные с неоднородностью ε , предположим, что в рассматриваемом диапазоне частот ω поглощение волн и материальная дисперсия среды несущественны. В этом случае зависимость $\varepsilon(z)$ в области прозрачности ($\varepsilon > 0$) можно представить в виде

$$\varepsilon(z) = n_0^2 U^2(z), \quad U \Big|_{z=0} = 1. \quad (2.1)$$

Здесь n_0 — показатель преломления среды на границе $z = 0$, безразмерная функция U^2 описывает пространственное распределение диэлектрической проницаемости.

Уравнения Максвелла для линейно поляризованной волны с компонентами E_x и H_y , движущейся в среде (2.1) в направлении z , имеют вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{n_0^2 U^2(z)}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Функция $U^2(z)$ пока остается неизвестной.

В отличие от указанных во введении точно решаемых моделей (1.1)–(1.5) новые аналитические решения системы (2.2), (2.3) будут найдены здесь с помощью специального преобразования в пространстве фазовых траекторий. Такой подход приводит к ряду новых точно решаемых моделей $\varepsilon(z)$ и позволяет наглядно представить сильные дисперсионные эффекты, обусловленные профилем диэлектрической проницаемости. Выражая компоненты волнового поля E_x и H_y через некоторую вспомогательную функцию ψ , можно свести систему уравнений первого порядка (2.2), (2.3) к одному уравнению второго порядка для функции ψ . Такое преобразование можно выполнить двумя разными способами:

1) вспомогательная функция ψ выбирается так, чтобы уравнение (2.2) обращалось в тождество, а сама функция ψ определялась уравнением (2.3);

2) функция ψ , обращающая в тождество уравнение (2.3), определяется из уравнения (2.2).

Решения, построенные этими способами, целесообразно рассматривать отдельно.

1. Выразим компоненты волнового поля через вектор-потенциал \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.4)$$

В рассматриваемой геометрии задачи (2.2), (2.3) вектор-потенциал имеет лишь одну компоненту A_x ($A_y = A_z = 0$); выражая компоненту A_x через нормировочную константу A_0 и безразмерную функцию $\psi(z, t)$, можно записать уравнение (2.3), определяющее функ-

цию ψ , в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{n_0^2 U^2(z)}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5)$$

Неизвестная функция ψ определяется, как видно из (2.5), волновым уравнением с зависящей от координаты скоростью распространения волны.

Для решения уравнения (2.5) удобно ввести новые функции F и Q и новую переменную η [18]:

$$\psi = \frac{F}{\sqrt{U}}; \quad Q = U^{-1}; \quad \eta = \int_0^z U(z_1) dz_1. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) при этом преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = F \left[\frac{1}{2} Q \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (2.7)$$

Функция $Q(z)$ до сих пор остается неизвестной.

Рассмотрим, например, простое частное решение уравнения (2.7), соответствующее функции Q , определяемой условиями

$$\frac{1}{2} Q \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right)^2 = p^2. \quad (2.8)$$

Здесь p^2 — некоторая постоянная, которая будет определена ниже. Предполагая гармоническую зависимость поля F от времени, можно переписать уравнение (2.7) с учетом (2.8) в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \left(\frac{n_0^2 \omega^2}{c^2} - p^2 \right) F = 0. \quad (2.9)$$

Отметим, что координата η (2.6) пропорциональна длине фазового пути волны L_p в неоднородной среде: $L_p = n_0 \eta$. Уравнение (2.9) описывает синусоидальную волну, бегущую в направлении η :

$$F \sim \exp[i(q\eta - \omega t)].$$

Подставляя это выражение для функции F в (2.9), можно представить безразмерный вектор-потенциал ψ в виде бегущей волны с пространственно-модулированной амплитудой:

$$\psi = \frac{\exp[i(q\eta - \omega t)]}{\sqrt{U(z)}},$$

$$q = kN; \quad k = \frac{\omega n_0}{c}; \quad N = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}; \quad \Omega^2 = \frac{p^2 c^2}{n_0^2}. \quad (2.10)$$

Фактор N (2.10) при $p^2 > 0$ аналогичен показателю преломления для волн, распространяющихся в волноводе с частотой отсечки Ω . Чтобы вычислить из (2.10) компоненты электромагнитного поля E_x и E_y , нужно найти из (2.8) функцию $Q = U^{-1}$, определить параметр p^2 и выразить переменную η через координату z . Профиль $U(z)$, допускающий представление поля ψ в виде (2.10), дается решением уравнения (2.8):

$$U(z) = \left(1 + s_1 \frac{z}{L_1} + s_2 \frac{z^2}{L_2^2} \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

$$s_1 = 0, \pm 1, \quad s_2 = 0, \pm 1.$$

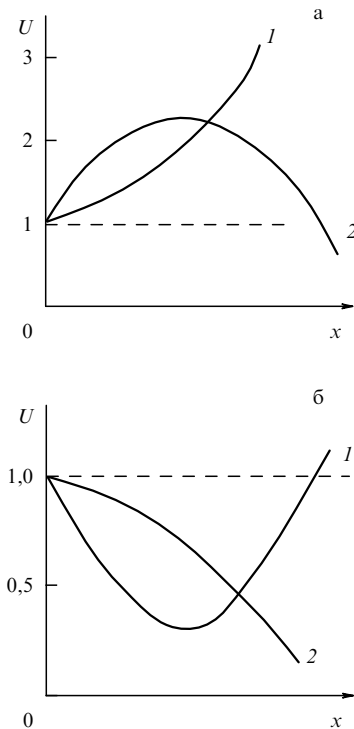


Рис. 1. Точно решаемые модели пространственных профилей нормированной диэлектрической проницаемости U (2.11), $x = zL_1^{-1}$: (а) кривая 1 соответствует случаю $s_1 = -1, s_2 = +1$, для кривой 2 знаки s одинаковые: $s_1 = s_2 = -1$; (б) кривая 1 соответствует случаю $s_1 = +1, s_2 = -1$, кривая 2 — случаю $s_1 = s_2 = +1$.

Здесь L_1 и L_2 — свободные параметры модели (2.11), имеющие смысл характерных пространственных масштабов неоднородности диэлектрической проницаемости. Распределения (2.11) показаны на рис. 1. Если знаки s_1 и s_2 совпадают, то зависимости $U(z)$ монотонны; при разных знаках s_1 и s_2 возникают экстремумы функций $U(z)$:

$$U_{\max} = (1 - y^2)^{-1}; \quad U_{\min} = (1 + y^2)^{-1}; \quad y = \frac{L_2}{2L_1}. \quad (2.12)$$

В предельном случае $L_2 \rightarrow \infty$ функция (2.11) соответствует профилю (1.1), точное решение для которого указано Рэлеем [1].

Подставив (2.11) в (2.8), получим выражение для параметра p^2 :

$$p^2 = \frac{s_1^2}{4L_1^2} - \frac{s_2}{L_2^2}. \quad (2.13)$$

В зависимости от соотношения характерных длин L_1 и L_2 и знаков s_1 и s_2 параметр p^2 может принимать положительное, отрицательное или нулевое значение. В каждом из этих случаев переменная η (2.6) представляется различными формулами. Так, например,

$$\eta \Big|_{p^2 > 0, s_2 < 0} = \frac{L_2}{\sqrt{1 + y^2}} \operatorname{artanh} \frac{zL_2^{-1} \sqrt{1 + y^2}}{1 + s_1 z / 2L_1}, \quad (2.14)$$

$$\eta \Big|_{p^2 > 0, s_2 > 0} = \frac{L_2}{\sqrt{y^2 - 1}} \operatorname{artanh} \frac{zL_2^{-1} \sqrt{y^2 - 1}}{1 + s_1 z / 2L_1}, \quad y^2 > 1, \quad (2.15)$$

$$\eta \Big|_{p^2 < 0, s_2 > 0} = \frac{L_2}{\sqrt{1-y^2}} \arctan \frac{zL_2^{-1} \sqrt{1-y^2}}{1+s_1z/2L_1}, \quad y^2 < 1. \quad (2.16)$$

В пределе $L_2 \rightarrow \infty$ переменная η имеет вид

$$\eta = L_1 \ln \left(1 + \frac{z}{2L_1} \right).$$

Случай $p^2 = 0$ рассмотрен ниже. Теперь все величины, определяющие вектор-потенциал ψ (2.10), выражены через параметры неоднородности.

Полученные результаты позволяют выявить эффект нелокальной дисперсии неоднородного диэлектрика (2.11). Этот эффект, определяемый параметрами профиля $U(z)$ L_1, L_2, s_1 и s_2 , описывается фактором N (2.10). В случае $p^2 > 0$ среда характеризуется нормальной дисперсией

$$N = \sqrt{1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2}}, \quad \Omega_1^2 = \frac{c^2(1+y^2)}{n_0^2 L_2^2}. \quad (2.17)$$

В противоположном случае ($p^2 < 0$) неоднородность диэлектрической проницаемости приводит к аномальной дисперсии

$$N = \sqrt{1 + \frac{\Omega_2^2}{\omega^2}}, \quad \Omega_2^2 = \frac{c^2(1-y^2)}{n_0^2 L_2^2}. \quad (2.18)$$

Следует подчеркнуть, что найденные характерные частоты Ω_1 и Ω_2 обусловлены только параметрами неоднородности и не связаны с материальной дисперсией среды. Влияние характерных частот Ω_1 и Ω_2 на отражение волн от неоднородного диэлектрика обсуждается в разделах 4, 5.

Таким образом, решение уравнений (2.2), (2.3) с помощью первого способа позволило представить поле в неоднородном диэлектрике (2.11) в виде модулированных бегущих волн. Прежде чем обсуждать свойства таких полей, целесообразно остановиться на других точно решаемых профилях неоднородности в диэлектриках, описываемых в рамках второго способа.

2. В отличие от представления (2.4) можно свести систему (2.2), (2.3) к одному уравнению, введя неизвестную функцию Θ формулами [19]

$$E_x = \frac{B_0}{U^2(z)} \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \quad H_y = -\frac{B_0 n_0^2}{c} \frac{\partial \Theta}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Здесь B_0 — нормировочная константа. При подстановке (2.19) в систему (2.2), (2.3) уравнение (2.3) обращается в тождество, а функция Θ определяется уравнением, следующим из (2.2):

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{n_0^2 U^2(z)}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{2}{U} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) решается по той же схеме, что и уравнение (2.5). Вводим новые функции f и Q и используем переменную η (2.6):

$$\Theta = f\sqrt{U}, \quad Q = U^{-1/2}. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.20) с учетом (2.21) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{f}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}. \quad (2.22)$$

Рассмотрим профили неоднородности, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} = p^2 Q, \quad (2.23)$$

где p^2 — некоторая постоянная. В зависимости от знака этой постоянной распределения $U = Q^{-2}$, описываемые уравнением (2.23), могут быть представлены в форме

$$U \Big|_{p^2 > 0} = [\cosh(p\eta) + M \sinh(p\eta)]^{-2}, \quad p^2 > 0, \quad (2.24)$$

$$U \Big|_{p^2 < 0} = [\cos(p_1\eta) + M_1 \sin(p_1\eta)]^{-2}, \quad p_1^2 = -p^2 > 0. \quad (2.25)$$

Постоянные M и p^2 определяются параметрами профиля $U(z)$. Случай $p^2 = 0$ рассмотрен отдельно.

При выполнении условия (2.23) функция f (2.22) описывается в переменных η, t бегущей волной, а решение уравнения (2.20) имеет вид пространственно модулированной волны

$$\Theta = \sqrt{U(z)} \exp[i(q\eta - \omega t)]. \quad (2.26)$$

Волновое число q в (2.26) определено в (2.10); однако профиль $U(z)$, параметр p^2 и переменную η нужно вычислить заново. Такое рассмотрение удобно провести отдельно для случаев $p^2 > 0$ и $p^2 < 0$. Введем характерный масштаб неоднородности

$$L = |p|^{-1} \quad (2.27)$$

и рассмотрим два случая.

Случай 1: $p^2 > 0$. Выражая переменную η из (2.24) и сравнивая с определением η (2.6), находим уравнение для профиля $U(z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \pm \frac{2U^2}{L} \sqrt{1 - U(1 - M^2)}, \quad 0 \leq M \leq 1. \quad (2.28)$$

Знаки "+" и "-" в правой части (2.28) соответствуют возрастающей и убывающей зависимости $U(z)$. Решая это уравнение со знаком "+", можно исследовать рост безразмерной функции U от значения $U = 1$ на границе среды до максимального значения $U_{\max} = (1 - M^2)^{-1}$:

$$\frac{z}{L} = \frac{1}{2} \left[M - \frac{\sqrt{1 - U(1 - M^2)}}{U} + (1 - M^2) \operatorname{artanh} \frac{U - 1}{\sqrt{1 - U(1 - M^2)} + MU} \right]. \quad (2.29)$$

Расстояние от границы до точки максимума U_{\max} составляет z_m :

$$\frac{z_m}{L} = \frac{1}{2} \left[M - (1 - M^2) \operatorname{artanh} M \right]. \quad (2.30)$$

Профиль неоднородности U после максимума ($z \geq z_m$) определяется падающей ветвью решения урав-

нения (2.28), соответствующей знаку "–" в правой части этого уравнения:

$$\frac{z - z_m}{L_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1 - U(1 - M^2)}}{U} + (1 - M^2) \operatorname{artanh} \sqrt{1 - U(1 - M^2)} \right]. \quad (2.31)$$

Это решение описывает уменьшение U от $U = U_{\max}$ до $U = 1$.

Зависимости (2.24) и (2.31) характеризуют семейство профилей $U(z)$ с двумя свободными параметрами M и L (рис. 2а). В отличие от явного выражения для функции $U(z)$ (2.11), полученного в рамках первого способа, профиль (2.29) выражен с помощью обратной функции $z = z(U)$. Эта функция непрерывна вместе с первой производной в точке максимума z_m , где касаются обе ветви. Существенно, что эта непрерывность сохраняется, даже если значения параметров L и L_2 , характеризующие ветви (2.29) и (2.31), различны; при этом случаи $L = L_2$ и $L \neq L_2$ соответствуют симметричному и асимметричному относительно максимума U_{\max} профилям $U(z)$.

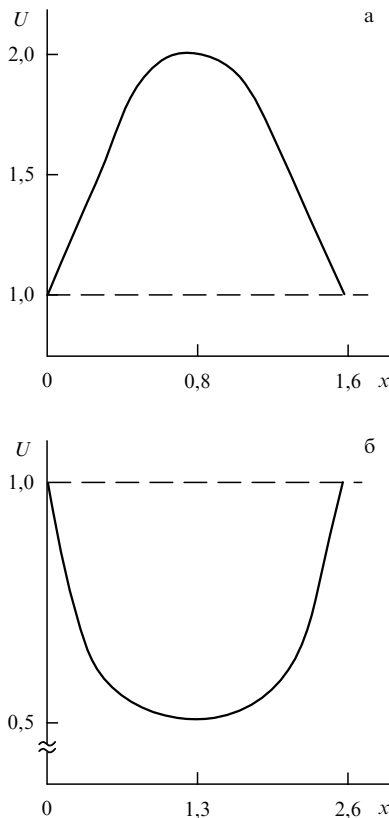


Рис. 2. Зависимости $U(x)$, $x = zL^{-1}$: (а) в модели (2.29), $M = 0,7$, (б) в модели (2.33), $M = 0,5$.

Случай 2: $p^2 < 0$, $p^2 = -p_1^2$, $L_1 = |p_1|^{-1}$. Анализ выполняется по той же схеме, что и в случае $p^2 > 0$. Пользуясь соотношением (2.25), можно записать дифференциальное уравнение для $U(z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \pm \frac{2U^2}{L_1} \sqrt{U(1 + M_1^2) - 1}. \quad (2.32)$$

Падающая и возрастающая ветви решения уравнения (2.32), определяющие уменьшение функции U от точки $U = 1$ до точки минимума $U(z_1) = (1 + M_1^2)^{-1}$ и последующий рост U от минимума до значения $U(z = z_3) = 1$, описываются решениями уравнения (2.32):

$$\begin{aligned} \frac{z}{L_1} &= \frac{1}{2} \left[M_1 - \frac{\sqrt{U(1 + M_1^2) - 1}}{U} + (1 + M_1^2) \operatorname{arctan} \frac{1 - U}{\sqrt{U(1 + M_1^2) - 1} + M_1 U} \right], \\ \frac{z - z_1}{L_3} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{U(1 + M_1^2) - 1}}{U} + (1 + M_1^2) \operatorname{arctan} \sqrt{U(1 + M_1^2) - 1} \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Рост и падение функции U показаны на рис. 2б.

Найдем теперь длину фазового пути η (2.6) для профилей (2.30) и (2.33). Поскольку зависимость $U(z)$ задана с помощью обратных функций $z = z(U)$, удобно использовать дифференциальное выражение для η в виде $d\eta = U dz$. Подставляя сюда значение dz из (2.28), можно переписать формулу (2.6) в виде

$$\eta = \frac{L}{2} \int_1^U \frac{dU_1}{U_1 \sqrt{1 - U_1(1 - M^2)}}. \quad (2.34)$$

Вычисляя интеграл (2.34), получаем

$$\eta = \frac{L}{2} \ln \frac{\tan[(1/2) \arcsin \sqrt{U(1 - M^2)}]}{\tan[(1/2) \arcsin \sqrt{1 - M^2}]}. \quad (2.35)$$

Длина фазового пути для профиля (2.33) находится аналогично:

$$\begin{aligned} \eta &= 2L \left[\operatorname{arctan}(M + \sqrt{1 + M^2}) - \operatorname{arctan} \left(\sqrt{U(1 + M^2)} + \sqrt{U(1 + M^2) - 1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Таким образом, поле в неоднородных диэлектриках, характеризуемых профилями $z(U)$, заданными с помощью обратных функций (2.30) и (2.33), также представляется в виде бегущей волны (2.26) в пространстве фазовых траекторий. Нелокальная дисперсия таких сред, обусловленная неоднородностью $\epsilon(z)$, описывается параметром N (2.10). Нормальная и аномальная дисперсии определяются формулами (2.17) и (2.18) с характерными частотами, соответствующими профилям (2.30) и (2.33):

$$\Omega_1^2 = \frac{c^2}{n_0^2 L^2}, \quad \Omega_2^2 = \frac{c^2}{n_0^2 L_1^2}. \quad (2.37)$$

Несмотря на различие формул, описывающих модели неоднородного диэлектрика (2.11) и (2.29), можно отметить некоторые общие свойства этих моделей.

1. При определении волнового числа $q = \omega n_0 c^{-1} N$ (2.10) не учитывается локальная частотная дисперсия показателя преломления $n_0(\omega)$. Изменение волнового числа Δq в полосе частот $\Delta \omega$ под действием этого

эффекта характеризуется отношением

$$\Delta q q^{-1} = \Delta \omega n_0^{-1} \frac{\partial n_0}{\partial \omega}.$$

Вдали от резонансных частот это отношение мало: $\Delta q q^{-1} \lesssim 10^{-2}$. В то же время нелокальная дисперсия, характеризуемая частотами $\Omega_{1,2}$, может существенно изменить не только величину q , но и сам характер распространения, например, для частот $\omega < \Omega_1$.

2. При анализе моделей (2.11) и (2.29) предполагалось, что масштабы распределения неоднородности L существенно меньше характерных длин поглощения волн; при этом поглощение не учитывалось, а значения L были действительными. Однако эти же модели легко обобщаются и на случай поглощающего диэлектрика с неоднородным распределением комплексной диэлектрической проницаемости. В этом случае параметры L_1 и L_2 — комплексные величины: $L = \text{Re } L + i \text{Im } L$.

3. Бегущие волны (2.10) описывают лишь одно из решений уравнения (2.9) — прямую волну. Второе решение этого уравнения (обратная волна) соответствует замене в решении (2.10) множителя $\exp(iq\eta)$ на $\exp(-iq\eta)$.

3. Когда ВКБ-приближение дает точные решения волнового уравнения?

Решение одномерного волнового уравнения для среды с зависящим от координаты показателем преломления (2.10) является традиционным примером построения приближенных решений в рамках ВКБ-метода [9]. Такой метод, основанный на предположении о медленном изменении показателя преломления на расстоянии длины волны, позволяет записать приближенное решение уравнения (2.10) в виде

$$\psi = [U(z)]^{-1/2} \exp \left[i \left(k \int U dz - \omega t \right) \right], \quad k = \frac{\omega n_0}{c}. \quad (3.1)$$

Сравнивая (3.1) с точным решением (2.10), легко найти, что эти решения совпадают в случае $k = q = \omega n_0 N c^{-1}$. Иными словами, решение (3.1) является точным, когда параметр N (2.10) равен единице, т.е.

$$p = 0. \quad (3.2)$$

Как видно из определения величины p^2 (2.13), характерные длины неоднородности L_1 и L_2 связаны в этом случае соотношением $L_2 = 2L_1$. Профиль $\varepsilon(z)$, соответствующий (3.2), определяется из (2.11):

$$\varepsilon(z) = n_0^2 \left(1 + \frac{s_1 z}{2L_1} \right)^{-4}. \quad (3.3)$$

Координата η (2.6) для профиля (3.3) дается выражением

$$\eta = z \left(1 + \frac{s_1 z}{2L_1} \right)^{-1}. \quad (3.4)$$

Решение (3.1) соответствует ВКБ-приближению для уравнения (2.5), возникающего при преобразовании уравнений Максвелла (2.2), (2.3) с помощью функции ψ (2.4). Преобразование этих же уравнений с помощью функции Θ (2.19) приводит к уравнению (2.20). Прибли-

женное решение (2.20), полученное в рамках ВКБ-метода, имеет вид

$$\Theta = \sqrt{U(z)} \exp \left[i \left(k \int U dz - \omega t \right) \right]. \quad (3.5)$$

По аналогии со случаем (3.1) можно показать, что выражение (3.5) является точным решением уравнения (2.5), если выполнено условие $p = 0$ (3.2). Профиль диэлектрической проницаемости и длину фазового пути η можно найти из уравнений (2.21) и (2.23):

$$\varepsilon(z) = n_0^2 \left(1 + \frac{z}{L} \right)^{-4/3}, \quad (3.6)$$

$$\eta = 3L \left[\left(1 + \frac{z}{L} \right)^{1/3} - 1 \right]. \quad (3.7)$$

Найденные выражения (3.3) и (3.6) описывают профили диэлектрической проницаемости, для которых ВКБ-приближения совпадают с точными решениями. В силу условия (3.2) нелокальная дисперсия для волн, распространяющихся в этих средах, не возникает.

Таким образом, ВКБ-приближения для уравнений поля (2.5) и (2.20) можно рассматривать как частные случаи общих решений, найденных с помощью преобразования уравнений Максвелла (2.2), (2.3) в пространстве фазовых траекторий $\eta = \eta(z)$. Иными словами, в отсутствие искусственной дисперсии неоднородного слоя $p = 0$ неоднородность приводит к изменению амплитуды и фазы поля, но волновое число q в процессе распространения не меняется. Аналогичный эффект рассмотрен в разделе 8 и для нестационарных сред: при определенной зависимости диэлектрической проницаемости от времени (8.40) длина волны излучения, распространяющегося в такой среде, сохраняется.

4. Широкополосные безотражательные свойства неоднородных диэлектрических слоев

В разделе 2 отмечалось, что распределения диэлектрической проницаемости (2.11) и (2.29) удобны для описания оптически неоднородных слоев конечной толщины и, в частности, тонких пленок. Такие пленки, нанесенные на поверхность, широко используются для изменения отражательной способности этой поверхности. В результате интерференции волн, отраженных от поверхности и от покрывающей ее пленки, возможно взаимное гашение отраженных волн. Такая ситуация возникает, например, при нормальном падении волны из воздуха на пленку толщины d , покрывающую полупространство с показателем преломления n_1 . Если величины d и n_1 связаны с длиной волны λ и показателем преломления материала пленки n_0 соотношениями

$$n_1 = n_0^2; \quad \lambda_m = \frac{4n_0 d}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

то, как известно [23], все волны проходят в полупространство, покрытое пленкой, без отражения ("четвертьволновая" пластинка). Однако такой резонансный эффект возникает в однородном слое лишь для дискретного спектра волн (4.1). Для создания широкополосных безотражательных покрытий представляют интерес неоднородные диэлектрические слои со специальным профилем диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$. В

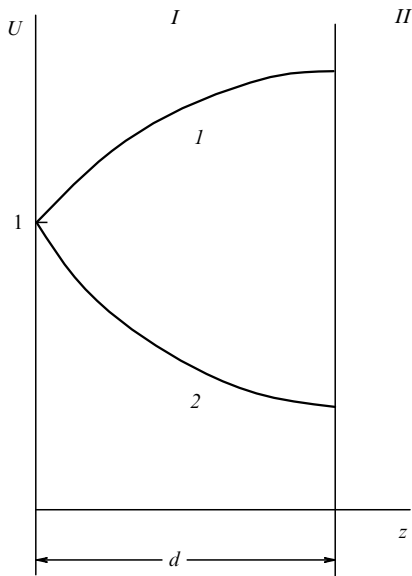


Рис. 3. Переходный слой I неоднородного диэлектрика толщины d на поверхности однородного поглощающего диэлектрика II. Кривые 1 и 2 соответствуют случаям нормальной и аномальной нелокальной дисперсии в модели $U(z)$ (2.11).

последние годы разработаны способы получения таких покрытий на основе полимеров [20], полупроводниковых материалов типа ZnSe [21] и азотистых соединений кремния [22].

Чтобы оптимизировать отражательные свойства неоднородного слоя в широком диапазоне частот, можно использовать эффекты искусственной дисперсии (см. раздел 2). Рассмотрим пластину толщины d с профилем показателя преломления $n(z) = n_0 U(z)$, покрывающую поверхность оптически однородного материала с комплексным показателем преломления $n_2 + i\kappa_2$ (рис. 3); безразмерную функцию $U(z)$ примем в виде (2.11). Предположим, что волна с частотой ω падает из воздуха нормально к поверхности пластины $z = 0$. Электрическая E_x и магнитная H_y , составляющие волнового поля в материале пластины ($0 \leq z \leq d$) для профиля $U(z)$ (2.11) определяются при подстановке вектор-потенциала (2.10) в формулы (2.4):

$$\begin{aligned} E_x &= iA_1 \omega c^{-1} U^{-1/2} \exp[i(q\eta - \omega t)], \\ H_y &= iA_1 \omega n_0 c^{-1} U^{1/2} (N - iG) \exp[i(q\eta - \omega t)], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$G = \frac{c}{2\omega n_0} \left(\frac{s_1}{L_1} + \frac{2s_2 z}{L_2^2} \right). \quad (4.3)$$

Здесь A_1 — нормировочная константа, значение величины N дано в (2.10), $n_0, L_{1,2}, s_{1,2}$ — параметры модели (2.11).

Полное поле внутри пластины, найденное с учетом волны, отраженной от поверхности $z = d$, можно записать в виде

$$E_x = i\omega A_1 c^{-1} U^{-1/2} [\exp(iq\eta) + K \exp(-iq\eta)] \exp(-i\omega t), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} H_y &= i\omega A_1 n_0 c^{-1} U^{1/2} \left\{ N [\exp(iq\eta) - K \exp(-iq\eta)] - \right. \\ &\quad \left. - iG [\exp(iq\eta) + K \exp(-iq\eta)] \right\} \exp(-i\omega t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В выражениях (4.4), (4.5) предполагается, что амплитуды прямой и отраженной волн равны соответственно 1 и K . Составляющие волнового поля в воздухе ($z \leq 0$) можно записать, вводя коэффициент отражения по электрическому полю R [23]:

$$\begin{aligned} E_x &= i\omega A_0 c^{-1} [\exp(ikz) + R \exp(-ikz)] \exp(-i\omega t), \\ H_y &= i\omega A_0 c^{-1} [\exp(ikz) - R \exp(-ikz)] \exp(-i\omega t), \\ k &= \omega c^{-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подстановка выражений (4.4)–(4.6) в условия непрерывности электрической и магнитной составляющих поля на границе $z = 0$ ($\eta = 0$) позволяет представить величину R в виде

$$R = \frac{1 - B}{1 + B}, \quad B = n_0 \left[N \left(\frac{1 - K}{1 + K} \right) - iG_0 \right]. \quad (4.7)$$

Параметр G_0 в (4.7) связан с параметром G (4.3):

$$G_0 = G \Big|_{z=0} = \frac{cs_1}{2\omega n_0 L_1}. \quad (4.8)$$

Формула для коэффициента отражения R (4.7) содержит неизвестную величину K , которая вычисляется из условий непрерывности E_x и H_y на границе $z = d$. Представляя вектор-потенциал бегущей волны в области $z \geq d$ в виде

$$A_2 \exp[i(n_2 + i\kappa_2)(z - d) - i\omega t],$$

можно найти значение K :

$$K = - \frac{n_2 + i\kappa_2 + P_1}{n_2 + i\kappa_2 - P_1} \exp(2iq\eta_1), \quad (4.9)$$

$$\eta_1 = \eta(d), \quad U_1 = U(d), \quad G_1 = G(d),$$

$$P_1 = n_0 U_1 (N - iG_1). \quad (4.10)$$

После подстановки K (4.9) в формулу, определяющую B (4.7), разделим действительную и мнимую части этого выражения:

$$B = \text{Re } B + i \text{Im } B, \quad (4.11)$$

$$\text{Re } B = [n_0^2 N^2 U_1 (1 + t^2)] n_2 \Delta^{-1}, \quad t = \tan(q\eta_1), \quad (4.12)$$

$$\Delta = n_2 t^2 + [\kappa_2 t + n_0 U_1 (N + G_1 t)]^2, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } B &= n_0 N \Delta^{-1} \left\{ t + n_2^{-2} [\kappa_2 + n_0 U_1 (G_1 - N t)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [\kappa_2 t + n_0 U_1 (N + G_1 t)] \right\} - n_0 G_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Зная значения $\text{Re } B$ (4.12) и $\text{Im } B$ (4.14), можно найти из (4.7) комплексный коэффициент отражения R .

Амплитуда и фаза коэффициента R существенно зависят от характерных длин неоднородности L_1, L_2 и значений s_1 и s_2 .

Эта зависимость проявляется, в частности, во влиянии искусственной частотной дисперсии (2.17), (2.18) на процессы отражения. Такое влияние легко иллюстрируется на примере упрощенной задачи об отражении от неоднородной прозрачной пластины, находящейся в воздухе ($n_2 = 1, \kappa_2 = 0$). Эффекты нормальной ($p^2 > 0$) и аномальной ($p^2 < 0$) искусственной дисперсии ниже рассматриваются отдельно.

1. $p^2 > 0$. В этом случае, соответствующем верхней кривой на рис. 3, среда характеризуется частотой отсечки Ω_1 (2.17). Вводя нормированную частоту волны $x_1 = \omega\Omega_1^{-1}$, можно записать выражение для параметра t (4.13) в виде

$$t = \tan\left(\sqrt{x_1^2 - 1} \operatorname{artanh} u_1\right),$$

$$u_1 = \left(dL_2^{-1} \sqrt{1 + y^2}\right) (1 + ydL_2^{-1})^{-1}. \quad (4.15)$$

Здесь и далее d — толщина слоя, области прозрачности соответствуют значения $x_1 > 1$. Пример частотной зависимости коэффициента отражения при $\omega > \Omega_1$ приведен на рис. 4.

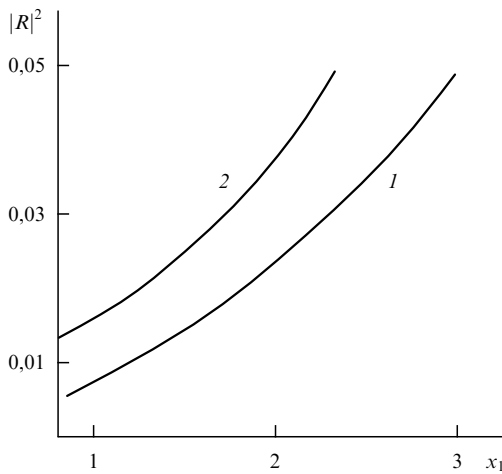


Рис. 4. Широкополосная слабоотражающая область в спектре отражения по мощности $|R|^2$ от неоднородного диэлектрического слоя с нормальной нелокальной дисперсией (рис. 3, кривая 1). Нормированная частота x_1 определена в (4.15), $n_0 = 1,73$. Влияние толщины слоя d и параметров L_1 и L_2 (2.11) отображают кривые 1 ($dL_2^{-1} = 0,15$) и 2 ($dL_2^{-1} = 0,3$); в обоих случаях $y = 1$.

2. $p^2 < 0$. Профилю показателя преломления для этого случая соответствует нижняя кривая на рис. 3. Находя коэффициент отражения при таком профиле $U(z)$, нужно использовать выражение для параметра t , соответствующее формуле (2.20):

$$t = \tan\left(\sqrt{1 + x_2^2} \arctan u_2\right),$$

$$u_2 = \left(dL_2^{-1} \sqrt{1 - y^2}\right) (1 - ydL_2^{-1})^{-1}, \quad x_2 = \omega\Omega_2^{-1}. \quad (4.16)$$

При аномальной дисперсии ($p^2 < 0$) эффект отсечки не возникает, а характерная частота Ω_2 определена в (2.18). Пример частотной зависимости коэффициента отражения для такой модели показан на рис. 5.

Теперь можно вернуться к более общему случаю отражения от неоднородного слоя, находящегося на поверхности поглощающего диэлектрика, с комплексным значением показателя преломления $n_2 + ix_2$ (см. рис. 3). Отражение волны, падающей на поверхность поглощающего диэлектрика из вакуума, характеризуется, как известно, сдвигом фазы φ_x , зависящим от поглощения [23]:

$$\tan \varphi_x = 2x(1 - n^2 - x^2)^{-1}. \quad (4.17)$$

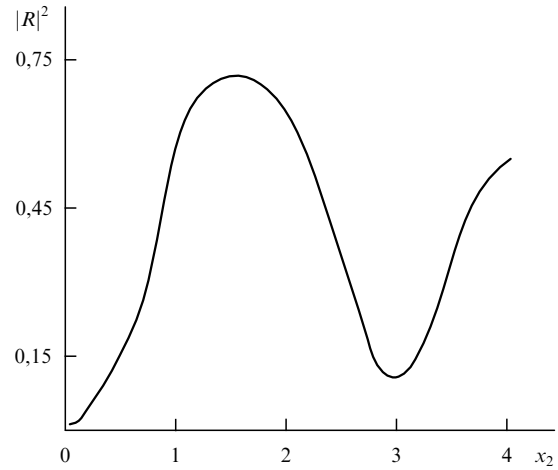


Рис. 5. Спектральная модуляция отражательных свойств неоднородного диэлектрического слоя толщины d с аномальной нелокальной дисперсией (рис. 3, кривая 2). $|R|^2$ — коэффициент отражения по мощности, x_2 — нормированная частота волны (4.16); профиль U в слое определен в (2.11), $L_2 = 1,5L_1$, $d = L_2$.

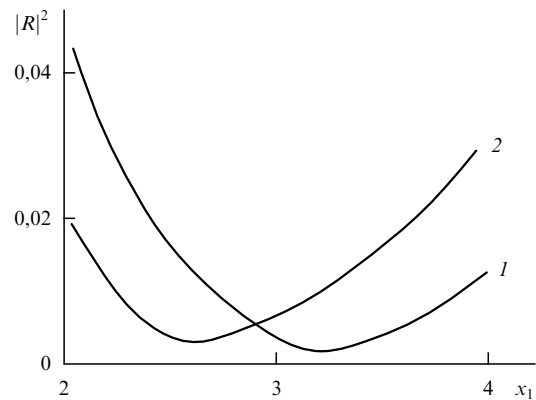


Рис. 6. Ослабление отражательных свойств диэлектрика с потерями, покрытого неоднородным диэлектрическим слоем $U(z)$ (2.11), под действием взаимной компенсации фазовых сдвигов в отраженной волне, обусловленных потерями и неоднородностью. $|R|^2$ — коэффициент отражения по мощности, x_2 — нормированная частота волны; влияние толщины d и параметров слоя L_1 и L_2 демонстрируют кривые 1 ($d = 0,25L_2$) и 2 ($d = 0,3L_2$). В обоих случаях $y = 0,25$.

Однако отражение от прозрачного неоднородного слоя также приводит к фазовому сдвигу, контролируемому в отличие от (4.17) профилем показателя преломления. Взаимная компенсация этих сдвигов может существенно изменить отражательные свойства системы, приводя, в частности, к малому отражению в широком спектральном диапазоне (рис. 6).

При увеличении характерных длин неоднородности частоты Ω_1 и Ω_2 стремятся к нулю, а формулы (4.11)–(4.14) переходят в известный результат для коэффициента отражения однородной пластины; так, при $x_2 = 0$ в пределе $L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow \infty$ получим

$$N_1 = U_1 = 1, \quad G_0 = G_1 = 0, \quad q\eta_1 = \omega n_0 d c^{-1} = \gamma,$$

$$\operatorname{Re} B = \frac{n_0^2 n_2^2}{n_2^2 \sin^2 \gamma + n_0^2 \cos^2 \gamma}, \quad \operatorname{Im} B = \frac{n_0(n_2^2 - n_0^2) \sin \gamma \cos \gamma}{n_2^2 \sin^2 \gamma + n_0^2 \cos^2 \gamma}. \quad (4.18)$$

На рисунках 4–6 прослеживаются следующие тенденции, характерные для отражательных свойств неоднородных слоев.

1. Частота отсечки Ω_1 для материала с данным значением показателя преломления n_0 зависит от характерных длин L_1 и L_2 . Варьируя параметры L_1 и L_2 , можно создать эффект отсечки в любом спектральном диапазоне. Так, в случае $n_0 = 1,73$, $L_1 = 100$ нм, $L_2 = 200$ нм частота Ω_1 составляет $1,25 \times 10^{14}$ Гц; как видно из рис. 4 (кривая, соответствующая значению $\alpha = dL_2^{-1} = 0,15$) коэффициент отражения по мощности $|R|^2$ от такого слоя при толщине $d = 30$ нм в спектральном диапазоне $0,5 < \lambda < 1,5$ мкм не превышает 5%. Эта же кривая показывает, что неоднородный слой, геометрические параметры которого возросли, например, в 10 раз ($L_1 = 1000$ нм, $L_2 = 2000$ нм, $d = 300$ нм), обеспечивает слабое отражение ($|R|^2 < 0,05$) в широкой полосе частот дальнего ИК-диапазона ($5 < \lambda < 15$ мкм).

Таким образом, выбирая соответствующие значения параметров L_1 , L_2 и s_1 , s_2 , можно оптимизировать с помощью рис. 4 параметры широкополосных безотражательных покрытий для разных участков спектра. Рисунок 4, так же как и следующий рис. 5, построен для нормированных частот $x = \omega\Omega^{-1}$ и различных толщин отражающего неоднородного слоя. Более конкретный пример влияния профиля $U(z)$ на спектр отражения слоя данной толщины приведен на рис. 7.

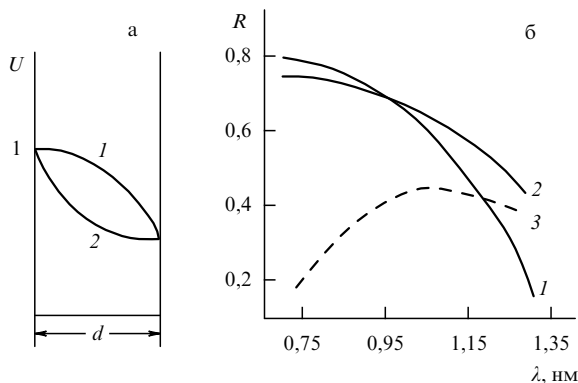


Рис. 7. Влияние градиента и кривизны профиля $U(z)$ на спектр отражения от неоднородного диэлектрического слоя заданной толщины d : (а) профили $U(z)$ (2.11) для случаев $s_1 = 0, s_2 = +1$ (кривая 1) и $s_1 = +1, s_2 = -1$ (кривая 2); (б) зависимость коэффициента отражения по мощности от длины волны λ . Кривые 1 и 2 соответствуют отражению от слоев с профилями неоднородности 1 и 2 на рис. 7а, $n_0 = 1,73, d = 120$ нм. Кривая 3 — спектр отражения от однородного слоя с теми же значениями показателя преломления n_0 и толщины d .

2. В случае аномальной искусственной дисперсии неоднородного слоя ($p^2 < 0$) возможно формирование частотных полос пропускания и усиленного отражения (см. рис. 5). Так, коэффициент отражения по мощности излучения CO_2 -лазера с длиной волны $\lambda = 10,2$ мкм от слоя с параметрами $n_0 = 1,73, y = 0,75, L_2 = d = 900$ нм ($x_2 = 1,45$) составляет, как видно из рис. 5, $|R|^2 = 0,73$. Значение этого же коэффициента для второй гармоники излучения ($x_2 = 2,9$) отличается на порядок: $|R|^2 = 0,07$. Это свойство представляет интерес для спектральной фильтрации отдельных гармоник поля.

3. Для определенной длины волны толщина безотражательного неоднородного слоя может быть в несколько

раз меньше, чем толщина однородной четвертьволновой пластинки d_1 (4.1). Так, для длины волны $\lambda = 10,2$ мкм при показателе преломления пластинки $n_0 = 1,73$ толщина d_1 составляет 1,45 мкм; в то же время, как видно из рис. 4, толщина неоднородного слоя, ограничивающего отражение волны с $\lambda = 10,2$ мкм на уровне $R = 0,01$, составляет ($\alpha = 0,15$) всего 0,3 мкм. Такое различие может быть использовано для оптимизации параметров безотражательных покрытий.

Анализ отражения от неоднородного диэлектрика выполнен здесь для профиля диэлектрической проницаемости (2.11). Аналогично можно рассмотреть профили (2.29) и (2.33). Так, в случае (2.29) компоненты волнового поля находятся при подстановке (2.26) в выражения (2.19):

$$E_x = \frac{iA_2q}{\sqrt{U(z)}} \left[1 \mp \frac{i}{qL} \sqrt{1 - U(1 - M^2)} \right] \exp[i(q\eta - \omega t)], \quad (4.19)$$

$$H_y = iA_2n_0^2c^{-1}\omega\sqrt{U(z)} \exp[i(q\eta - \omega t)]. \quad (4.20)$$

Знаки "+" и "-" в (4.19) соответствуют восходящей и падающей ветвям профиля $U(z)$ (см. рис. 2), длина фазового пути η определена в (2.35). Используя условия непрерывности компонент поля на границах слоя, можно найти амплитуду отраженной волны внутри слоя K (см. (4.9)) и вычислить коэффициент отражения R . Интересно сравнить рассмотренный здесь подход к расчету отражения неоднородного слоя с широко используемым методом замены гладкого распределения $U(z)$ ступенчатым профилем и описанием каждого слоя с помощью матриц Абеляса [25]. С одной стороны, формализм таких матриц позволяет найти численно коэффициент отражения R для любых многослойных покрытий. С другой стороны, с помощью набора профилей $U(z)$, включающих несколько свободных параметров, здесь построена стандартизованная схема анализа отражения от таких профилей — монотонных и немонотонных, симметричных и асимметричных. В отличие от численного счета найденные аналитические решения позволяют выявить ряд физических характеристик неоднородных сред: нелокальную дисперсию, частоту отсечки, полосы пропускания. Кроме того, в отличие от ряда точно решаемых моделей, приводящих к сложным гипергеометрическим функциям [4], структура поля в рассмотренных здесь моделях выражена через элементарные функции, что значительно ускоряет и облегчает вычисления.

5. Влияние градиента и кривизны профиля $\varepsilon(z)$ на нелокальную дисперсию периодических несинусоидальных диэлектрических структур

Отражение волн на границе двух однородных сред, обусловленное скачками показателя преломления, описывается известными формулами Френеля. Анализ отражательных свойств неоднородного слоя, выполненный в разделе 4, показывает зависимость отражения волны от скачка производной показателя преломления (фактор G_0 (4.8)) на границе слоя. Волновое число q (2.10) в модели (2.11) также зависит от значения L_1 . Однако модель (2.11) позволяет выявить и более сложный эффект — зависимость отражения от второй производной показателя

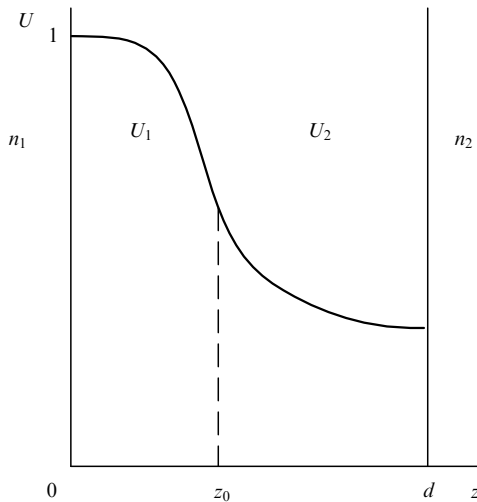


Рис. 8. Гладкий переходный слой толщины d , составленный из кривых U_1 и U_2 (5.1), касающихся в точке z_0 .

преломления среды, характеризуемой параметром L_2 . Именно этот эффект может стать определяющим при отражении волн от диэлектрика с периодической неоднородностью $\varepsilon(z)$.

Чтобы показать вклад второй производной $\partial^2 U / \partial z^2$ в эффективность отражения, рассмотрим случай, когда значения и показателя преломления, и его первой производной непрерывны на границе сред. Геометрия задачи показана на рис. 8: неоднородный слой толщины d разделяет области с показателем преломления n_1 ($z \leq 0$) и n_2 ($z \geq d$). Профиль показателя преломления в промежуточном слое $0 \leq z \leq d$ составлен из кривых U_1 и U_2 :

$$U_1 = \left(1 + \frac{z^2}{L_2^2}\right)^{-1},$$

$$U_2 = U_0 \left[1 + \frac{(d-z)^2}{l_2^2}\right]^{-1}, \quad U_0 = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.1)$$

Кривые U_1 и U_2 касаются гладко в некоторой точке z_0 . Значения показателей преломления n на границах слоя $z = 0$ и $z = d$ непрерывны, значения $\text{grad } n$ на границах слоя равны нулю; однако кривизна дуг U_1 и U_2 в точках $z = 0$ и $z = d$ различна:

$$\tilde{\kappa} = \frac{\partial^2 U / \partial z^2}{[1 + (\partial U / \partial z)^2]^{3/2}}, \quad \tilde{\kappa}_1 = -\frac{2}{L_2^2}, \quad \tilde{\kappa}_2 = \frac{2U_0}{l_2^2}. \quad (5.2)$$

В точке касания профилей U_1 и U_2 выполняются условия

$$U_1 \Big|_{z=z_0} = U_2 \Big|_{z=z_0}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=z_0}. \quad (5.3)$$

Подставляя (5.1) в (5.3), можно найти координату точки касания и связь параметров L_2 и l_2 , обеспечивающую гладкость касания. Предполагая для определенности, что $n_2 < n_1$, $U_0 < 1$, получаем

$$z_0 = \frac{d}{A_0}, \quad \frac{L_2^2}{d^2} A_0 = \frac{U_0}{1 - U_0}, \quad A_0 = 1 + \frac{U_0 l_2^2}{L_2^2}. \quad (5.4)$$

В формулах (5.4) один из параметров L_2 и l_2 является свободным.

Рассмотрим линейно поляризованную волну частоты ω , падающую из области $z < 0$ нормально к границе $z = 0$. Вектор-потенциал волнового поля ψ (2.11) для каждой среды, показанной на рис. 8, можно представить в виде

$$\psi = \exp(ik_1 z) + R \exp(-ik_1 z), \quad z \leq 0,$$

$$\psi = A_1 U_1^{-1/2} [\exp(iq_1 \eta_1) + Q_1 \exp(-iq_1 \eta_1)], \quad 0 \leq z \leq z_0,$$

$$\psi = A_2 U_2^{-1/2} [\exp(iq_2 \eta_2) + Q_2 \exp(-iq_2 \eta_2)], \quad z_0 \leq z \leq d,$$

$$\psi = D \exp(ik_2 z), \quad z \geq d. \quad (5.5)$$

Здесь R и D — коэффициенты отражения и пропускания неоднородного слоя, коэффициенты A_1 , A_2 и Q_1 , Q_2 определяются из условий непрерывности на плоскостях $z = 0$; $z = z_0$; $z = d$. Волновые числа k_1 , k_2 , q_1 , q_2 и величины η_1 , η_2 составляют

$$k_{1,2} = \omega c^{-1} n_{1,2}, \quad q_{1,2} = k_{1,2} N_{1,2},$$

$$N_1 = \sqrt{1 + \frac{c^2}{n_1^2 \omega^2 L_2^2}}; \quad N_2 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{n_2^2 \omega^2 l_2^2}}, \quad (5.6)$$

$$\eta_1(z) = \int_0^z U_1 dz_1; \quad \eta_2(z) = \eta_1(z_0) + \int_{z_0}^z U_2 dz_1. \quad (5.7)$$

Как видно из (5.6), волновые числа k_1 , k_2 , q_1 и q_2 , характеризующие структуру поля в четырех областях, показанных на рис. 8, различны; поэтому отраженная и прошедшая волны формируются в результате отражений на границах $z = 0$, $z = z_0$, $z = d$. Существенно, что на всех этих плоскостях показатели преломления и их градиенты непрерывны, а отражения возникают в точках перегиба профиля (5.2) из-за скачков кривизны профиля $\tilde{\kappa}$ в этих точках. Расчет коэффициента отражения аналогичен расчету, выполненному в разделе 4 для монотонного слоя. Следует отметить, что величины R и D находятся с помощью преобразования (2.6) без разложения периодической функции в ряд Фурье.

Комбинируя модели (2.11) и (2.29), можно построить и более сложные профили глубоко модулированных, несинусоидальных периодических профилей $U(z)$ с непрерывным распределением показателя преломления. Так, представляет интерес профиль, составленный из выпуклых (U_1) и вогнутых (U_2) кривых (2.11); при этом функциям U_1 и U_2 соответствуют значения параметров $s_1 = -1$, $s_2 = +1$ и $s_1 = +1$, $s_2 = -1$. Для простоты анализа предположим, что касание этих кривых происходит в точках z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), лежащих на прямой $U_1 = U_2 = 1$. Для каждой дуги U_n и U_{n+1} расстояние между соседними точками касания $d_n = z_{n+1} - z_n$ и наклон касательных в этих точках определяются масштабами неоднородности L_1 и L_2 :

$$d_n = \frac{L_2^2}{L_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{U=1} = \pm \frac{1}{L_1}. \quad (5.8)$$

Знаки "+" и "-" в (5.8) соответствуют переходу от выпуклой (вогнутой) к вогнутой (выпуклой) дуге. Для гладкости касания требуется, чтобы значение L_1 для всех дуг было постоянным. Продолжая профиль U с учетом условия $L_1 = \text{const}$, получим гладкое периодическое распределение нормированного профиля показателя преломления U , показанное на рис. 9.

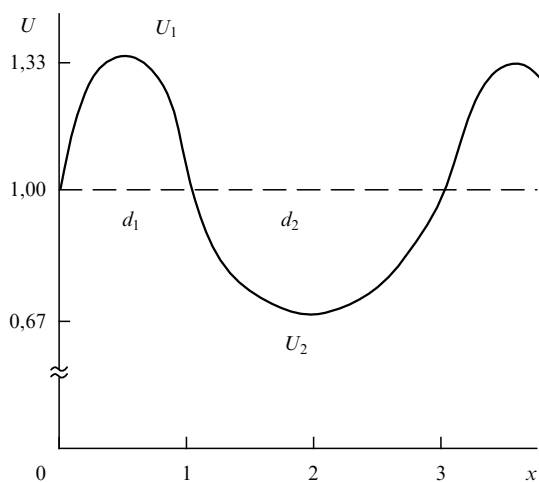


Рис. 9. Пространственная модуляция профиля нормированного показателя преломления $U(x)$, составленного из "полуволн модуляции" U_1 и U_2 (2.11), $x = zL_1^{-1}$; длины "полуволн" d_1 и d_2 (5.8) соответствуют значениям $y_1^2 = 0,25$; $y_2^2 = 0,5$.

Найденное распределение $U(z)$ существенно отличается от часто рассматриваемых периодических структур, обусловленных гармонической модуляцией показателя преломления, а именно:

1) уклонения максимума и минимума профиля $U(z)$ от значения $U = 1$ не равны:

$$U_{\max} = (1 - y^2)^{-1}, \quad U_{\min} = (1 + y^2)^{-1}, \quad y = \frac{L_2}{2L_1}; \quad (5.9)$$

2) длины "полуволн модуляции" d_1 и d_2 (5.8) различны, если значения параметра L_2 для соседних кривых U_1 и U_2 не равны;

3) составляя непрерывный профиль W из кривых (2.11) с различными, но периодически повторяющимися значениями параметра L_2 ($L_1 = \text{const}$), можно найти коэффициенты отражения и пропускания модулированных структур сложной симметрии, например двоякопериодических структур.

Аналогично рассчитывается и периодический профиль, составленный из дуг U_1 и U_2 (см. рис. 2). Сравнивая выражения (2.28) и (2.32), определяющие наклон этих кривых, получим условие гладкости касания U_1 и U_2 в точках z_n , лежащих на прямой $U_1 = U_2 = 1$:

$$\frac{M}{L} = \frac{M_1}{L_1}. \quad (5.10)$$

Значения волновых чисел q_1 и q_2 (5.6) волны, распространяющейся на участках U_1 и U_2 , различны, так как согласно (2.24) и (2.25) $p^2 > 0$, $p_1^2 < 0$. Поэтому распространение волны сопровождается отражениями в точках z_n . Аналогичные отражения возникают и в точках касания дуг U_1 и U_2 (см. рис. 8), поскольку значения параметра p^2 для участков U_1 и U_2 не равны:

$$p_1^2 = \frac{1}{4L_1^2} - \frac{1}{L_2^2}; \quad p_2^2 = \frac{1}{4L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}. \quad (5.11)$$

В отличие от рассмотренных случаев комбинация моделей (2.11) и (2.34) позволяет построить интересный

пример непрерывного периодического профиля $U(z)$, характеризуемого постоянным значением волнового числа q на выпуклых и вогнутых участках профиля. Так, представляя выпуклую часть U_1 с помощью (2.11), где $s_1 = +1$, $s_2 = -1$, а вогнутую U_2 с помощью (2.29), запишем условие равенства волновых чисел q_1 и q_2 :

$$\frac{1}{4L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} = \frac{1}{L^2}. \quad (5.12)$$

Условие (5.12) должно выполняться совместно с условием гладкости профиля в точках $U = 1$

$$LL_1^{-1} = 2M. \quad (5.13)$$

Подставив (5.12) в (5.13), получим связь параметров $y = L_2(2L_1)^{-1}$ и M для полуволн модуляции U_1 и U_2 при гладком касании:

$$y^2 = M^2(1 - M^2)^{-1}. \quad (5.14)$$

Профиль (5.14) показан на рис. 10. Однако даже в этом случае ($q_1 = q_2$) в точке касания кривых U_1 и U_2 будет происходить отражение волны. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить выражение для компонент поля в области U_1 (4.2), (4.3) с соответствующими компонентами поля в области U_2 (4.19), (4.20). Так, например, требование непрерывности электрической компоненты поля при $z = d$, $U = 1$ привело бы при отсутствии отражения к невыполнимому условию: $n_0 N(1 - iM) = 1$, где n_0 , N , M — действительные величины. Возникновение отражения связано со скачками кривизны профиля в точке $z = d$.

Таким образом, комбинация моделей (2.11)–(2.29) позволяет построить широкие классы точно решаемых моделей неоднородных диэлектриков с несинусоидальными периодическими распределениями $\varepsilon(z)$. В рамках этих моделей можно представить аналитически вклад разрывов как показателя преломления, так и его первой и второй производных в формирование отраженной и прошедшей волн.

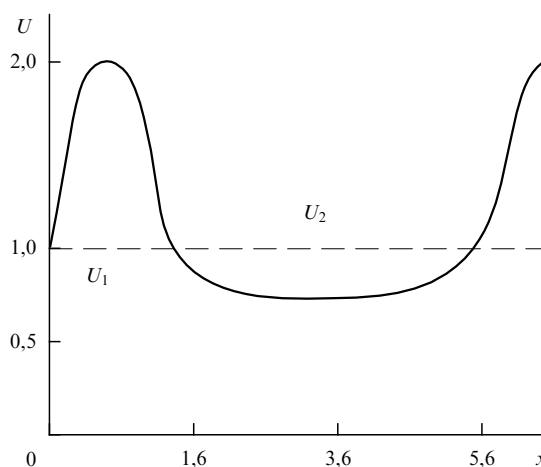


Рис. 10. Модулированный профиль $U(x)$, $x = zL^{-1}$, обеспечивающий постоянную дисперсию волн, составлен из кривых U_1 (2.29) и U_2 (2.11), касающихся на уровне $U = 1$ (5.14). Волновые числа q в областях U_1 и U_2 определяются по формулам (2.10) и (2.27) соответственно, $M = 0,5$.

6. Дисперсия высокочастотных волн в плазме с монотонным и немонотонным распределением плотности

Распространение волн в диэлектрических средах рассматривалось выше вдали от резонансных частот; при этом предполагалось, что локальные эффекты материальной дисперсии незначительны по сравнению с дисперсионными эффектами, вызванными неоднородным распределением диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$. Однако для ряда диэлектриков неоднородность $\varepsilon(z)$ может существенно изменить спектры отражения и пропускания волн вблизи локальных резонансов. Такие изменения удобно проследить на простом примере распространения высокочастотных поперечных волн в электронной плазме полупроводника с неоднородной плотностью носителей $N(z)$.

При исследовании волновых процессов в неоднородной плазме часто используются эталонные распределения $N(z)$, допускающие точные аналитические решения волнового уравнения. Так, в случае линейного профиля плотности (1.5) структура поля в плазме представляется, как известно, с помощью функций Эйри [5]. Для параболического профиля точные решения волнового уравнения даются функциями параболического цилиндра [6]. Однако применимость этих моделей, содержащих лишь один свободный параметр L , ограничивается слоями плазмы конечной толщины.

Ниже рассматривается более гибкая модель, описывающая профиль ионизации во всем полупространстве $z \geq 0$ с помощью двух параметров a и b [18],

$$W = \frac{N(z)}{N_0} = 1 - \frac{1}{b} + \frac{U^2(z a^{-1})}{b}. \quad (6.1)$$

Здесь характерная длина a и безразмерная величина b — свободные параметры модели, N_0 — плотность ионизации на границе среды $z = 0$; функция $U(z a^{-1})$ удовлетворяет условиям

$$U \Big|_{z=0} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} U \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (6.2)$$

Таким образом, нормированное распределение электронной плотности (6.1) описывает "насыщение" ионизации и диэлектрической проницаемости ε в глубине плазмы:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varepsilon(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \varepsilon_L \left[1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} (1 - b^{-1}) \right], \quad \Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{\varepsilon_L m_{\text{eff}}}. \quad (6.3)$$

Здесь Ω_0 — плазменная частота, m_{eff} — эффективная масса носителей, ε_L — решеточная часть диэлектрической проницаемости. Значения параметра b в (6.1) лежат в интервалах $b < 0$ и $b > 1$.

Рассмотрим распространение S -поляризованной волны в среде (6.1) при $z \geq 0$. Направление оси y задается составляющей k_{\parallel} , перпендикулярной к оси z . Компоненты волнового поля E_x , H_y и H_z связаны уравнениями Максвелла:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon_L}{c} \left[1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} (1 - b^{-1}) - \frac{\Omega_0^2 U^2(z)}{\omega^2 b} \right] E_x. \quad (6.5)$$

Выражая компоненты поля через составляющую $A_x = A_0 \psi$ вектор-потенциала (2.4), преобразуем систему (6.4), (6.5) в уравнение для функции ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon_L \omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} (1 - b^{-1}) - \frac{\Omega_0^2 U^2(z)}{\omega^2 b} \right] \psi = 0. \quad (6.6)$$

Перепишем уравнение (6.6), используя переменную η (2.6) и вводя новую функцию f :

$$\psi = f U^{-1/2} \exp[i(k_{\parallel} y - \omega t)]. \quad (6.7)$$

Функция f удовлетворяет уравнению, следующему из (6.6),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + f \left[\frac{p^2}{U^2} - \frac{\varepsilon_L \Omega_0^2}{c^2 b} - \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0, \quad (6.8)$$

$$p^2 = \frac{\varepsilon_L}{c^2} [\omega^2 - \Omega_0^2 (1 - b^{-1})] - k_{\parallel}^2. \quad (6.9)$$

Функция U , определяющая профиль плотности носителей, до сих пор оставалась неизвестной. Пользуясь переменной η , можно построить модели как монотонных, так и немонотонных профилей ионизации $W(z)$, допускающие точные аналитические решения волнового уравнения (6.8).

1. Простая модель монотонного профиля ионизации может быть представлена с помощью формулы $U = \exp(-\eta a^{-1})$, где a — некоторая характерная длина. Однако эта формула выражает профиль U в зависимости от координаты η . Чтобы найти зависимость U в явной форме, нужно подставить выражение $\eta = -a \ln U$ в определение переменной η . Решив полученное уравнение, найдем

$$U = \left(1 + \frac{z}{a} \right)^{-1}. \quad (6.10)$$

Профили плотности $W(z)$, соответствующие распределению (6.10), показаны на рис. 11. Подставляя (6.10) в (6.8) и переходя к новой переменной $u = U^{-1} = \exp(\eta a^{-1})$, получим для функции f уравнение Бесселя:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u} + f \left(a^2 p^2 - \frac{q^2}{u^2} \right) = 0, \quad (6.11)$$

$$q^2 = \frac{\Omega_0^2 a^2 \varepsilon_L}{c^2 b} + \frac{1}{4}; \quad u = 1 + \frac{z}{a}. \quad (6.12)$$

Параметр p^2 определен в (6.9).

Рассмотрим сначала область частот, определяемую условием $p^2 > 0$. Если $q^2 > 0$, то решение уравнения (6.11) представляется функцией Ганкеля $H_q^{(1)}(apu)$. Возвращаясь к переменной z , можно записать функцию ψ (6.7) в виде

$$\psi = \sqrt{1 + \frac{z}{a}} H_q^{(1)} [p(a+z)] \exp[i(k_{\parallel} y - \omega t)]. \quad (6.13)$$

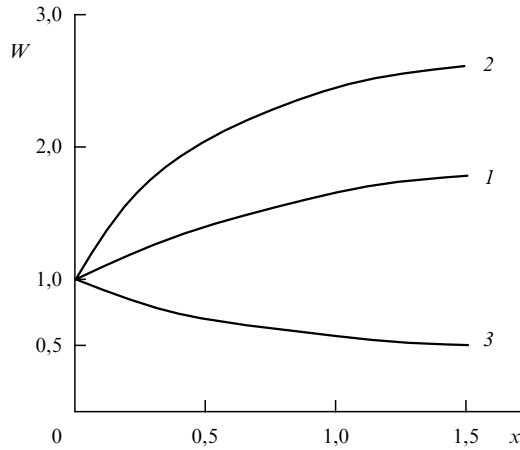


Рис. 11. Профиль плотности плазмы $W(x)$, $x = zL^{-1}$ (6.1), стремящейся в глубине плазмы к постоянной величине $W = 1 - b^{-1}$. Значения параметра b для кривых 1–3 составляют 2; $-0,5$; -1 соответственно. Функция U в (6.1) для кривых 1 и 2 определена в (6.10), для кривой 3 — в (7.11).

Подставив составляющую вектор-потенциала $A_x = A_0\psi$ в (2.4), найдем выражения для компонент волнового поля:

$$\begin{aligned} E_x &= iA_0\omega c^{-1}\psi, & H_z &= -iA_0k_{\parallel}\psi, \\ H_y &= \frac{A_0}{a} \left(\frac{1}{2u} + \frac{pa}{H_q^{(1)}(x)} \frac{\partial H_q^{(1)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=pa} \right) \psi. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Пользуясь асимптотикой функций Ганкеля

$$H_q^{(1)}(x) \Big|_{x \gg 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[i \left(x - \frac{\pi q}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (6.15)$$

легко показать, что в глубине среды ($z \gg a$), где неоднородность плотности исчезает, компоненты волнового поля описываются бегущей гармонической волной. Например,

$$E_x \sim \exp[i(pz + k_{\parallel}y - \omega t)]. \quad (6.16)$$

Дисперсия такой среды описывается уравнением (6.9).

Неоднородность плотности вблизи границы плазмы (6.1) может существенно изменить спектр отражения волн. Для простоты рассмотрим случай нормального падения волн из воздуха на границу твердотельной плазмы. Вводя коэффициент отражения R , можно найти из условий непрерывности компонент поля в плоскости $z = 0$

$$\frac{1+R}{1-R} = \frac{2iac}{\omega} \left(1 + \frac{2ap}{H_q^{(1)}(x)} \frac{\partial H_q^{(1)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=ap} \right)^{-1}. \quad (6.17)$$

Представляя функцию Ганкеля в виде суммы

$$H_q^{(1)} = I_q + iN_q,$$

где I_q и N_q — функции Бесселя и Неймана, и пользуясь выражением для вронкиана пары функций I_q и N_q

$$I_q(x) \frac{\partial N_q(x)}{\partial x} - N_q(x) \frac{\partial I_q(x)}{\partial x} = \frac{2}{\pi x}, \quad (6.18)$$

получим из (6.17) комплексный коэффициент отражения

$$R = \frac{-\operatorname{Re} Q + i(2\omega ac^{-1} - \operatorname{Im} Q)}{\operatorname{Re} Q + i(2\omega ac^{-1} + \operatorname{Im} Q)}, \quad (6.19)$$

$$\operatorname{Re} Q = -1 + \frac{2pa}{I_q^2 + N_q^2} \left(I_q \frac{\partial I_q}{\partial x} + N_q \frac{\partial N_q}{\partial x} \right),$$

$$\operatorname{Im} Q = \frac{4}{\pi} \frac{1}{I_q^2 + N_q^2}. \quad (6.20)$$

В формулах (6.20) аргументом функций Бесселя и Неймана является величина pa .

При расчетах по формулам (6.19), (6.20) порядок функций Ганкеля q может принимать любые действительные значения, если плотность плазмы в глубине среды меньше, чем на границе. В противоположном случае ($b < 0$) значения параметра b ограничены условием $q^2 \geq 0$ (6.12).

Пример частотной зависимости коэффициента отражения неоднородной электронной плазмы InSb для простого случая $q = 1$ (6.12) приведен на рис. 12. Из сравнения кривых 1 и 2 на этом рисунке видно, что влияние переходного слоя может существенно ослабить отражательные свойства полупроводниковой плазмы в широком диапазоне частот.

2. Модели немонотонного профиля ионизации W можно представить с помощью функции

$$U(\eta) = \frac{\cosh(\eta/a_0 - \operatorname{arsinh} M)}{\sqrt{1+M^2}}, \quad M \geq 0. \quad (6.21)$$

Здесь a_0 — характерная длина неоднородности, M — свободный безразмерный параметр. Выражая η из (6.21) и подставляя в (2.6), найдем явное выражение для профиля $U(z)$:

$$\begin{aligned} U(z) &= \left(\cos \frac{z}{L} + M \sin \frac{z}{L} \right)^{-1}, \\ L &= a_0 \sqrt{1+M^2}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

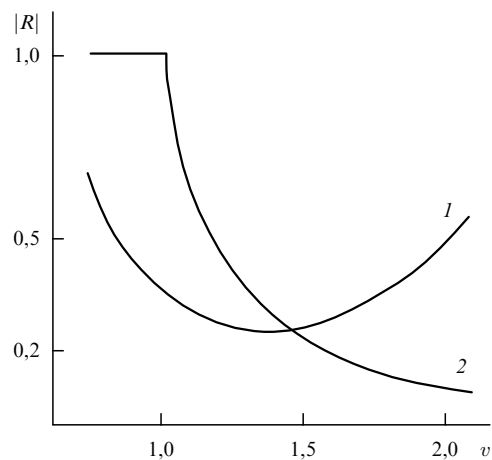


Рис. 12. Зависимость модуля коэффициента отражения волны R , падающей нормально на поверхность неоднородной электронной плазмы InSb ($\epsilon_L = 12,5$, $N_0 = 5 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$) от нормированной частоты волны $v = \omega\Omega_0^{-1}$ (кривая 1). Профиль плотности носителей (6.1); $b = 2$; функция U дана в (6.10), $a = 10^{-4}$ см. Кривая 2 — спектр R для однородной плазмы ($a \rightarrow \infty$).

Распределение (6.22), определенное в интервале $0 \leq z < z_\infty$, достигает минимума в точке z_m , где

$$\frac{z_m}{L} = \arctan M; \quad U_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+M^2}};$$

$$\frac{z_\infty}{L} = -\arctan \frac{1}{M}. \quad (6.23)$$

Функция $U(z)$ (6.22) принимает значения $U = 1$ в точках 0 и z_1 :

$$\frac{z_1}{L} = \arcsin \frac{2M}{1+M^2}. \quad (6.24)$$

Точки z_m (6.23) и z_1 лежат в области определения функции $U(z)$: $z_m < z_1 < z_\infty$.

Подставляя распределение $U(z)$ (6.22) в (6.1), рассмотрим профиль ионизации, состоящий в интервале $0 \leq z \leq z_1$ из выпуклой дуги (6.1), где $b_1 < 0$; продолжение профиля в интервале описывается вогнутой дугой (6.1) при $b_2 > 1$. Условие гладкости касания в точке z_1 связывает параметры этих профилей:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{|b_1|L_1}{b_2L_2}. \quad (6.25)$$

Продолжая строить последовательность таких дуг, получим непрерывный гладкий осциллирующий профиль ионизации $N(z)$. Максимумы и минимумы этого профиля составляют

$$\frac{N_{\max}}{N_0} = 1 + \frac{1}{|b_1|} \frac{M_1^2}{1+M_1^2}; \quad \frac{N_{\min}}{N_0} = 1 - \frac{1}{b_2} \frac{M_2^2}{1+M_2^2}. \quad (6.26)$$

В простейшем случае $M_1 = M_2$, $|b_1| = b_2$ возникает периодический профиль электронной плотности с периодом $2z_1$ (6.24), показанный на рис. 13.

Чтобы найти волновое поле, например, в области $0 \leq z \leq z_1$, надо подставить функцию $U(\eta)$ (6.21) в уравнение (6.8). Вводя безразмерную переменную x , перепи-

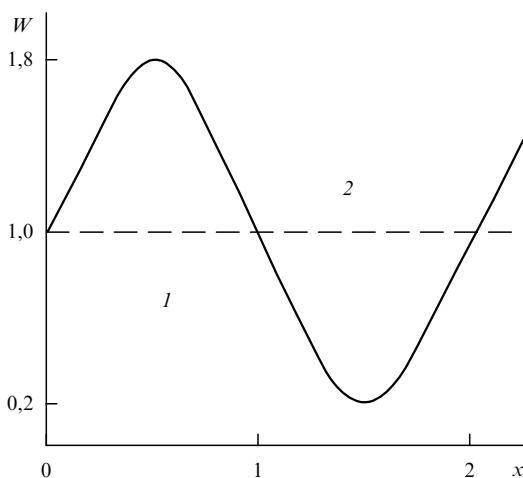


Рис. 13. Глубоко модулированное гармоническое распределение плотности плазмы $W(x)$, описываемое формулой (6.1), где функция U определена в (6.22). Значения параметра b в (6.1) в областях 1 и 2 равны ∓ 1 , $M = 2$, $x = zL^{-1}$. Глубина модуляции K составляет 80 %.

шем (6.8) в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \left[q^2 - \frac{T}{\cosh^2 x} \right] = 0, \quad T = \frac{1}{4} - (pL_1)^2, \quad (6.27)$$

$$q^2 = \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_L \Omega_0^2 L_1^2}{c^2 |b_1|}, \quad x = \frac{\eta}{a_0} - \operatorname{arsinh} M. \quad (6.28)$$

Уравнение типа (6.27) формально совпадает с уравнением Шрёдингера в квантовой механике, описывающим рассеяние частиц на потенциале $\cosh^{-2} x$ [26]. При этом следует еще раз подчеркнуть, что потенциал $\cosh^{-2} x$ определен здесь как функция "фазовой координаты" η ; в реальном пространстве потенциал определяется другой функцией (6.22). Переходя к новой переменной

$$u = \frac{1}{2}(1 - \tanh x)$$

и представляя неизвестную функцию f в виде

$$f = (\cosh x)^{iq} F, \quad (6.29)$$

получим для функции F гипергеометрическое уравнение

$$u(1-u) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - [\gamma - u(1+\alpha+\beta)] \frac{\partial F}{\partial u} - \alpha\beta F = 0,$$

$$\alpha, \beta = \frac{1}{2}(1 - 2iq \pm 2pL_1), \quad \gamma = 1 + iq. \quad (6.30)$$

Поскольку параметры α, β, γ (6.30) связаны соотношением

$$\alpha + \beta + 1 = 2\gamma, \quad (6.31)$$

фундаментальные решения уравнения (6.29) выражаются через гипергеометрическую функцию G [27]:

$$F_1 = G(\alpha, \beta, \gamma, u), \quad F_2 = G(\alpha, \beta, \gamma, 1-u). \quad (6.32)$$

Пользуясь выражением (6.28) для переменной u , можно записать решение уравнения для вектор-потенциала ψ (6.7) в форме

$$\psi = \sqrt{\cos \frac{z}{L} + M \sin \frac{z}{L}} (\cosh x)^{iq} \exp[i(k_{\parallel} y - \omega t)] \times$$

$$\times [G(\alpha, \beta, \gamma, u_-) + SG(\alpha, \beta, \gamma, u_+)]. \quad (6.33)$$

Здесь S — постоянная, определяемая из граничных условий, G — гипергеометрическая функция аргумента

$$u_{\mp} = \frac{1}{2}(1 \mp \tanh x). \quad (6.34)$$

Решения уравнения (6.7) в смежной области $z_1 \leq z \leq z_2$, соответствующей вогнутой дуге профиля W (см. рис. 13), строятся аналогично (6.33). Пользуясь условиями непрерывности компонент поля в точках $z = 0, z_1, z_2, \dots$, можно исследовать структуру поля в плазме с периодическим профилем электронной плотности. Чтобы рассчитать поля в этих точках, надо найти соответствующие значения переменной x (6.28). Эти значения получаются при подстановке функции $U(z)$ (6.22) в формулу (2.6):

$$x = -\operatorname{arsinh} M + \ln \left| \frac{1 + m_+ \tan(z/2L)}{1 - m_- \tan(z/2L)} \right|,$$

$$m_{\pm} = \sqrt{1 + M^2} \pm M. \quad (6.35)$$

После подстановки в (6.35) значений $z = 0$ и z_1 (6.24) имеем

$$x \Big|_{z=0} = -\operatorname{arsinh} M, \quad x \Big|_{z=z_1} = \operatorname{arsinh} M. \quad (6.36)$$

При $z \rightarrow z_\infty$ (6.23) переменная x (6.35) неограниченно возрастает. С помощью найденных величин x (6.36) вычисляются значения функции f (6.33) в точках перегиба $z = 0, z_1, z_2, \dots$ и т.д., разграничивающих вогнутые и выпуклые участки профиля W . Различие этих значений определяет отражение волн в точках перегиба рассматриваемого периодического профиля ионизации.

Комбинируя распределения $U(z)$ (6.10) и (6.22), можно найти структуру поля в плазме с немонотонными профилями ионизации; таково, например, распределение плотности (6.1), составленное из выпуклой дуги U (6.22), где $b = -b_1$ ($b_1 > 0$), и монотонно убывающей функции U (6.10), где $b = b_2 > 1$. Условие гладкого касания этих кривых на уровне $U = 1$ имеет вид

$$\frac{M}{|b_1|L} = \frac{1}{b_2a}. \quad (6.37)$$

Полученное немонотонное распределение плотности носителей, характеризуемое одним максимумом N_{\max} и стремящееся к постоянному значению N_c в глубине среды, приведено на рис. 14 (кривая 1):

$$\frac{N_{\max}}{N_0} = 1 + \frac{M^2}{|b_1|(1+M^2)}, \quad \frac{N_c}{N_0} = 1 - \frac{Ma}{|b_1|L}. \quad (6.38)$$

Это распределение содержит четыре свободных параметра: M , b_1 , L и a . Аналогичное распределение N , характеризуемое в отличие от (6.38) одним минимумом N_{\min} ,

$$\frac{N_{\min}}{N_0} = 1 - \frac{M^2}{b_1(1+M^2)}, \quad \frac{N_c}{N_0} = 1 + \frac{Ma}{b_1L} \quad (6.39)$$

показано на рис. 14 кривой 2.

Для расчета коэффициентов отражения и пропускания неоднородной плазмы, описываемой с помощью

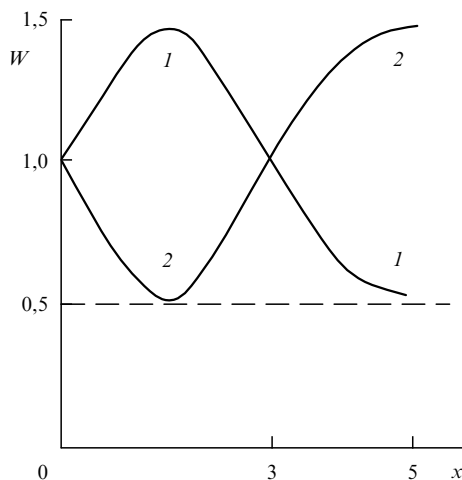


Рис. 14. Немонотонные профили нормированной плотности плазмы W (6.1), $x = zL^{-1}$. Для кривой 1 $b_1 = -1$, $b_2 = 1$. Для кривой 2 $b_1 = 2$, $b_2 = -2$. В интервалах значений безразмерной координаты $0 \leq x \leq \pi$ и $x \geq \pi$ функция U определена в (6.22) и (6.10) соответственно, $M = 1$.

кривой (6.22), требуется табулировать гипергеометрические функции $G(\alpha, \beta, \gamma, u)$. Для независимой проверки точности такого табулирования можно рассмотреть в рамках уравнения (6.27) простую задачу о распространении волны, когда параметр T в (6.27) равен нулю, т.е. $4(pL_1)^2 = 1$. В этом случае решение уравнения (6.27) описывается гармонической волной

$$f = \exp(iqx) + S \exp(-iqx), \quad (6.40)$$

где волновое число q и координата x определены в (6.28) и (6.35). С помощью решения (6.40) нетрудно найти, например, коэффициент отражения от неоднородного слоя, содержащего одну "полуволну" пространственно модулированной плотности носителей (см. рис. 13). С другой стороны, этот же коэффициент можно вычислить в рамках общего подхода с применением собственных функций ψ . Сравнение результатов позволит оценить точность вычислений с использованием гипергеометрических функций.

Как видно из рис. 11–14, применение фазовой координаты значительно расширяет круг точно решаемых моделей в задачах распространения волн в неоднородных диспергирующих средах. Отражательные свойства таких сред существенно изменяются за счет координатной зависимости (см. рис. 12), приводя к формированию широких спектральных интервалов слабого отражения. Найденные здесь аналитические решения, содержащие несколько свободных параметров, позволяют исследовать спектры отражения волн в широких диапазонах значений этих параметров. Другая постановка задачи отражения связана с поиском профиля неоднородности среды, обеспечивающего широкополосное безотражательное прохождение волн через ее границу. Примеры таких профилей для нормального падения волн на границу диэлектрика, описываемого моделями Дебая или Лоренца при фиксированных значениях параметров Ω_0 и ε_L , найдены численными методами в работе [28].

7. Поверхностные электромагнитные волны в неоднородном диэлектрике

Выше обсуждалось распространение электромагнитных полей в неоднородном диэлектрике вдоль градиента $\varepsilon(z)$. Однако неоднородность $\varepsilon(z)$ может существенно повлиять и на дисперсионные свойства волн, распространяющихся в направлении, перпендикулярном $\nabla\varepsilon$, в частности волн на поверхности неоднородной среды. Такие эффекты, известные в радио- и ИК-диапазонах [23], удобно рассматривать на примере поверхностной волны в неоднородной плазменной среде.

В случае резкой границы двух однородных сред, характеризуемой скачком диэлектрической проницаемости, локализация волн вблизи этой границы возможна при выполнении следующих условий [29]:

а) спектр поверхностных волн в плазме ограничен сверху предельным значением $\omega_c = \Omega_0/\sqrt{2}$, где Ω_0 — плазменная частота;

б) все компоненты поля поверхностной волны убывают в глубине среды экспоненциально, причем характерная длина убывания одинакова для всех компонент;

в) поляризационная структура поверхностной волны, распространяющейся в направлении y вблизи границы

$z = 0$, определяется двумя электрическими составляющими E_y и E_z и одной магнитной составляющей H_x (TM -поляризация).

Интерес к свойствам поверхностных электромагнитных волн (ПЭВ) в плазме с размытой границей стимулировал развитие двухслойной модели, соответствующей слою плазмы конечной толщины с линейным профилем ионизации, прилегающему вдоль условно выбранной плоскости к полупространству, заполненному однородной плазмой. TM -поляризованные волны в такой системе, напоминающей неоднородную по сечению полосковую линию, расположенную на однородной подложке, рассмотрены в работе [30].

В отличие от этого поверхностные волны в неоднородной плазме рассматриваются здесь в рамках метода фазовой координаты η (2.6). Применение этого метода не требует введения условных границ в глубине среды, присущих многослойной модели, и дает возможность получить точные аналитические решения для полей поверхностных волн в плазме с непрерывным распределением плотности. Такой подход позволяет выявить ветви поверхностных волн, свободные от упомянутых выше ограничений а)–в), присущих волнам на поверхности сред с резкой границей раздела.

При анализе рассматриваемой задачи удобно использовать некоторые результаты раздела 6. Начнем с уравнений Максвелла для S -поляризованной волны с компонентами E_x , H_y и H_z (6.4), (6.5), распространяющейся в плазме с профилем плотности носителей (6.1). Предполагая, что распределение плотности носителей определено функцией $U = (1 + za^{-1})^{-1}$ (6.10), приходим к уравнениям (6.11), (6.12) для вектор-потенциала волнового поля. Решения полученного уравнения (6.11) зависят от значений параметра p^2 . Область $p^2 > 0$, рассмотренная в разделе 6, соответствует волнам, распространяющимся в глубине неоднородной плазмы. Ниже строятся решения уравнения (6.11) при отрицательных значениях параметра p^2 (6.9).

Решениями уравнения (6.11) при $p^2 < 0$ являются модифицированные функции Бесселя $K_q(z)$, значения которых убывают с ростом координаты z . Эти функции описывают структуру поля, локализованного у границы плазмы $z = 0$. Вводя обозначение $p_1^2 = -p^2 > 0$, можно представить функцию ψ (6.7) в виде

$$\psi_1 = \sqrt{1 + \frac{z}{a}} K_q[p_1(a+z)] \exp[i(k_s y - \omega t)]. \quad (7.1)$$

Компоненты волнового поля в среде ($z \geq 0$) находятся при подстановке (7.1) в (2.4):

$$E_x = iA_1 \omega c^{-1} \psi_1 = e_x E_x \Big|_{z=0},$$

$$H_z = iA_1 k_s \psi_1 = h_z H_z \Big|_{z=0},$$

$$H_y = -\frac{A_1}{a} \left[\frac{1}{2u} + \frac{1}{K_q(pu)} \frac{\partial K_q(pu)}{\partial u} \right] \psi_1,$$

$$u = 1 + za^{-1}. \quad (7.2)$$

Чтобы вычислить компоненты поля, локализованного в воздухе вблизи границы плазмы, найдем сначала соответствующую функцию ψ_0 из (6.6), полагая $\Omega_0 = 0$,

$\varepsilon_L = 1$:

$$\psi_0 = \exp \left[i(k_s y - \omega t) + \frac{z}{l} \right]. \quad (7.3)$$

Здесь l — характерный масштаб спада поля поверхностной волны в воздухе. Подставив (7.3) в (2.4), определим значения E_x , H_y и H_z в воздухе:

$$E_x = iA_0 \omega c^{-1} \psi_0, \quad H_y = -A_0 l^{-1} \psi_0, \quad H_z = iA_0 k_s \psi_0. \quad (7.4)$$

Дисперсионное уравнение, связывающее ω , k_s и l , следует из уравнений Максвелла (6.4), (6.5):

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{l^2}. \quad (7.5)$$

Сравнивая компоненты полей в воздухе (7.4) и в плазме (7.2) и используя условия непрерывности на границе $z = 0$ ($u = 1$), получим соотношения

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K_q(pa)} \frac{\partial K_q(pau)}{\partial u} \Big|_{u=1}. \quad (7.6)$$

Заметим, что левая сторона равенства (7.6) положительна, а производная убывающей функции K_q отрицательна. Так как предельное значение второго слагаемого в (7.6) составляет $-q$, то условие $al^{-1} > 0$ ограничивает значения индекса q в выражении для вектор-потенциала ψ_1 (7.1):

$$\frac{1}{2} \geq q \geq 0. \quad (7.7)$$

Как видно из определения индекса q (6.12), условие (7.7) может выполняться лишь для отрицательных значений параметра b в распределении плотности носителей (6.1). Эти значения соответствуют росту плотности носителей в глубине плазмы (см. рис. 11).

Спектры поверхностных волн в неоднородной плазме, полученные при совместном решении уравнений (7.5) и (7.6), приведены на рис. 15. Эти спектры сущест-

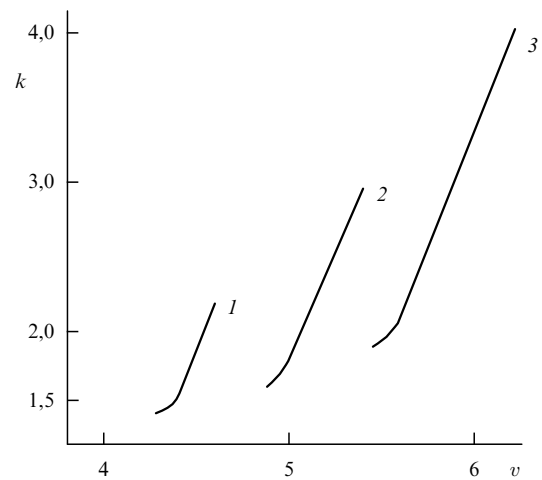


Рис. 15. Спектры TE -поляризованных поверхностных волн в неоднородной электронной плазме InSb ($\varepsilon_L = 12$, $N_0 = 3 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $a = 10^{-4} \text{ см}$, $m_{\text{эф}} = 0,01m_0$), $k_s = k \times 10^3 \text{ см}^{-1}$, $\omega = v \times 10^{13} \text{ рад с}^{-1}$. Нормированное распределение плотности носителей описывается моделями (6.1) и (6.10), $x = za^{-1}$. Кривые 1–3 соответствуют различным значениям W в глубине среды; безразмерный параметр b для этих кривых равен $-0,7$; $-0,5$ и $-0,4$ соответственно.

венно зависят от параметров a и b в распределении плотности носителей (6.1). Масштаб области спадания поля в воздухе l , определяемый из (7.5), также зависит от этих параметров. Как видно из условия существования ПЭВ ($p^2 < 0$), их частоты ограничены сверху

$$\omega^2 \leq \omega_c^2 = \Omega_0^2(1 + |b|^{-1}) + k_s^2 c^2 \varepsilon_L^{-1}. \quad (7.8)$$

В области малых значений параметра pa ($pa \ll 1$) можно получить приближенное дисперсионное уравнение рассматриваемых волн и без численного решения системы (7.5), (7.6):

$$k_s^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{2} - q \right)^2. \quad (7.9)$$

Поверхностные волны, спектры которых показаны на рис. 15, распространяются вдоль плоскости раздела воздуха и плазмы. Однако при наклонном падении волны из воздуха на плазму проекция волнового вектора k_{\parallel} на эту плоскость всегда меньше модуля волнового вектора плазменной волны k_s (7.9). Чтобы возбудить в этом случае поверхностную волну, следует увеличить значение k_{\parallel} , пропуская, например, падающую волну через призму с показателем преломления $n > 1$, расположенную на плоскости $z = 0$ [29]. При этом условие согласования падающей и поверхностной волн имеет вид

$$n \sin \gamma = k_s c \omega^{-1}. \quad (7.10)$$

Как видно из рис. 15, условие возбуждения ПЭВ (7.10) может быть выполнено в широком диапазоне инфракрасных частот.

Приведенный анализ показывает, как изменяются ограничения на условия существования поверхностных электромагнитных волн а)–в), если хотя бы одна из граничащих сред неоднородная:

1) спектр поверхностных волн расширяется: вместо ограничения $\omega < \Omega_0/\sqrt{2}$ возникает условие (7.8), указывающее на возможность существования ПЭВ с частотой, большей, чем плазменная частота Ω_0 на поверхности $z = 0$;

2) в отличие от монотонного экспоненциального спада всех компонент ПЭВ в однородной среде пространственная структура поверхностных волн в неоднородной плазме (7.2) немонотонна: компоненты E_x и H_z проходят через максимум, а компонента H_y становится знакопеременной (рис. 16);

3) электромагнитная волна на поверхности неоднородной плазмы TE -поляризована; следует отметить, что о TE -поляризованной ПЭВ на границе гранулированной среды сообщалось в [31].

Уравнение (6.8) можно использовать для анализа ПЭВ в плазме и при других профилях плотности носителей. Рассмотрим, например, распределение (6.1) при экспоненциальном ходе функции $U(z)$ (см. рис. 11, кривая 3):

$$U = \exp\left(-\frac{z}{a}\right) = 1 - \eta a^{-1}. \quad (7.11)$$

Подставляя (7.11) в (6.8) и вводя новую функцию Q , получаем

$$Q = \frac{f}{\sqrt{U}}; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \left(v^2 + \frac{p^2 a^2}{x^2} \right) = 0, \quad (7.12)$$

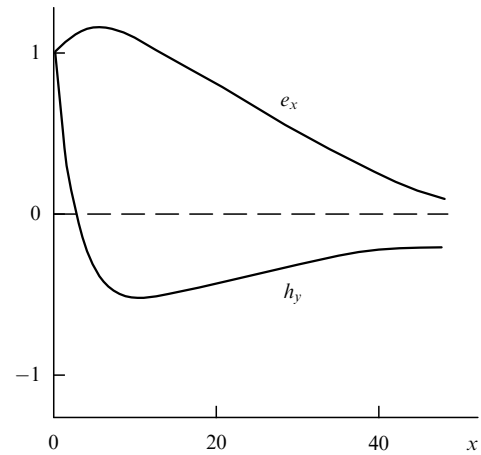


Рис. 16. Пространственная структура нормированных компонент поля TE -поляризованной поверхностной волны в глубине неоднородной плазмы (см. рис. 15, $b = -0.5$). Кривые 1 и 2 соответствуют компонентам e_x и h_y (7.2), $x = za^{-1}$.

$$x = \exp\left(-\frac{z}{a}\right); \quad v^2 = \frac{\varepsilon_L \Omega_0^2 a^2}{|b|c^2}. \quad (7.13)$$

Решение уравнения (7.12), убывающее в глубине среды и соответствующее случаю $b < 0$, $p^2 = -g^2 \leq 0$, выражается через функцию Бесселя $I_{ga}(vx)$. Возвращаясь к переменной z , получим выражение для компоненты вектор-потенциала поверхностной волны ψ (6.7):

$$\psi = I_{ga} \left[v \exp\left(-\frac{z}{a}\right) \right] \exp[i(k_s y - \omega t)]. \quad (7.14)$$

Подставляя функцию ψ (7.14) в (2.4), найдем компоненты поля в плазме. Асимптотика функций Бесселя при малых значениях аргумента x

$$I_n(x) \Big|_{x \ll 1} \approx \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)}, \quad (7.15)$$

где Γ — гамма-функция, показывает, что в глубине среды компоненты поля убывают экспоненциально:

$$I_{ga} \left[v \exp\left(-\frac{z}{a}\right) \right] \Big|_{z \gg a} = \left(\frac{v}{2}\right)^{ga} \frac{\exp(-gz)}{\Gamma(1+ga)}. \quad (7.16)$$

Пользуясь условиями непрерывности компонент поля в воздухе (7.4) и в среде при $z = 0$, получим с учетом (7.5) дисперсионное уравнение ПЭВ в виде

$$\frac{v[I_{ga-1}(v) - I_{ga+1}(v)]}{2I_{ga}(v)} = \sqrt{(k_s a)^2 - \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2}. \quad (7.17)$$

Область существования таких волн, определяемая условием $g^2 \geq 0$, совпадает с (7.8). В частном случае $v \ll 1$ уравнение (7.17) можно упростить с помощью асимптотики (7.15):

$$(k_s a)^2 - \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 = \left[1 + ag - \frac{v^2}{4ag} \right]^2. \quad (7.18)$$

Следует подчеркнуть различие между дисперсионными уравнениями ПЭВ (7.6) и (7.17) и соответственно между их приближениями (7.9) и (7.18). Эти уравнения

описывают модели неоднородной плазмы, у которых совпадает плотность носителей на поверхности $U|_{z=0} = 1$ и в глубине $U|_{z \gg a} = 1 - b^{-1}$; более того, совпадают и значения градиентов плотности вблизи границы $z = 0$. Разница в спектрах ПЭВ для этих моделей, определяемая уравнениями (7.6) и (7.17), связана с распределением плотности носителей W в глубине среды (см. рис. 11). Эта чувствительность полей ПЭВ к профилю W может представить интерес для диагностики плотности неоднородной плазмы с помощью поверхностных электромагнитных волн.

8. Дисперсионные свойства нестационарных диэлектриков

Волновые явления в средах, электромагнитные характеристики которых зависят от времени, являются ключевыми для понимания ряда проблем космической физики [32], динамики коротких волновых импульсов в сплошных средах [33], оптической диагностики быстрых процессов [34]. Временные изменения диэлектрической проницаемости могут радикально изменить отражательные и преломляющие свойства таких сред. В отличие от эффекта Доплера, где перестройка отраженной волны связана с движением отражателя, здесь будет обсуждаться эволюция электромагнитных полей в неподвижных средах, диэлектрическая проницаемость которых зависит от времени t .

Важная характеристика таких нестационарных волновых процессов — конечное время релаксации электромагнитных параметров среды и, в частности, ее диэлектрической проницаемости. Отдельные случаи, соответствующие адиабатическим периодическим вариациям $\varepsilon(t)$ и линейному изменению $\varepsilon(t)$, рассмотрены в работах [11, 35]. Однако в ряде задач как прикладных, так и академических возникают ситуации, когда период колебаний поля T и время релаксации среды t_0 оказываются величинами одного порядка. В этих случаях отношения $t_0 T^{-1}$ или $T t_0^{-1}$ не являются малыми параметрами, а для анализа волновых проблем требуются точные аналитические решения уравнений Максвелла с зависящими от времени коэффициентами. Такие решения строятся здесь для простых моделей, предполагающих, что динамика релаксации среды определяется факторами, не зависящими от поля волны, например нагревом, ионизацией или фазовыми переходами [36]; в частности, такая модель представляет интерес для анализа быстрых процессов релаксации в средах, возмущенных лазерным импульсом [37]. В рамках такой модели можно представить индукцию D поля E в среде в виде

$$D(t) = \varepsilon(t)E(t); \quad \varepsilon(t) = n_0^2 U^2(t). \quad (8.1)$$

Здесь n_0 — показатель преломления среды до начала процесса релаксации, безразмерная функция $U(t)$ описывает динамику этого процесса. Ниже для простоты пренебрегается поглощением волн, т.е. зависимость $\varepsilon(t)$ описывается действительной функцией $U(t)$. Чтобы найти отражение и преломление электромагнитных волн на границе среды (8.1), нужно решить три задачи:

а) построить решения уравнений Максвелла для среды (8.1);

б) найти явные выражения для функций $U(t)$, приводящих к таким решениям;

в) обобщить формулы Френеля для описания отражения волн от нестационарных сред, характеризующихся функциями $U(t)$.

Эти задачи для нестационарных сред удобно рассматривать, развивая метод фазовой координаты, использованный ранее в оптике неоднородных диэлектриков (см. раздел 2). Вводя по аналогии с фазовой координатой η (2.6) переменную τ , имеющую размерность времени:

$$\tau = \int_0^t \frac{dt_1}{U(t_1)}, \quad (8.2)$$

можно найти для нестационарных уравнений Максвелла широкие классы аналитических решений в виде бегущих волн. Такие решения позволяют представить в явной форме влияние конечного времени релаксации диэлектрической проницаемости среды на дисперсию волн.

Чтобы показать основные этапы такого подхода, рассмотрим нормальное падение волн из вакуума на полупространство $z \geq 0$, заполненное нестационарным диэлектриком (8.1). Распространение линейно поляризованной волны с компонентами E_x и H_y в направлении z описывается в этом полупространстве уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t}. \quad (8.3)$$

Найдем решение задач а)–в) для системы уравнений (8.3).

Задача а. Продолжая аналогию с подходом, описанным в разделе 2, можно решать систему (8.3) двумя способами.

1. Выразив компоненты поля E_x и H_y через функцию ψ_1 (2.4), сведем первое из уравнений (8.3) к тождеству; при этом второе уравнение в (8.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{n_0^2 U^2(t)}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial U^2}{\partial t^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}. \quad (8.4)$$

Введем новую функцию

$$F_1 = \psi_1 \sqrt{U(t)} \quad (8.5)$$

и, пользуясь переменной τ (8.2), перепишем уравнение (8.4):

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tau^2} = -\frac{n_0^2}{c^2} F_1 \left[\frac{U}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (8.6)$$

Хотя функция $U(t)$ до сих пор не известна, преобразования (8.2) и (8.4) позволили исключить зависящий от времени коэффициент в левой части уравнения (8.4); влияние нестационарности описывается выражением в скобках в правой части (8.6).

Чтобы определить зависимость $U(t)$, рассмотрим простой случай, когда выражение в скобках в (8.6) равно некоторой постоянной $-p_1^2$:

$$\frac{U}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 = -p_1^2. \quad (8.7)$$

В этом случае все коэффициенты уравнения (8.6) постоянны [37]:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \tau^2} = \frac{n_0^2 p_1^2}{c^2} F_1. \quad (8.8)$$

Решение (8.8) может быть записано в виде бегущей волны:

$$F_1 = \exp[i(q_1 z - \omega \tau)],$$

$$q_1 = \omega n_0 c^{-1} N, \quad N = \sqrt{1 - p_1^2 \omega^{-2}}. \quad (8.9)$$

Подставив (8.9) в (8.5), найдем выражение для функции ψ_1 :

$$\psi_1 = \frac{A_1 \exp[i(q_1 z - \omega \tau)]}{\sqrt{U(t)}}. \quad (8.10)$$

Здесь A_1 — нормировочная константа. Пользуясь соотношениями (2.4), найдем выражения для компонент поля в нестационарной среде:

$$E_x = \frac{i\omega}{cU(t)} \left(1 - \frac{i}{2\omega} \frac{\partial U}{\partial t}\right) \psi_1, \quad H_y = iq_1 \psi_1. \quad (8.11)$$

2. Другой способ решения системы (8.3) состоит в представлении компонент поля через вспомогательную функцию ψ_2 по аналогии с (2.19):

$$E_x = \frac{1}{n_0^2 U^2(t)} \frac{\partial \psi_2}{\partial z}; \quad H_y = \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}. \quad (8.12)$$

В отличие от первого способа при подстановке (8.12) в систему (8.3) второе уравнение в (8.3) выполняется тождественно, а первое принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - \frac{n_0^2 U^2(t)}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0. \quad (8.13)$$

Введем новую функцию $F_2 = \psi_2 U^{-1/2}$ и, пользуясь переменной τ , перепишем уравнение (8.13) в форме

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \tau^2} = \frac{n_0^2}{c^2} F_2 \left[\frac{U}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (8.14)$$

Приравняв выражение в скобках в правой части (8.14) некоторой константе p_2^2 :

$$\frac{U}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 = p_2^2, \quad (8.15)$$

вновь получим уравнение с постоянными коэффициентами, совпадающее после замены $p_2 \rightarrow p_1$ с уравнением (8.8). Записав решение этого уравнения в виде бегущей волны, можно представить функцию ψ_2 как

$$\psi_2 = A_2 \sqrt{U(t)} \exp[i(q_2 z - \omega \tau)],$$

$$q_2 = \omega n_0 c^{-1} N_2, \quad N_2 = \sqrt{1 - p_2^2 \omega^{-2}}. \quad (8.16)$$

Подставив (8.16) в (8.12), найдем компоненты волнового поля:

$$E_x = \frac{iq_2}{n_0^2 U^2(t)} \psi_2; \quad H_y = -\frac{i\omega}{U(t)} \left(1 - \frac{i}{2\omega} \frac{\partial U}{\partial t}\right) \psi_2. \quad (8.17)$$

Выражения (8.11) и (8.17) описывают два типа решений нестационарных уравнений Максвелла. Эти решения соответствуют различным зависимостям $U(t)$, определяемым неявно уравнениями (8.7) и (8.15). Найдем теперь эти зависимости в явном виде, предполагая, что в

момент начала процесса релаксации диэлектрической проницаемости значения функции U равны 1.

Задача 6. Рассмотрим сначала модель нестационарной диэлектрической проницаемости $U(t)$, описываемую уравнением (8.7). После замены $U = Q^2$ и перехода к переменной τ (8.2) можно записать решения (8.7) в зависимости от знака постоянной p^2 в двух формах:

$$U_1 = \left(\cos \frac{\tau}{T_1} + M_1 \sin \frac{\tau}{T_1} \right)^2, \quad p^2 = -T_1^2 < 0, \quad (8.18)$$

$$U_2 = \left(\cosh \frac{\tau}{T_2} + M_2 \sinh \frac{\tau}{T_2} \right)^2, \quad p^2 = T_2^2 > 0. \quad (8.19)$$

Здесь M_1 и M_2 — свободные параметры моделей, T_1 и T_2 — характерные времена релаксации диэлектрической проницаемости.

Следует подчеркнуть, что в выражениях (8.18) и (8.19) фигурирует не реальное время t , а параметр τ . Чтобы найти зависимости $U(t)$ в реальном времени, можно выразить τ из этих формул и подставить в определение τ (8.2). Математический формализм такого подхода аналогичен определению U в задачах о неоднородных диэлектриках (2.29)–(2.33). Так, пользуясь (8.18), получим

$$\frac{\tau}{T_1} = \arccos \sqrt{\frac{U_1}{1 + M_1^2}} + \arcsin \frac{M_1}{\sqrt{1 + M_1^2}}. \quad (8.20)$$

Дифференцируя (8.20) и (8.2) и приравнявая выражения для дифференциалов $d\tau$, получаем уравнение, характеризующее зависимость U от реального времени t :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \pm \frac{2}{T_1} \sqrt{\frac{1 + M_1^2}{U_1} - 1}. \quad (8.21)$$

Знаки "+" и "-" соответствуют возрастающей и убывающей ветвям функции U_1 .

Восходящая ветвь решения уравнения (8.21) описывает рост функции от значения $U_1 = 1$ до максимума $U_{\max} = 1 + M_1^2$:

$$\frac{t}{T_{11}} = \frac{1}{2} \left[M_1 - \sqrt{U_1(1 + M_1^2 - U_1)} + \right. \\ \left. + (1 + M_1^2) \left(\arcsin \sqrt{\frac{U_1}{1 + M_1^2}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + M_1^2}} \right) \right]. \quad (8.22)$$

Длительность этого процесса \tilde{t}_1 составляет

$$\frac{\tilde{t}_1}{T_{11}} = \frac{1}{2} \left[M_1 + (1 + M_1^2) \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + M_1^2}} \right]. \quad (8.23)$$

Решение уравнения (8.21), соответствующее убыванию функции от значения U_{\max} до $U = 1$, имеет вид

$$\frac{t - \tilde{t}_1}{T_{12}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{U_1(1 + M_1^2 - U_1)} + \right. \\ \left. + (1 + M_1^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{U_1}{1 + M_1^2}} \right) \right]. \quad (8.24)$$

Здесь T_{11} и T_{12} — характерные времена возрастания и убывания функции $U_1(t)$. Существенно, что эти времена могут быть различны; в случае $T_{11} \neq T_{12}$ форма кривой $U_1(t)$ асимметрична относительно максимума U_{\max} .

Модель $U(t)$ в случае (8.19) находится аналогично. Убывание функции $U = U_2$ от начального значения $U = 1$ до минимума $U_{\min} = 1 - M_2^2$ (предполагается, что $M_2^2 < 1$) и время этого убывания \tilde{t}_2 определяются выражениями

$$\frac{t}{T_{21}} = \frac{1}{2} \left[M_2 - \sqrt{U_2(U_2 + M_2^2 - 1)} + (1 - M_2^2) \left(\operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{1 - M_2^2}} - \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{U_2}{1 - M_2^2}} \right) \right], \quad (8.25)$$

$$\frac{\tilde{t}_2}{T_{21}} = \frac{1}{2} \left[M_2 + (1 - M_2^2) \operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{1 - M_2^2}} \right]. \quad (8.26)$$

Возрастающая ветвь кривой $U(t)$ задается функцией

$$\frac{t - \tilde{t}_2}{T_{22}} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{U_2(U_2 + M_2^2 - 1)} + (1 - M_2^2) \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{U_2}{1 - M_2^2}} \right]. \quad (8.27)$$

Здесь T_{21} и T_{22} — характерные времена релаксации.

Чередованием ветвей U_1 и U_2 при их гладком касании можно моделировать непрерывные колебания диэлектрической проницаемости $\varepsilon(t)$. Решения, описывающие эти ветви, содержат два свободных параметра — величину M , определяющую амплитуду и форму колебаний, и характерное время T . Условия гладкости касания накладывают ограничения на выбор значений M для соседних ветвей. Так, при касании на уровне $U = 1$ эти величины связаны соотношением

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{T_{12}}{T_{21}}. \quad (8.28)$$

Пример несинусоидальных колебаний функции $U(t)$, описываемых формулами (8.22)–(8.28), приведен на рис. 17.

В отличие от рассмотренной модели $U(t)$, определяемой уравнением (8.7), решение уравнения (8.15) описывает более простую зависимость $U(t)$, аналогичную модели (2.11):

$$U(t) = 1 + \frac{s_1 t}{t_1} + \frac{s_2 t^2}{t_2^2}. \quad (8.29)$$

Здесь t_1 и t_2 — характерные времена релаксации, величина p_2^2 (8.15) связана с t_1 и t_2 соотношением

$$p_2^2 = \frac{s_2}{t_2^2} - \frac{s_1^2}{4t_1^2}, \quad s_1 = 0, \pm 1, \quad s_2 = 0, \pm 1. \quad (8.30)$$

В зависимости от значений параметров s_1, s_2, t_1, t_2 функция (8.29) может описывать как монотонные изменения диэлектрической проницаемости, так и формирование в некоторый момент экстремума U_m .

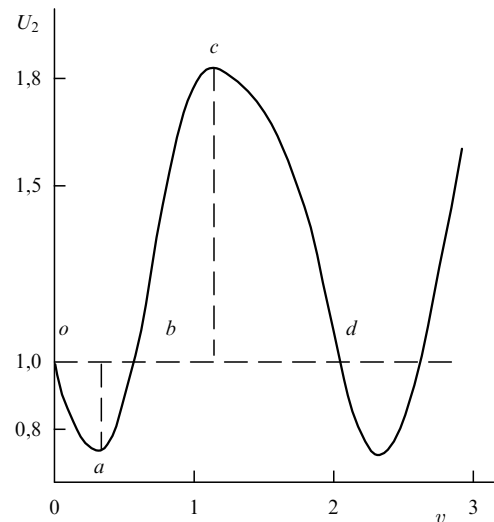


Рис. 17. Негармонические колебания функции $U_2(v), v = tT_{11}^{-1}$, представленные решениями (8.23)–(8.27) при значениях параметров $M_1 = 0,4, M_2 = 0,6$. Ветви oa, ab, bc и cd , определяемые этими решениями, соответствуют характерным временам $T_{12} = 0,5T_{11}, T_{21} = 0,75T_{11}, T_{22} = 1,5T_{11}$.

Гладкое касание кривых (8.29) и кривых, полученных при решении уравнения (8.21), позволяет еще более расширить круг точно решаемых моделей распространения электромагнитных волн в нестационарном диэлектрике.

Задача в. Чтобы исследовать отражение плоской волны, падающей из вакуума нормально к поверхности нестационарной среды, представим функцию ψ_0 , описывающую поле в вакууме, в виде

$$\psi_0 = A_0 \exp[i(k_0 z - \omega t)]. \quad (8.31)$$

Эта функция удовлетворяет уравнениям поля (8.6) и (8.14) для вакуума ($n_0 = 0, U = 1$). Коэффициент отражения находится из условий непрерывности электрических и магнитных компонент поля на границе среды $z = 0$. При описании отражения волн от поверхности среды (8.7) компоненты поля в вакууме находятся при подстановке (8.31) в соотношения (2.4). Компоненты поля в среде определены в рассматриваемой модели (см. рис. 17) соотношениями (8.11). Пользуясь условиями непрерывности, можно записать коэффициент отражения для этой среды в виде

$$R_1 = \frac{1 - n_1}{1 + n_1}; \quad n_1 = n_0 U_1(t) N_1 \left(1 - \frac{i}{2\omega} \frac{\partial U_1}{\partial t} \right). \quad (8.32)$$

Для модели (8.29) коэффициент отражения вычисляется аналогично:

$$R_2 = \frac{1 - n_2}{1 + n_2}; \quad n_2 = n_0 U_2(t) N_2 \left(1 + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial U}{\partial t} \right)^{-1}. \quad (8.33)$$

Формулы (8.32) и (8.33) представляют собой обобщение формул Френеля на случай отражения от нестационарной среды. Эти результаты выявляют динамический характер отражения: коэффициенты $R_{1,2}$ зависят не только от мгновенных значений $U(t)$, но и от их производных. В частном случае, когда нестационарность исчезает ($U_{1,2} = 1, N_{1,2} = 1$), выражения (8.32), (8.33) переходят в известную формулу Френеля для стационар-

ной среды

$$R = (1 - n_0)(1 + n_0)^{-1}.$$

Мнимые части комплексных коэффициентов отражения описывают спектральные изменения волны, отраженной от нестационарной среды. Так, например, при отражении от среды (8.29) коэффициент отражения R_2 (8.33) может быть записан в форме $R_2 = |R_2| \exp(i\varphi)$, где фаза φ зависит от времени:

$$\sin \varphi = n_0 N_2 U_2 U_2' \omega A^{-1/2}, \quad U_2' = \frac{\partial U_2}{\partial t},$$

$$A = \left[N_2^2 - (n_0 U_2)^2 - \left(\frac{n_0 U_2 U_2'}{2\omega} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{n_0 N_2 U_2 U_2'}{\omega} \right)^2. \quad (8.34)$$

Определяя возмущение частоты отраженной волны $\Delta\omega$, обусловленное зависимостью фазы φ (8.34) от времени, по формуле

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (8.35)$$

и дифференцируя выражение для φ (8.34), получаем для возмущения частоты при отражении от среды с $\varepsilon(t) = n_0^2 U^2(t)$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{n_0 N_2}{\omega^2 \sqrt{A}} \left[U_2 U_2'' + (U_2')^2 - \frac{A' U U''}{2A} \right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{n_0 N_2 U U'}{\omega \sqrt{A}} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (8.36)$$

Применение полученных результатов можно показать на примере задачи об уширении спектра волны, отраженной от полупроводника, плотность носителей в котором быстро возрастает за счет ионизации мощным лазерным пучком. Представим зависящую от времени диэлектрическую проницаемость полупроводника в форме [24]

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_L \left[1 - \frac{\Omega_0^2 K(t)}{\omega^2} \right] = \varepsilon_L \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \right) U^2(t). \quad (8.37)$$

Здесь ε_L — решеточная часть диэлектрической проницаемости, безразмерная величина $K(t)$ удовлетворяет условию $K|_{t=0} = 1$. Функцию $U(t)$ выберем в форме (8.29); при этом рост ионизации соответствует уменьшению $U(t)$. Рассмотрим режим, когда ионизация достигает максимума за время T и сохраняет после этого постоянное значение $N_m = N_0 K_m$; при этом функция U достигает минимума $U_m < 1$. Чтобы найти значения параметров t_1 и t_2 в модели (8.29), заметим, что в момент $t = T$ выполняются условия

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=T} = 0,$$

$$U_m^2 \Big|_{t=T} = \left(1 - \frac{t_2^2}{4t_1^2} \right)^2 = \left(1 - \frac{\Omega_0^2 K_m}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \right)^{-1}. \quad (8.38)$$

Из уравнений (8.38) найдем значения t_1 , t_2 и p_2^2 :

$$t_1 = \frac{T}{2(1 - U_m)}; \quad t_2 = \frac{T}{\sqrt{1 - U_m}}; \quad p_2^2 = \frac{U_m(1 - U_m)}{T^2}. \quad (8.39)$$

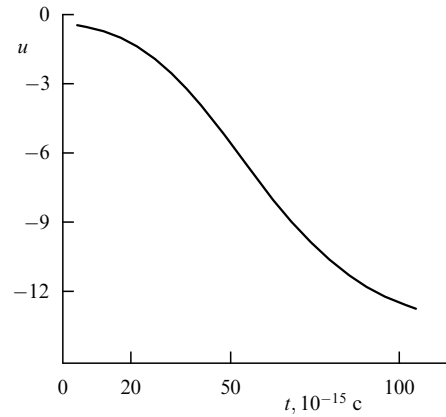


Рис. 18. Нестационарное уширение спектра волны $\lambda = 30$ мкм ($\Delta\omega\omega^{-1} = u \times 10^3$), отраженной от поверхности плазмы InSb ($\varepsilon_L = 12,25$; $N_0 = 10^{17}$ см $^{-3}$), при возрастании плотности носителей в 100 раз за характерное время $T = 100 \times 10^{-15}$ с.

Относительное уширение спектра отраженных волн показано на рис. 18. Красный сдвиг отраженной частоты связан с уменьшением показателя преломления полупроводника при росте плотности носителей.

В заключение этого анализа следует обратить внимание на многообразие точно решаемых моделей нестационарной диэлектрической проницаемости, построенных из различных ветвей функций U_1 и U_2 . Гибкость такого моделирования обеспечивается наличием не менее чем двух свободных параметров для каждой ветви функций U_1 и U_2 .

Использование рассмотренных моделей позволяет построить широкие классы точных аналитических решений уравнений Максвелла для нестационарных диэлектриков; эти решения описывают эволюцию полей при произвольном соотношении периода волн T и времени релаксации среды t_0 . Отметим некоторые свойства такой эволюции.

1. В отражении волн от нестационарной среды могут быть существенны динамические эффекты (8.32), (8.33), связанные с первой и второй производной временной зависимости $\varepsilon(t)$. Эти эффекты напоминают влияние градиента и кривизны профиля на отражение волн от неоднородного диэлектрика, отмеченное в разделе 4.

2. Формулы (8.9) и (8.16) указывают на формирование нормальной и аномальной дисперсии в нестационарных средах. Эти дисперсионные эффекты, характеризующиеся факторами N_1 и N_2 , обусловлены конечными временами релаксации диэлектрической проницаемости.

Если характерные времена t_1 и t_2 в модели $U(t)$ (8.29) связаны соотношением $t_2^{-2} = (4t_1^2)^{-1}$, то параметр (8.30), определяющий дисперсию среды, обращается в нуль, а дисперсионный фактор в этом случае равен 1. Таким образом, для частного вида зависимости (8.29)

$$U_2 = \left(1 + \frac{s_1 t}{2t_1} \right)^2 \quad (8.40)$$

дисперсия, обусловленная конечными временами релаксации $\varepsilon(t)$, исчезает.

3. Дисперсионные уравнения для волн в нестационарных средах (8.9) и (8.16) напоминают дисперсионное уравнение для высокочастотных волн в плазме; при

этом величины p^2 аналогичны квадрату плазменной частоты. В случае $p^{-2}\omega^2 = 1$ возникает полное отражение волн от нестационарного диэлектрика.

9. Телеграфное уравнение для сред с зависящей от времени проводимостью

Влияние быстрых процессов изменения плотности носителей в диэлектрике на дисперсию волн оптического и ИК-диапазона рассматривалось в разделе 8 без учета проводимости среды и поглощения волн. Однако роль проводимости может стать существенной, когда вклад невозмущенной плотности носителей N в $\text{Re } \varepsilon$ невелик, а рассматриваемые возмущения N не меняют этого соотношения. При этом $\text{Re } \varepsilon \sim \varepsilon_L$, а возмущения проводимости σ изменяются пропорционально $N(t)$. В этом случае надо учитывать влияние переменной плотности носителей как на дисперсию, так и на поглощение волн.

Рассмотрим случай нормального падения волн на поверхность такого нестационарного проводника. Вновь используем уравнения (8.3), полагая теперь [38]

$$D_x = \varepsilon_L E_x + \int_0^t \sigma(t') E_x dt'. \tag{9.1}$$

Представляя переменную проводимость $\sigma(t)$ с помощью безразмерной функции $P(t)$ в виде

$$\sigma(t) = \sigma_0 P(t), \quad P(t)|_{t=0} = 1 \tag{9.2}$$

и выражая компоненты поля E_x и H_y через функцию ψ (2.4), можно свести систему (8.3) к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{P(t)}{v^2 T} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{9.3}$$

В уравнении (9.3) v и T — скорость распространения волны и характерное время установления поля в невозмущенной среде:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_L}}; \quad T = \frac{\varepsilon_L}{\sigma_0}. \tag{9.4}$$

В отличие от обычного телеграфного уравнения коэффициент в правой части (9.3) является неизвестной функцией времени [39]. Чтобы установить вид этой функции, допускающий точное аналитическое решение (9.3), будем искать решение (9.3) в форме

$$\psi = F(z, t) \exp\left(-\int_0^t \alpha(t') dt'\right). \tag{9.5}$$

При подстановке (9.5) в (9.3) получаем уравнение для функции F :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} F = \frac{1}{v^2} \left[A F + B \frac{\partial F}{\partial t} \right], \tag{9.6}$$

$$A = \alpha^2 - \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\alpha U}{T}, \quad B = \frac{P(t)}{T} - 2\alpha. \tag{9.7}$$

Введем дополнительные условия

$$A = 0, \quad B = \text{const} = \frac{1}{t_0}. \tag{9.8}$$

Тогда уравнение (9.6) сводится к стандартной форме телеграфного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2 t_0} \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{9.10}$$

Смысл параметра t_0 , имеющего размерность времени, установлен ниже.

Найдем теперь временную зависимость проводимости $P(t)$ и функцию $\alpha(t)$ из уравнений (9.7) и (9.8). Представляя функцию α в виде (9.7)

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{T} - \frac{1}{t_0} \right) \tag{9.11}$$

и подставляя (9.11) в условие (9.8), получим уравнение для функции $U(t)$. В зависимости от соотношения времен t_0 и T (9.4) функция P представляется в двух формах

$$P_1 = \left[\gamma \tanh \left(\text{artanh } \gamma^{-1} + \frac{t}{2t_0} \right) \right]^{-1}, \quad \gamma = \frac{t_0}{T} > 1, \tag{9.12}$$

$$P_2 = \gamma^{-1} \tanh \left(\text{artanh } \gamma + \frac{t}{2t_0} \right), \quad \gamma = \frac{t_0}{T} < 1. \tag{9.13}$$

Как видно из (9.12), (9.13), параметр t_0 характеризует время релаксации проводимости. Модели (9.12), (9.13), описывающие "насыщение" проводимости, возрастающей или убывающей со временем, показаны на рис. 19; в частности, кривая 1 иллюстрирует режим роста проводимости, связанный с ростом плотности носителей $\sigma \sim N(t)$. За время $t \gg 2t_0$ проводимость достигает значения $P = \gamma^{-1}$.

Построим теперь функцию ψ (9.5), описывающую поле в нестационарной среде. Решение телеграфного уравнения (9.10) для функции F имеет вид

$$F = \exp[i(qz - \omega t)], \tag{9.14}$$

$$q = \frac{\omega}{c} n_\sigma, \quad n_\sigma = \sqrt{\varepsilon_L} \sqrt{1 + i(\omega t_0)^{-1}}.$$

Подставляя значения $P(t)$ из (9.12) и (9.13) и вычисляя затем экспоненциальный фактор в выражении (9.5),

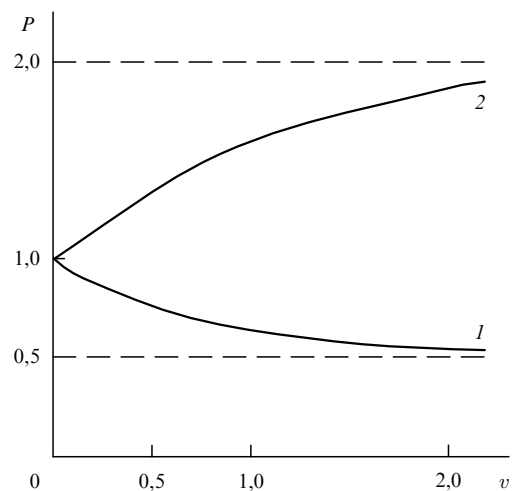


Рис. 19. Зависимость нормированной проводимости P от времени $v = t t_0^{-1}$. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям $\gamma = 0,5$ (9.12) и $\gamma = 2$ (9.13). Штриховые линии соответствуют асимптотическим значениям $P = \gamma^{-1}$ при $v \gg 1$.

найдем, например, для случая быстрой релаксации ($\gamma < 1$)

$$\exp\left[-\int_0^t \alpha(t') dt'\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{\exp(t/2t_0)}{\cosh(\operatorname{artanh} \gamma + t/2t_0)}. \quad (9.15)$$

Комбинируя результаты (9.14) и (9.15), получим после алгебраических преобразований простое решение нестационарного телеграфного уравнения (9.3), соответствующее модели $P_1(t)$ (9.12):

$$\psi = 2\Delta^{-1} \exp[i(qz - \omega t)], \quad (9.16)$$

$$\Delta = 1 + \gamma + (1 - \gamma) \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right).$$

Подставляя решение (9.16) в соотношения (2.4), найдем электрическую и магнитную компоненты волнового поля в проводнике (9.12):

$$E_x = \frac{i\omega}{c} \left[1 - \frac{i(1-\gamma)}{\Delta\omega t_0} \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right)\right] \psi, \quad (9.17)$$

$$H_y = \frac{i\omega}{c} n_\sigma \sqrt{\varepsilon_L} \sqrt{1 + i(\omega t_0)^{-1}} \psi. \quad (9.18)$$

Используя граничные условия на поверхности проводника, найдем комплексный коэффициент отражения R :

$$R = \left[1 + \frac{i(1-\gamma)}{\omega t_0 \Delta} \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) - q\right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{i(1-\gamma)}{\omega t_0 \Delta} \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) + q\right]^{-1}, \quad \lim_{t \gg t_0} R = \frac{1-q}{1+q}. \quad (9.19)$$

Амплитуда и фаза отраженной волны меняются со временем, причем эти изменения развиваются за характерное время t_0 . Для времен $t \gg t_0$ амплитуда и фаза коэффициента R стремятся к постоянным значениям, определяемым формулой (9.19).

Интересно отметить частный случай рассматриваемой модели, соответствующий значению $B = 0$ в системе уравнений (9.8). В этом случае уравнение (9.10) для функции F примет форму волнового уравнения в свободном пространстве:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \quad (9.20)$$

Решением этого уравнения является произвольная дважды дифференцируемая функция $F(t - zv^{-1})$. Функция $P(t)$, определяемая из условий $A = 0$, $B = 0$, убывает по закону

$$P = \left(1 + \frac{t}{2T}\right)^{-1}. \quad (9.21)$$

Вычислив экспоненциальный фактор в функции ψ (9.5) для модели (9.21), получим решение телеграфного уравнения в виде

$$\psi = \left(1 + \frac{t}{2T}\right)^{-1} F\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad (9.22)$$

Решение (9.22) напоминает волну, бегущую в линии связи, свободной от дисперсионных искажений [23].

Подстановка (9.22) в (2.4) показывает, что огибающая магнитной составляющей волнового поля сохраняет свою форму при распространении в нестационарном проводнике (9.21).

Зависящая от времени проводимость $\sigma(t) = \sigma_0 P(t)$ (9.12), (9.13) и электромагнитное поле (9.17), (9.18) представляют собой пример точно решаемой модели нестационарного проводника. Дисперсионные искажения поля в такой среде определяются соотношением характерных времен релаксации T и t_0 . Поиск решений нестационарного телеграфного уравнения (9.3) представляет интерес для анализа линий передачи, импеданс которых зависит от времени.

10. Заключение. Фазовые координаты в задачах радиофизики направляющих систем, нелинейной оптики и квантовой механики

Точные решения уравнений Максвелла для неоднородных и нестационарных сред строились выше с помощью новых переменных — фазовых координат η (2.6) и τ (8.2). Эти переменные позволили представить сложную структуру электромагнитных полей в рассматриваемых средах в виде гармонических волн в пространствах (η, t) и (z, τ) . Этот же подход возможен при решении волновых задач и в других разделах физики. Несколько примеров таких приложений обсуждаются ниже.

I. Длинная линия с неоднородно распределенными параметрами. Распределение тока I и напряжения V в линии без потерь с распределенными параметрами описывается, как известно, парой уравнений [23]:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + L \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} + C \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (10.2)$$

Здесь L и C — индуктивность и емкость линии на единицу длины; сопротивлением и током утечки для простоты пренебрегается.

Рассмотрим в рамках системы (10.1), (10.2) случай, когда распределения L или C неоднородны, например индуктивность меняется вдоль линии по закону

$$L = L_0 U^2(z), \quad U\Big|_{z=0} = 1. \quad (10.3)$$

Систему (10.1), (10.2) можно решать двумя способами.

1. Вводя вспомогательную функцию ψ с помощью соотношений

$$I = -C \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (10.4)$$

получим для ψ волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{U^2(z)}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (10.5)$$

Уравнение (10.5) совпадает по форме с уравнением (2.5), и их дальнейший анализ также одинаков: вводится фазовая координата η (2.6), находится функция ψ (2.10) для распределения индуктивности (2.11) и, наконец, вычисляются огибающие тока и напряжения (10.4).

2. Выражая в отличие от (10.4) ток и напряжение через вспомогательную функцию Θ с помощью соотношений

$$I = \frac{1}{L_0 U^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \quad V = -\frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad (10.6)$$

сведем систему (10.1), (10.2) к уравнению, совпадающему после замены $V^2 \rightarrow c^2 n_0^{-2}$ с (2.20). Далее, строим функцию Θ в виде бегущей волны в переменных (η, t) (2.26), используем распределение $U(z)$, показанное на рис. 2, и т.д. Нахождение коэффициентов отражения и согласование участков линии проводятся по аналогии с расчетами в разделе 4.

Волновое уравнение с зависящей от времени скоростью типа (10.5) возникает при описании ряда волновых процессов в неоднородной сплошной среде. В частности, это уравнение описывает альвеновские волны, движущиеся вдоль магнитного поля в плазме с переменной плотностью [40]. Частота отсечки альвеновских волн для некоторых профилей плотности плазмы найдена в [41].

II. Нелинейное уравнение Шрёдингера для среды с параболическим профилем показателя преломления. Самовоздействие волн в керровских средах описывается, как известно, нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ). Если такое самовоздействие развивается в среде с неоднородным показателем преломления, то решение НУШ затрундняется из-за координатной зависимости коэффициентов. Однако и в этом случае координатная зависимость может быть исключена путем специального преобразования переменных и функции в этом уравнении.

Рассмотрим такой подход для керровской среды, линейный показатель преломления которой распределен по параболическому закону

$$n(\rho) = n_0 - \frac{g^2 \rho^2}{2}. \quad (10.7)$$

Нелинейное уравнение Шрёдингера, описывающее эволюцию огибающей импульса E , движущегося в направлении z в среде (10.11), имеет вид

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right) + \frac{\kappa g^2 \rho^2}{2} E - \frac{n_2 \kappa |E|^2 E}{n_0} = 0. \quad (10.8)$$

Здесь n_2 — коэффициент Керра, $\kappa = \omega n_0 c^{-1}$. Переходя к нормализованным переменным

$$E = E_0 \psi, \quad x_1 = \sqrt{s} x a_0^{-1}, \quad y_1 = \sqrt{s} y a_0^{-1}, \\ z_1 = s z (\kappa a_0^2)^{-1}, \quad v^2 = \kappa a_0^2 g s^{-1}, \quad s = n_2 E_0^2 \kappa^2 a_0^2 n_0^{-1} \quad (10.9)$$

(a_0 — эффективный радиус волнового пучка, E_0 — амплитуда поля), и подставляя (10.9) в (10.8), перепишем НУШ в безразмерной форме

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z_1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} \right) + \frac{v^2}{2} (x_1^2 + y_1^2) \psi - |\psi|^2 \psi. \quad (10.10)$$

Уравнение (10.10) описывает, в частности, нелинейную динамику поля в световоде с параболическим профилем $n(\rho)$.

Обобщая подход, использованный в разделе 2, введем новую искоемую функцию f (2.21) и переменную η

(2.6) с помощью вспомогательной функции U :

$$\psi = f \sqrt{U}; \quad U = \cos^{-2}(v z_1); \\ \eta = \frac{1}{v} \tan(v z_1). \quad (10.11)$$

Такое преобразование приводит уравнение (10.10) к виду

$$i \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{1}{\cos^2(v z_1)} - v f \tan(v z_1) \right] = \\ = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} \right) + \frac{v^2}{2} (x_1^2 + y_1^2) f - \frac{|f|^2 f}{\cos^2(v z_1)}. \quad (10.12)$$

Чтобы исключить из (10.10) член, содержащий сумму квадратов, введем новую функцию φ [42]:

$$f = \varphi \left[\frac{x_1}{\cos(v z_1)}, \frac{y_1}{\cos(v z_1)}, \eta \right] \exp \left[-\frac{v^2}{2} (x_1^2 + y_1^2) \right]. \quad (10.13)$$

Подставив (10.13) в (10.12), получим нелинейное уравнение Шрёдингера в виде

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right) - |\varphi|^2 \varphi. \quad (10.14)$$

Таким образом, преобразования (10.11)–(10.13) переводят неоднородное НУШ (10.10) в уравнение с постоянными коэффициентами (10.14), что существенно облегчает исследование нелинейных режимов распространения волновых пучков.

III. Уровни энергии частицы в потенциальной яме. Дискретные уровни энергии частицы ε_n в простой модели прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной ямы ширины a определяются известной формулой

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (10.15)$$

Однако производные потенциала $U(z)$ в этой модели испытывают скачки на дне ямы ($U = 0$) в точках $z = 0$ и $z = a$. Чтобы найти уровни энергии для профиля потенциала, имеющего, как и в случае (10.15), конечную ширину, но не имеющего углов, можно использовать функцию $U_1 = U^2(z)$, где зависимость $U(z)$ определена в (6.22), $M = 0$.

Уравнение Шрёдингера с таким потенциалом имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\varepsilon - \frac{U_0}{\cos^2(z/L)} \right] \psi = 0. \quad (10.16)$$

Потенциал определен в интервале $z_1 \leq z \leq z_2$, где

$$z_1 = -\frac{\pi}{2} L; \quad z_2 = \frac{\pi}{2} L. \quad (10.17)$$

Функция U_1 показана на рис. 20. Минимум этой функции достигается в точке $z_m = 0$:

$$U_1 \Big|_{z=z_m} = 1. \quad (10.18)$$

При больших значениях потенциала U_1 , где стенки ямы почти вертикальны, профиль $U_1(z)$ близок к прямоугольному потенциальному ящику, а вблизи минимума $z = 0$ этот профиль близок к параболе $U_1 = 1 + z^2 L^{-2}$.

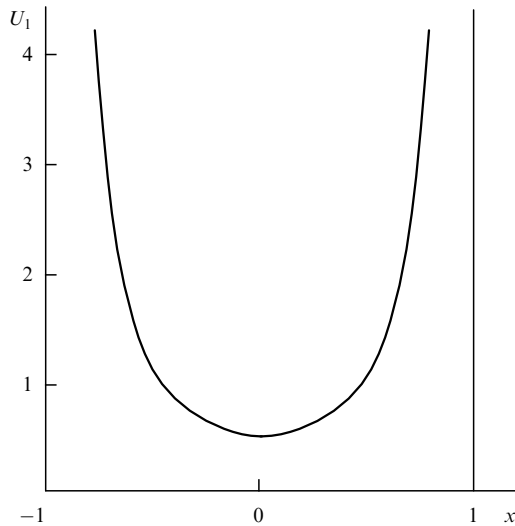


Рис. 20. Потенциальная яма (2.16); $x = 2z(\pi L)^{-1}$, $U_0 = 0,5$.

Для решения уравнения Шрёдингера (10.16) введем новую функцию f и новую безразмерную переменную x :

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{\cos(z/L)}}; \quad x = \frac{1}{L} \int_0^z \frac{dz'}{\cos(z'/L)}. \quad (10.19)$$

Подставив (10.19) в уравнение (10.16), получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \left[-q^2 + \frac{T}{\cosh^2 x} \right] = 0, \quad (10.20)$$

$$q^2 = \frac{1}{4} + \frac{2mU_0L^2}{\hbar^2}; \quad T = \frac{2mL^2\varepsilon}{\hbar^2} - \frac{1}{4}. \quad (10.21)$$

Уравнение (10.20) формально напоминает уравнение Шрёдингера для потенциала $\cosh^{-2}x$ [26]. Однако в отличие от традиционной задачи нахождения уровней для такого потенциала неизвестные значения энергии ε входят не в константу q^2 , а в коэффициент T . Введя еще раз новые функцию W и переменную u

$$f = (\cosh x)^{-q} W; \quad u = \frac{1}{2}(1 - \tanh x), \quad (10.22)$$

получим для функции W гипергеометрическое уравнение

$$u(1-u) \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + [\gamma - u(1+\alpha+\beta)] \frac{\partial W}{\partial u} - \alpha\beta W = 0, \quad (10.23)$$

$$\gamma = 1 + q, \quad \alpha, \beta = \frac{1}{2} \left(1 + 2q \pm \sqrt{1 + 4T} \right). \quad (10.24)$$

Чтобы найти область изменения переменной u (10.22), нужно вычислить значения переменной x (10.19), соответствующие точкам z_1 и z_2 (10.17), ограничивающим область определения потенциала $\cos^{-2}(zL^{-1})$ (10.16). В точке z_2 выполняются равенства

$$\sin \frac{z_2}{L} = 1, \quad \tan \frac{z_2}{2L} = 1. \quad (10.25)$$

Подставляя значение z_2 в (6.35), найдем $x_2 \rightarrow \infty$ и $u_2 = 0$. Аналогичные вычисления дают для точки z_1 : $x_1 \rightarrow -\infty$, $u_1 = 1$.

Решением уравнения (10.2), конечным при $u = 0$, является гипергеометрическая функция $W(\alpha, \beta, \gamma, u)$.

Чтобы это решение оставалось конечным при $u = 1$, требуется выполнение условий

$$s(s+1) = T, \quad q-s = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.26)$$

Раскрывая значения параметров q и T (10.21), получим формулу, определяющую спектр значений энергии частицы ε_n в потенциальной яме, изображенной на рис. 20:

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2}{8mL^2} \left(1 + 2n + \sqrt{1 + \frac{8mL^2U_0}{\hbar^2}} \right)^2. \quad (10.27)$$

Отметим некоторые свойства этого спектра:

1) значение параметра U_0 , характеризующего минимум потенциала U_1 , является произвольным в области $U_0 > 0$;

2) в отличие от прямоугольной потенциальной ямы (10.15), где низший уровень энергии соответствует значению $n = 1$, в спектре (10.27) низший уровень достигается при $n = 0$;

3) вводя в (10.27) величину a , определяющую ширину ямы (10.17), можно получить из (10.27) для больших значений n , пренебрегая слагаемыми, содержащий корень спектр

$$\varepsilon_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (10.28)$$

Как и следовало ожидать, в пределе больших квантовых чисел выражение (10.27) совпадает со спектром бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямы (10.15).

В противоположном предельном случае ($U_0 \gg \hbar^2(8mL^2)^{-1}$) спектр (10.27) дает для низколежащих уровней энергии

$$\varepsilon_n = U_0 + \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{mL^2}}. \quad (10.29)$$

Формула (10.29) описывает, как известно, спектр гармонического осциллятора. Таким образом, две модельные задачи, часто используемые в квантовой механике, — спектр энергии частицы в прямоугольном потенциальном ящике (10.28) и спектр энергии гармонического осциллятора (10.29), — являются частными случаями спектра (10.27).

В заключение следует отметить, что проблемы дисперсии электромагнитных волн, обусловленной неоднородностью или нестационарностью среды, рассмотрены здесь для простых одномерных задач. Единый подход к таким проблемам, основанный на использовании новых переменных — фазовых координат, позволил построить точные аналитические решения уравнений Максвелла для широких классов непрерывных распределений диэлектрической проницаемости, зависящих либо от координаты, либо от времени. Гибкость таких моделей обусловлена наличием нескольких свободных параметров, характеризующих длины неоднородностей или времена релаксации среды. В новых переменных пространственно-временная структура электромагнитных полей описывается в ряде случаев с помощью синусоидальных волн и элементарных функций, а дисперсия определяется формулами волноводного типа.

При рассмотрении более сложных двух- и трехмерных задач отражения и дифракции волн развитый здесь подход полезен для физической интерпретации результа-

тов, полученных при компьютерной стимуляции. Представляют интерес и комбинированные (аналитические и численные) результаты исследования таких проблем и их приложения, например:

— влияние градиента диэлектрической проницаемости на отражение волн, падающих наклонно на плоскую поверхность диэлектрика [43]; этот эффект применяется для контроля распределения $\varepsilon(z)$ в тонких пленках;

— влияние двойки кривизны отражающей поверхности, обуславливающей эффективную неоднородность подповерхностных слоев, на отражение волн [44]. Эффект определяет поправки к формулам Френеля, связанные с конечной длиной волны;

— локализация поверхностных световых волн вблизи экватора стеклянной микросферы за счет изменения длины фазового пути в глубине сферы [45]; эффект представляет интерес для создания высокодобротных микрорезонаторов.

Учитывая гибкость рассмотренных здесь точно решаемых моделей $\varepsilon(z)$ и $\varepsilon(t)$ и простоту соответствующих решений, можно наметить ближайшие шаги в развитии такого подхода:

1. Обобщение аналитических методов, развитых для изотропных неоднородных сред, для проблем анизотропных и гиротропных сред, в частности для проблем магнитооптики. Так, при анализе эффекта Фарадея в простом случае распространения волны вдоль магнитного поля (ось z) в глубь плазмы с переменной плотностью ($z \geq 0$), описываемой моделью (6.1), поля обыкновенной и необыкновенной волн можно выразить через функции ψ_{\pm} :

$$E_{\pm} = E_x \pm iE_y = \frac{i}{c} \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t}, \quad H_{\pm} = H_x \pm iH_y = \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial z}. \quad (10.30)$$

Следуя схеме анализа аналогичной задачи для изотропной среды (см. раздел 6), введем длину фазового пути η и функции $f_{\pm} = \psi_{\pm} U^{-1/2}$; при этом уравнения Максвелла для обыкновенной f_+ и необыкновенной f_- волн запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \eta^2} + f_{\pm} \left[\frac{p_{\pm}^2}{U^2} - \frac{\omega \Omega_0^2}{\omega \pm \omega_H} \frac{\varepsilon_L}{bc^2} - \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0, \quad (10.31)$$

$$p_{\pm}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_L}{c^2} \left[1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega(\omega \pm \omega_H)} (1 - b^{-1}) \right].$$

Здесь ω_H — гирочастота электронов, ε_L — часть диэлектрической проницаемости среды, не зависящая от электронной плотности.

Рассмотрим, например, распространение волны в направлении возрастания плотности ($b < 0$, $b = -|b|$). Пользуясь простой моделью $U(z) = 1 + za^{-1}$ (6.10), получим для функций f_{\pm} уравнения типа (6.11), где параметры q_{\pm}^2 (6.12) составляют

$$q_{\pm}^2 = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon_L a^2 \Omega_0^2 \omega}{c^2 |b| (\omega \pm \omega_H)}. \quad (10.32)$$

Структура волнового поля в среде зависит от параметров p_{\pm}^2 и q_{\pm}^2 , которые, в свою очередь, зависят от пространственного масштаба неоднородности a и плотности плазмы в глубине среды $W = 1 + |b|^{-1}$ (6.1). Так, в случае $p_{\pm}^2 > 0$, $q_{\pm}^2 > 0$ среда прозрачна как для обык-

новенной, так и для необыкновенной волн, а поля этих волн выражаются с помощью (10.30) через функции Ганкеля $H_{q_{\pm}}^{(1)}$ (6.13):

$$\psi_{\pm} = \sqrt{1 + \frac{z}{a}} H_{q_{\pm}}^{(1)} [p_{\pm}(a+z)] \exp(-i\omega t). \quad (10.33)$$

Интерференция волн E_+ и E_- в глубине среды приводит, как известно, к вращению плоскости поляризации (эффект Фарадея). Однако в отличие от равномерного вращения этой плоскости в однородной плазме эффект Фарадея в рассматриваемой задаче характеризуется неравномерным вращением векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

2. Выбор преобразований координат, соответствующих заданной модели неоднородности среды. Задачи оптики неоднородных сред рассматривались в этом обзоре с помощью преобразований уравнений Максвелла, основанных на введении переменной η и функции F (2.6). В этом случае переменная η имеет смысл длины фазового пути в среде. Однако для некоторых распределений неоднородной диэлектрической проницаемости удобно использовать и более сложные представления для переменной η и связанной с нею функции F . Так, рассматривая волновое уравнение с зависящим от координаты показателем преломления $n = n_0 U(z)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{U^2(z)}{V_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad V_0 = \frac{c}{n_0}, \quad (10.34)$$

можно ввести новую функцию F и новую переменную η :

$$\psi = F U^p, \quad \eta = \int_0^z [U(z_1)]^q dz_1. \quad (10.35)$$

Представляя функцию U в виде $U = S^m$ и выбирая значения $p = -m^{-1}$, $q = 2m^{-1}$, можно переписать волновое уравнение (10.34) в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + F \left[-\frac{1}{S} \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \frac{\omega^2}{V_0^2 S^{4-2m}} \right]. \quad (10.36)$$

Обозначая характерный пространственный масштаб неоднородности L , вводя новую переменную u и выбирая функцию S в форме

$$S = u^v, \quad u = \exp \frac{\eta}{L}, \quad v = \frac{1}{2-m}, \quad (10.37)$$

перепишем (10.36) в виде уравнения Бесселя:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial u} + F \left[\left(\frac{\omega L}{V_0} \right)^2 - \frac{1}{(2-m)^2 u^2} \right] = 0. \quad (10.38)$$

Здесь параметр m принимает любые значения, кроме $m = 2$. Случай $m = 2$ соответствует преобразованию (2.6), рассмотренному ранее.

Решениями уравнения (10.38) являются функции Бесселя. Связь переменной u с координатой z находится из (10.35) и (10.37):

$$u = \left[1 - \frac{2}{m-2} \frac{z}{L} \right]^{1-2/m}. \quad (10.39)$$

Профиль диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z) = n_0^2 U^2(z)$ определяется при подстановке (10.39) в (10.37):

$$\varepsilon(z) = n_0^2 \left(1 - \frac{2}{m-2} \frac{z}{L} \right)^{-m}. \quad (10.40)$$

Решение волнового уравнения (10.34) для неоднородного диэлектрика (10.40) имеет вид

$$\psi = \left(1 - \frac{2}{m-2} \frac{z}{L}\right)^{-m/2} \times \\ \times \left[I_\nu \left(\frac{\omega L}{V_0} u \right) + KI_{-\nu} \left(\frac{\omega L}{V_0} u \right) \right] \exp(-i\omega t). \quad (10.41)$$

Здесь K — постоянная.

Семейство решений (10.41) непрерывно зависит от параметра m (за исключением значения $m = 2$). В частном случае $m = 1$ распределение $\varepsilon(z)$ (10.40) переходит в (1.2); линейный профиль $\varepsilon(z)$ и соответствующая структура поля, определяемая функциями Эйри, описывается выражениями (10.40) и (10.41) при $m = -1$. Таким образом, преобразование (10.35) определяет семейство точных аналитических решений уравнений Максвелла для профилей $\varepsilon(z)$ (10.40), содержащих свободные параметры m и L . Дальнейшее расширение классов таких связанных преобразований составляет актуальную задачу оптики слоистых и нестационарных сред.

3. Построение точно решаемых моделей неоднородных и нестационарных поглощающих сред, учитывающих одновременно зависимости $\varepsilon(z)$ и $\sigma(z)$ или $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$. Одновременный учет дисперсионных эффектов, возникающих от неоднородности и нестационарности среды, например эффектов неоднородности в виде бегущей волны изменений $\varepsilon(z, t)$.

Автор с благодарностью вспоминает обсуждение этих вопросов с Я.А. Смородинским (30.12.1917–16.10.1992) и благодарит М. Абловица, Д. Боломей, Ф. Бункина, М. Зуева, М. Лисака, А. Мигуса, Э. Мейстера, Л. Стенфло, Г. Петита, А. Рухадзе и С. Хароша за неизменную поддержку настоящей работы и интерес к ее результатам.

Список литературы

- Rayleigh J W S P. *Lond. Math. Soc.* **11** 51 (1880)
- Forsterling K. *Ann. Phys. – Leipzig* **11** 1 (1931)
- Epstein L J J. *Opt. Soc. Am.* **42** 806 (1952)
- Бреховских Л М, Годин О А *Акустика слоистых сред* (М.: Наука, 1989)
- Hartree D R P. *Roy. Soc. Lond. A Mat.* **131** 428 (1931)
- Rydbeck O. *Philos. Mag.* **34** 342 (1943)
- Wait J R *Electromagnetic Waves in Stratified Media* (Oxford: Pergamon Press, 1970)
- Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (М.: Наука, 1965)
- Кравцов Ю А, Орлов Ю И *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980)
- Михайловский А Б *Теория плазменных неустойчивостей Т. 2 Неустойчивости неоднородной плазмы 2-е изд.* (М.: Атомиздат, 1977)
- Аверков С И, Хронопуло Ю Г *Изв. вузов. Сер. Радиофизика* (3) 818 (1960)
- Felsen L B, Whitham G B *IEEE T. Antennas Propag.* **AP-18** 272 (1970)
- Kuo S P, Zhang Y S *Phys. Fluids B – Plasma* **3** 2906 (1991)
- Koretzky E, Kuo S P, Kim J J. *Plasma Phys.* **59** 315 (1998)
- Shvartsburg A B *Impulse Time-Domain Electromagnetics of Continuous Media* (Boston: Birkhäuser, 1999)
- Алешкевич В А, Петерсон В К *Письма в ЖЭТФ* **66** 323 (1997)
- Rottbrand K Z. *Angew. Math. Mech.* **78** 321 (1998)
- Shvartsburg A, Petite G, Auby N J. *Opt. Soc. Am. B* **16** 966 (1999)
- Shvartsburg A, Strand P, Weiland J *Phys. Scripta* **T-82** 81 (1999)
- Bartuch U et al. *Opt. Commun.* **134** 49 (1997)
- Sankur H, Southwell W *Appl. Optics* **23** 2770 (1984)
- Kildemo M, Hinderi O, Drevillon B J. *Opt. Soc. Am. A* **14** 931 (1997)
- Jackson J *Classical Electrodynamics* 2nd ed. (New York: Wiley, 1973)
- Shvartsburg A, Petite G *J. Opt. Soc. Am. B* **17** (in press)
- Abeles F *Ann. Phys. – New York* **5** 596 (1950)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989)
- Уиттекер Э Т, Ватсон Д Н *Курс современного анализа Т. 2* 2-е изд. (М.: Физматгиз, 1963)
- Hellberg R, Karlsson A, Tharning P *Smart Mater. Struct.* **1** 341 (1992)
- Raether H *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings* (Berlin: Springer-Verlag, 1988)
- Brodin G, Lundberg J J. *Plasma Phys.* **46** 299 (1991)
- Monchicourt P et al. *J. Phys. – Condens. Mat.* **9** 5765 (1997)
- Chian A et al. *Phys. Scripta* **T-60** 5 (1995)
- Rosker M, Wise F, Tang C *Phys. Rev. Lett.* **57** 324 (1986)
- Quere F et al. *Appl. Phys. B* **68** 459 (1999)
- Аскарьян Г А, Погосян В А *ЖЭТФ* **65** 1(7) 117 (1973)
- Tang N, Sutherland R L J. *Opt. Soc. Am. B* **14** 3412 (1997)
- Шварцбург А Б *Квантовая электроника* **25** 201 (1998)
- Гинзбург В Л, Рухадзе А А *Электромагнитные волны в плазме* (М.: Наука, 1974)
- Masoliver J, Weiss G H *Phys. Rev E* **49** 3852 (1994)
- Stenflo L, Shvartsburg A B, Weiland J *Contrib. Plasm. Phys.* **37** 393 (1997)
- Musielak Z E, Fontenla J M, Moore R L *Phys. Fluids B – Plasma* **4** 13 (1992)
- Manassah J T *Opt. Lett.* **17** 1259 (1992)
- Lekner J *Physica A* **116** 235 (1982)
- Snyder A, Mitchell D *Electron. Lett.* **9** 609 (1973)
- Whitten W B, Barnes M D, Ramsey J M J. *Opt. Soc. Am. B* **14** 3424 (1997)

Dispersion of electromagnetic waves in stratified and non-stationary media (exactly solvable models)

A.B. Shvartsburg

Scientific and Technological Center for Unique Instrumentation, Russian Academy of Sciences
ul. Butlerova 15, 117342 Moscow, Russian Federation
E-mail: alexshvarts@mtu-net.ru

Propagation and reflection of electromagnetic waves in stratified and non-stationary media is considered in a single framework using exact analytical solutions of Maxwell's equations. In this approach, the spatial structure of a wave field in an inhomogeneous medium is presented as a function of optical path length of the wave (one-dimensional problem). These solutions predict strong dispersion of both normal and abnormal types to occur in a given medium, the amount of dispersion depending on the gradient and curvature of the continuous smooth profile of the material's inhomogeneous dielectric susceptibility $\varepsilon(z)$. The effect of such non-local dispersion on the reflection of waves is represented by employing generalized Fresnel formulas. Exactly solvable models are introduced to describe the effect of both monotonic and oscillatory $\varepsilon(t)$ dependences on wave dispersion due to the finite relaxation time of the dielectric constant.

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Sq, 42.25.Bs, 42.25.Gy
Bibliography — 45 references

Received 21 July 2000, revised 27 September 2000