*Октябрь 2000 г.* **Том 170, № 10**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

# Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях

А.А. Померанский, Р.А. Сеньков, И.Б. Хриплович

*Рассматривается движение релятивистских частиц с внутренним моментом (спином) во внешних электромагнитных и гравитационных полях. Самосогласованные уравнения движения строятся с помощью нековариантного описания спина и обычного, "наивного" определения координаты релятивистской частицы. Дается простой вывод гравитационного взаимодействия первого порядка по спину для релятивистской частицы. Развитый подход позволяет исследовать эффекты высших порядков по спину. Конкретные вычисления проводятся для взаимодействий второго порядка. Обсуждается гравимагнитный момент, своеобразный спиновый эффект в общей теории относительности. Рассматриваются также вклады взаимодействий первого и второго порядков по спину в гравитационное излучение компактных двойных звезд.*

PACS numbers: 03.65.Pm, **12.20.–m**, 04.25.Nx, **97.80.–d**

## Содержание

1. **Введение (1129).**
2. **Ковариантные и нековариантные уравнения движения частицы со спином в электромагнитном поле (1130).**
   2.1. Трудности с ковариантными уравнениями движения. 2.2. Связь между различными определениями координаты частицы со спином. 2.3. Нековариантный формализм.
3. **Прецессия спина в гравитационном поле (1132).**
   3.1. Общие соотношения. 3.2. Спин-орбитальное взаимодействие. Слабое поле. 3.3. Спин-орбитальное взаимодействие. Поле Шварцшильда. 3.4. Спин-спиновое взаимодействие. 3.5. Прецессия спина в плоской гравитационной волне.
4. **Эффекты высшего порядка по спину (1135).**
   4.1. Идея общего формализма. 4.2. Уравнения движения частицы со спином в электромагнитном поле. Эффекты второго порядка. 4.3. Эффекты второго порядка по спину в гравитационном поле.
5. **Мультиполи черных дыр (1138).**
6. **Гравитационное взаимодействие вращающихся тел и излучение компактных двойных звезд (1139).**
   6.1. Спиновые взаимодействия в задаче двух тел. 6.2. Вклад спиновых взаимодействий в гравитационное излучение.

**Список литературы (1140).**

**А.А. Померанский, Р.А. Сеньков, И.Б. Хриплович.**
Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
630090 Новосибирск, просп. ак. Лаврентьева 11,
Российская Федерация
Тел. (3832) 39-45-61, (3832) 39-47-67
E-mail: pomeransky@vxinpz.inp.nsk.su
senkov@vxinpz.inp.nsk.su
khriplovich@inp.nsk.su

*Статья поступила 25 ноября 1999 г.,
после доработки 3 августа 2000 г.*

## 1. Введение

Задача о движении частицы с внутренним моментом (спином) во внешнем поле включает две части: описание прецессии самого спина и учет влияния спина на траекторию движения. В низшем неисчезающем порядке по $c^{-2}$ полное решение задачи для внешнего электромагнитного поля было дано более 70 лет назад [1]. Прецессия гироскопа в центрально-симметричном гравитационном поле была рассмотрена в том же приближении еще раньше [2]. Заметно позднее была исследована прецессия спина и для гравитационного спин-спинового взаимодействия [3]. Релятивистская задача о прецессии спина во внешнем электромагнитном поле была полностью решена еще в 1926 г. в работе [4], а затем в более удобном формализме, с использованием ковариантного вектора спина — в [5].

Ситуация же со второй частью задачи, относящейся к влиянию спина на траекторию движения частицы, иная. Ковариантные уравнения движения для релятивистской частицы со спином в электромагнитном поле были получены в той же работе [4], а для случая гравитационного поля — в [6]. Эти уравнения неоднократно обсуждались впоследствии с разных точек зрения в многочисленных статьях (см., например, [7–18]). Вопрос о влиянии спина на траекторию частицы во внешних полях представляет не только теоретический интерес. В частности, он привлекает внимание в связи с описанием движения релятивистских частиц в ускорителях [19] (см. также недавний обзор [20]).

В действительности далеко не очевидно, можно ли наблюдать на практике спиновые поправки к уравнениям движения элементарных частиц, скажем, электрона или протона. Согласно известному аргументу Бора (см. [21]) дополнительная сила Лоренца, возникающая вследствие конечного размера волнового пакета заряженной частицы и соотношения неопределенности, превосходит соответствующую компоненту силы Штерна – Герлаха.

Однако аргумент Бора сам по себе не исключает в принципе возможность наблюдения обычного эффекта Штерна – Герлаха даже при наличии большего фона, возникающего из-за соотношения неопределенности. Так, в недавней работе [22] утверждается, что эта возможность подкрепляется численными расчетами. Более того, зависящие от спина корреляции в дифференциальных сечениях процессов рассеяния, несомненно, существуют. Поэтому уже довольно давно было выдвинуто предложение о разделении пучка заряженных частиц по поляризациям в накопителе за счет взаимодействия спина с внешними полями [23]. Хотя это предложение активно обсуждается (см. обзор [20]), до сих пор не ясно, насколько оно технически осуществимо.

Кроме того, существуют макроскопические объекты, внутреннее вращение которых влияет на траектории их движения. Речь идет о движении керровских черных дыр во внешнем гравитационном поле. Эта задача важна, в частности, для расчета гравитационного излучения двойных звезд. Такие расчеты проводились в работах [24 – 27]. Однако, обратившись к этим расчетам, мы обнаружили [28], что используемые там уравнения движения с учетом спина в низшем, неисчезающем порядке по $c^{-2}$ даже в более простом лучае внешнего поля отличаются от уравнений, соответствующих хорошо известному гравитационному спин-орбитальному взаимодействию. Причина расхождения заключается в различном определении координаты центра масс.

Более того, оказалось, что и широко используемые уравнения Папапетру [6] в том же $c^{-2}$-приближении не воспроизводят результата для гравитационного спин-орбитального взаимодействия, найденного в классической работе [2]. Это расхождение отмечалось в статье [29], однако предложенное там объяснение представляется неудовлетворительным (см. раздел 3.2).

Настоящий обзор существенно основывается на работах [28, 30, 31], в которых были получены уравнения движения релятивистской частицы при нековариантном описании спина, согласующиеся с хорошо известными предельными случаями. Хотя для внешнего электромагнитного поля такие уравнения в линейном по спину приближении были получены ранее [19] (см. также [20]), мы хотели бы начать с замечаний, относящихся к этому приближению в электродинамике.

## 2. Ковариантные и нековариантные уравнения движения частицы со спином в электромагнитном поле

### 2.1. Трудности с ковариантными уравнениями движения

Взаимодействие спина с внешним электромагнитным полем с точностью до членов порядка $c^{-2}$ включительно описывается хорошо известным гамильтонианом (см., например, [32])

$$H = -\frac{eg}{2m}\,\mathbf{sB} + \frac{e(g-1)}{2m^2}\,\mathbf{s}[\mathbf{p}\times\mathbf{E}]\,. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ — внешние магнитное и электрическое поля; $e$, $m$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{p}$ — заряд, масса, спин и импульс частицы соответственно; $g$ — гиромагнитное отношение. Подчеркнем, что структура второго (томасова) слагаемого в этом выражении не только надежно установлена теоретически, но и подтверждена с высокой точностью экспериментально, во всяком случае, в атомной физике.

Во избежание недоразумений заметим также, что в самом общем случае второе слагаемое в (1) следовало бы переписать в эрмитовой форме (см., например, [33]):

$$[\mathbf{p}\times\mathbf{E}] \to \frac{1}{2}\,(\mathbf{p}\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\times\mathbf{p}) = \mathbf{p}\times\mathbf{E} + \frac{i}{2}\,\nabla\times\mathbf{E}\,.$$

Однако нас будет интересовать главным образом квазиклассическое приближение, когда в линейном по спину взаимодействии производные от полей отбрасываются. (Кроме того, поправка, содержащая $\nabla\times\mathbf{E}$, обращается в нуль в случае потенциального электрического поля, рассмотренном в [32].)

Попробуем построить ковариантное уравнение движения с учетом спина, которое в том же приближении воспроизводило бы силу

$$f_m = \frac{eg}{2m}\,\mathbf{sB}_{,m} + \frac{e(g-1)}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{s}]_m - \mathbf{s}[\mathbf{v}\times\mathbf{E}_{,m}\,]\right), \qquad (2)$$

соответствующую гамильтониану (1) (здесь и далее запятая в индексе означает частную производную). Ковариантная поправка $f^\mu$ к силе Лоренца $eF^{\mu\nu}u_\nu$ должна быть линейной по тензору спина $S_{\mu\nu}$ и градиенту тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu,\lambda}$; она может зависеть также и от 4-скорости $u^\mu$. Поскольку $u_\mu u^\mu = 1$, поправка $f^\mu$ должна удовлетворять условию $u_\mu f^\mu = 0$.

Из указанных тензоров можно построить лишь две независимые структуры, удовлетворяющие условию $u_\mu f^\mu = 0$. Первая из них

$$\eta^{\mu\varkappa}F_{\nu\lambda,\varkappa}S^{\nu\lambda} - F_{\lambda\nu,\varkappa}\,u^\varkappa S^{\lambda\nu}u^\mu \qquad (3)$$

в $c^{-2}$-приближении сводится к

$$2\mathbf{s}(\mathbf{B}_{,m} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}_{,m}\,)\,, \qquad (4)$$

а вторая

$$u^\lambda F_{\lambda\nu,\varkappa}u^\varkappa S^{\nu\mu} \qquad (5)$$

— к

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{s}\times\mathbf{E}]_m\,. \qquad (6)$$

Заметим, что возможные структуры, содержащие свертку $F_{\nu\varkappa,\lambda}S^{\varkappa\lambda}$, приводятся к (3) и (5) в силу уравнений Максвелла и антисимметрии $S_{\varkappa\lambda}$. Очевидно, никакая линейная комбинация (4) и (6) не может воспроизвести правильное выражение (2) для силы, зависящей от спина. В несколько менее общем виде это было показано в работе [28].

Но почему правильная (в $c^{-2}$-приближении) формула (2) не может быть получена из ковариантного выражения для силы? Слагаемое в (2), пропорциональное $g$-фактору, легко воспроизводится линейной комбинацией (4) и (6). Иными словами, не представляет труда записать в ковариантной форме слагаемые, которые описывают, так сказать, прямое взаимодействие магнитного момента с внешними полями.

Напротив, слагаемое в (2), не зависящее от $g$-фактора и соответствующее томасовой прецессии, не может быть записано в ковариантной форме. Конечно, для частиц с произвольными скоростями томасова прецессия может быть описана и вне рамок $c^{-2}$-приближения. Под нековариантностью же мы понимаем отличие закона преобразования от тензорного. Разумеется, нековариантность уравнений отнюдь не означает, что физические наблюдаемые имеют неправильные трансформационные свойства. Достаточно вспомнить электродинамику в кулоновой калибровке.

### 2.2. Связь между различными определениями координаты частицы со спином

Как отмечалось в [28], ковариантный формализм приводит к правильным результатам, если координата $\mathbf{x}$ частицы, входящая в ковариантное уравнение, связана с обычной координатой $\mathbf{r}$ в $c^{-2}$-приближении следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \frac{1}{2m}\,\mathbf{s}\times\mathbf{v}\,. \tag{7}$$

Обобщение этой подстановки на случай произвольных скоростей частиц

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \frac{\gamma}{m(\gamma+1)}\,\mathbf{s}\times\mathbf{v}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{8}$$

было введено в работе [20]. Очевидно, что при зависящей от скорости подстановке лагранжиан начинает явно зависеть от ускорения, что не позволяет применять стандартный гамильтонов подход. Существенным преимуществом использования координаты $\mathbf{r}$, на наш взгляд, является возможность применения гамильтонова формализма.

Почему, однако, прецессию спина частицы (в отличие от влияния спина на траекторию) можно описывать в ковариантной форме [4, 5], не заботясь об определении координаты? Во-первых, ковариантные уравнения прецессии спина частицы

$$\frac{\mathrm{d}S_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{2m}\left[gF_{\mu\nu}S^\nu - (g-2)\,u_\mu F_{\lambda\nu}u^\lambda S^\nu\right], \tag{9}$$

где $S_\mu$ — 4-вектор спина, написаны в квазиклассическом приближении, т.е. в пренебрежении зависимостью внешних полей от координат. Во-вторых, уравнения (9) линейны и однородны по спину. Поэтому, даже если выйти за рамки квазиклассического подхода, но оставаться в линейном по спину приближении, использование обычной координаты $\mathbf{r}$, которая отличается от координаты $\mathbf{x}$ только членами, пропорциональными $\mathbf{s}$, будет полностью законным.

Поскольку соотношение (7) справедливо и для свободной частицы, его происхождение можно проследить на простом примере свободной частицы со спином 1/2. Здесь вместо представления Дирака, где гамильтониан имеет стандартный вид

$$H_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m\,,$$

удобнее использовать представление Фолди – Ваутхойзена [34], в котором гамильтониан

$$H_{\mathrm{FW}} = \beta\,\epsilon_{\mathbf{p}}, \quad \epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\,,$$

а 4-компонентные волновые функции $\psi_\pm$ состояний с положительной и отрицательной энергиями сводятся фактически к 2-компонентным спинорам

$$\psi_+ = \begin{pmatrix}\phi_+\\0\end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix}0\\\phi_-\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в представлении Фолди – Ваутхойзена оператор координаты $\hat{\mathbf{r}}$, определяемый обычным соотношением

$$\hat{\mathbf{r}}\,\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,\psi(\mathbf{r})\,, \tag{10}$$

— это просто $\mathbf{r}$.

Переход от точного уравнения Дирака во внешнем поле к его приближенной форме, содержащей только поправку первого порядка по $c^{-2}$, осуществляется именно посредством преобразования Фолди – Ваутхойзена. Поэтому в возникающем гамильтониане первого порядка по $c^{-2}$ координата электрона с учетом спина — это та же самая координата $\mathbf{r}$, что и в полностью нерелятивистском случае. Никто не делает подстановку (7) в кулоновом потенциале, рассматривая спин-орбитальное взаимодействие в атоме водорода.

Еще один предельный случай, представляющий для нас особый интерес, — это классическая релятивистская частица с внутренним моментом. Такая частица в действительности является хорошо локализованным волновым пакетом, построенным из состояний с положительными энергиями, т.е. она естественным образом описывается в представлении Фолди – Ваутхойзена. Поэтому именно $\mathbf{r}$ естественно считать координатой релятивистской частицы с внутренним моментом.

Определенная тонкость здесь связана с тем, что в представлении Дирака оператор $\hat{\mathbf{r}}$ недиагонален. Однако операторные уравнения движения выглядят, разумеется, одинаково в представлениях Дирака и Фолди – Ваутхойзена. Соответственно, и квазиклассическое приближение к ним одно и то же. В частности, производные по времени в левой части классических уравнений движения берутся от той же самой координаты $\mathbf{r}$, которая служит аргументом полей в правой части этих уравнений.

Что же касается ковариантного оператора $\hat{\mathbf{x}}$, то наиболее просто он выглядит в представлении Дирака:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{m}}\,\beta\,\mathbf{r}_{\mathrm{D}}\sqrt{\frac{\epsilon}{m}}\,, \tag{11}$$

где $\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{D}}$ — оператор, действующий на волновую функцию в представлении Дирака по закону (10). Ковариантность матричного элемента $\psi^\dagger\hat{\mathbf{x}}\,\psi$ очевидна: матрица $\beta$ превращает волновую функцию $\psi^\dagger$ в $\bar{\psi}$, а множители $\sqrt{\epsilon/m}$ нужны для ковариантной нормировки волновых функций.

Перепишем оператор $\hat{\mathbf{x}}$ в представлении Фолди – Ваутхойзена. Матрица преобразования Фолди – Ваутхойзена имеет вид

$$U = \frac{m+\epsilon-\beta\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{\sqrt{2\epsilon(m+\epsilon)}}\,. \tag{12}$$

Вычисления, которые удобно проводить в импульсном представлении, где $\mathbf{r}_{\mathrm{D}} = i\nabla_{\mathbf{p}}$, дают выражение

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{FW}} = U^\dagger\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{D}}U = \beta\left(\mathbf{r} + \frac{1}{m(m+\epsilon)}\,\mathbf{s}\times\mathbf{p}\right) - \\ - \frac{1}{2m}\left[(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})\right], \tag{13}$$

где

$$\mathbf{s}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \tag{14}$$

— релятивистский оператор спина. Заметим, что разные компоненты релятивистского оператора координаты (13) не коммутируют между собой. Если ограничиться пространством состояний с положительной энергией, то в (13) можно положить $\beta = 1$ и отбросить члены, содержащие $\boldsymbol{\alpha}$. Таким образом, мы приходим к соотношению (8).

Следует, однако, обратить внимание на проблемы, возникающие при ковариантной формулировке уравнений движения релятивистской частицы со спином. Одна из них — необходимость учета связей $u^{\mu}S_{\mu}=0$ (или $u^{\mu}S_{\mu\nu}=0$). Эта проблема имеет технический характер и вполне разрешима (см., например, [14]).

Гораздо серьезнее другое. Ковариантные уравнения движения содержат третью производную по времени. Например, хорошо известное уравнение Папапетру [6] для частицы во внешнем гравитационном поле выглядит так:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(mu_{\mu}-S_{\mu\nu}\frac{\mathrm{D}u^{\nu}}{\mathrm{D}\tau}\right)=-\frac{1}{2}\,R_{\mu\nu\rho\sigma}u^{\nu}S^{\rho\sigma}\,. \tag{15}$$

Здесь $\tau$ — собственное время, $u^{\nu}=\mathrm{D}x^{\nu}/\mathrm{D}\tau$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ — тензор Римана. Пока слагаемое

$$-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\left(S_{\mu\nu}\frac{\mathrm{D}u^{\nu}}{\mathrm{D}\tau}\right)$$

с третьей производной по времени учитывается по теории возмущений, особых проблем с ним нет. Однако принципиальный недостаток уравнения (15) состоит в том, что вне теории возмущений это уравнение, очевидно, имеет лишние, нефизические решения.

### 2.3. Нековариантный формализм

Правильные уравнения движения в электромагнитном поле с учетом спина в первом порядке известны достаточно давно [19]. Хотя эти уравнения полностью релятивистские, они нековариантны и основаны на исходном физическом определении спина. Согласно этому определению спин — это трехмерный вектор $\mathbf{s}$ (или трехмерный антисимметричный тензор $s_{mn}$) внутреннего момента, заданный в системе покоя частицы. Ковариантный вектор спина $S_{\mu}$ (или ковариантный антисимметричный тензор $S_{\mu\nu}$) получается из $\mathbf{s}$ (или $s_{mn}$) просто преобразованием Лоренца. Кстати, преимущество такого подхода состоит в том, что условия $u^{\mu}S_{\mu}=0$ и $u^{\mu}S_{\mu\nu}=0$ выполняются тождественно.

Частота прецессии спина $\mathbf{s}$ при произвольной скорости частицы хорошо известна (см., например, [32]):

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{e}{2m}\left\{(g-2)\left[\mathbf{B}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\mathbf{v}(\mathbf{vB})-\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]+ +2\left[\frac{1}{\gamma}\,\mathbf{B}-\frac{1}{\gamma+1}\,\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\right\}. \tag{16}$$

Соответствующий лагранжиан взаимодействия (лагранжево описание здесь несколько удобнее, чем гамильтоново) равен

$$L_{s1}=\boldsymbol{\Omega}\mathbf{s}=\frac{e}{2m}\,\mathbf{s}\left\{(g-2)\left[\mathbf{B}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\,\mathbf{v}(\mathbf{vB})-\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]+ +2\left[\frac{1}{\gamma}\,\mathbf{B}-\frac{1}{\gamma+1}\,\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\right\}. \tag{17}$$

Уравнение движения для координаты частицы имеет обычный вид:

$$\left(\nabla-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla_{\mathbf{v}}\right)L_{\mathrm{tot}}=0\,, \tag{18}$$

где $L_{\mathrm{tot}}$ — полный лагранжиан системы. Уравнение движения для спина частицы в общем виде таково:

$$\dot{\mathbf{s}}=-\{L_{\mathrm{tot}},\mathbf{s}\}\,, \tag{19}$$

где $\{\ldots,\ldots\}$ — скобки Пуассона. Для компонент спина их можно записать как

$$\{s_i,s_j\}=-\epsilon_{ijk}\,s_k\,,$$

что вполне естественно, например, благодаря известному соотношению между скобками Пуассона и коммутатором. Соответственно, в квантовой задаче

$$\dot{\mathbf{s}}=-i\,[L_{\mathrm{tot}},\mathbf{s}]\,. \tag{20}$$

## 3. Прецессия спина в гравитационном поле

В этом разделе мы даем простой вывод уравнений прецессии спина в гравитационном поле (ограничиваясь первым порядком по спину), основанный на замечательной аналогии между гравитационным и электромагнитным полями. Благодаря этому соответствию формулы предыдущего раздела естественным образом переносятся на случай внешнего гравитационного поля. Таким образом мы легко воспроизводим и обобщаем известные результаты для гравитационных спиновых эффектов.

### 3.1. Общие соотношения

Из закона сохранения момента импульса в плоском пространстве-времени в сочетании с принципом эквивалентности следует, что 4-вектор спина $S^{\mu}$ параллельно переносится вдоль мировой линии частицы. Параллельный перенос вектора вдоль геодезической $x^{\mu}(\tau)$ означает равенство нулю его ковариантной производной:

$$\frac{\mathrm{D}S^{\mu}}{\mathrm{D}\tau}=0\,. \tag{21}$$

Мы используем тетрадный формализм, естественный для описания спина. В силу соотношения (21) уравнение для тетрадных компонент спина $S^{a}=S^{\mu}e^{a}_{\mu}$ выглядит так:

$$\frac{\mathrm{D}S^{a}}{\mathrm{D}\tau}=\frac{\mathrm{d}S^{a}}{\mathrm{d}\tau}=S^{\mu}e^{a}_{\mu;\nu}u^{\nu}=\eta^{ab}\gamma_{bcd}\,u^{d}S^{c}\,. \tag{22}$$

Здесь

$$\gamma_{abc}=e_{a\mu;\nu}\,e^{\mu}_{b}e^{\nu}_{c}=-\gamma_{bac} \tag{23}$$

— коэффициенты вращения Риччи [35, § 98]. Разумеется, уравнение для тетрадных компонент 4-скорости выглядит точно так же:

$$\frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}\tau} = \eta^{ab}\gamma_{bcd}\, u^d u^c \,. \tag{24}$$

Смысл уравнений (22) и (24) ясен: тетрадные компоненты обоих векторов меняются одинаково — лишь за счет вращения локального лоренцева репера.

Аналогично, четырехмерные спин и скорость заряженной частицы с гиромагнитным отношением $g = 2$ (в силу уравнения (9) при $g = 2$ и уравнения Лоренца) прецессируют с одинаковой частотой во внешнем электромагнитном поле:

$$\frac{\mathrm{d}S_a}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{m}\, F_{ab} S^b , \quad \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{m}\, F_{ab} u^b \,.$$

Таким образом, имеет место очевидное соответствие

$$\frac{e}{m}\, F_{ab} \leftrightarrow \gamma_{abc} u^c \,. \tag{25}$$

Соотношение (25) позволяет получить частоту прецессии $\boldsymbol{\omega}$ трехмерного вектора спина $\mathbf{s}$ во внешнем гравитационном поле из (16) с помощью простой замены

$$\frac{e}{m}\, B_i \rightarrow -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ikl}\gamma_{klc} u^c \,, \quad \frac{e}{m}\, E_i \rightarrow \gamma_{0ic} u^c \,. \tag{26}$$

Частота прецессии

$$\omega_i = -\epsilon_{ikl}\left(\frac{1}{2}\gamma_{klc} + \frac{u^k}{u^0 + 1}\gamma_{0lc}\right)\frac{u^c}{u^0_{\mathrm{w}}} \,. \tag{27}$$

Общий множитель $1/u^0_{\mathrm{w}}$ в выражении (27) связан с переходом в левой части уравнения (22) к дифференцированию по мировому времени $t$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = u^0_{\mathrm{w}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \,.$$

Величина $u^0_{\mathrm{w}}$ снабжена индексом "w", с тем чтобы подчеркнуть, что это мировая, а не тетрадная компонента 4-скорости. Все остальные индексы в (27) тетрадные: $c = 0, 1, 2, 3$; $i, k, l = 1, 2, 3$. Соответствующая поправка к лагранжиану, зависящая от спина, равна

$$L_{sg} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{s} \,. \tag{28}$$

Однако в некотором отношении взаимодействие с гравитационным полем первого порядка по спину существенно отличается от соответствующего взаимодействия с электромагнитным полем. В случае электромагнитного поля взаимодействие, вообще говоря, зависит от свободного феноменологического параметра — $g$-фактора. Более того, если допустить нарушение P- и T-инвариантности, появляется еще один свободный параметр — электрический дипольный момент частицы. Дело в том, что и магнитный, и электрический дипольные моменты взаимодействуют с напряженностью электромагнитного поля, так что это взаимодействие калибровочно-инвариантно при любых значениях моментов. Только не зависящее от спина взаимодействие с электромагнитным вектор-потенциалом фиксировано сохранением заряда и калибровочной инвариантностью.

Напротив, в отличие от тензора Римана коэффициенты вращения Риччи $\gamma_{abc}$, входящие во взаимодействие с гравитационным полем первого порядка по спину (28), не ковариантны. Это взаимодействие однозначно фиксировано законом сохранения углового момента в плоском пространстве-времени в сочетании с принципом эквивалентности, оно не содержит свободных параметров [36, 37]. С другой стороны, нет ничего удивительного в том, что частота прецессии $\boldsymbol{\omega}$ зависит не от тензора Римана, а от коэффициентов вращения. Эта частота и не должна обладать свойствами тензора: достаточно вспомнить, что спин, покоящийся в инерциальной системе отсчета, прецессирует во вращающейся.

Ниже мы применим излагаемый подход к описанию спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий, а также к задаче о прецессии спина в плоской гравитационной волне[1]. Мы ограничимся, в основном, приближением слабого поля. Однако теперь в отличие от стандартных подходов все три задачи элементарно решаются при произвольной скорости частицы. Случай, когда скорость частицы велика, а гравитационное поле слабое, соответствует, очевидно, задаче рассеяния. Еще один возможный случай — это частица со спином, связанная другими силами, например электромагнитными, когда мы ищем поправки к частоте прецессии, обусловленные гравитационным взаимодействием.

Напомним, что в приближении слабого поля, когда

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \,,$$

нет различия между тетрадными и мировыми индексами в $e_{a\mu}$ и тетрада выглядит так:

$$e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \tilde{e}_{\mu\nu} , \quad |\tilde{e}_{\mu\nu}| \ll 1 \,.$$

Известная связь тетрад с метрикой

$$e_{a\mu} e_{b\nu}\, \eta^{ab} = g_{\mu\nu}$$

в приближении слабого поля сводится к

$$\tilde{e}_{\mu\nu} + \tilde{e}_{\nu\mu} = h_{\mu\nu} \,.$$

Если потребовать, чтобы тетрады выражались только через метрику, мы приходим к так называемой симметричной калибровке для тетрад, где

$$\tilde{e}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, h_{\mu\nu} \,.$$

Тогда в приближении слабого поля коэффициенты Риччи таковы:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}\,(h_{bc,a} - h_{ac,b}) \,. \tag{29}$$

### 3.2. Спин-орбитальное взаимодействие. Слабое поле

В центрально-симметричном поле, которое создается массой $M$, метрика имеет вид

$$h_{00} = -\frac{r_{\mathrm{g}}}{r} = -\frac{2kM}{r} \,, \quad h_{mn} = -\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\,\delta_{mn} = -\frac{2kM}{r}\,\delta_{mn} \,, \tag{30}$$

отличные от нуля коэффициенты Риччи равны

$$\gamma_{ijk} = \frac{kM}{r^3}\,(\delta_{jk} r_i - \delta_{ik} r_j) \,, \quad \gamma_{0i0} = -\frac{kM}{r^3}\, r_i \,. \tag{31}$$

[1] Мы благодарны Т. Варгасу, который привлек наше внимание к задаче о прецессии спина в плоской гравитационной волне.

Подстановка (31) в формулу (27) дает для частоты прецессии следующее выражение:

$$\boldsymbol{\omega}_{ls} = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}\,\frac{kM}{r^3}\,\mathbf{v}\times\mathbf{r}\,. \tag{32}$$

В пределе малых скоростей ($\gamma \to 1$) формула (32) переходит в классический результат [2]. Соответствующее уравнение движения, полученное из лагранжиана (28), таково:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^3}\,\mathbf{r} - 3\,\frac{kM}{mr^3}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{s} - \frac{3}{2}\,(\mathbf{nv})\,\mathbf{n}\times\mathbf{s} - \frac{3}{2}\,\mathbf{n}\big(\mathbf{n}[\mathbf{v}\times\mathbf{s}]\big)\right],$$
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}\,. \tag{33}$$

В ковариантном подходе движение частицы со спином описывается уравнением Папапетру (15), которое в линейном по спину приближении сводится к

$$\frac{\mathrm{D}u_\mu}{\mathrm{D}\tau} = -\frac{1}{2m}\,R_{\mu\nu\rho\sigma}\,u^\nu S^{\rho\sigma}\,. \tag{34}$$

Заметим, что правая часть уравнения (34) — это единственно возможная здесь ковариантная структура (с точностью до множителя).

Для нерелятивистского движения в гравитационном поле, которое создается массой $M$, уравнение (34) дает

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{kM}{x^3}\,\mathbf{x} - 3\,\frac{kM}{mx^3}\Big[\mathbf{v}\times\mathbf{s} - (\mathbf{nv})\,\mathbf{n}\times\mathbf{s} - 2\mathbf{n}\big(\mathbf{n}[\mathbf{v}\times\mathbf{s}]\big)\Big],$$
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{x}\,. \tag{35}$$

Причина расхождения между уравнениями (33) и (35) заключается в том, что они относятся к координатам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{x}$, определенным по-разному (см. (7)).

Указанное расхождение отмечалось в работе [29], в которой классический результат (см. (32) при $\gamma \to 1$) был получен из амплитуды рассеяния для дираковской частицы в гравитационном поле. Объяснение этого расхождения, предложенное в [29], таково: "Квантовая теория поля частиц со спином 1/2, из которой получен классический результат, не содержит никакого дополнительного условия на спин [2]. Дело в том, что теории поля имеют дело с точечными частицами, а не с протяженными телами".

С одной стороны, спин в теории Дирака, конечно, удовлетворяет упомянутому условию (в смысле средних значений). С другой стороны, протон в гравитационном поле — это точечная частица или протяженное тело? А дейтон? А ядро урана? Очевидно, протяженное тело может рассматриваться как точечная частица, пока мы не входим в детали его структуры и не рассматриваем его внутренние возбуждения. Мы останавливаемся на этом так подробно, поскольку до сих пор можно услышать высказывания, сходные с приведенным выше насчет "точечных частиц" и "протяженных тел", даже от некоторых известных теоретиков.

### 3.3. Спин-орбитальное взаимодействие. Поле Шварцшильда

Рассмотрим прецессию спина в поле Шварцшильда, не считая поле слабым (хотя и пренебрегая влиянием спина на траекторию). Трехмерные компоненты метрики Шварцшильда удобно записать в виде

$$g_{mn} = -\left(\delta_{mn} - \frac{r_m r_n}{r^2}\right) - \frac{r_m r_n}{r^2}\,\frac{1}{1-r_{\mathrm{g}}/r} =$$
$$= -\delta^{\perp}_{mn} - n_m n_n\,\frac{1}{1-r_{\mathrm{g}}/r}\,. \tag{36}$$

Отличные от нуля тетрады выберем так:

$$e_0^{(0)} = \sqrt{1-r_{\mathrm{g}}/r}\,,\quad e_m^{(k)} = \delta^{\perp}_{km} + n_k n_m\,\frac{1}{\sqrt{1-r_{\mathrm{g}}/r}} \tag{37}$$

(в этом разделе тетрадные индексы выделяются скобками). Теперь ненулевые коэффициенты Риччи таковы (последние индексы мировые):

$$\gamma_{(0)(i)0} = -\frac{kM}{r^3}\,r_i\,,\quad \gamma_{(i)(j)k} = \frac{1-\sqrt{1-r_{\mathrm{g}}/r}}{r^2}\,(\delta_{jk}r_i - \delta_{ik}r_j)\,. \tag{38}$$

Наконец, частота прецессии

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{L}\,\frac{r_{\mathrm{g}}}{2mr^3}\left\{\frac{2}{u^0 + u^0\sqrt{1-r_{\mathrm{g}}/r}} + \frac{1}{1+u^0\sqrt{1-r_{\mathrm{g}}/r}}\right\}. \tag{39}$$

Здесь $m$ и $\mathbf{L}$ — масса и орбитальный угловой момент частицы соответственно;

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left\{1 - r_{\mathrm{g}}/r - (\mathbf{nv})^2\,\frac{1}{1-r_{\mathrm{g}}/r} - (\mathbf{v}^{\perp})^2\right\}^{-1/2}.$$

Несколько громоздкое выражение (39) упрощается для круговой орбиты, когда

$$u^0 = \left(1 - \frac{3kM}{r}\right)^{-1/2},$$
$$L = mr\left(\frac{kM}{r}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{3kM}{r}\right)^{-1/2},$$

так что

$$\omega = \frac{(kM)^{1/2}}{r^{3/2}}\left[1 - \left(1 - \frac{3kM}{r}\right)^{1/2}\right]. \tag{40}$$

Общий случай прецессии спина в поле Шварцшильда рассматривался в [38]. Выражение (40) согласуется с соответствующим результатом этой работы (однако в [38] прецессия определялась по отношению к собственному времени $\tau$, а не к мировому времени $t$).

### 3.4. Спин-спиновое взаимодействие

Пусть спин центрального тела равен $\mathbf{s}_0$. Линейные по $\mathbf{s}_0$ компоненты метрики, ответственные за спин-спиновое взаимодействие, таковы:

$$h_{0i} = 2k\,\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_i}{r^3}\,.$$

Отличные от нуля коэффициенты Риччи имеют вид

$$\gamma_{ij0} = k\left(\nabla_i\,\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_j}{r^3} - \nabla_j\,\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_i}{r^3}\right),\quad \gamma_{0ij} = -k\nabla_i\,\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_j}{r^3}\,. \tag{41}$$

[2] Имеется в виду дополнительное условие $u^\mu S_{\mu\nu} = 0$ или $u^\mu S_\mu = 0$. (*Примеч. авт.*)

Частота спин-спиновой прецессии

$$\boldsymbol{\omega}_{ss} = -k\left(2-\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{s}_0\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}+ \\ + k\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\left[\mathbf{v}(\mathbf{s}_0\boldsymbol{\nabla})-\mathbf{s}_0(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})+(\mathbf{v}\mathbf{s}_0)\boldsymbol{\nabla}\right](\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\frac{1}{r}\,. \qquad (42)$$

В пределе малых скоростей формула (42) переходит в соответствующий классический результат [3].

### 3.5. Прецессия спина в плоской гравитационной волне

Пусть слабая гравитационная волна распространяется вдоль оси 3. Как известно (см., например, [35, § 107]), в этом случае можно выбрать систему отсчета так, что единственными ненулевыми компонентами метрики $h_{\mu\nu}$ будут

$$h_{11} = -h_{22} = f_1(t-z)\,, \quad h_{12} = h_{21} = f_2(t-z)\,.$$

Прямое (хотя довольно громоздкое) вычисление по формулам (27) и (29) приводит к следующим выражениям для компонент частоты прецессии:

$$\omega_{\mathrm{w}1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+1}v_3\right)(\dot f_1 v_2 - \dot f_2 v_1)\,,$$
$$\omega_{\mathrm{w}2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\gamma}{\gamma+1}v_3\right)(\dot f_1 v_1 + \dot f_2 v_2)\,,$$
$$\omega_{\mathrm{w}3} = \frac{\gamma}{\gamma+1}\left[\dot f_1 v_1 v_2 - \frac{1}{2}\,\dot f_2\,(v_1^2 - v_2^2)\right]. \qquad (43)$$

Уравнения движения в плоской гравитационной волне получаются из соответствующего лагранжиана $L = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}}\mathbf{s}$. В ковариантном подходе эта задача рассматривалась в [39, 40].

## 4. Эффекты высшего порядка по спину

### 4.1. Идея общего формализма

Для описания линейных по спину эффектов были вполне достаточны относительно простые соображения, использованные выше. Однако по крайней мере в движении вращающихся черных дыр (и, возможно, в некоторых тонких спиновых эффектах для поляризованных ядер в накопителях) может проявляться взаимодействие, квадратичное по спину. Во всяком случае выход за рамки линейного по спину приближения представляет определенный теоретический интерес.

При изучении общего случая требуется более сложная техника [30, 31], которая основана на физически очевидном аргументе, уже упоминавшемся в разделе 3.2: пока мы не исследуем возбуждения внутренних степеней свободы тела, движущегося во внешнем поле, это тело (даже если оно макроскопическое!) может рассматриваться как элементарная частица со спином. Поэтому лагранжиан взаимодействия может быть найден из амплитуды упругого рассеяния частицы со спином $s$ внешним полем. Действуя таким образом, можно описать взаимодействие релятивистской частицы в первом порядке по внешнему полю, но в произвольном порядке по спину частицы.

Явные замкнутые выражения для квадратичного по спину взаимодействия были получены в работах [30, 31]. В соответствии с аргументами, представленными во введении, обсуждение нелинейных по спину эффектов физически осмысленно прежде всего в квазиклассическом пределе $s \gg 1$, который, разумеется, адекватно описывает вращающиеся черные дыры. Однако в связи с упомянутой выше задачей о поляризованных ядрах, а также в связи с некоторыми теоретическими вопросами эти результаты были обобщены в [31] на случай произвольных спинов.

Ниже вкратце изложена техника исследования эффектов высших порядков по спину (более подробное изложение содержится в [30, 31]) и полученные результаты. Детали вычислений не являются необходимыми для понимания результатов и при первом чтении могут быть опущены.

### 4.2. Уравнения движения частицы со спином в электромагнитном поле. Эффекты второго порядка

Лагранжиан взаимодействия частицы с внешним полем может быть получен из амплитуды упругого рассеяния

$$-eJ^{\mu}A_{\mu} \qquad (44)$$

частицы со спином $s$ на вектор-потенциале $A_\mu$ [30]. Матричный элемент $J_\mu$ оператора электромагнитного тока между состояниями с импульсами $k$ и $k'$ может быть представлен (при условии $P$- и $T$-инвариантности) следующим образом (см. [30, 31, 41]):

$$J_\mu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k \epsilon_{k'}}}\,\bar\psi(k')\left\{p_\mu F_{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\,\Sigma_{\mu\nu}q^{\nu}\,F_{\mathrm{m}}\right\}\psi(k)\,, \qquad (45)$$

где $p_\mu = (k'+k)_\mu/2$, $q_\mu = (k'-k)_\mu$.

Волновая функция частицы с произвольным спином может быть записана (см., например, [32, § 31]) как

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}. \qquad (46)$$

Спиноры

$$\xi = \left\{\xi^{\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p}_{\dot\beta_1\,\dot\beta_2\,\ldots\,\dot\beta_q}\right\},$$
$$\eta = \left\{\eta^{\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_q}_{\dot\alpha_1\,\dot\alpha_2\,\ldots\,\dot\alpha_p}\right\}$$

симметричны по пунктирным и непунктирным индексам в отдельности, а

$$p + q = 2s\,.$$

Для частицы с полуцелым спином можно выбрать

$$p = s + \frac{1}{2}\,, \qquad q = s - \frac{1}{2}\,.$$

В случае целого спина удобно принять

$$p = q = s\,.$$

Спиноры $\xi$ и $\eta$ выбраны таким образом, что при отражении координат они переходят друг в друга (с точностью до фазы). При $p \neq q$ это различные объекты, которые принадлежат разным представлениям группы Лоренца. Если же $p = q$, спиноры $\xi$ и $\eta$ совпадают. Тем не менее мы будем использовать одно и то же выражение (46) для волновой функции любого спина, т.е. формально вводить объект $\eta$ и для целого спина, имея в виду, конечно, что он выражается через $\xi$. Это позволяет проводить вычисления единообразно для целых и полуцелых спинов.

В системе покоя спиноры $\xi$ и $\eta$ совпадают с нерелятивистским спинором $\xi_0$, который симметричен по всем индексам; в этой системе нет разницы между пунктирными и непунктирными индексами. Спиноры $\xi$ и $\eta$ получаются из $\xi_0$ с помощью преобразования Лоренца:

$$\xi = \exp\left\{\boldsymbol{\Sigma}\frac{\boldsymbol{\phi}}{2}\right\}\xi_0\,, \quad \eta = \exp\left\{-\boldsymbol{\Sigma}\frac{\boldsymbol{\phi}}{2}\right\}\xi_0\,. \tag{47}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{\phi}$ направлен вдоль скорости, $\tanh\phi = v$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\sigma}_i - \sum_{i=p+1}^{p+q}\boldsymbol{\sigma}_i\,,$$

а $\boldsymbol{\sigma}_i$ действует на $i$-й индекс спинора $\xi_0$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}_i\,\xi_0 = (\boldsymbol{\sigma}_i)_{\alpha_i\beta_i}\,(\xi_0)_{\ldots\beta_i\ldots}\,. \tag{48}$$

В преобразовании Лоренца (47) для $\xi$ после действия оператора $\boldsymbol{\Sigma}$ на $\xi_0$ первые $p$ индексов отождествляются с верхними непунктирными индексами, а следующие $q$ индексов — с нижними пунктирными индексами. Для $\eta$ ситуация обратная.

Далее,

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix},$$

где $I$ — сумма единичных $2\times 2$-матриц, действующих на все индексы спиноров $\xi$ и $\eta$. Компоненты матрицы $\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}$ выглядят так:

$$\Sigma_{0n} = \begin{pmatrix} -\Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_n\end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$\Sigma_{mn} = -2i\epsilon_{mnk}\begin{pmatrix} s_k & 0 \\ 0 & s_k\end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2s}\boldsymbol{\sigma}_i\,.$$

Скалярные операторы $F_{\mathrm{e,m}}$ в выражении для тока (45) зависят от двух инвариантов, в качестве которых удобно выбрать $t = q^2$ и $\tau = (Sq)^2$, где $S^\mu = (i/4)\epsilon^{\mu\nu\varkappa\lambda}\Sigma_{\varkappa\lambda}p_\nu/m$ — 4-вектор спина. В разложении по электрическим мультиполям

$$F_{\mathrm{e}}(t,\tau) = \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{e}}} f_{\mathrm{e},2n}(t)\,\tau^n$$

высшая степень $N_{\mathrm{e}}$ равна $s$ и $s-1/2$ для целого и полуцелого спинов соответственно. В разложении по магнитным мультиполям

$$F_{\mathrm{m}}(t,\tau) = \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{m}}} f_{\mathrm{m},2n}(t)\,\tau^n$$

высшая степень $N_{\mathrm{m}}$ равна $s-1$ и $s-1/2$ для целого и полуцелого спинов. Нетрудно видеть, что $f_{\mathrm{e},0}(0) = 1$, $f_{\mathrm{m},0}(0) = g/2$.

Разумеется, линейные по спину члены в амплитуде (44) воспроизводят хорошо известный результат (17). Что же касается интересующего нас взаимодействия второго порядка по спину, то даже окончательная формула для него достаточно громоздка:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{e}2} = {} & \frac{Q}{2s(2s-1)}\left[(\mathbf{s}\boldsymbol{\nabla}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{v}\mathbf{s})(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\right]\times \\ & \times\left[(\mathbf{s}\,\mathbf{E}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{s}\mathbf{v})(\mathbf{v}\mathbf{E}) + (\mathbf{s}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])\right] + \\ & + \frac{e}{2m^2}\,\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\nabla}]\right)\left[\left(g-1+\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{s}\,\mathbf{B}) - \right. \\ & \left. - (g-1)\,\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{s}\mathbf{v})(\mathbf{v}\mathbf{B}) - \left(g - \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{E}]\right)\right]. \end{aligned} \tag{51}$$

Квадрупольный момент частицы $Q$ определен в (51), как обычно: $Q = Q_{zz}|_{s_z=s}$.

Хорошо известно, что в нерелятивистском пределе электромагнитное взаимодействие конвективного тока и магнитного момента дает вклад в квадрупольное взаимодействие. Индуцированный вклад в квадрупольный момент, уже включенный в $Q$ в (51), следующий [41]:

$$\Delta Q = -e\,(g-1)\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\begin{cases} s\,, & \text{целый спин}, \\ s-1/2\,, & \text{полуцелый спин}. \end{cases} \tag{52}$$

Здесь мы выделили постоянную Планка $\hbar$ в явном виде, чтобы продемонстрировать, что индуцированный квадрупольный момент $\Delta Q$ исчезает в классическом пределе $\hbar\to 0$, $s\to\infty$, $\hbar s\to\mathrm{const}$. Поэтому вклад, пропорциональный $\Delta Q$, не сказывается реально на уравнениях движения классической частицы (хотя и играет роль в атомной спектроскопии [41]).

Электромагнитное взаимодействие конвективного и спинового токов индуцирует также квадратичное по спину взаимодействие, которое имеет классический предел и описывается двумя последними строками (51). Эта не зависящая от $Q$ часть взаимодействия (51) стремится к нулю в нерелятивистском пределе, кроме того, она приводима по спину; иными словами, структура $s_i s_j$ в ней не может быть переписана как неприводимый тензор $s_i s_j - (1/3)\delta_{ij}\mathbf{s}^2$. Не зависящая от $Q$ часть взаимодействия (51) вовсе не имеет квадрупольной структуры.

Представляет интерес асимптотическое поведение взаимодействия (51) при $\gamma\to\infty$. Обе части взаимодействия (51) — зависящая от квадрупольного момента $Q$ и не зависящая от него — сами по себе растут с энергией. Однако поразительным образом существует выделенное значение квадрупольного момента частицы $Q$, при котором сумма обеих частей, т.е. взаимодействия (51) в целом, убывает при $\gamma\to\infty$.

Ситуация сходна с той, которая имеет место для линейного по спину взаимодействия. Хорошо известно (см., например, [11, 42, 43]), что существует выделенное значение $g$-фактора ($g=2$), при котором линейное по спину электромагнитное взаимодействие падает с ростом энергии. Это немедленно следует из выражения (16) при $\gamma\to\infty$. Таким образом, выбор $g=2$ для затравочного магнитного момента необходим (но не достаточен!) для сохранения унитарности в квантовой электродинамике, для ее перенормируемости. Это условие выполнено не только для электрона, но и для заряженного векторного бозона в перенормируемой электрослабой теории. Другие аргументы в пользу $g = 2$ приведены в [44–48].

Та же ситуация имеет место и для квадратичного по спину взаимодействия в электродинамике. Существует выделенное значение квадрупольного момента частицы $Q$, при котором данное взаимодействие падает с ростом энергии. Если предположить также, что $g = 2$, то это значение равно

$$Q = -s(2s-1)\,\frac{e}{m^2}\,. \tag{53}$$

Это же выделенное значение квадрупольного момента можно получить и иначе: на основе суперсимметричных правил сумм [45, 47, 48]. Снова, формула (53) — необходимое условие перенормируемости. И действительно, таково значение квадрупольного момента заряженного векторного бозона в перенормируемой электрослабой теории, для которого

$$g = 2, \qquad s = 1, \qquad Q = -\frac{e}{m^2}\,.$$

### 4.3. Эффекты второго порядка по спину в гравитационном поле

В случае двойной звезды эффекты второго порядка по спину имеют тот же порядок величины, что и спин-спиновое взаимодействие при сравнимых спинах компонент системы [28]. Влияние спин-спинового взаимодействия на характеристики гравитационного излучения становится заметным для системы двух предельных черных дыр [25]. Соответственно, спиновые эффекты второго порядка в уравнениях движения становятся существенными, если хотя бы одна из компонент двойной системы близка к предельной черной дыре [28]. Таким образом, исследование эффектов второго порядка представляет не только чисто теоретический интерес. В принципе, эти эффекты можно будет наблюдать с помощью детекторов гравитационных волн, строящихся в настоящее время.

Уравнения движения во внешнем гравитационном поле в произвольном порядке по спину могут быть получены с помощью простой замены в соответствующих уравнениях для случая электромагнитного поля.

Амплитуда упругого рассеяния в слабом внешнем гравитационном поле $h_{\mu\nu}$ равна

$$-\frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \tag{54}$$

(в последующем мы перейдем к общековариантной форме записи). Матричный элемент $T_{\mu\nu}$ тензора энергии-импульса между состояниями с импульсами $k$ и $k'$ может быть записан следующим образом [30]:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = {} & \frac{1}{4\sqrt{\epsilon_k\epsilon_{k'}}}\,\bar\psi(k')\big\{4\,p_\mu p_\nu F_1 + \\ & + (p_\mu\Sigma_{\nu\lambda} + p_\nu\Sigma_{\mu\lambda})\,q^\lambda F_2 + (\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,F_3 + \\ & + \big[S_\mu S_\nu q^2 - (S_\mu q_\nu + S_\nu q_\mu)(Sq) + \eta_{\mu\nu}(Sq)^2\big]\,F_4\big\}\,\psi(k)\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Скалярные операторы $F_i$ в выражении (55) разлагаются по степеням $\tau = (Sq)^2$:

$$F_i(t,\tau) = \sum_{n=0}^{N_i} f_{i,2n}(t)\,\tau^n\,. \tag{56}$$

Мы ограничимся рассмотрением движения частицы в пустом пространстве, когда слагаемые в (55), пропорциональные $F_3$ и $F_4$, исчезают, поскольку в ковариантной записи они выражаются через скаляр и тензор Риччи соответственно.

Таким образом, амплитуда (54) может быть переписана в виде

$$-\frac{1}{2\sqrt{\epsilon_k\epsilon_{k'}}}\,\bar\psi(k')\left\{p_\mu F_1 + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\lambda}\,q^\lambda F_2\right\}\psi(k)\,h^{\mu\nu}p_\nu\,. \tag{57}$$

Очевидно, все отличие (57) от (44), (45) состоит в замене

$$e\,A_\mu \to \frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}\,p^\nu\,. \tag{58}$$

Сделав эту замену в (51), можно получить квадратичное по спину взаимодействие частицы с гравитационным полем.

После замены (58) дальнейшие вычисления проводятся так же, как и в случае внешнего электромагнитного поля. Остается лишь избавиться от приближения слабого поля, переписав выражения, зависящие от $h_{\mu\nu}$, через коэффициенты Риччи в членах первого порядка по спину и через тензор Римана в членах высших порядков.

Возникающие таким образом члены второго порядка по спину можно получить и иначе. Существует поучительный прием, который позволяет без длинных вычислений получить так называемое гравимагнитное взаимодействие [11] — гравитационный аналог зависящего от $Q$ слагаемого в формуле (51).

Как отмечалось, аналогия между линейными по спину взаимодействиями в электродинамике и гравитации не полна. Электромагнитное взаимодействие зависит от напряженности поля, которая калибровочно-инвариантна. Однако гравитационное взаимодействие зависит не от тензора Римана, который является общековариантным, а от коэффициентов вращения Риччи, которые общековариантными не являются. В этом отношении обсуждаемое ниже квадратичное по спину взаимодействие — гравимагнитное, которое зависит от тензора Римана, — это гравитационный аналог линейного по спину взаимодействия в электродинамике.

Исходной точкой нашего рассмотрения служит следующее наблюдение. Канонический импульс $p_\mu$ входит в релятивистское волновое уравнение для частицы во внешних полях (электромагнитном и гравитационном) в виде комбинации

$$\Pi_\mu = p_\mu - eA_\mu - \frac{1}{2}\,\Sigma^{ab}\gamma_{ab\mu}\,.$$

Здесь $\Sigma^{ab}$ — генераторы группы Лоренца; $\gamma_{ab\mu} = e^c_\mu\gamma_{abc}$. Коммутационные соотношения

$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = -ieF_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\,\Sigma^{ab}R_{ab\mu\nu} \tag{59}$$

демонстрируют замечательное соответствие

$$eF_{\mu\nu} \leftrightarrow -\frac{1}{2}\,\Sigma^{ab}R_{ab\mu\nu}\,. \tag{60}$$

Квадрированная форма уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле

$$(-g^{\mu\nu}\Pi_\mu\Pi_\nu + m^2 + e\,\Sigma^{ab}F_{ab})\,\psi = 0$$

подсказывает, что для произвольного спина $s$ взаимодействие магнитного момента с полем при $g = 2$ описывается лагранжианом

$$-\frac{e}{2m}\,\Sigma^{ab}F_{ab}\,.$$

Дополнительный по сравнению с волновым уравнением множитель $1/2m$ в этом выражении становится очевидным из сравнения с нерелятивистским пределом.

Ясно, что для произвольного $g$-фактора ковариантное взаимодействие магнитного момента с полем имеет вид

$$\mathcal{L}_{\rm el} = -\frac{eg}{4m}\,F_{ab}\Sigma^{ab}\,. \qquad (61)$$

Фактически, это ковариантная форма зависящих от $g$ слагаемых в лагранжиане (17). Что же касается не зависящих от $g$ томасовых слагаемых в (17), то, как отмечалось, они не могут быть представлены в ковариантной форме при обычном, физическом определении координаты $\mathbf{r}$.

По аналогии с магнитным моментом

$$\frac{eg}{2m}\,\Sigma^{ab}$$

представляется естественным определить гравимагнитный момент

$$-\frac{\varkappa}{2m}\,\Sigma^{ab}\Sigma^{cd}\,.$$

Теперь соответствие (60) подсказывает следующую гравитационную аналогию лагранжиана (61):

$$\mathcal{L}_{\rm gm} = \frac{\varkappa}{8m}\Sigma^{ab}\Sigma^{cd}R_{abcd}\,. \qquad (62)$$

Это взаимодействие мы называем гравимагнитным. Заметим, что в классическом пределе $\Sigma^{ab} \to S^{ab} = \varepsilon^{abcd}S_c u_d$.

Подобно гиромагнитному отношению $g$ в электродинамике гравимагнитное отношение $\varkappa$ в общем случае может принимать любые значения. Вполне естественно, тем не менее, что значение $\varkappa = 1$ в гравитации столь же выделено, как и $g = 2$ в электродинамике. Действительно, анализ полного лагранжиана гравитационного взаимодействия второго порядка по спину (он включает также не зависящие от $\varkappa$ члены, которые соответствуют не зависящим от $Q$ членам в (51)) показывает, что именно при $\varkappa = 1$ полное взаимодействие асимптотически стремится к нулю с ростом энергии [11, 30, 31]. Этот же вывод сделан в работах [49 – 52]. К сожалению, гравитационное взаимодействие неперенормируемо для любого спина даже при $\varkappa = 1$.

Во всяком случае при $g = 2$ и $\varkappa = 1$ уравнения движения принимают наиболее простой вид. Более того, в [11] было показано, что именно значение гравимагнитного отношения $\varkappa = 1$ следует из волновых уравнений в фейнмановской калибровке для фотона и гравитона во внешнем гравитационном поле, а также из уравнения Рарита – Швингера для $s = 3/2$ в гравитационном поле.

Случай спина $1/2$ стоит обсудить отдельно. Очевидно, никакое квадратичное по спину взаимодействие здесь невозможно: для спина $1/2$ свойства спиновых матриц $\Sigma^{ab} = (i/4)(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)$ таковы, что $\Sigma^{ab}\Sigma^{cd}R_{abcd}$ вырождается в скалярную кривизну $R$ (умноженную на $1/2$), без какой бы то ни было зависимости от спина. Таким образом, наши аргументы в пользу $\varkappa = 1$ в данном случае неприменимы. И действительно, квадрированное уравнение Дирака содержит $R/4$, а формально при $\varkappa = 1$ должно было бы получаться $R/8$. Тем не менее мы не видим реального физического смысла в недавнем предложении [53] приписать электрону (который вообще не имеет гравимагнитного взаимодействия) гравимагнитное отношение $\varkappa = 2$.

Волновые уравнения для частиц с произвольными спинами во внешнем гравитационном поле рассматривались в [54]. Уравнение для целых спинов, предложенное в этой работе, также соответствует гравимагнитному отношению $\varkappa = 1$. Однако для полуцелых спинов в [54] предложено иное значение $\varkappa$. Даже в классическом пределе $s \to \infty$ значение $\varkappa$ не стремится к единице. Это, очевидно, не согласуется с принципом соответствия, согласно которому (по крайней мере в классическом пределе) не должно быть различия между целыми и полуцелыми спинами.

## 5. Мультиполи черных дыр

Перейдем от элементарных частиц к макроскопическим объектам. Для классического объекта значения параметров $g$ и $\varkappa$ зависят, вообще говоря, от различных характеристик тела. Однако для черных дыр ситуация иная. Из анализа решения Керра – Ньюмена получено [55], что гиромагнитное отношение вращающейся заряженной черной дыры универсально (и такое же, как у электрона!): $g = 2$.

Покажем, что для керровской черной дыры гравимагнитное отношение $\varkappa = 1$. Результат фактически следует из анализа движения спина черной дыры во внешнем поле, проведенного в работе [24] (хотя утверждение и не сформулировано там явно). Мы приведем здесь независимый и, на наш взгляд, более простой вывод этого важного результата.

На больших расстояниях от керровской дыры ее можно рассматривать как точечный источник слабого гравитационного поля. В линейном приближении по полю покоящейся дыры лагранжева плотность, соответствующая взаимодействию (62), может быть записана в виде

$$L = \frac{\varkappa}{4m}\,(\mathbf{s}\nabla)^2\,h_{00}\,\delta(\mathbf{r})\,. \qquad (63)$$

Индуцируемая взаимодействием (63) поправка к тензору энергии-импульса имеет только одну компоненту:

$$\delta T_{00} = -\frac{\varkappa}{2m}\,(\mathbf{s}\nabla)^2\,\delta(\mathbf{r})\,. \qquad (64)$$

В калибровке

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0\,, \qquad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\alpha_\alpha \qquad (65)$$

статическое уравнение Эйнштейна для соответствующей поправки $h_{00}$ к 00-компоненте метрики имеет вид

$$\Delta h_{00} = 8\pi k T_{00} \, .$$

Сама поправка

$$h_{00} = \varkappa \frac{k}{m} \, (\mathbf{s}\nabla)^2 \, \frac{1}{r} \, . \tag{66}$$

Сравним поправку $h_{00}$ с соответствующим вкладом в метрику Керра. В координатах Бойера – Линдквиста метрика такова:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}} r}{\Sigma}\right) \mathrm{d}t^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} \, \mathrm{d}r^2 - \Sigma \, \mathrm{d}\theta^2 - $$
$$- \left(r^2 + a^2 + a^2 \frac{r_{\mathrm{g}} r}{\Sigma} \sin^2\theta\right) \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2 + 2a \frac{r_{\mathrm{g}} r}{\Sigma} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}t \, , \tag{67}$$

где $\Delta = r^2 - r_{\mathrm{g}} r + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $\mathbf{a} = \mathbf{s}/m$. При $r_{\mathrm{g}} = 0$ метрика (67) описывает плоское пространство в сфероидальных координатах [35].

Между тем в плоском пространстве калибровке (65) соответствуют декартовы координаты. Переход от сфероидальных координат к декартовым осуществляется с нужной точностью заменой

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{r}) - \mathbf{r} a^2}{2r^2} \, .$$

В декартовых координатах зависящая от спина часть 00-компоненты метрики

$$g_{00} = 1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r} + \frac{r_{\mathrm{g}} a^2}{2r^3} \, (3\cos^2\theta - 1) \, ,$$

очевидно, совпадает с $h_{00}$ из (66) при $\varkappa = 1$. Несколько более сложное рассмотрение пространственных компонент керровской метрики приводит к тому же результату: $\varkappa = 1$.

Заметим, что движение керровской черной дыры во внешнем гравитационном поле не описывается уравнением Папапетру, даже если оставить в стороне проблему спин-орбитального взаимодействия, линейного по спину. Дело в том, что это уравнение относится к случаю $\varkappa = 0$ [14].

Аналогично доказывается, что и для заряженной керровской дыры гравимагнитное отношение $\varkappa = 1$. Более того, электрический квадрупольный момент заряженной керровской дыры равен значению

$$Q = -2 \, \frac{es^2}{m^2} \, , \tag{68}$$

при котором квадратичное по спину взаимодействие падает с ростом энергии (это очевидный предел общей формулы (53) при $s \to \infty$).

Можно показать [56], что и остальные, более высокие мультипольные моменты заряженной керровской дыры обладают именно теми значениями, которые обеспечивают для взаимодействия любого порядка по спину (но, разумеется, линейного по внешнему полю) асимптотическое убывание с энергией.

## 6. Гравитационное взаимодействие вращающихся тел и излучение компактных двойных звезд

Ожидается, что в течение нескольких лет гравитационное излучение сближающихся двойных звезд будет зарегистрировано системами, в которых используются лазерные интерферометры. Успешное обнаружение гравитационного излучения решающим образом зависит от точного теоретического предсказания формы сигнала. Таким образом, наблюдаемый эффект становится чувствительным к релятивистским поправкам порядка $c^{-2}$, $c^{-3}$ и $c^{-4}$ в уравнениях движения и интенсивности излучения двойной системы. В частности, становится существенным спин-орбитальное взаимодействие. Более того, эффекты второго порядка по спину могут наблюдаться в гравитационном излучении в случае двух предельных керровских черных дыр [25].

### 6.1. Спиновые взаимодействия в задаче двух тел

Спиновые взаимодействия в задаче двух тел можно легко получить из хорошо известных результатов для предельного случая, когда одно из тел (скажем, тело 2) очень тяжелое. В этом пределе мы имеем обычное спин-орбитальное взаимодействие с частотой прецессии $\boldsymbol{\omega}_{ls}$ из формулы (32) (достаточно ограничиться пределом $\gamma \to 1$):

$$V^1_{1ls} = -\boldsymbol{\omega}_{ls} \, \mathbf{s}_1 = \frac{3}{2} \, \frac{k}{r^3} \, \frac{m_2}{m_1} \, \mathbf{l}\mathbf{s}_1 \, . \tag{69}$$

Здесь и ниже $\mathbf{s}_1$ и $m_1$ — спин и масса тела 1, $\mathbf{s}_2$ и $m_2$ — спин и масса тела 2, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий эти два тела.

Далее, имеется так называемый эффект Лензе – Тирринга [57] — взаимодействие орбитального момента $\mathbf{l}$ со спином центрального тела $\mathbf{s}_2$:

$$V^1_{2ls} = 2 \, \frac{k}{r^3} \, \mathbf{l}\mathbf{s}_2 \, . \tag{70}$$

Простые соображения симметрии по отношению к перестановкам частиц требуют, чтобы для системы двух тел с произвольными массами спин-орбитальное взаимодействие имело вид

$$V_{ls} = \frac{k}{r^3} \, \mathbf{l} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{m_2}{m_1} \, \mathbf{s}_1 + \frac{m_1}{m_2} \, \mathbf{s}_2\right) + 2(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)\right] . \tag{71}$$

Что же касается спин-спинового взаимодействия, то оно имеет обычный вид (частота прецессии $\boldsymbol{\omega}_{ss}$ дается формулой (42); опять подразумевается первый неисчезающий порядок по $c^{-1}$):

$$V_{ss} = \frac{k}{r^3} \, \left[3(\mathbf{s}_1\mathbf{n})(\mathbf{s}_2\mathbf{n}) - \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\right] \, , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \, . \tag{72}$$

Конечно, выражения (71) и (72) можно получить и непосредственно: следуя, например, подходу, изложенному в [35, § 106, задача 4].

Наконец, гравимагнитное взаимодействие (62) частицы 1 с полем, созданным тяжелой частицей, имеющей массу $m_2$, в первом порядке по $c^{-2}$ сводится к квадрупольной форме

$$V^1_s = \frac{3}{2} \, \frac{k}{r^3} \, m_2 \, Q^s_{1mn} n_m n_n \, , \tag{73}$$

где эффективный гравитационный квадрупольный момент частицы 1

$$Q^s_{1mn} = \frac{\varkappa_1}{m_1}\left(s_{1m}s_{1n} - \frac{1}{3}\,\delta_{mn}\mathbf{s}_1^2\right).$$

В обсуждаемой задаче двух тел обобщением взаимодействия (73) служит самодействие спинов

$$V_s = \frac{3}{2}\,\frac{k}{r^3}\left(\varkappa_1\,\frac{m_2}{m_1}\,s_{1m}s_{1n} + \varkappa_2\,\frac{m_1}{m_2}\,s_{2m}s_{2n}\right)\times \times\left(n_m n_n - \frac{1}{3}\,\delta_{mn}\right), \quad (74)$$

напоминающее обычное спин-спиновое взаимодействие (72).

При $\varkappa_{1,2} \sim 1$ эффективное квадрупольное взаимодействие (74) имеет тот же порядок величины, что и спин-спиновое взаимодействие (72). Даже в наиболее благоприятной ситуации, когда они могут стать существенными, для двух предельных керровских черных дыр оба взаимодействия имеют порядок $c^{-4}$. В этом случае скорость вращения звезды имеет порядок $c$, а ее радиус близок к гравитационному $r_{\mathrm{g}} \sim c^{-2}$, так что каждый спин $s \sim c^{-1}$ [25]. Те же аргументы показывают, что спин-орбитальное взаимодействие имеет порядок $c^{-3}$ [25].

### 6.2. Вклад спиновых взаимодействий в гравитационное излучение

Спиновые взаимодействия дают вклад в гравитационное излучение разными путями: через зависящие от спина поправки к радиусу орбиты $r$ и к уравнениям движения, которые используются при вычислении производных по времени, входящих в обычное выражение для гравитационного квадрупольного излучения; через поправки к 00-компоненте тензора энергии-импульса частиц; через гравитационный аналог магнитного квадрупольного излучения в электродинамике; через эффекты запаздывания.

Во всем нашем обсуждении гравитационного излучения мы ограничиваемся случаем круговых орбит, который наиболее интересен с физической точки зрения [25]. Кроме того, предположение о круговых орбитах существенно упрощает вычисления. Тем не менее вычисления остаются достаточно громоздкими, поэтому мы приводим ниже только конечные результаты.

Относительная поправка к интенсивности излучения, возникающая благодаря спин-орбитальному взаимодействию (71), равна [28]

$$\frac{I_{ls}}{I_{\mathrm{q}}} = -\frac{\mathbf{l}(73\mathbf{s} + 45\boldsymbol{\xi})}{12\,m_1 m_2 r^2}\,. \quad (75)$$

Здесь

$$I_{\mathrm{q}} = \frac{32k^4 m_1^2 m_2^2\,(m_1 + m_2)}{5r^5}$$

— невозмущенная интенсивность квадрупольного излучения;

$$\mathbf{s} = \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2}\,, \quad \boldsymbol{\xi} = \frac{m_2}{m_1}\,\mathbf{s_1} + \frac{m_1}{m_2}\,\mathbf{s_2}\,.$$

Легко проверить, что соответствующий результат работ [25, 26] можно привести в согласие с (75), используя правильное определение координаты центра масс.

Поправка, обусловленная спин-спиновым взаимодействием (72), имеет вид [25, 26]

$$\frac{I_{ss}}{I_{\mathrm{q}}} = \frac{1}{48\,m_1 m_2 r^2}\,(649 s_{1t}s_{2t} - 223\mathbf{s_1}\mathbf{s_2})\,. \quad (76)$$

Выражение для $I_{ss}$, так же как и приведенное ниже выражение для $I_s$, усреднено по периоду обращения. Именно поэтому формулы (76) и (77) содержат компоненты спина $s_t$, ортогональные к плоскости орбиты.

И наконец, поправка, связанная с самодействием спина, возникающая благодаря гравимагнитному взаимодействию (74) и упомянутому выше гравитационному аналогу магнитного квадрупольного излучения в электродинамике, равна [28]

$$\frac{I_s}{I_{\mathrm{q}}} = \frac{1}{4m_1 m_2 r^2}\left[\left(27\varkappa_1 - \frac{1}{24}\right)\frac{m_2}{m_1}\,s_{1t}^2 + \left(27\varkappa_2 - \frac{1}{24}\right)\frac{m_1}{m_2}\,s_{2t}^2 - \left(9\varkappa_1 - \frac{7}{24}\right)\frac{m_2}{m_1}\,\mathbf{s_1}^2 - \left(9\varkappa_2 - \frac{7}{24}\right)\frac{m_1}{m_2}\,\mathbf{s_2}^2\right]. \quad (77)$$

Эта поправка обсуждалась также в работе [58].

* * *

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98-02-17797, 96-15-96317), Минобразования РФ (грант № 3Н-224-98), Федеральной программы "Интеграция – 1998" (проект № 274).

## Список литературы

1. Thomas L H *Nature* (London) **117** 514 (1926); *Philos. Mag.* **3** 1 (1926)
2. Fokker A D *Kon. Akad. Weten. Amsterdam, Proc.* **23** 729 (1921)
3. Schiff L *Phys. Rev. Lett.* **4** 435 (1959)
4. Frenkel J *Z. Phys.* **37** 243 (1926) [Френкель Я И *Собрание избранных оа* Т. 2 (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958) с. 460]
5. Bargman V, Michel L, Telegdi V *Phys. Rev. Lett.* **2** 435 (1959)
6. Papapetrou A *Proc. R. Soc. London Ser. A* **209** 248 (1951)
7. Barducci A, Casalbuoni R, Lusanna L *Nuovo Cimento A* **35** 389 (1976)
8. Ravndal F *Phys. Rev. D* **21** 2823 (1980)
9. Nash P L *J. Math. Phys.* **25** 2104 (1984)
10. Heinz U *Phys. Lett. B* **144** 228 (1984); *Ann. Phys.* (N.Y.) **161** 48 (1985)
11. Хриплович И Б *ЖЭТФ* **96** 385 (1989)
12. Van Holten J W *Nucl. Phys. B* **356** 3 (1991)
13. Rietdijk R H, van Holten J W *Class. Quantum Grav.* **9** 575 (1992)
14. Yee K, Bander M *Phys. Rev. D* **48** 2797 (1993)
15. Costella J P, McKellar B H J *Int. J. Mod. Phys. A* **9** 461 (1994)
16. Chaichian M, Felipe R G, Martinez D L *Phys. Lett. A* **236** 188 (1997); hep-th/9601119
17. Азимов Я И, Рындин Р М, в сб. *Физика атомного ядра и элементарных частиц. Материалы XXXI зимней школы ПИЯФ* (Ред. Я И Азимов и др.) (СПб.: Изд-во ПИЯФ, 1997) с. 130; hep-ph/9710433, hep-th/9707468
18. Bini D, Gemelli G, Ruffini R *Phys. Rev. D* **61** 064013 (2000)
19. Дербенев Я С, Кондратенко А М *ЖЭТФ* **64** 1918 (1973)
20. Heinemann K, Preprint DESY 96-229; phys/9611001
21. Pauli W "Les throries quantiques du magnétisme. L'électron magnétique", in *6éme Conseil de Physique Solvay Le Magnetisme* (Bruxelles, 1930) p. 175 [Паули В *Труды по квантовой теории. Статьи 1928 – 1958* (Ред. Я А Смородинский) (М.: Наука, 1977) с. 131]
22. Batelaan H, Gay T J, Schwendiman J J *Phys. Rev. Lett.* **79** 4517 (1997)
23. Niinikoski T O, Rosmanith R *Nucl. Instrum. Methods. A* **225** 460 (1987)

24. Thorne K S, Hartle J B *Phys. Rev. D* **31** 1815 (1985)
25. Kidder L E, Will C M, Wiseman A G *Phys. Rev. D* **47** R4183 (1993)
26. Blanchet L et al. *Phys. Rev. Lett.* **74** 3515 (1995)
27. Cho H T, gr-qc/9703071
28. Khriplovich I B, Pomeransky A A *Phys. Lett. A* **216** 7 (1996); gr-qc/9602004
29. Barker B M, O'Connell R F *Gen. Rel. Grav.* **5** 539 (1974)
30. Померанский А А, Хриплович И Б *ЖЭТФ* **113** 1537 (1998); gr-qc/9710098
31. Pomeransky A A, Sen'kov R A *Phys. Lett. B* **468** 251 (1999); gr-qc/9909090
32. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989)
33. Бьеркен Дж Д, Дрелл С Д *Релятивистская квантовая теория* (М.: Наука, 1978)
34. Foldy L L, Wouthuysen S A *Phys. Rev.* **78** 248 (1951)
35. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
36. Кобзарев И Ю, Окунь Л Б *ЖЭТФ* **43** 1904 (1962)
37. Hehl F W et al., in *On Einstein's Path, Festschrift for E. Schucking on the Occasion of His 70th Birthday* (Ed. A Harvey) (Berlin: Springer, 1998); gr-qc/9706009
38. Apostolatos T A *Class. Quantum. Grav.* **13** 799 (1996)
39. Nieto J A, Ryan M P *Nuovo Cimento A* **63** 71 (1981)
40. Bini D, Gemelli G *Nuovo Cimento B* **112** 165 (1997)
41. Khriplovich I B, Milstein A I, Sen'kov R A *Phys. Lett. A* **221** 370 (1996); *ЖЭТФ* **111** 1935 (1997)
42. Weinberg S, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory* (Eds S Deser, M Grisaru, H Pendleton) (Cambridge, MA: MIT Press, 1970)
43. Ferrara S, Porrati M, Telegdi V L *Phys. Rev. D* **46** 3529 (1992)
44. Ferrara S, Remiddi E *Phys. Lett. B* **53** 347 (1974)
45. Ferrara S, Porrati M *Phys. Lett. B* **288** 85 (1995)
46. Jackiw R *Phys. Rev. D* **57** 2635 (1998); hep-th/9708097
47. Giannakis I, Liu J T *Phys. Rev. D* **58** 025009 (1998); hep-th/9711173
48. Giannakis I, Liu J T, Porrati M *Phys. Rev. D* **58** 045016 (1998); hep-th/9803073
49. Porrati M *Phys. Lett. B* **304** 77 (1993); gr-qc/9301012
50. Cucchieri A, Porrati M, Deser S *Phys. Rev. D* **51** 4543 (1995); hep-th/9408073
51. Giannakis I, Liu J T, Porrati M *Phys. Rev. D* **59** 104013 (1999); hep-th/9809142
52. Giannakis I, Liu J T, Porrati M, hep-th/9909012
53. Aldrovandi R, de Andrade V C, Pereira J G, hep-th/9804117
54. Christensen M, Duff M J *Nucl. Phys. B* **154** 301 (1979)
55. Carter B *Phys. Rev.* **174** 1559 (1968)
56. Pomeransky A A, in *Talk at the 3rd William Fairbank Meeting* (Rome, Italy, 29 June – 4 July 1998)
57. Thirring H, Lense J *Phys. Z.* **19** 156 (1918)
58. Poisson E *Phys. Rev. D* **57** 5287 (1998)

## Spinning relativistic particles in external fields

**A.A. Pomeranskiĭ, R.A. Sen'kov, I.B. Khriplovich**
*G.I. Budker Institute of Nuclear Physics,*
*prosp. Lavrent'eva 11, 630090 Novosibirsk, Russian Federation*
*Tel. (7-3832) 39-45-61, (7-3832) 39-47-67*
*E-mail: pomeransky@vxinpz.inp.nsk.su*
*senkov@vxinpz.inp.nsk.su*
*khriplovich@inp.nsk.su*

The motion of a spinning relativistic particle in external electromagnetic and gravitational fields is described self- consistently using the noncovariant description of spin and the usual — 'naive' — definition of the coordinate of a relativistic particle. A simple derivation of the gravitational interaction of first order in spin, is presented for a relativistic particle. The approach developed in the paper allows effects of higher order in spin to be considered. Specifically, second order calculations are performed. The gravimagnetic moment is discussed, which is a special spin effect in general relativity. The contributions of the first- and second-order spin interactions to the gravitational radiation of compact binary stars are considered.

PACS numbers: 03.65.Pm, **12.20.–m**, 04.25.Nx, **97.80.–d**

Bibliography — 58 references

*Received 25 November 1999, revised 3 August 2000*