

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Пространственно-временные задачи локомоторного управления

В.В. Смолянинов

Задачи пространственно-временного построения шагательных движений включают структурные свободы, обусловленные многозвенным строением конечностей, кинематические свободы шагательного цикла, а также свободы межконечностной координации, целенаправленная организация которых осуществляется посредством соответствующих синергий, т.е. посредством дополнительных функциональных связей, формируемых управляющей системой мозга. Основное внимание уделено рассмотрению кинематических и координационных синергий шагательных движений человека и животных. Сравнительный исторический анализ экспериментальных данных и модельных метафор ориентирован на выявление унифицированного описания, а итоговая математическая метафора сводится к пространственно-временной геометрии, инвариантами которой служат базовые синергии шага. Таким образом, концепция синергетической организации свобод биомеханических движений трансформируется в концепцию геохронометрии, которую можно характеризовать как модифицированный вариант геометрии Минковского. С целью определения возможного разнообразия геохронометрий изучаются следствия обобщенного "постулата постоянства скорости света" и сравниваются разные модели волновых хронометров.

PACS numbers: 01.70.+w, 02.40.Dr, 03.30.+p, 87.19.St

Содержание

1. Введение (1063).
2. Синергетика шагательных движений (1064).
 - 2.1. Кинематика шага. 2.2. Базисные параметры. 2.3. Локомоторные метафоры. 2.4. Синергия цикла. 2.5. Синергия структуры цикла. 2.6. Волновая синергия походок. 2.7. Система локомоторных синергий.
3. Хронометрические постулаты (1094).
 - 3.1. Типы физических теорий. 3.2. Алгебра систем отсчета. 3.3. Обзор известных методов. 3.4. Обобщенные модели.
4. Волновые часы (1103).
 - 4.1. Часы Ланжевена. 4.2. Процедура Паскаля. 4.3. Метод фиксации событий.
5. Заключение (1114).
 - 5.1. Физические сущности. 5.2. Время. 5.3. Пространство. 5.4. Принцип презумпции независимости. 5.5. Организм-машина. 5.6. Биoprogramмирование. 5.7. Концепция "релятивистский мозг".
6. Приложение (1118).
 - 6.1. Обозначения. 6.2. Алгебраические базисы. 6.3. Конгруэнтные матрицы. 6.4. Геометрические базисы. 6.5. Операторная метафора. 6.6. Свободные геометрии. 6.7. Общая метрическая метафора. 6.8. Геометрии симметричных квадратичных форм.

- 6.9. Линейные повороты. 6.10. Числовые модели геометрий. 6.11. Модели полярных координат. 6.12. Дробно-линейные преобразования. 6.13. Проективный инвариант. 6.14. Унимодулярный инвариант.

Список литературы (1127).

1. Введение

Англо-французский термин *локомоция*, вообще говоря, относится к поступательным пространственным перемещениям произвольных механических объектов, хотя обычно он используется в более узком смысле — применительно к биомеханическим объектам. Например, принято говорить о локомоции одноклеточных организмов, животных, человека, а о локомоции автомобиля, самолета и т.п. — не принято. Широкое биомеханическое использование термина "локомоция" исходит от Марая [36]:

"Самая характеристическая форма движений, свойственных животным, есть, без сомнения, локомоция. Следовало бы указать на те законы, которые обнаруживаются во всех видах и проявлениях локомоции. Но мы не знаем труднее задачи, чем сближение актов, столь различных, как летание и ползание, бег лошади и плавание рыбы".

Решение трудной задачи "сближения актов" разных форм локомоции — отдельная интересная тема эволюционной биомеханики, но в настоящей статье мы ограничимся "сближением актов" только одной формы, а именно шагательной локомоции, весьма "популярной" в животном царстве — от членистоногих до человека.

Чтобы выявить общие закономерности шагательных движений, например, таракана и человека, необходима

В.В. Смолянинов. Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН, 117334 Москва, ул. Бардина 4, Российская Федерация
Тел. (095) 135-55-23
Факс (095) 135-61-11
E-mail: smolian@iitp.ru

Статья поступила 25 мая 2000 г.

специальная исследовательская стратегия, обоснованию которой посвящен раздел 2. С этой целью проводится сравнение разных метафор организации шагательных движений, ведущих к разным формам описаний походок и, как следствие, к разным исследовательским стратегиям.

Используя разные метафоры организации шагательных движений, можно и задачи кинематического управления формулировать разными способами, но автор предпочел геохронометрический подход. Теоретическое обсуждение такого подхода вынесено в разделы 3 и 4, где рассматриваются две версии геохронометрий — фундаментальная ("от постулата") и конструктивная ("от процедуры"). Названия версий заимствованы у А. Эйнштейна.

Темы разделов 3 и 4 могут представлять самостоятельный интерес для физиков, так как при геохронометрическом обосновании локомоторных синергий приходится обсуждать и концептуальные основы релятивистской кинематики, традиционно именуемой *специальной теорией относительности* (СТО).

В определениях геохроногеометрий широко используется понятие системы базисных инвариантов; связь этого понятия с клейновской концепцией геометрических инвариантов изложена в приложении.

2. Синергетика шагательных движений

Каждая наука приближается к математической точности, которой рано или поздно она должна будет достигнуть. Ум не может успокоиться, не создав теории для объяснения известных фактов.

Э. Марей

Кинематические правила шагательных движений человека и животных (от двуногих до многоножек) — основная тема этого раздела. Интерес к этой теме давний. Любопытно, что уже Аристотель [1] обратил внимание на возможность общего "диагонального" правила построения походок у животных с разным числом ног и на существование у тетрапод разных походок — диагональной и иноходи:

"Среди сухопутных животных одни летают, другие передвигаются по земле, а из этих последних одни ходят, другие ползают; среди водных есть животные плавающие, есть ходящие. Движения четвероногих и многоногих животных происходят по диагонали. Иноходью ходит лев и верблюд".

Согласно приведенной цитате вербальный способ определения походок по синфазным и противофазным парам ног является, видимо, самым древним. Для нашей темы существенно, что этот способ выделяет простейшие координационные синергии локомоторных движений, но этими синергиями не исчерпывается арсенал координационных правил построения двигательных актов, а только начинается.

С механической точки зрения ясно: чтобы совершать пространственные перемещения — поступательные, колебательные или вращательные, — необходимы определенные степени свободы. Этот общий тезис механики относится и к биомеханическим системам и дополняется кибернетическими аспектами о числе возможных и необходимых свобод управления двигательными актами.

Эволюционному конструированию организмов и их двигательных систем присущ, так сказать, *либернетиче-*

ский альтруизм, выражающийся в избыточных свободах функциональной самоорганизации жизнедеятельности, включая задачи построения движений, в частности локомоторных. *Избыточные степени свободы* (ИСС) двигательных органов — это, несомненно, только зримая часть "айсберга свобод" любой живой системы от одиночной клетки (амебы) до человека. Ведущий принцип биоэволюции, видимо, в том и состоит, чтобы всегда давать всем организмам существенно больше свобод, чем они способны освоить в течение жизни.

Но, с другой стороны, свободная система — это, с кибернетической точки зрения, неуправляемая система, неспособная к какой-либо целенаправленной деятельности, включая манипуляционные и локомоторные движения. Сущность всякого управления [50] — в активном преодолении разнообразных ИСС, присущих, в частности, опорно-двигательным аппаратам и программно-алгоритмическим обеспечениям ("харду и софту"), эта сущность проявляется и в формировании средств автономной автоматизации в виде навыков, стереотипов, шаблонов и *синергий*.

2.1. Кинематика шага

Первые систематические и инструментально оснащенные исследования локомоторных движений человека и лошадей, ориентированные на выявление биомеханических законов, выполнил Э. Марей более 100 лет назад [37]. Специально для своих исследований Марей изобрел пневматические датчики, акселерометры и регистрирующую аппаратуру (портативные многоканальные механические самописцы).

Пионерские экспериментальные методы Марей, включавшие позже хронофотографию, циклографию и кино, стали основой последующих экспериментальных исследований и позволили получить обширные сравнительные данные для многих животных (см. [7, 15, 61, 75–86]). Тем не менее провозглашенная Мареем исследовательская программа, ориентированная на выявление *законов* локомоторных движений, осталась незавершенной, поскольку именно законы таких движений, представляемые в математической форме (например, законы Кеплера для планетарных движений), не были сформулированы.

Наша исследовательская программа тоже ориентирована на выявление законов локомоторных движений и в этом смысле является продолжением мареевской программы, но имеет принципиальные методологические и метафорические отличия.

На наш взгляд, программу Марей в принципе невозможно завершить при использовании только нотограмм и опорных планов, которые весьма популярны в локомоторной систематике походок тетрапод [15, 61]. Ниже показывается, что для завершения локомоторной программы Марей требуется:

— пространственно-временной подход, учитывающий и временные, и пространственные характеристики шагательных движений;

— синергетический взгляд на организацию двигательных координаций с позиции учета свобод построения локомоторных движений.

2.1.1. Что такое "синергия"? Согласно современной семантике термина "синергия" все законы биомеханических движений скрыты в синергиях, но подобное обоб-

ценное понимание синергетики локомоторных и других движений организмов сформировалось не сразу.

Понятие *синергии* еще в начале XX века ввел в физиологию Чарльз Шеррингтон (см. [10]) для обозначения кооперативного взаимодействия разных мышечных групп в реализации целостного двигательного акта. Позже Н.А. Бернштейн [10] более точно определил задачи двигательной координации как задачи преодоления ИСС двигательного органа и выделил мышечные синергии в качестве основных компонент двигательного навыка. Затем И.М. Гельфанд, В.С. Гурфинкель, М.Л. Цетлин и М.Л. Шик [17] ввели расширенную трактовку синергий как форм управления движениями, "снижающих число независимых параметров управляемой системы". Таким образом, базовые понятия *биосинергетики* возникли и получили начальное семантическое развитие в рамках нейрофизиологических трактовок биомеханических задач построения движений и формирования двигательных навыков.

Локомоторные движения — это *высокоавтоматизированные синергии*: ИСС локомоторных актов предельно редуцированы — никаких "лишних" свобод. Поэтому весьма плодотворный для теоретических размышлений тезис об ИСС двигательных актов оказывается крайне неопределенным для экспериментального выявления и исследования скрытых и виртуальных свобод.

2.1.2. Разобшение задач. Марей исходно не упрощал свои задачи исследования локомоторных актов и пытался разобраться во всех слагаемых шагательных движений [37]:

"Ходьба человека, кажущаяся на первый взгляд столь простой, в действительности в высшей степени сложна, особенно если рассмотреть, из какого рода движений она составляется".

Сложность кинематического состава шагательных движений обусловлена главным образом тем обстоятельством, что общее кинематическое управление, например, периодом и длиной шага, осуществляется посредством многозвенных конечностей, т.е. включает управление формой конечности — суставными углами. Существенно более сложной является динамическая стратегия управления, ориентированная на формирование суставных сил и моментов, необходимых для формирования кинематических синергий [8, 65, 67]. Ниже, считая динамические аспекты преждевременными, мы ограничимся только кинематическими задачами и простейшими динамическими интерпретациями.

Задачи управления формой многозвенной ноги в фазах опоры и переноса, а также задачи кинематического управления шагом можно разобщить и изучать раздельно, поскольку этим задачам присущи разные множества свобод:

1) конфигурационные свободы, обеспечивающие разнообразие пространственных форм многозвенных конечностей;

2) кинематические свободы, обеспечивающие разнообразие скоростей, а также форм локомоции (ходьба, бег, прыжки).

Полное пространственно-временное представление шагательных движений, включающее последовательное изменение формы многозвенной конечности в цикле шага, дают палочковые *метахронограммы*, которые обычно регистрируются в плоском варианте — в про-

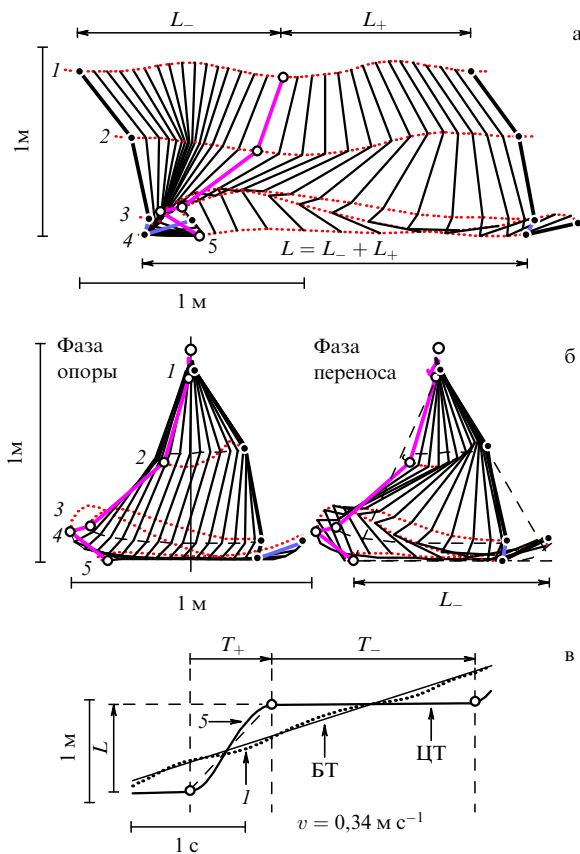


Рис. 1. Транзитная (а) и маятниковые (б) метахронограммы одного шага ходьбы человека — компьютерное построение по данным специальной видеорегистрации (система *Elite*, BTS Italy); (в) пространственно-временные траектории горизонтальных перемещений двух маркерных точек ноги (I — тазобедренный сустав, 5 — носок), ЦТ — целевая траектория, БТ — базальная траектория (линейная аппроксимация траектории точки I).

екции на вертикальную (сагиттальную) плоскость (рис. 1а).

По справедливой оценке Н.А. Бернштейна [10], метахронограмма — выдающееся методологическое достижение Марей. Главный эффект этого достижения (по сравнению с фото- и кинорегистрациями) — в предельном сжатии пространственно-временной информации о локомоторной системе, в фиксации наиболее существенной части, необходимой для кинематических и динамических (при наличии масс-инерционных данных) исследований. Сам Бернштейн и его коллеги значительно усовершенствовали метод метахронограмм. В настоящее время существуют более совершенные видеокомпьютерные системы для 3-мерной регистрации биомеханических и других движений, которые автоматически оцифровывают (с частотой 100 кадр s^{-1} или более) координаты выделенных точек объекта, затем строят соответствующие метахронограммы и выводят их на экран монитора.

2.1.3. ДСО — дорожная система отсчета. На рисунке 1а построена метахронограмма для пяти маркерных точек: 1 — тазобедренный сустав (ТБС), 2 — коленный сустав, 3 — голеностопный сустав, 4 — пятка, 5 — носок. Горизонтальная x_k и вертикальная z_k координаты пяти точек $\mathbf{x}_k \equiv (x_k, z_k)'$, $k = 1, \dots, 5$, исходно определяются

относительно *дорожной системы отсчета* (ДСО), связанной с дорогой, по которой идет человек. Мгновенная конфигурация ноги описывается множеством из пяти векторов

$$X_{\text{leg}} \equiv \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \quad (2.1)$$

а метакхронограмма суть множество конфигураций $X_{\text{leg}}(t)$ для дискретной последовательности моментов времени с постоянным временным интервалом Δt . Метахронограмма, определяемая относительно ДСО, называется *транзитной*, так как она воспроизводит перемещения ("транзит") тела и ног относительно опорного субстрата.

Поскольку целостный шаг — *локомоторный цикл* (ЛЦ) — состоит из двух фаз (опоры и переноса), общие характеристики ЛЦ (длительность периода T и длина шага L) содержат соответствующие части: T_- и T_+ — длительности опоры и переноса, L_- и L_+ — опорная и переносная компоненты длины шага. Графическое определение компонент длины шага с помощью метахронограммы показано на рис. 1а.

Когда в фазе опоры длительности T_- стопа контактирует с грунтом и неподвижна, тогда базальная точка движется с постоянной скоростью локомоции v и проходит расстояние $L_- \equiv vT_-$, а за длительности фазы переноса T_+ — расстояние $L_+ \equiv vT_+$. Сумма этих двух расстояний, очевидно, равна длине шага, т.е. расстоянию, которое проходит тело за период T :

$$L = L_- + L_+ = v(T_- + T_+) \equiv vT. \quad (2.2)$$

Но то же расстояние L стопа проходит за меньшее время длительности фазы переноса $T_+ = T - T_-$ (рис. 1а, в), так как в этой фазе стопа движется быстрее тела, а именно со скоростью $U = u + v$, где u — скорость стопы относительно тела. Поэтому возможно следующее определение длины шага:

$$L = UT_+ = uT_+ + vT_+ \equiv L_- + L_+. \quad (2.3)$$

Отсюда и из (2.2) получаем два способа определения опорной длины шага:

$$L_- = uT_+ = vT_-. \quad (2.4)$$

Шагательные движения ног человека выглядят (особенно в фазе переноса) маятниковоподобными. Однако в ДСО для разных фаз шага — переноса и опоры — следует говорить о двух типах маятников — обычном и перевернутом, т.е. о маятнике с верхней точкой подвеса в ТБС (в фазе переноса) и о маятнике с нижней точкой вращения (в фазе опоры).

2.1.4. ЛСО — локомоторная система отсчета. Даже при стационарной локомоции с некоторой скоростью v никакая конкретная точка тела, включая центр масс, не движется с постоянной скоростью, равной v . Поэтому чтобы выделить "инерциальную" систему отсчета, называемую далее *локомоторной системой отсчета* (ЛСО), приходится вводить искусственную "базальную" точку, которая перемещается со скоростью локомоции и принимается за начало ЛСО. Практически базальная точка определяется для стационарной локомоции посредством

линейной аппроксимации координат ТБС $x_1(t)$ и $z_1(t)$. Переход из ДСО (2.1) в ЛСО:

$$x_k(t) \equiv (x_k(t), z_k(t))' \rightarrow \\ \rightarrow (x_k(t) - vt, z_k(t))' = (y_k(t), z_k(t))' \equiv y_k(t), \quad (2.5)$$

соответствует преобразованию Галилея.

После перехода в ЛСО *транзитная* метахронограмма преобразуется в *маятниковую* (рис. 1б), которая более адекватна маятниковой интерпретации шагательных движений ног. Здесь ТБС служит естественной точкой подвеса маятника в обеих фазах, которая совершает как горизонтальные, так и вертикальные колебания сравнительно небольшой амплитуды. Асимметричность колебаний ноги в фазах опоры и переноса проявляется в разных последовательностях 3-звенных конфигураций, а также, согласно (2.4), в разных скоростях движений стопы в этих фазах.

Характеристической фигурой качания ноги в ЛСО является *опорный треугольник* (рис. 1б), который замечается прямой, соединяющей две крайние точки ноги — ТБС $x_1(t)$ и носка $x_5(t)$. Длина этой прямой называется *функциональной* или *телескопической* длиной ноги. Основание опорного треугольника имеет длину, равную опорной длине шага (2.4). Иначе говоря, величина L_- есть размах локомоторного колебания ноги.

Временные развертки горизонтальных и вертикальных перемещений точек $x_k(t)$ можно изучать раздельно, т.е. как временные графики $x_k(t)$ и $z_k(t)$. Для кинематического описания шагательной локомоции, без учета формы ноги, достаточно знать только две траектории (рис. 1в): ТБС $x_1(t)$ (чтобы определять текущую скорость локомоции) и носка $x_5(t)$ (чтобы определять пространственные и временные параметры шага). При учете только горизонтальных компонент перемещений $\{x_1(t), x_5(t)\}$ нога представляется уже не как плоский маятник, а как *горизонтальный осциллятор*. Параметры, использованные в формулах (2.2)–(2.4), характеризуют пространственно-временные свойства целевой траектории носка $x_5(t)$.

Вся сложная кинематика и динамика пространственных движений многозвенных конечностей эволюционно адаптирована на организацию целевых движений дистальных сегментов. Целевая роль дистальных траекторий вполне очевидна для манипуляционных движений [34], но и для локомоторных движений, несомненно, справедлив *принцип дистального целеполагания*. Локомоторную траекторию дистальной части стопы человека (носка) или ног животных (позвоночных и беспозвоночных) мы будем далее называть единообразно *целевой траекторией* (ЦТ) и обозначать символом Z из-за ее зигзагообразной формы.

Итак, независимое от анатомии конечности кинематическое описание шагательных движений представляется пространственно-временными параметрами ЦТ Z .

2.1.5. Баллистическая метафора. Участки фазы переноса ЦТ Z являются (рис. 1в), строго говоря, нелинейными. Приближенно эти участки хорошо аппроксимируются двумя параболами, а это означает, что сначала нога под действием примерно постоянной силы движется как сосредоточенная эквивалентная масса равноускоренно, а затем аналогичным образом — равнозамедленно.

Формально описание формы ЦТ в фазе переноса можно упростить методом "спрямления", заменив нелинейный участок этой фазы линейным.

Замена параболического участка фазы переноса линейным фактически означает упрощение формы динамического управления: постоянные силовые воздействия заменяются импульсными (теоретическими δ -импульсами), которые включаются только в начале и в конце фазы переноса. Начальный импульс необходим, чтобы неподвижная масса ноги приобрела относительно грунта постоянную скорость $U = u + v$, а конечный импульс необходим для остановки ноги.

Простой кинематике шагательной локомоции, представляемой кусочно линейными ЦТ, можно поставить в соответствие столь же простой динамический образ локомоторной системы, содержащей три массы $\{m_0, m_1, m_2\}$, которые способны совершать горизонтальные прямолинейные перемещения. Здесь масса m_0 условно представляет эквивалентную массу тела человека, а две другие массы m_1, m_2 — эквивалентные массы ног, которые в норме можно считать равными: $m_1 = m_2 = m$ (для "массовой модели" человека характерно еще условие примерного равенства суммарной массы ног массе тела: $m_1 + m_2 = 2m \approx m_0$).

Модель горизонтальной баллистики. Тело представляется массой m_0 , а ноги — равными массами m ; шагательные движения формируются силовыми взаимодействиями между массой тела и массами ног.

Управление шагательными движениями в баллистической модели сводится, с одной стороны, к определению моментов времени включения импульсов силы для начала движения и остановки, а с другой стороны — к заданию величины импульсов, которой определяется скорость переноса ноги и, следовательно, длина шага L . Модель горизонтальной баллистики в наибольшей мере соответствует именно ходьбе, для которой характерна минимизация вертикальных перемещений тела и стоп. Чтобы 3-массовую баллистическую модель использовать для упрощенного динамического представления бега, следует ее дополнить вертикальными компонентами импульсных сил взаимодействия масс "ног" и "тела".

2.2. Базисные параметры

Преыдущие описания шагательных движений человека подразумевали нормальные условия локомоции — по горизонтальной, ровной и твердой дороге, а также при отсутствии дополнительных нагрузок. Аналогичные условия локомоции человека и животных предполагаются выполненными и в дальнейших рассмотрениях. Кроме того, по умолчанию, т.е. если не оговорено противное, далее локомоция считается стационарной — постоянны скорость локомоции v , период T и длина L шага.

2.2.1. Принцип кинематической однородности. Кинематическое описание локомоции произвольного N -ногого животного сводится к параметрическому определению множества ЦТ $Z_N \equiv \{Z_1, \dots, Z_N\}$, которое будем считать определяющим множеством локомоторной системы. При стационарной локомоции все ЦТ имеют одинаковые *локомоторные циклы* (ЛЦ) по общим характеристикам — периоду T и длине L шага. Тогда каждая ЦТ Z_k , где $k = 1, \dots, N$, обладает свойством трансляционной

симметрии, т.е. самосовмещается при сдвигах на одинаковое целое число периодов и длин шага. Однако для выделения базисных параметров системы Z_N необходимо учесть свойства неоднородности системы ЦТ.

Минимальное число базисных параметров системы Z_N возможно тогда и только тогда, когда система Z_N обладает максимальным числом симметрий: когда начальные события ЛЦ — события наступания — образуют регулярную пространственно-временную "решетку Браве", тогда про множество Z_N можно говорить, что оно обладает "кристаллической" организацией.

Условие стационарности не гарантирует однородности локомоции, а число вариантов неоднородной реализации шагательной локомоции зависит от числа ног N .

Позвоночные, как известно, имеют либо две ноги (*биподы* — птицы и человек), либо четыре ноги (*тетраподы* — ящерицы, черепахи, собаки, лошади и др.), тогда как беспозвоночные имеют минимум шесть ног — *гексаподы* (тараканы и другие насекомые); раки, крабы, скорпионы и пауки имеют восемь ходильных ног, а многоножки — от 12 до 100 и более ног. В билатеральном множестве всех N ног естественным образом выделяются:

— контралатеральные пары — пары ног одного пояса или сегмента;

— ипсилатеральные ряды — все ноги одной (правой или левой) стороны.

Если n — число ног одного ипсилатерального ряда, то $N = 2n$ — общее число ног.

Когда ног много, вполне очевидна необходимость разобщения по меньшей мере трех локомоторных задач:

- 1) генерация ЛЦ каждой ноги;
- 2) временная фазировка ЛЦ разных ног;
- 3) пространственное распределение опорных интервалов.

Несмотря на анатомические различия разные ноги одного организма участвуют в общей коллективной задаче обеспечения локомоторного перемещения тела и, поддерживая одну и ту же скорость локомоции, имеют одинаковые периоды и одинаковые длины шагов. Более того, для нормы характерно отсутствие неоднородностей, иначе говоря, характеристическим признаком нормы служит

Принцип кинематической однородности. Локомоторная система $Z_N \equiv \{Z_1, \dots, Z_N\}$, представленная множеством ЦТ, обладает максимальным числом симметрий: все ЦТ конгруэнтны и имеют регулярное пространственно-временное распределение.

2.2.2. Следовые дорожки. Следы, оставленные на мягком грунте или на твердом при наличии отпечатков, — это самый простой и самый естественный способ регистрации шагательной локомоции. Следы древних животных интересуют археологов и зоологов. Для сравнений и для решения эволюционных проблем зоологи фотографируют следы, оставленные современными животными пустынь на песке [61]. Метод следов используют и биомеханики, вынуждая мелких тетрапод оставлять чернильные следы на бумажной ленте, а членистоногих — на закопченных стеклах. В силу давнего интереса классификация аллюров тетрапод по следам хорошо разработана, например, в книге П.П. Гамбаряна [15] приведена определительная таблица аллюров по следам.

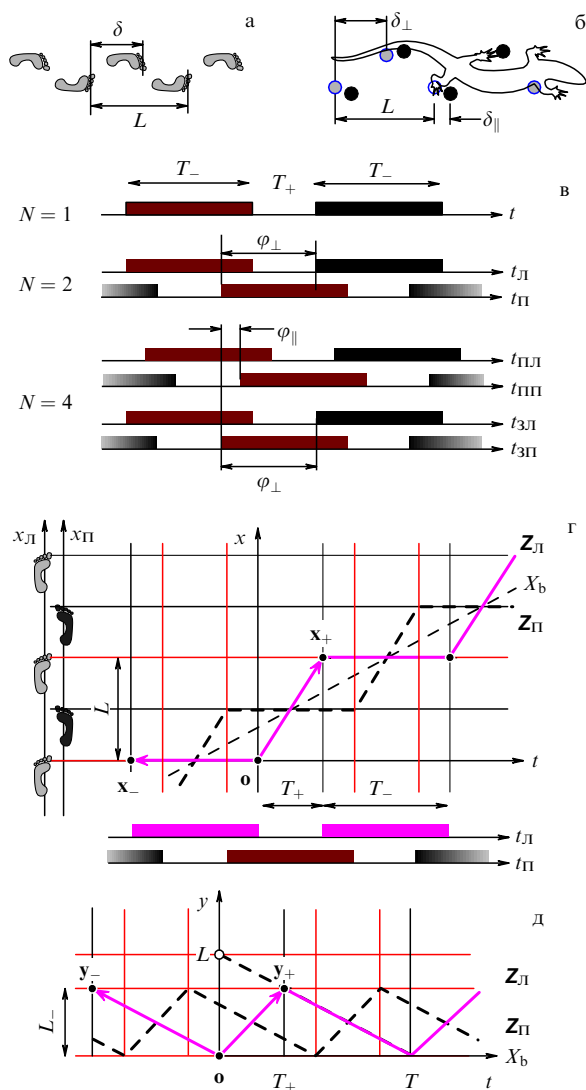


Рис. 2. Колея следов человека (а) и ящерицы (б); (в) нотограммные представления фаз шагов при разных числах ног $N = 1, 2, 4$; (г) синтез целевых траекторий правой (Z_P) и левой (Z_L) ног по следам (представленным на двух пространственных осях x_P и x_L) и нотограммам (представленных на двух временных осях t_P и t_L), X_b — траектория базальной точки; (д) колебательная форма целевых траекторий в локомоторной системе отсчета.

Ограничимся рассмотрением простейших регулярных случаев (рис. 2а, б).

Следовая дорожка одной ноги — моноряд следов с постоянным расстоянием между смежными следами, равным длине шага L ; биподная колея содержит два моноряда следов, сдвинутых на величину δ , где $-L/2 < \delta \leq L/2$; многоподная колея определяется множеством парных сдвигов следовых монорядов.

Согласно определению следовая дорожка бипод описывается двумя пространственными параметрами $\{L, \delta\} \equiv S_{CD}$, которые являются независимыми, поэтому можно говорить, что S_{CD} — определяющее множество следов бипод. Синфазным шагам отвечают несмещенные следы, тогда $\delta = 0$, а противофазным шагам — следы, смещенные на полшага, тогда $\delta = L/2$.

Аналогично, описание следовой дорожки тетрапод включает, вообще говоря, три сдвига, но когда контралатеральные пары имеют одинаковые фазировки, можно

ограничиться учетом только двух сдвигов монорядов (рис. 2а, б), и тогда определяющее множество следов содержит три независимых параметра:

$$S_{CD} \equiv \{L, \delta_{\perp}, \delta_{\parallel}\}. \tag{2.6}$$

В случае отсутствия ипсилатерального сдвига, когда $\delta_{\parallel} = 0$, получается походка "след-в-след" — следы задних ног накладываются на следы передних, и тетраподная колея следов выглядит, как биподная. Однако обычно у тетрапод колея задних ног немного шире колеи передних, поэтому следы не совмещаются, а находятся рядом.

Следовые дорожки рептилий, оставляемые в пустыне на песке, специально исследовал В.Б. Суханов [61]. Характерное свойство таких дорожек — близость к правилу "след-в-след". При малых скоростях имеет место недокрытие следа, когда $\delta \equiv \delta_{\parallel} < 0$, при больших скоростях — перекрытие следа, когда $\delta > 0$, а при некоторой промежуточной скорости следы совмещаются — реализуется правило "след-в-след". Количественные характеристики следовых дорожек для трех видов рептилий даны в книге [61] в табличной форме (пример для геккона приводится ниже, см. раздел 2.6.9).

Ранее и Марей, и другие авторы (см. [37]) указывали на то, что близость к правилу "след-в-след" характерна для аллюров лошадей типа рысь и шаг:

"Колея рыси всегда бывает двойной, т.е. след задней ноги точно попадает в след передней; в случае короткой рыси задняя нога не доступает до следа передней, при длинной и высокой рыси — переступает. Колея шага подобна колее рыси, только здесь меньше длина шага; в обыкновенном шаге эта длина равна росту лошади (измеренному до загривка)".

Итак, изучение относительных смещений следов разных пар ног позволяет получить информацию о фазировках шагов и, значит, о походках, которые традиционно определяются по временным фазировкам.

Какую дополнительную информацию можно извлечь из следов? Имея в виду проблемы следопытов, выделим, в частности, следующий

Вопрос 2.1. Можно ли по следам предсказать скорость v локомоции?

Возможная информация о скорости содержится в величине длины шага, но связь длины шага со скоростью, т.е. зависимость $L(v)$, не однозначна при идентификации по следам как формы локомоции, так и режима локомоции.

Поскольку и при ходьбе, и при беге человека шаги противофазны, различить по следам эти формы локомоции невозможно (дополнительным критерием здесь служит форма следов). Имея дело с реальными следами человека, следует еще учитывать зависимость длины шага L от роста H . Реальные следы позволяют определить и зависящую от роста H длину ступни $L_{ст}$. Тогда по длине $L_{ст}$ можно определить рост H , если воспользоваться известной эмпирической зависимостью $H \approx 6,6L_{ст}$ [67].

Чтобы по длине шага L определить скорость v , необходимо знать зависимость $L(v; H)$ или, полагая длину шага пропорциональной росту, зависимость $L(v)$. Например, для режима нормальной ходьбы, гипотеза о котором наиболее естественна для обычных условий, функция $L(v)$ является монотонной (рис. 3б), поэтому мы можем (если верна гипотеза нормальной ходьбы) по длине шага L определить скорость v .

А если следы оставлены на железнодорожных шпалах, по которым прошел человек? Здесь, сохраняя постоянную длину шага, человек мог идти с разными скоростями, в таком случае предсказание скорости невозможно. Для длительной ходьбы возможен другой вариант предпочтения режима ходьбы: выбирается та скорость, которая присуща нормальной ходьбе с длиной шага, равной расстоянию между шпалами.

Ходьба по шпалам принципиально отличается от режима *нормальной ходьбы* (НХ) и соответствует режиму *изометрической ходьбы* (ИМХ) (см. раздел 2.4.2).

Замечание 2.1. Из личного опыта автора следует, что при ходьбе по шпалам человек почему-то предпочитает сохранять привычную скорость ходьбы, а так как шаг по шпалам короче привычной длины шага, то подстройка под привычную скорость осуществляется посредством укорочения периода T , т.е. посредством повышения частоты шагов $1/T$. В середине 50-х годов автору как студенту МФТИ приходилось часто ходить по железнодорожным шпалам (от станции Долгопрудная до института или обратно). Тогда и сформировался не только навык такой ходьбы, но и понимание возможности хождения по шпалам с разными скоростями, что позднее пригодилось для формулирования концепции кинематических режимов локомоции [27, 28].

2.2.3. Нотограммы. Другой давний метод характеристики походок — по ритму ударов ног. Для наглядного представления ритмов походок Гуаффон и Венсан еще в 1779 г. ввели нотную запись (см. [37, 61]). Сложность ритма шагов зависит от числа ног и от походки. Например, когда в рыси получается вариант "след-в-след" для латеральных ног, тогда диагональные ноги наступают одновременно и получается только два удара [37]:

"Четко двухтемповый вариант рыси называется свободной рысью, а варианты раздвоения ударов — прерывистой рысью, тогда задняя нога несколько запаздывает относительно диагонально передней".

Марей дополнил нотный метод фиксации ударов ног регистрацией длительностей опорных фаз [37], используя пневмоподографические датчики, вмонтированные в подошвы обуви человека (или в подковы лошадей). Подографические регистрации превратили нотный метод в *метод нотограмм* (рис. 2в) — многорядный импульсный портрет смен фаз шагов. Многорядная форма нотограммы возникла благодаря синхронной записи пневмограмм всех ног: опорные фазы выделялись импульсами повышенного давления (по величине амплитуды импульсов можно было измерять силу опорной реакции).

Нотограмма \mathbf{N}_N — совокупность параллельных осей времени всех N ног, на которых выделены границы фаз опоры (ноты — черные сегменты) и фаз переноса (пустые интервалы).

Соответственно числу каналов регистрации опорных реакций нотограмма человека \mathbf{N}_2 содержит одну пару линеек, а нотограмма лошади \mathbf{N}_4 — две пары, здесь (рис. 2в) верхняя пара соответствует передним ногам, а нижняя — задним.

Замечание 2.2. Вертикальный порядок нотных линеек можно выбирать разными способами, например, он может соответствовать порядку следовых рядов (рис. 2б) ЛЗ, ЛП, ПП, ПЗ — здесь верхняя и нижняя

пары линеек соответствуют ипсилатеральным парам ног (такой порядок принят в работе В.Б. Суханова [61]). Но в нотограммах Марей выбран порядок ЛП, ПП, ЛЗ, ПЗ — верхняя и нижняя пары линеек соответствуют контралатеральным парам ног (рис. 2в).

Для определенности задержки φ между циклами разных ног измеряются между событиями отрыва ног (рис. 2в) при соблюдении неравенств $-T/2 < \varphi \leq T/2$. Циклы шагов двух соседних ипсилатеральных ног в общем случае смещены на величину фазовой задержки φ_{\parallel} , а контралатеральных ног — на величину φ_{\perp} . Выбор порядка линеек в нотограмме Марей обусловлен тем, что для контралатеральных пар ног (бипод и других многоногих) характерны фиксированные варианты фазировок: либо синфазные циклы, когда $\varphi_{\perp} = 0$, либо противофазные, когда $\varphi_{\perp} = T/2$. При этом основное разнообразие походок обеспечивается градуальным изменением ипсилатеральной задержки $\varphi \equiv \varphi_{\parallel}$. Свойство градуальной изменчивости ипсилатеральных задержек Марей использовал в своей синтетической модели аллюров (см. ниже).

В параметрическом определении нотограммы \mathbf{N}_N участвуют длительности фаз ЛЦ и временные сдвиги ЛЦ смежных пар ног. Поэтому минимальное *определяющее* множество нотограммы содержит четыре параметра:

$$\mathbf{S}_{\text{НГ}} = \{T_-, T_+, \varphi_{\parallel}, \varphi_{\perp}\}. \quad (2.7)$$

По аналогии с предыдущим обсуждением следов вполне уместен следующий

Вопрос 2.2. Можно ли по нотограмме предсказать скорость v локомоции?

В отличие от следовой дорожки нотограмма содержит дополнительную информацию о временной структуре ЛЦ, благодаря которой появляется дополнительный критерий. Пусть нотограмма дана без масштабной метки времени, т.е. истинные длительности фаз и периода не известны. Тогда о временной структуре ЛЦ можно судить по величине γ , равной отношению длительностей фаз: $\gamma \equiv T_+/T_-$. По относительной нотограмме просто различить некоторые формы локомоции, например, ходьбу и бег человека, так как кинематическое различие *нормальной ходьбы* (НХ) и *нормального бега* (НБ) выражается в отношениях длительностей фаз опоры и переноса:

$$\text{НХ: } T_- > T_+ \Rightarrow T_{2-} \equiv T_- - T_+ > 0 \Rightarrow \gamma < 1; \quad (2.8)$$

$$\text{НБ: } T_+ > T_- \Rightarrow T_{2+} \equiv T_+ - T_- > 0 \Rightarrow \gamma > 1. \quad (2.9)$$

Замечание 2.3. Приведенные формулы (2.8), (2.9) длительностей (за цикл) интервалов двуфазных состояний пар ног верны для противофазных циклов ($\varphi = T/2$). Если же циклы синфазны ($\varphi = 0$), то $T_{2-} \equiv T_-$ и $T_{2+} \equiv T_+$. Функции $T_{2-}(\varphi)$ и $T_{2+}(\varphi)$ представляются кусочно-линейными графиками, имеющими форму трапеций. Для тетрапод (в силу интереса к диагональным походкам) можно ввести (см. [61]) величину длительности T_{2D-} двуопорных состояний диагональных пар ног. Если контралатеральные пары противофазны, то $T_{2D-} \equiv T_{2-}(\varphi_{\parallel} + \varphi_{\perp}) = T_{2-}(\varphi + T/2)$.

Чтобы по относительной нотограмме определять абсолютную величину скорости локомоции v , необходимо знать функции $\gamma(v)$. Для ходьбы и бега человека параметры структуры цикла γ монотонно возрастают с ростом скорости v . Следовательно, не только различать

ходьбу и бег, но и определять скорость локомоции по величине γ можно.

2.2.4. Целевые траектории. Ответы на предыдущие выделенные вопросы о скорости локомоции не однозначны, если мы располагаем либо пространственной информацией (в виде следов), либо временной информацией (в виде нотограмм). Если мы располагаем и пространственной, и временной информацией, т.е. известны и следовая дорожка, и нотограмма, то ответы на эти вопросы становятся однозначными и не требуют привлечения дополнительных зависимостей.

Рассмотрим вариант биподной локомоции с известной следовой дорожкой и нотограммой. Редуцируя и модифицируя общие определения (2.6), (2.7) под этот вариант, мы можем определяющие множества следовой дорожки и нотограммы, а также связь между ними представить так:

$$S_{CD} = \{L, \delta\} \equiv \{vT, v\varphi_{\perp}\}, \quad S_{НГ} = \{T, T_+, \varphi_{\perp}\}. \quad (2.10)$$

Пространственно-временное описание получается при объединении множеств (2.10):

$$S_{CD} \cap S_{НГ} = \{T, L, T_+, \varphi_{\perp}\} \equiv S_{ЦТ,2} \quad (2.11)$$

— объединенное множество $S_{ЦТ,2}$ содержит четыре параметра для пары ЦТ.

Задача 2.1. Пусть следовая дорожка и нотограмма биподной локомоции заданы в графической форме; требуется построить соответствующие целевые траектории.

Введем пространственно-временную систему отсчета $\mathbf{X} \equiv \{x = (t, x)'\}$, связанную со следовой дорожкой, т.е. *дорожную систему отсчета* (ДСО). Нотограмму ходьбы разместим вдоль оси времени. В координатах системы \mathbf{X} следы ног представляются горизонтальными прямыми, а границы фаз нотограммы — вертикальными прямыми (рис. 2г). Если событие $\mathbf{o} \equiv (0, 0)'$ совпадает с началом переноса, то конец переноса — событие наступания $\mathbf{x}_+ \equiv (T_+, L)'$. Отрезок наклонной прямой, соединяющий эту пару событий, есть фрагмент ЦТ, представляющий фазу переноса. С другой стороны, событие \mathbf{o} служит концом смежной фазы опоры, начало которой — предыдущее событие наступания $\mathbf{x}_- \equiv (-T_-, 0)'$, а отрезок горизонтальной прямой, соединяющий последнюю пару событий, есть фрагмент ЦТ, представляющий фазу опоры.

Кусочно линейный участок ЦТ, инцидентный событиям $\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+)$, соответствует одному шагу — локомоторному циклу. Выделим эти события как базисные, т.е. образуем базисную матрицу ДСО:

$$\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+) \Leftarrow \mathbf{x}_- = (-T_-, 0)', \quad \mathbf{x}_+ = (T_+, L)'. \quad (2.12)$$

Вся ЦТ \mathbf{Z} (бесконечная кусочно линейная траектория) достраивается трансляцией базисного фрагмента с периодами T и L по временной и пространственной осям.

При стационарной локомоции все средние точки фаз опоры и переноса распределены вдоль одной "базальной" прямой X_b периодически — со сдвигом на вектор $\mathbf{x}_b \equiv (\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-)/2 = (T/2, L/2)'$, т.е. смежные базальные события противофазны.

Противофазная ЦТ \mathbf{Z}^* контралатеральной конечности получается в результате трансляции ЦТ \mathbf{Z} на вектор $\mathbf{x}_b = (T/2, L/2)'$. Задача 2.1 решена. ♦

2.2.5. Параметрические степени свободы. Явное преимущество метода ЦТ — это возможность изучения локомоторной кинематики в разных системах отсчета. *Локомоторная система отсчета* (ЛСО) $\mathbf{Y} \equiv \{y \equiv (t, y)'\}$ перемещается относительно ДСО со скоростью локомоции v , т.е. осью времени ЛСО служит введенная выше базальная прямая. Системы \mathbf{X} и \mathbf{Y} связаны преобразованием Галилея (обозначения см. в приложении)

$$\Gamma: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{x} = \Gamma \mathbf{y} \Leftarrow \Gamma \equiv \mathbf{E} + v\mathbf{E}_{21}. \quad (2.13)$$

Введенная в ДСО базисная матрица \mathbf{X} (2.12) преобразуется в базисную матрицу ЛСО

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} \equiv (\mathbf{y}_-, \mathbf{y}_+) &= \Gamma^{-1}\mathbf{X} \Leftarrow \\ \Leftarrow \mathbf{y}_- &= \Gamma^{-1}\mathbf{x}_- \equiv (-T_-, L_-)', \quad \mathbf{y}_+ = \Gamma^{-1}\mathbf{x}_+ \equiv (T_+, L_-)'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В ЛСО (рис. 2д) шагательные движения стоп, представляемые ЦТ \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* , имеют чисто колебательный характер. Размах этих асимметричных колебаний, согласно (2.14), равен опорной длине шага L_- , поэтому из-за различий в длительностях фаз оказываются разными абсолютные величины скоростей переноса u и локомоции v .

К предыдущим временным критериям НХ (2.8) и НБ (2.9) можно добавить еще скоростные неравенства, учитывая определение $u = v/\gamma$:

$$\text{НХ: } T_+ < T_- \Rightarrow u > v, \quad \text{НБ: } T_+ > T_- \Rightarrow u < v. \quad (2.15)$$

Пара ЦТ $\{\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*\}$ полностью заменяет первичную пару референтов — нотограмму и следовую дорожку — и объединяет кинематическую информацию, содержащуюся в них раздельно. Теперь во множестве (2.11) величина φ_{\perp} характеризует в общем случае относительный сдвиг двух ЦТ \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* вдоль базальной линии, а форма каждой ЦТ однозначно определяется тремя параметрами, которые содержатся в базисных матрицах ДСО (2.12) и ЛСО (2.14), отличаясь только по пространственному параметру:

$$S_{ЦТ ДСО} = \{T_-, T_+, L\}, \quad S_{ЦТ ЛСО} = \{T_-, T_+, L_-\}. \quad (2.16)$$

Итак, справедлива, т.е. доказана, следующая

Основная теорема синергетики шага. *Кинематическое определение шагательного цикла имеет три параметрические степени свободы.*

Несомненно, в сравнительных исследованиях шагательных локомоторных движений необходимо учитывать существование трех параметрических свобод. Фундаментальный аспект этой проблемы сводится к идентификации базовых *управляющих параметров* шагательной кинематики, т.е. к выделению тех базовых параметров, которые используются управляющей системой, т.е. мозгом, в кинематических задачах построения шагательных движений.

2.2.6. Проблема базовых характеристик. Общее описание ЦТ включает восемь величин следующего списка:

$$L = \{T, T_-, T_+, L, L_-, L_+, u, v\}; \quad (2.17)$$

это — лингвистическое множество кинематических параметров шага, которое избыточно для базисного опреде-

ления ЦТ, так как минимальное описание ЦТ можно сузить до трех независимых параметров (2.16). Однако формальный выбор тройки базовых параметров неоднозначен. Если, например, мы выбрали следующее базовое множество:

$$B = \{T, T_+, v\}, \quad (2.18)$$

то остальные параметры общего списка (2.17) выражаются через базовые:

$$\begin{aligned} T_- &= T - T_+, & L &= vT, & L_- &= v(T - T_+), \\ L_+ &= vT_+, & u &= \frac{v(T - T_+)}{T_+}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Формально вполне допустимо ставить вопрос о существовании универсальной базовой тройки управляющих параметров, но, учитывая существование разных уровней управления, более корректно ставить вопрос идентификации базовых характеристик.

Определение 2.1. *Базовыми характеристиками* называются скоростные зависимости базовых параметров, которые выбираются в качестве определяющих функций.

Системный подход к идентификации базовых характеристик основан на сравнительном изучении изменчивости расширенного множества *локомоторных характеристик* — зависимостей параметров множества (2.17) от скорости локомоции:

$$L_{(v)} = \{T(v), T_-(v), T_+(v), L(v), L_-(v), L_+(v), u(v)\}. \quad (2.20)$$

Для практической реализации системного подхода необходимы экспериментальные исследования локомоторных движений в широком диапазоне скоростей с целью определения локомоторных характеристик (2.20). Ниже мы покажем, что для обоснования выбора базовых синергий сначала полезно иметь полные "портреты" как временных $\{T(v), T_+(v), T_-(v)\}$, так и пространственных $\{L(v), L_+(v), L_-(v)\}$ характеристик шага.

Определение 2.2. *Кинематическим портретом* локомоции назовем совокупность двух семейств графиков, содержащих, с одной стороны, временные характеристики шага, а с другой — пространственные характеристики шага.

Графическое представление локомоторных характеристик целесообразно не только для оценок аналитических аппроксимаций экспериментальных данных, но и для визуализации аналитического содержания традиционных метафор и моделей.

Типовой кинематический портрет НХ человека представлен на рис. 3а, б. Имея соответствующие экспериментальные данные для временных и пространственных характеристик (в данном случае данные взяты из нашей работы [27]), а также зная лингвистические связи этих характеристик, мы сталкиваемся с проблемой выбора базовых характеристик для аппроксимаций всех зависимостей кинематического портрета.

2.3. Локомоторные метафоры

Результаты своих локомоторных исследований Марей формулировал, считая "вмешательство математиков

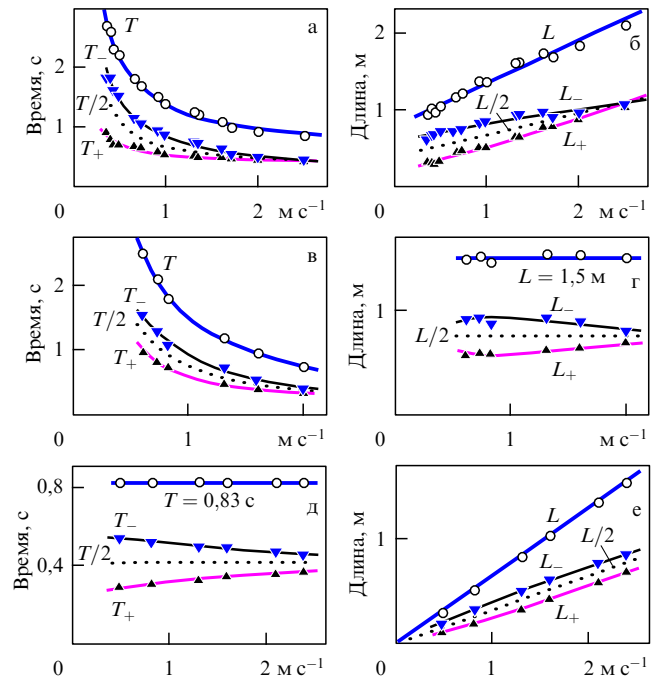


Рис. 3. Кинематические портреты трех режимов ходьбы человека: (а, б) нормальная ходьба; (в, г) изометрическая ходьба (длина шага $L = \text{const}$); (д, е) изоритмическая ходьба (период $T = \text{const}$); (а, в, д) изменения от скорости ходьбы временных параметров шага (периода T , длительностей опоры T_- и переноса T_+); (б, г, е) аналогичные изменения пространственных параметров шага (общей длины L , опорной L_- и переносной L_+ компонент).

преждевременным" [37], в виде наглядных графических или метафорических правил. Несмотря на качественный характер, перевод мареевских метафор на аналитический язык вполне возможен и, на наш взгляд, весьма полезен для понимания моделей локомоторных синергий.

2.3.1. Стробоскопическая метафора. Марей не исследовал скоростные зависимости явным образом, хотя и отмечал убывание периода с ростом скорости. На первый взгляд может показаться странным, что великий экспериментатор, ставя вопрос о существовании биомеханических законов шагательных движений, которые должны иметь, согласно его же мнению, количественное выражение, считал собственные исследования функциональных зависимостей характеристик шагов от скорости локомоции необязательными. Почему?

Математические формулы и расчеты или, скажем, графики, в работе [37] отсутствуют. Зато имеется большое количество примеров пневморегистраций подограмм, схемы нотограмм и гравюры с изображениями локомоторных поз человека и лошадей. Еще в [37] уделено внимание правилам рисования последовательных локомоторных поз с использованием нотограмм, а также способам анимации рисунков посредством стробоскопического просмотра. Отсюда мы можем заключить, что Марей не считал нужным изучать скоростные зависимости локомоторных характеристик, ибо полагал, что верна следующая

Стробоскопическая метафора. Кинематические параметры реальных шагательных движений зависят от скорости локомоции точно так же, как при стробоскопическом просмотре заданной последовательности

локомоторных поз, когда имеется возможность менять только частоту просмотра отдельных поз.

Аналогом стробоскопической метафоры является кинографическая метафора, пользуясь которой, легко установить соответствующую кинематическую модель. Пусть имеется некоторая кинорегистрация стационарной проходки человека (или лошади), и пусть имеется возможность просматривать фильм с разными частотами кадров.

Вопрос 2.3. Каким кинематическим законам удовлетворяет кинографическая анимация локомоторных движений?

С изменением частоты анимации будут изменяться только временные параметры, а пространственные размеры опорно-двигательного аппарата, включая длину шага, останутся неизменными. При стационарной локомоции длина шага равна расстоянию $L = vT$, на которое перемещается субъект за период. Значит, из условия постоянства анимационной длины шага следует обратно пропорциональная зависимость периода от скорости:

$$L = \text{const} \Rightarrow T = \frac{L}{v}. \quad (2.21)$$

Режим ходьбы с разными скоростями при фиксированной длине шага называется режимом *изометрической ходьбы* (ИМХ). Постоянство длины шага является кинематической синергией ("инвариантом") ходьбы с разными скоростями. Обратно пропорциональная зависимость периода от скорости ходьбы есть следствие инвариантности длины шага.

Дополнительное следствие стробоскопической метафоры — постоянство опорной длины шага L_- , а также переносной длины шага $L_+ \equiv L - L_-$. Отсюда, аналогично (2.21), заключаем, что длительности фаз опоры и переноса должны, как и период, изменяться обратно пропорционально скорости локомоции:

$$L_- = \text{const} \Rightarrow T_- = \frac{L_-}{v}, \quad (2.22)$$

$$L_+ = \text{const} \Rightarrow T_+ = \frac{L_+}{v}. \quad (2.23)$$

Итак, стробоскопической (кинографической) метафоре Марей соответствует режим изометрической локомоции, кинематический портрет которой описывается формулами (2.21)–(2.23). Сравнивая с аналогичным портретом НХ (рис. 3а, б), легко видеть, что реальная нормальная локомоция не согласуется с метафорой Марей.

Ниже мы убедимся, что с ней не согласуется и реальная изометрическая локомоция.

2.3.3. Антропоморфная метафора. Рассматривая локомоторные движения ног как периодические колебания, Марей свел определение походки к определению фазовых сдвигов этих колебаний. Важное значение для упрощения мареевских исследований имела следующая (см. [37])

Антропоморфная метафора. Локомоцию передних и задних пар ног лошадей можно сравнить с совместной ходьбой друг за другом двух людей (при цирковой имитации "лошади", при совместной транспортировке "бревна").

Главные следствия этой метафоры Марей сформулировал как

Правила синтеза походок:

1) кинематические характеристики шагов передних и задних ног одинаковы;

2) фазировки контралатеральных пар ног одинаковы и постоянны;

3) ипсилатеральная фазировка ног может изменяться независимо.

Под фазировкой здесь понимается фазовое отношение $\psi \equiv \varphi/T$, выраженное в долях периода. Например, противофазное отношение — это, когда $\psi_{\perp} \equiv \psi_{\perp}/T = 1/2$.

Исходя из правил синтеза, Марей иллюстрировал разнообразие походок лошадей с помощью следующей "синтетической модели": на двух параллельных деревянных планках изображаются противофазные (либо синфазные) нотограммы передних и задних ног; затем нотограмма какой-либо конкретной походки получается посредством параллельного сдвига двух планок. Марей показал, что походки лошадей воспроизводятся параллельным сдвигом парных нотограмм передних и задних ног.

Согласно синтетической модели определяющие условия походки представляются условиями постоянства фазировок, которые являются инвариантами стробоскопической метафоры. Учитывая еще следствия этой метафоры (2.21)–(2.23), выделим определяющие условия кинематической модели Марей:

$$OY = \{L = \text{const}, L_- = \text{const}, \psi_{\parallel} = \text{const}, \psi_{\perp} = \text{const}\}. \quad (2.24)$$

Определяющая роль правила синтеза 1) проявляется только при учете форм локомоции с различными структурами локомоторных циклов (3.7) и (3.8). Контралатеральные фазировки тоже порождают только бимодальное разнообразие, когда $\psi_{\perp} = 0$ или $\psi_{\perp} = 1/2$, тогда как основное разнообразие походок порождается градуальной изменчивостью ипсилатеральных фазировок, $\psi \equiv \psi_{\parallel} \in (-1/2, 1/2]$.

Замечание 2.4. Правило синтеза походок 1) допускает выбор одной из двух форм локомоции: либо форму ходьбы, когда $T_- > T_+$, либо форму бега, когда $T_- < T_+$. Чтобы получить синтетическую модель для тетрапод, следует "изготовить" два комплекта из четырех одинаковых нотных линеек — один для формы ходьбы, другой для бега. Правило 2) позволяет для каждого комплекта линеек сформировать парные нотограммы передних и задних ног одного из двух типов — противофазного или синфазного. Когда нотограммы однотипных пар передних и задних ног образованы, синтез конкретной походки завершается правилом 3) — сдвигом парных нотограмм на произвольную величину ипсилатеральной фазы $\varphi \in (-T/2, T/2]$. Пример такого построения тетраподных нотограмм для двух сопряженных форм структур циклов дан на рис. 2е.

Синтетическая модель походок допускает *непрерывное* изменение ипсилатеральной фазы $\varphi \in (-T/2, T/2]$. Исходно Марей не оговаривал целесообразность дискретного ранжирования походок по дополнительным интервалам изменчивости ипсилатеральной фазы. Дискретное ранжирование ипсилатеральных вариантов походок возникло при соединении метода нотограмм с

методом планов опоры. Первую модернизацию синтетической модели походок произвели последователи Марeya Губо и Баррье [19]. Окончательный вариант совместного использования нотограмм и опорных планов разработал В.Б. Суханов [61].

2.3.4. Опорная метафора. Метод последовательных опорных планов для определения походок тетрапод ввел в конце XIX века Мейбридж — один из пионеров внедрения моментальной фотографии в биомеханические исследования. Благодаря визуальной наглядности и лаконичности этот метод стал весьма популярным в сравнительных исследованиях эволюционных аспектов локомоторных аппаратов тетрапод (см. [15, 61, 86]). Опорные последовательности — еще одна метафора дискретной классификации походок, которая отличается от метафоры последовательных ударов (см. выше) учетом существования двух фаз *локомоторного цикла* (ЛЦ). Мощность множества опорных последовательностей и число идентифицируемых ими походок зависит от числа ног N .

$N = 1$. Введем бинарное представление фазовых состояний ноги: 1 — опора, 0 — перенос. Множество фазовых состояний моноподной локомоции есть $S_1 = \{(0), (1)\}$. Смену фазовых состояний ноги представим 2-вершинным графом G_1 , дуги которого изображают переходы между состояниями множества S_1 (рис. 4а, $N = 1$).

$N = 2$. На рисунке 4а изображены нотограммы bipодной локомоции для четырех величин фазировок $\psi = 0, 1/8, 1/4, 3/8$. Под нотограммами записаны числа 0, 1 и 2, означающие число опорных ног в интервале времени, ограниченном вертикальными черточками. При $\psi = 0$ сначала обе ноги находятся в опоре, поэтому снизу стоит число 2, затем обе ноги находятся в переносе — число 0. Можно говорить, что данной нотограмме синфазных циклов отвечает походка $G_2(0) = 2|0$. Аналогичным образом другим нотограммам (рис. 4а) соответствуют следующие опорные формулы походок:

$$G_2\left(\frac{1}{8}\right) = 1|2|1|0; \quad G_2\left(\frac{1}{4}\right) = 1|2|1; \quad G_2\left(\frac{3}{8}\right) = 2|1|2|1. \quad (2.25)$$

Чтобы различать, какая нога находится в какой фазе, удобно использовать 2-местные величины; например, запись (1, 0) означает, что первая нога находится в опоре, а вторая — в переносе и т.д. Полное множество фазовых состояний есть $S_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Граф переходов G_2 можно представить как квадрат, вершины которого имеют координаты состояний множества S_2 (рис. 4а, $N = 2$). *Походкой* теперь называется замкнутый путь $P_2(\psi)$ в графе G_2 . Например (рис. 4а), путь $P_2(1/8)$ проходит через все четыре вершины, а путь $P_2(1/4)$ — только через три вершины.

Если фазировка ψ принадлежит открытому интервалу значений $(0, 1/4)$, т.е. $0 < \psi < 1/4$, то все пути $P_2(\psi)$ изоморфны. Иначе говоря, существует непрерывный интервал значений фазировок $\psi \in (0, 1/4)$, в пределах которого реализуется одна и та же походка, представляемая последовательностью из четырех фазовых состояний. На нотограмме $\psi = 1/8$ интервал эквивалентных походок выделен штриховкой (рис. 4а). Кроме "интервальных походок" имеются также "точечные походки",

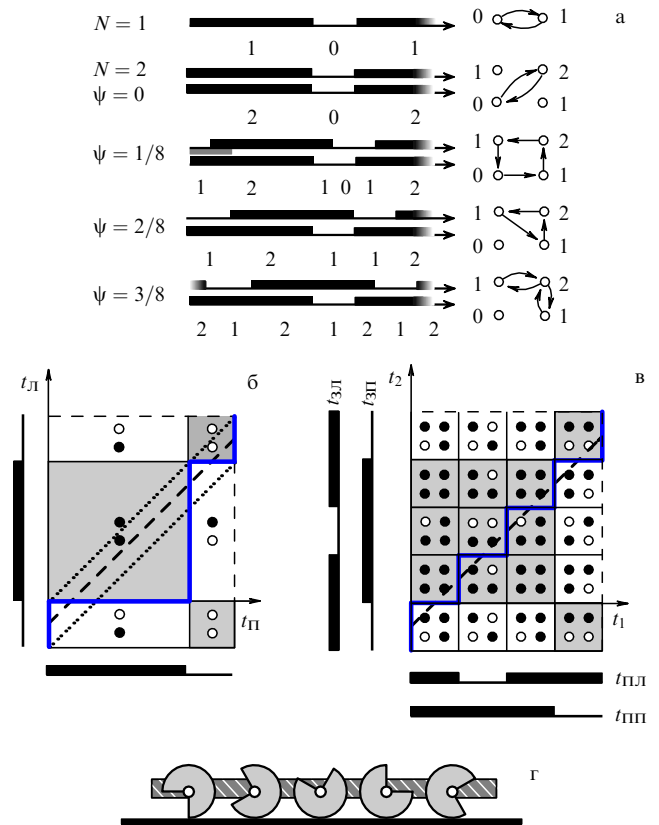


Рис. 4. Опорные последовательности и планы: (а) определение опорных последовательностей по нотограммам (справа — графы опорных циклов); (б) опорная диаграмма опорных планов bipод, парные кружки представляют состояния правой (П — нижний кружок) и левой (Л — верхний кружок) ноги; (в) аналогичная опорная диаграмма тетрапод (ПЛ — передняя левая, ПП — передняя правая, ЗЛ — задняя левая, ЗП — задняя правая); (г) схема коляски с секторными колесами.

соответствующие одному значению фазировки, например, $P_2(0), P_2(1/4)$ и др. Дискретный признак интервальной походки — длина пути $|P_2(\psi)| = 4$; тогда для точечных походок $|P_2(\psi)| < 4$. Аналогичным свойством, согласно (2.25), обладают опорные формулы — их порядок для интервальных походок $|G_2(\psi)| = 4$, а для точечных походок $|G_2(\psi)| < 4$.

Когда $N = 2$, нетрудно перечислить все варианты различных походок, используя либо парные нотограммы, либо пути в графе G_2 . Более компактный способ обзора всех вариантов bipодных походок — с помощью 2-мерной нотограммы (рис. 4б).

Введем прямоугольную систему координат с двумя осями времени (t_1, t_2) . Вдоль одной оси построим нотограмму первой ноги, вдоль другой оси — нотограмму второй ноги. Выделим прямыми линиями границы фаз ЛЦ, которые разделят плоскость на зоны фазовых состояний bipодной локомоции. Прямоугольник ЛЦ, внутри которого $t_1, t_2 \in [0, T)$, разделится на четыре зоны. Для маркировки зон построенной диаграммы используем элементы множества S_2 . Прямая единичного наклона $L(\psi)$ пересекает ось ординат в точке сдвига фаз ψ второй ноги. Походкой $P_2(\psi)$ на этой диаграмме называется список зон, которые пересекает прямая $L(\psi)$. Наклонная штриховая линия на рис. 4б — это прямая $L(1/8)$. Пунктирные прямые определяют "точечные

походки" и границы "интервальных походок", эти прямые проходят через вершины зон фазовых состояний.

$N = 4$. Полный перечень опорных последовательностей тетраподных локомоций довольно обширен, и мы не будем здесь повторять те списки и схемы, которые приведены в обстоятельных книгах П.П. Гамбаряна [15] и В.Б. Суханова [61]. Отметим только общие формальные свойства опорных походок тетрапод.

Полное множество 4-местных фазовых состояний

$$S_4 = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), \dots, (1, 1, 1, 1)\}$$

содержит $2^4 = 16$ элементов, которые можно представить как вершины 4-мерного куба; тогда походки определяются на этих вершинах посредством графа переходов G_4 . Такая многомерная метафора позволяет лучше понять большой ресурс вариантов опорных походок, представляемых либо опорными формулами $G_4(\psi)$, либо замкнутыми путями $P_4(\psi)$. Для тетрапод дискретные признаки интервальных походок выражаются равенствами

$$|G_4(\psi)| = |P_4(\psi)| = 8,$$

тогда как для точечных походок имеем неравенство

$$|G_4(\psi)| = |P_4(\psi)| < 8.$$

Двумерная диаграмма всех опорных походок тетрапод строится следующим образом. Вдоль оси абсцисс располагается парная нотограмма передних ног, а вдоль оси ординат — такая же парная нотограмма для задних ног. Пример на рис. 4в построен для противофазных шагов каждой пары и случая, когда длительность опоры T_- больше длительности переноса T_+ (здесь $T_-/T_+ = 3$). Выделяя прямыми линиями границы фаз ЛЦ, получим разбиение плоскости на зоны фазовых состояний. Так как парные нотограммы делятся на четыре сегмента, прямоугольник ЛЦ разделится на 16 зон. Для маркировки зон построенной диаграммы используем для наглядности не элементы множества S_4 , а традиционные схемы планов опоры (в квартете точек черные точки представляют опорные ноги, а светлые — переносимые ноги). Сплошная наклонная прямая на рис. 4в — это прямая $L(1/8)$, которой отвечает интервальная походка $P_4(1/8)$ и формула

$$G_4\left(\frac{1}{8}\right) = 4|3|2|3|4|3|2|3. \quad (2.26)$$

Глядя на приведенную диаграмму, легко описать все остальные походки. Всего данная диаграмма определяет четыре интервальные и четыре точечные походки.

Для полноты картины отметим инвертированные диаграммы опорных походок, построенные на основе инвертированных нотограмм, например, инвертированный вариант опорной формулы (2.26)

$$G_4^*\left(\frac{1}{8}\right) = 0|1|2|1|0|1|2|1. \quad (2.27)$$

Замечание 2.5. Если вместо противофазных нотограмм передних и задних ног выбрать синфазные (для моделирования галопов), то диаграмма опорных похо-

док тетрапод (рис. 4в) приобретет структуру диаграммы бипод (рис. 4б).

$N > 4$. Описанные формальные методы построения походок нетрудно распространить на общий случай произвольного числа ног, но при этом придется пожертвовать графической наглядностью и пользоваться исключительно алгебраическими средствами. Наибольший практический интерес опорные походки при $N > 4$ могут иметь для 6-ногих шагательных аппаратов (см., например, [86]). Для многоногих организмов, включая гексапод, метафора опорных походок малополезна, поскольку ипсилатеральная координация членистоногих удовлетворяет другой, а именно волновой метафоре.

2.3.5. Волновая метафора. Согласно приведенной выше цитате еще Аристотелю было известно о том, что вариант походки "по диагонали" характерен для многоногих ходоков, у которых $N > 4$. У гексапод при этом формируется так называемый

Альтернирующий треножник. Попеременно и синфазно шагают крайние ноги одной стороны и средняя, т.е. диагональная, нога другой стороны.

Соображения о статической устойчивости 3-ножной опоры с давних пор считались веским объяснением эволюционного выбора именно диагональной координации, которая ввиду достаточности полагалась единственно возможной. Первым, кто усомнился в универсальности "треножной метафоры" походок гексапод, был Хьюз [80], который разными способами ампутировал тараканам ноги и наблюдал, как у них после этого изменяется походка. Благодаря тщательным наблюдениям Хьюз ранее всех обратил внимание на *метахрональный*, т.е. на волновой перенос ипсилатеральных ног.

Важное значение для популярности волновой метафоры Хьюза имела кибернетическая интерпретация нейрофизиологических механизмов локомоторной координации, предложенная Д. Уилсоном [91]. Полиантропоморфная метафора Марья заменилась концепцией связанных "локомоторных генераторов" нейронной природы, которые Уилсон сравнивает с радиотехническими генераторами электрических колебаний.

Для наглядной иллюстрации волновой метафоры Д. Уилсон предложил свою нотограммную версию "символической модели" походок. Однако для дальнейших сравнений более полезны не символические образы нотограмм, а выделенные Уилсоном кинематические правила, несколько отличающиеся от аналогичных правил Марья (2.24).

Кинематические правила Уилсона:

- 1) период T изменяется обратно пропорционально скорости локомоции v ;
- 2) длительность фазы переноса постоянна: $T_+ = \text{const}$;
- 3) ипсилатеральная задержка смежных ЛЦ постоянна: $\varphi_{\parallel} = \text{const}$;
- 4) контралатеральные ЛЦ противофазны: $\psi_{\perp} = \text{const} = 1/2$.

Обратим внимание на то, что правило 1) согласуется со стробоскопической метафорой Марья, но правило 2) не согласуется. Поэтому правило 1) противоречит правилу 2), так как допускает с ростом скорости уменьшение периода до сколь угодно малых величин, что невозможно, поскольку $T \equiv T_- + T_+ > T_+ = \text{const}$. С другой стороны, из нотограммных иллюстраций Уилсона

видно, что, фиксируя длительность фазы переноса, он уменьшает период за счет уменьшения длительности фазы опоры. Вполне возможно, что при формулировке правила 1) Уилсон имел в виду не весь период T , а только длительность опоры T_- , т.е. правило

1*) длительность опоры T_- обратно пропорциональна скорости локомоции v .

Главное следствие модифицированного правила 1*) — константность опорной длины шага, $L_- = \text{const}$, т.е. размаха качания ноги. Поэтому *определяющие условия* (ОУ) кинематической модели Уилсона можно записать в таком виде:

$$\text{ОУ} = \left\{ T_+ = \text{const}, L_- = \text{const}, \varphi_{\parallel} = \text{const}, \psi_{\perp} = \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.28)$$

Для получения кинематического портрета этой модели выделим формулы временных и пространственных характеристик:

$$T = T_+ + \frac{L_-}{v}, \quad T_- = \frac{L_-}{v}, \quad T_+ = \text{const}; \quad (2.29a)$$

$$L = L_- + vT_+, \quad L_- = \text{const}, \quad L_+ = vT_+. \quad (2.29б)$$

Дополнительное следствие ОУ (2.28) — константность скорости переноса ноги:

$$u \equiv \frac{L_-}{T_+} = \text{const}. \quad (2.30)$$

Кроме того, правило 3) о постоянстве ипсилатеральной задержки переформулируем "волновым образом", используя понятие скорости *метахрональной волны* (МВ):

$$w \equiv \frac{d}{\varphi}, \quad (2.31)$$

где d — расстояние между смежными опорными интервалами (рис. 7а, б), а метахрональная задержка $\varphi \equiv \varphi_{\parallel}$. С учетом постоянства расстояния d мы можем характеризовать модель Уилсона условием постоянства скорости МВ:

$$w = \text{const}; \quad (2.32)$$

условию постоянства ипсилатеральной задержки соответствует постоянная, не зависящая от скорости локомоции, скорость МВ.

2.3.6. Колесная метафора. Согласуем мареевскую модель походок с волновой метафорой. Используем для этой цели простую механическую конструкцию, предложенную нами ранее для иллюстрации метода кинематических инвариантов [30].

Рассмотрим "многоколесную коляску" со многими параллельными осями, на которых жестко посажены пары "контралатеральных" секторных колес, т.е. колеса выполнены не в виде обычных кругов, а в виде секторов угла $\alpha_- < 2\pi$ (рис. 4г). При стационарном перемещении коляски все колеса вращаются без проскальзывания, с постоянными и одинаковыми угловыми скоростями. Качение сектора по дорожке от одного радиуса до другого соответствует фазе опоры, а прокрутка пустой

части колеса — фазе переноса. Сравнивая твердый сектор колеса со стопой человека, можно говорить, что качение сектора имитирует перекач стопы с пятки на носок. Если r — радиус окружности, то длина "шага" колеса, а также опорная и переносная длины шага определяются здесь следующим образом:

$$L = 2\pi r, \quad L_- = \alpha_- r, \quad L_+ = \alpha_+ r \Leftarrow \alpha_- + \alpha_+ \equiv 2\pi.$$

Таким образом, все пространственные характеристики длины шага фиксированы конструктивно и не зависят от скорости локомоции v . Поэтому все временные характеристики (период, а также длительности фаз опоры и переноса) обратно пропорциональны скорости локомоции, т.е. кинематика коляски соответствует стробоскопической метафоре и

$$u \equiv \frac{L_-}{T_+} = \frac{v}{\gamma} \Leftarrow \gamma = \frac{\alpha_+}{\alpha_-} = \frac{T_+}{T_-} = \frac{L_+}{L_-}; \quad (2.33)$$

скорость переноса пропорциональна скорости локомоции, поскольку параметр структуры цикла γ в данной модели постоянен.

Относительные фазировки циклов "шагов" осуществляются исходной расстановкой начальных углов секторов. Если, например, контралатеральные секторы ставятся противофазно, то середина дуги сектора одного колеса совпадает с серединой пустого угла другого колеса. Однородная ипсилатеральная фазировка задается углом β , знак которого совпадает со знаком метахронии. Фазовая задержка смежных ипсилатеральных циклов $\varphi = \beta r/v$ обратно пропорциональна скорости локомоции, а относительная фазировка $\psi \equiv \varphi/T = \beta r/L = \text{const}$ одинакова при всех скоростях, так как здесь выполняется условие $L = \text{const}$. Но условие $\psi = \text{const}$ определяет походку (согласно мареевской модели). Таким образом, между мареевским способом определения походок и волновым способом по зависимости $w(v) \equiv d/\varphi$ существует простая связь

$$\psi = \text{const} \Rightarrow w = kv, \quad (2.34)$$

т.е. условию постоянства ипсилатеральной фазировки отвечает линейная зависимость скорости МВ от скорости локомоции, где $k = d/(\psi L) = d/(\beta r)$ — постоянный коэффициент и d — постоянное расстояние между соседними осями.

Итак, модель коляски с секторными колесами адекватна по кинематическим критериям локомоторной модели Мареева, и обе функции $u(v)$ и $w(v)$ прямо пропорциональны скорости локомоции.

2.4. Синергия цикла

Чтобы обосновать итоговую каноническую модель синергий шагательных движений, нам потребуется изучить свойства изменчивости разных межпараметрических связей и, что особенно важно, — в разных *режимах* локомоции.

2.4.1. Уровни кинематического управления. Предварительно можно различать три уровня кинематического управления.

Выбор формы локомоции (ходьба, бег, прыжки и др.) следует относить к верхнему уровню *стратегического*

управления, так как, с одной стороны, при этом происходит существенная координационная перестройка шагательных движений, а с другой — каждая форма локомоции может иметь разные собственные режимы, в частности нормальные, изоритмические и изометрические.

Координационная организация параметрических свобод, связанная с выбором режима локомоции, — средний уровень *тактического* управления циклом шага.

Настройки на форму и режим локомоции производятся с помощью соответствующих синергий и так (см. ниже), что в итоге остается только одна свобода оперативного управления: каждый режим может осуществляться с разными скоростями локомоции, поэтому выбор скорости в рамках одного режима — это нижний уровень *оперативного* управления.

2.4.2. Кинематические портреты. Рассмотрим сначала априорные кинематические возможности изменения скорости стационарной ходьбы. Когда человек идет с некоторой постоянной скоростью v , у него имеются разные возможности управления, которые следуют из определения скорости как отношения длины шага L к периоду T :

$$v = \frac{L}{T}. \quad (2.35)$$

Разные варианты возможностей получаются из случаев раздельного изменения либо длины, либо периода, либо совместного изменения и длины, и периода. Пусть новые величины периода и длины выбираются согласно следующим правилам:

1) $T = \text{const}$, $L = \text{var}$ — *изоритмическая ходьба* (ИРХ);

2) $T = \text{var}$, $L = \text{const}$ — *изометрическая ходьба* (ИМХ);

3) $L/T = \text{const}$ — *изоскоростная ходьба* (ИСХ);
в последнем случае длина и период изменяются пропорционально.

Каждый из перечисленных случаев соответствует разным режимам ходьбы. Про случай, который отвечает режиму *нормальной ходьбы* (НХ), можно сказать, что вместо принципа прямой пропорции, необходимого для поддержания скорости, используется

Принцип обратной пропорции. При увеличении длины шага период уменьшается, а при увеличении периода уменьшается длина шага.

Нормальная ходьба человека организуется, как известно, на подсознательном уровне — в виде *локомоторной автоматии*, ибо мы обычно не осознаем как мы идем, а если спросить, то обычно ничего дельного не скажем.

Определение 2.3. *Нормальной локомоцией* (ходьба, бег и др.) называется естественная реализация локомоторных перемещений при отсутствии каких-либо дополнительных внешних условий, воздействий и ограничений.

Хотя явное осознание кинематических законов НХ отсутствует, сами эти законы все-таки существуют. В этом не трудно убедиться, изучая кинематический портрет, содержащий скоростные зависимости основных кинематических параметров (рис. 3а, б) — трех временных $\{T, T_-, T_+\}$ и трех пространственных $\{L, L_-, L_+\}$ параметров.

Аппроксимирующие функции зависимостей $T(v)$ и $L(v)$ режима

$$\text{НХ: } T = T_c + \frac{L_c}{v}, \quad L = L_c + T_c v, \quad (2.36)$$

соответствуют принципу обратной пропорции (для примера, приведенного на рис. 3а, б, величины констант T_c и L_c даны ниже в табл. 1). Свойства остальных функций $T_{\pm}(v)$ и $L_{\pm}(v)$ рассматриваются в следующем подразделе.

В экспериментальных условиях с целью помочь испытуемому выдерживать фиксированную длину шага, т.е. реализовать режим

$$\text{ИМХ: } L = \text{const} = L_{\text{fix}} \Rightarrow T = \frac{L_{\text{fix}}}{v}, \quad (2.37)$$

используется вариант "зебры": на пол вдоль локомоторной трассы наклеиваются параллельные белые полосы, а расстояние между полосками выбирается равным длине полушага $L_{\text{fix}}/2$. Затем испытуемый, наступая на полосы, ходит с разными скоростями в разных стационарных проходах, чтобы воспроизвести широкий диапазон скоростей локомоции. Принципиальное методическое отличие ИМХ от НХ — в возможности и необходимости исполнения нескольких серий проходов для разных величин фиксированных длин шага. Кинематический портрет одной из серий ИМХ дан на рис. 3в, г. Как и следовало ожидать, здесь графики $T(v)$ и $L(v)$ отвечают определению (2.37).

В экспериментальных исследованиях для задания фиксированного ритма режима

$$\text{ИРХ: } T = \text{const} = T_{\text{fix}} \Rightarrow L = T_{\text{fix}} v, \quad (2.38)$$

более удобен метроном, настроенный на период ударов $T_{\text{fix}}/2$. Повторяя проходы с большими и меньшими скоростями под заданный ритм метронома, получим одну серию реализаций ИРХ для одной величины T_{fix} . Как и в случае ИМХ, возможны повторные серии ИРХ для разных величин фиксированных периодов шага. Рисунки 3д, е демонстрируют кинематический портрет одной из серий ИРХ. Здесь графики $T(v)$ и $L(v)$ отвечают определению (2.38).

2.4.3. Области кинематической осуществимости. Сравнительный обзор разных экспериментальных серий ИМХ, ИРХ и НХ целесообразно осуществить в пространственно-временной форме, используя ДСО или ЛСО (рис. 2г, д), поскольку локомоторное управление реально осуществляется именно в такой форме. Хотя параллельная презентация экспериментальных данных в двух системах отсчета полезна, мы ограничимся выбором ЛСО, считая, что собственное управление мозг организует в собственной системе отсчета, кинематическим аналогом которой является ЛСО. Одной из задач пространственно-временного управления локомоцией является задача формирования синергии цикла.

Определение 2.4. *Синергией цикла* (СЦ) называется функциональная связь, которой подчиняются длина L и период T шага.

На рисунке 5а совместно представлены СЦ трех режимов — ИРХ, ИМХ и НХ, полученные в экспериментах с одним и тем же испытуемым. Здесь режимы ИРХ и ИМХ представлены согласно определениям (2.37), (2.38)

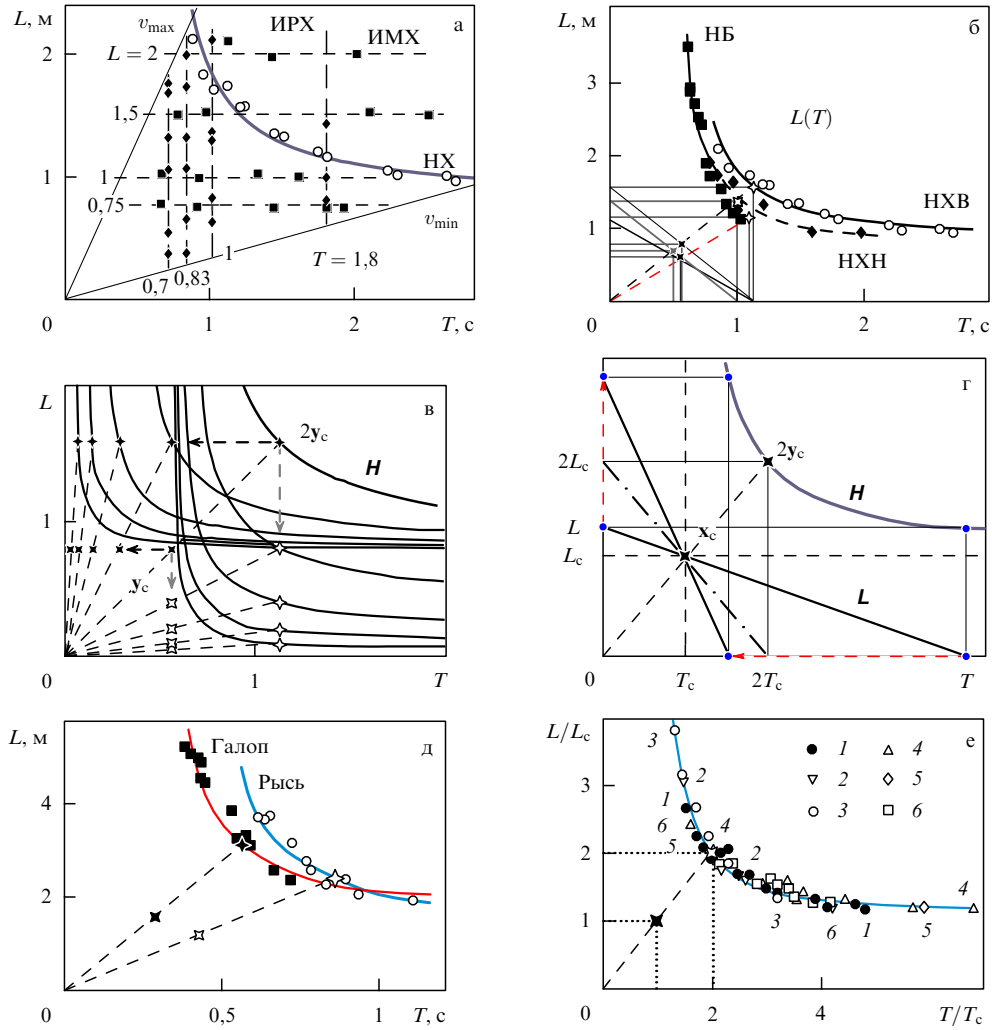


Рис. 5. Разные варианты изменений формы синергии цикла: (а) три режима ходьбы человека, НХ — нормальная ходьба, ИРХ — изоритмическая ходьба, ИМХ — изометрическая ходьба (все серии проходок одного испытуемого); (б) НБ — нормальный бег, НХВ и НХН — нормальная ходьба вперед и назад; (в) последовательные изменения формы базальной гиперболы при смещениях центра; (г) реконструкция базальной гиперболы H методом вращения опорной прямой L вокруг центра $y_c \equiv (T_c, L_c)$; (д) два аллюра одной и той же лошади (построено по материалам собственных кинорегистраций); (е) нормированные синергии циклов человека (1), лошади (2), собаки (3), таракана (4), многоножек *Scolopendra* (5) и *Julus* (6).

семействами вертикальных и горизонтальных прямых линий, а режим НХ (2.36) в силу своей уникальности — единственной гиперболой

$$\text{НХ: } L = \frac{L_c T}{T - T_c} \tag{2.39}$$

Как видно, экспериментальные точки $y = (T, L)'$ всех режимов совокупно покрывают конечную область Y_w — область *возможного существования* ходьбы:

$$Y_w \equiv \{y \mid y_{\min} < y < y_{\max}\}, \tag{2.40}$$

прямоугольные границы которой формально определяются "рекордными" граничными точками $y_{\min} = (T_{\min}, L_{\min})'$ и $y_{\max} = (T_{\max}, L_{\max})'$. Однако область *реальной осуществимости* ходьбы $Y_w \subset Y_w$ не является прямоугольной, и в определении ее границ участвуют наклонные прямые, соответствующие рекордным — максимальной и минимальной — скоростям локомоции; при этом граница v_{\min} проявляется более четко.

Замечание 2.6. Хорошо известна возможность совершать движения локомоторного типа (ходьба, бег и др.) на месте — с нулевой длиной шага и поэтому с нулевой скоростью локомоции, но с разными темпами и высотами поднятия ног или подпрыгивания. Видимо, эта возможность порождает мнение об осуществимости локомоции с произвольно малой скоростью. Наш опыт попыток ходить с предельно малыми скоростями, предварительно начиная с шаганий на месте, выявил следующий *парадокс малых скоростей*: ходить (или бегать) со скоростью $v < v_{\min} \approx 0,2 \text{ м с}^{-1}$ невозможно.

Следует подчеркнуть: внутренние точки области Y_w , не инцидентные гиперболе НХ, если и осуществимы, то только в специальных режимах ИРХ, ИМХ, т.е. если границы Y_w определять по рекордным точкам гиперболы НХ, то выделяется меньшая подобласть Y_w .

2.4.4. Характеристическая скорость. Константы времени T_c и длины L_c в формулах (2.36) суть координаты центра $y_c \equiv (T_c, L_c)'$ гиперболы $H \equiv H(y_c)$, аппроксимирующей экспериментальные точки НХ. Поэтому количественные

оценки констант

$$T_c = 0,575 \text{ с}, \quad L_c = 0,79 \text{ м} \quad (2.41)$$

дают предельные минимальные величины периода и длины шага нормальной ходьбы. Из совместного графического представления СЦ разных режимов видно (рис. 5а), что ходить с длиной шага $L < L_c$ удастся только в спецрежимах ИМХ и ИРХ.

Оценки (2.41) позволяют определить скоростную константу

$$v_c \equiv \frac{L_c}{T_c} = 1,37 \text{ м с}^{-1} = 82 \text{ м мин}^{-1} \quad (2.42)$$

— *характеристическую скорость* НХ, величина которой интересна тем, что совпадает с оценкой Ральстона (см. [86, с. 84]) "оптимальной скорости" $v_{\text{opt}} \approx 80 \text{ м мин}^{-1}$, отвечающей минимуму энергозатрат для нормальной ходьбы человека.

Кинематическим критерием энергозатрат на шаг может служить произведение периода на длину шага $P \equiv TL$. Переписывая параметрические функции (2.36) как функции скорости:

$$\frac{T}{T_c} = \frac{v_c}{v} + 1, \quad \frac{L}{L_c} = \frac{v}{v_c} + 1, \quad (2.43)$$

получаем явное определение зависимости продукта P от скорости:

$$P = T_c L_c \left(2 + \frac{v}{v_c} + \frac{v_c}{v} \right), \quad (2.44)$$

а из условия $dP/dv = 0$ находим: величина $P(v)$ минимальна при скорости $v = v_c$.

Резюмируем выявленную эвристическую связь кинематики с энергетикой.

Эвристика 2.1. При нормальной ходьбе кинематический минимум функции $P(v) = TL$ совпадает с энергетическим минимумом, поэтому характеристическая скорость соответствует оптимальной скорости ходьбы.

Подстановка $v = v_c$ в формулы (2.43) позволяет найти "энергетически оптимальные" величины периода и длины шага:

$$T_{\text{opt}} \equiv 2T_c = 1,15 \text{ с}, \quad L_{\text{opt}} = 2L_c \equiv 1,58 \text{ м}, \quad (2.45)$$

предпочитаемые при длительной ходьбе.

2.4.5. Преобразования синергии цикла. Многогранная определяющая роль СЦ выявляется при сравнении НХ с другими режимами и формами шагательной локомоции. В таких сравнениях особенно ценны данные, полученные для одного и того же испытуемого в одинаковых экспериментальных условиях, поскольку именно такие данные позволяют судить о тех свойствах функциональной мобильности синергии цикла, которые порождаются тактическим и стратегическим уровнями управления локомоторными движениями (см. выше). Формальные критерии идентификации разных уровней управления можно сформулировать на основе свойств преобразования разных синергий. С этой целью сначала следует выявить существование таких свойств.

Наши эксперименты, описанные ранее в работе [27], были направлены преимущественно на сравнительные

исследования трех режимов ходьбы — НХ, ИРХ и ИМХ, в которых испытуемые ходили естественным способом, так сказать, вперед. Но для одного из испытуемых была дополнительно выполнена серия проходов назад — режим *нормальной ходьбы назад* (НХН), а также серия пробежек — режим *нормального бега* (НБ). Совместно представленные синергии цикла (рис. 5б) для НХ, НХН и НБ демонстрируют два варианта перестроек этой синергии.

Преобразование НХ → НХН можно считать гомотетией относительно начала координат, так как эти режимы имеют практически одинаковые характеристики скорости (табл. 1). Преобразование НХ → НБ можно оценить как изоритмическое, здесь T_c уменьшается незначительно (в 1,06 раз), а L_c уменьшается в 1,5 раза; при этом диапазон скоростей НБ смещается в сторону больших скоростей — практически все пробежки имеют $v > (v_c)_{\text{НБ}}$.

Таблица 1. Нормальные синергии цикла человека

Локомоция	T_c , с	L_c , м	V_c , м с ⁻¹	U_c , м с ⁻¹ *
НХВ	0,57	0,79	1,41	1,91
НХН	0,51	0,70	1,38	2,04
НБ	0,54	0,54	1,20	1,04

* Здесь U_c — скорость переноса при скорости локомоции, равной скорости V_c .

Эвристика 2.2. Смены режимов и форм локомоции обеспечиваются функциональными преобразованиями синергии цикла, которые формально осуществляются посредством смещений центра $u_c \equiv (T_c, L_c)'$ гиперболы $H(u_c)$.

С формальной точки зрения выделенная эвристика выглядит тривиальной, поскольку аналитическое описание СЦ содержит всего два параметра и эти, вообще говоря, свободные параметры являются координатами центра гиперболы. Следовательно, другие способы функционального преобразования СЦ, кроме перемещения центра, отсутствуют. Пожалуй, нетривиальное содержание последней эвристики состоит в констатации не формальных возможностей, а реальных потребностей функционального преобразования СЦ, а также того, что такие потребности удовлетворяются в рамках одних и тех же возможностей. Неожиданное следствие эвристики 2.2 — возможность аналогичной функциональной интерпретации режимов ИРХ и ИМХ.

2.4.6. Унифицированная модель режимов. До сих пор режим НХ, с одной стороны, и, с другой стороны, режимы ИРХ и ИМХ понимались нами как принципиально различные. Основанием для такого понимания служит главным образом то, что режим НХ естественный и уникальный, а режимы ИРХ или ИМХ искусственные и полимодальные (допускают выбор разных фиксированных величин периода или длины шага), кроме того, различны аналитические определения этих режимов, т.е. формулы (2.36)–(2.38). Однако более внимательное сравнение этих формул позволяет увидеть их внутреннее (параметрическое) родство, которое выражает следующая

Лемма 2.1. *Линейные синергии цикла режимов ИРХ и ИМХ можно интерпретировать как предельные случаи гиперболы синергии цикла НХ.*

Доказательство. Рассмотрим семейство изоритмических преобразований: $T_c = \text{const}$, $L_c = \text{var}$. Тогда при уменьшении L_c (рис. 5в) гипербола $\mathbf{H}(\mathbf{y}_c)$ деформируется так, что в пределе $L_c \rightarrow 0$ она вырождается в вертикальную прямую синергии цикла ИРХ. Прямая подстановка в формулы (2.36) значений $T_c = T_{\text{fix}}$, $L_c = 0$ преобразует эти общие параметрические формулы НХ в параметрические формулы ИРХ (2.38).

Аналогичные изометрические преобразования порождают другое семейство деформированных гипербол, предельным случаем которых при $T_c = 0$, $L_c = L_{\text{fix}}$ служит горизонтальная прямая синергии цикла ИМХ (рис. 5в). Прямая подстановка в формулы (2.36) предельных координат центра $T_c = 0$, $L_c = L_{\text{fix}}$ дает формулы ИМХ (2.37).

Итак, непрерывные параметрические преобразования $\text{НХ} \rightarrow \text{ИРХ}$ и $\text{НХ} \rightarrow \text{ИМХ}$ теоретически осуществимы и соответствуют обращению в нуль одной из координат центра. ♦

Хотя математическое содержание этой леммы элементарно, она, учитывая эвристику 2.2, дает нам основание считать изоритмические и изометрические режимы граничными состояниями общей программы управления синергией цикла, а не особыми автономными программами обеспечения кинематических условий фиксации периода или длины шага.

Освободимся от скоростной параметризации в определении СЦ (2.43):

$$\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)\left(\frac{L}{L_c} - 1\right) = 1 \Rightarrow TL = T_c L + L_c T, \quad (2.46)$$

и выделим каноническое уравнение, имеющее линейно-дробную форму:

$$\frac{T_c}{T} + \frac{L_c}{L} = 1. \quad (2.47)$$

Обратим внимание на двойственное "линейно-гиперболическое" содержание канонического уравнения:

1) относительно координат T_c , L_c имеем "опорную" прямую

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_L): \mathbf{y} = (1 - \lambda)\mathbf{y}_T + \lambda\mathbf{y}_L \equiv ((1 - \lambda)T, \lambda L)', \quad (2.48)$$

заданную в отрезках $\mathbf{y}_T \equiv (T, 0)'$ и $\mathbf{y}_L \equiv (0, L)'$, отсекаемых этой прямой на осях координат;

2) относительно координат T , L имеем гиперболу $\mathbf{H}(\mathbf{y}_c)$.

Оценки оптимальных величин (2.45) выявляют важное свойство гиперболы СЦ

$$2\mathbf{y}_c \in \mathbf{H}(\mathbf{y}_c) \Leftrightarrow \mathbf{o} \in \mathbf{H}(\mathbf{y}_c), \quad (2.49)$$

т.е. точка, имеющая удвоенные координаты центра гиперболы, находится на гиперболе. Нетрудно убедиться, что условие $2\mathbf{y}_c \in \mathbf{H}$ является следствием условия $\mathbf{o} \in \mathbf{H}$, и наоборот.

Факт прохождения гиперболы (2.47) через начало координат не представляется сразу очевидным, поскольку в описании СЦ участвует только одна ветвь, и именно та, которая не проходит через начало координат. Однако полное описание гиперболы включает две центрально симметричные ветви. В общем случае произволь-

ная гипербола как 3-параметрическая кривая 2-го порядка может не проходить через начало координат. Следовательно, дополнительное условие (2.49) выделяет специальный класс "базальных" гипербол.

Определение 2.5. Гипербола называется *базальной*, если одна из ее ветвей проходит через начало координат.

Лемма 2.2. *Базальная гипербола $\mathbf{H}(\mathbf{y}_c)$ порождается вращением опорной прямой $\mathbf{L}(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_L)$ вокруг точки $\mathbf{y}_c \in \mathbf{L}(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_L)$.*

Доказательство с очевидностью следует из рис. 5г. Опорная прямая (2.48) является главной диагональю координатного прямоугольника $\mathbf{P} \equiv \{\mathbf{o}, \mathbf{y}_T, \mathbf{y}_L, \mathbf{h}_c\}$, в котором суммарный вектор

$$\mathbf{h}_c \equiv (T, L)' = T\mathbf{e}_1 + L\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{y}_T + \mathbf{y}_L$$

является радиальной диагональю. Если \mathbf{y}_c — центр вращения опорной прямой (2.48), то, полагая в (2.48) $\mathbf{y} = \mathbf{y}_c$, получим уравнение

$$\mathbf{x}_c = \text{diag}(1 - \lambda, \lambda)\mathbf{h}_c \Rightarrow \mathbf{h}_c(\lambda) = \left(\frac{T_c}{1 - \lambda}, \frac{L_c}{\lambda}\right)', \quad (2.50)$$

т.е. получим λ -параметрические уравнения характеристик цикла $T(\lambda)$ и $L(\lambda)$. Исключение из этих уравнений параметра λ дает скалярное уравнение (2.47), а замена линейной λ -параметризации опорной прямой нелинейной скоростной v -параметризацией, $v \equiv L/T$, $\lambda = 1/(1 + v/v_c)$, дает параметрические уравнения (2.36):

$$\mathbf{h}_c(v) = \left(T_c + \frac{L_c}{v}, L_c + T_c v\right)'.$$

Таким образом, базальная гипербола замечается (рисуеться) вектором радиальной диагонали при вращении главной диагонали координатного прямоугольника. ♦

Следствие 2.1.

$$1) \mathbf{y}_c = \mathbf{y}_T \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{y}_c) = \mathbf{L}(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_T + \mathbf{y}_L);$$

$$2) \mathbf{y}_c = \mathbf{y}_L \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{y}_c) = \mathbf{L}(\mathbf{y}_L, \mathbf{y}_T + \mathbf{y}_L).$$

В частных случаях, когда центр вращения находится на одной из осей координат, базальная гипербола вырождается в соответствующую прямую, т.е. ЦС НХ превращается: 1) в ЦС ИРХ; 2) в ЦС ИМХ (это "вращательные" версии леммы 2.1).

2.4.7. Синергии цикла человека и животных. Способность человека ходить в разных режимах НХ, ИМХ и ИРХ — важный факт, свидетельствующий не только о том, что кинематике ходьбы присущи параметрические свободы реализации, но и о том, что системе управления ходьбой присущ определенный локомоторный интеллект, обеспечивающий реализацию не только режима НХ, который формируется в раннем онтогенезе (см. [3, 4]) и реализуется преимущественно подсознательно, но и режимов ИРХ и ИМХ, реализация которых осуществляется сознательно и требует предварительной тренировки. В этом смысле животные, имея те же кинематические свободы, но не являясь такими же "умными", не способны реализовать спецрежимы и всегда соблюдают режим нормальной локомоции.

Поэтому если допускать, что кинематики шагательных движений животных и человека организуются посредством управляющих систем подобным образом, то следует для всех ходоков ожидать существование математического подобия, в первую очередь *синергий цикла* (СЦ). Поскольку СЦ НХ и НБ человека имеет форму базальной гиперболы (2.47) (см. табл. 1), следует проверить пригодность такой аппроксимации и для экспериментальных данных, полученных для разных животных.

В нашем компьютерном банке данных собраны количественные характеристики локомоторных движений не только человека, но и многих разных животных. Часть наших данных, полученных на основе собственных регистраций, ранее опубликована: по кинематике локомоторных движений человека — [3, 4, 6, 27, 28, 49, 51], собаки — [5], многоножки *Scolopendra* — [26, 30], многоножки *Julus* — [29, 56]; многие другие данные, полученные на основе кинорегистраций (таракан, краб, черепаха, ящерица, лошадь и др.), остались не опубликованными. Среди последних следует прокомментировать данные, относящиеся к аллюрам лошади, поскольку они интересны в данном контексте тем, что были получены для одной и той же лошади, которая под управлением наездника воспроизвела с разными скоростями две основные походки — рысь и галоп. По-видимому, как следует из раздельных аппроксимаций данных по этим аллюрам (рис. 5д), межаллюрные переходы у лошади сопровождаются или порождаются преобразованиями СЦ. В отличие от аналогичных "нормальных" преобразований СЦ человека (см. рис. 5б и табл. 1), у лошади более выражены изменения характеристической скорости:

$$V_{c, \text{рысь}} < V_{c, \text{галоп}},$$

поскольку в таком же порядке происходит увеличение характеристической длины L_c и уменьшение характеристического времени T_c (табл. 2).

Таблица 2. Синергии цикла аллюров лошади, $h = 0,9$ м

Аллюр	T_c , с	L_c , м	V_c , м с ⁻¹	U_c , м с ⁻¹ *
Рысь	0,42	1,20	2,85	2,48
Галоп	0,28	1,52	5,32	3,69

* Здесь U_c — скорость переноса при скорости локомоции, равной скорости V_c .

Примеры характеристических констант СЦ некоторых животных приведены в табл. 3, в которой дополнительно указана гленоацетобулярная длина h (расстояние между основаниями ног). Видно, что у позвоночных, т.е. у тетрапод, $L_c \approx h$, а у беспозвоночных $L_c \approx 4h$; существование связи T_c с h не столь очевидно.

Прокомментируем кратко некоторые данные табл. 3.

Одно из первых детальных исследований локомоторных синергий собаки выполнили наши коллеги

Таблица 3. Характеристические константы синергии цикла

Объект	T_c , с	L_c , см	V_c , см с ⁻¹	U_c , см с ⁻¹	h , см
Собака [7]	0,35	35,6	101,2	177,0	45,5
Геккон [61]	0,06	5,3	85,2	105,2	4,2
Таракан [75]	0,05	1,9	34,8	63,7	0,6
Сколорендра [26]	0,11	3,5	31,2	25,7	0,9
Юлус [56]	0,29	0,4	1,3	1,8	0,1

Ю.И. Аршавский. Авторы работы [7] на основе полученных регистраций предложили приближенно характеризовать кинематику локомоторного цикла собаки двумя условиями, которые соответствуют модели Уилсона:

$$T_+ \approx \text{const} = 0,26 \text{ с},$$

$$L_- \approx \text{const} = 0,5 \text{ м}.$$

Однако дополнительный анализ графических данных работы [7] выявил возможность той модельной трактовки, которая развивается в этой работе, например, синергия цикла собаки имеет форму базальной гиперболы, что подтверждается данными, полученными в работе [6].

Сравнительные исследования наземной локомоции многих видов рептилий выполнил В.Б. Суханов [61], который, кроме следовых дорожек, изучил временные характеристики локомоторных циклов. Для наглядного графического представления походок Суханов предпочел комбинацию опорных планов и нотограмм, но для геккона, киносъемка локомоторных движений которого была выполнена в лабораторных условиях, привел графики временных характеристик от скорости локомоции. Зависимости $T(v)$ периода от скорости локомоции Суханов уделил особое внимание и показал, что для всех исследованных им рептилий эта зависимость допускает аналитическую аппроксимацию в виде смещенной гиперболы

$$T = T_c + \frac{L_c}{v}$$

(в книге [61] константы аппроксимации T_c и L_c обозначаются другими символами). Хотя сам Суханов не уделил внимания изменчивости длины шага, из его аппроксимации зависимости $T(v)$ следует линейная зависимость от скорости длины шага

$$L(v) \equiv vT = L_c + T_c v,$$

что подтверждают его же данные, полученные для следовых дорожек (см. ниже рис. 8д). Итак, согласно независимым исследованиям В.Б. Суханова [61] СЦ рептилий тоже имеет форму базальной гиперболы.

После качественных исследований Хьюза [80] детальные количественные исследования локомоции таракана в широком диапазоне скоростей выполнил Ф. Делькомин [75], который подверг критике модель Уилсона за неадекватность реальным данным. Наши малочисленные кинорегистрации бега таракана того же вида *Pereplaneta americana*, который изучал Делькомин, дали сходные результаты, которые относятся к области малых и средних скоростей. В табл. 3 и ниже использованы преимущественно данные Делькомины.

Кинематические характеристики двух многоножек — *Scolopendra* и *Julus* — подробно описаны в работах [26, 56]; ниже (см. далее раздел 2.6.1 и рис. 7в, г) приводится краткое описание походок этих многоножек.

Итак, синергии цикла разных локомоторных объектов — от человека до многоножек — отличаются только величинами констант T_c и L_c , т.е. обладают свойством пространственно-временного подобия. Выбирая константы T_c и L_c в качестве масштабных единиц, получим нормированное представление синергии цикла человека

и животных в виде единой гиперболы с центром (рис. 5е)

$$\mathbf{x} = (1, 1)' \equiv \mathbf{e}.$$

2.5. Синергия структуры цикла

Рассмотренная выше синергия цикла обеспечивает связь временной и пространственной характеристик всего цикла — периода и длины шага. Для формирования внутренней структуры локомоторного цикла — длительностей фаз опоры и переноса — необходима дополнительная синергия — *синергия структуры цикла* (ССЦ). Математическое описание структуры цикла сводимо к безразмерному параметру $\gamma(v)$, знания аналитической формы которого достаточно для реконструкции скоростных зависимостей длительностей фаз $T_{\pm}(v)$, когда известна и синергия цикла. Однако первичное выделение параметра γ нецелесообразно для последующего выяснения геометрических свойств ССЦ, поскольку параметр структуры цикла характеризует отношение либо только временных, либо только пространственных величин структурных компонент:

$$\gamma \equiv \frac{T_+}{T_-} \equiv \frac{L_+}{L_-}.$$

Для геометрических целей более подходящей является скорость переноса $u \equiv v/\gamma$, поскольку она характеризует отношение пространственной величины (опорной длины) и временной (длительности переноса): $u \equiv L_-/T_+$. Первичное выделение скоростной характеристики $u(v)$ упрощает последующее геометрическое построение ССЦ в виде "эталонного многообразия событий наступания", определяемого функциональной зависимостью $L_-(T_+)$.

2.5.1. Симметрии фазовых характеристик. Вернемся к кинематическим портретам трех режимов ходьбы (см. рис. 3). Характеристики фаз переноса $T_+(v)$ или $L_+(v)$ приведены совместно с характеристиками фаз опоры $T_-(v)$ или $L_-(v)$, чтобы показать симметричное их распределение относительно средней линии $T(v)/2$ или $L(v)/2$. Как видно, формы пар графиков, например, временных фаз $T_{\pm}(v)$ трех режимов, с одной стороны, зависят от формы графиков периода $T(v)$, а с другой — содержат "собственные" формы, явно проявляющиеся в режиме ИРХ.

Используем угловые скобки для обозначения центрированных компонент, тогда свойство *зеркальной симметрии* фазовых компонент $T_{\pm}(v)$ относительно полупериода $T(v)/2$ аналитически записывается следующим образом:

$$\langle T_-(T) \rangle \equiv T_- - \frac{T}{2} = -T_+ + \frac{T}{2} \equiv -\langle T_+(T) \rangle.$$

Фазовые компоненты длины шага $L_{\pm}(v)$ относительно полудлины $L(v)/2$ описываются аналогичным образом (предыдущие формулы нужно домножить на скорость v).

Если далее для разных величин изоритмической фиксации $T = T_{\text{фик}}$ вычислить центрированные зависимости $\langle T_{\pm}(v; T_{\text{фик}}) \rangle$, то выявляется мультипликативная зависимость центрированных графиков от величины $T_{\text{фик}}$ (рис. 6а): чем больше фиксированный период $T_{\text{фик}}$, тем дальше от оси симметрии расположены графики временных компонент $\langle T_{\pm}(v; T_{\text{фик}}) \rangle$.

Чтобы снять эту мультипликативную зависимость, следует пронормировать центрированные зависимости на величину фиксированного периода. Тогда, как видно (рис. 6б), нормированные формы

$$\frac{\langle T_{\pm}(v; T_{\text{фик}}) \rangle}{T_{\text{фик}}} \equiv \frac{T_{\pm}(v; T_{\text{фик}})}{T_{\text{фик}}} - \frac{1}{2}$$

совмещаются. Поскольку эксперименты с фиксацией длины шага ставились независимо, аналогичные преобразования можно выполнить для фазовых компонент длины шага изометрических режимов и убедиться, что смещенные и нормированные формы $(L_{\pm}(v; L_{\text{фик}}))/L_{\text{фик}}$ тоже совмещаются. Более того, любой режим ходьбы посредством нормировки на период $T(v)$ временных фазовых компонент $T_{\pm}(v)$ фиктивно превращается в изоритмический режим единичного периода. Аналогично, любой режим ходьбы посредством нормировки на длину шага $L(v)$ пространственных фазовых компонент $L_{\pm}(v)$ фиктивно превращается в изометрический режим единичной длины шага. Общность свойств фазовых характеристик резюмирует следующая

Эвристика 2.3. Существует каноническая форма фазовых характеристик и, следовательно, каноническая форма структурной синергии цикла.

Данный эмпирический вывод нуждается в дополнительном теоретическом обосновании, позволяющем понять аналитическую природу канонических форм. Необходимое обоснование следует из возможности выразить нормированные длительности фаз через параметр γ :

$$\frac{T_+}{T} \equiv \frac{\gamma}{1+\gamma}, \quad \frac{T_-}{T} \equiv \frac{1}{1+\gamma},$$

т.е. нормированные фазовые компоненты периода и длины шага можно выразить только через скорости переноса u и локомоции v :

$$\frac{T_+}{T} \equiv \frac{L_+}{L} = \frac{v}{u+v}, \quad \frac{T_-}{T} \equiv \frac{L_-}{L} = \frac{u}{u+v}. \quad (2.51)$$

Таким образом, простое обоснование предыдущей эвристики о существовании нормированных канонических форм фазовых характеристик дает новая

Эвристика 2.4. Скоростная характеристика $u(v)$ имеет постоянную форму во всех режимах ходьбы человека.

Экспериментальные данные (рис. 6в) подтверждают эту эвристику — экспериментальные точки всех серий всех режимов НХ, ИРХ и ИМХ распределяются вдоль некоторой общей линии, форма которой примерно линейна:

$$u \approx u_0 + \alpha v.$$

На рисунке 6в для сравнения построена "точечная" прямая $u = v$; экспериментальные точки распределены выше этой прямой и примерно параллельно (линейной аппроксимации в всех представленных экспериментальных точках соответствуют значения $u_0 = 0,43$ и $\alpha = 1$). Кроме того, на том же рисунке изображены две нелинейные аппроксимации: одна (сплошная линия) для точек НХ, а другая (штриховая линия) для объединения точек

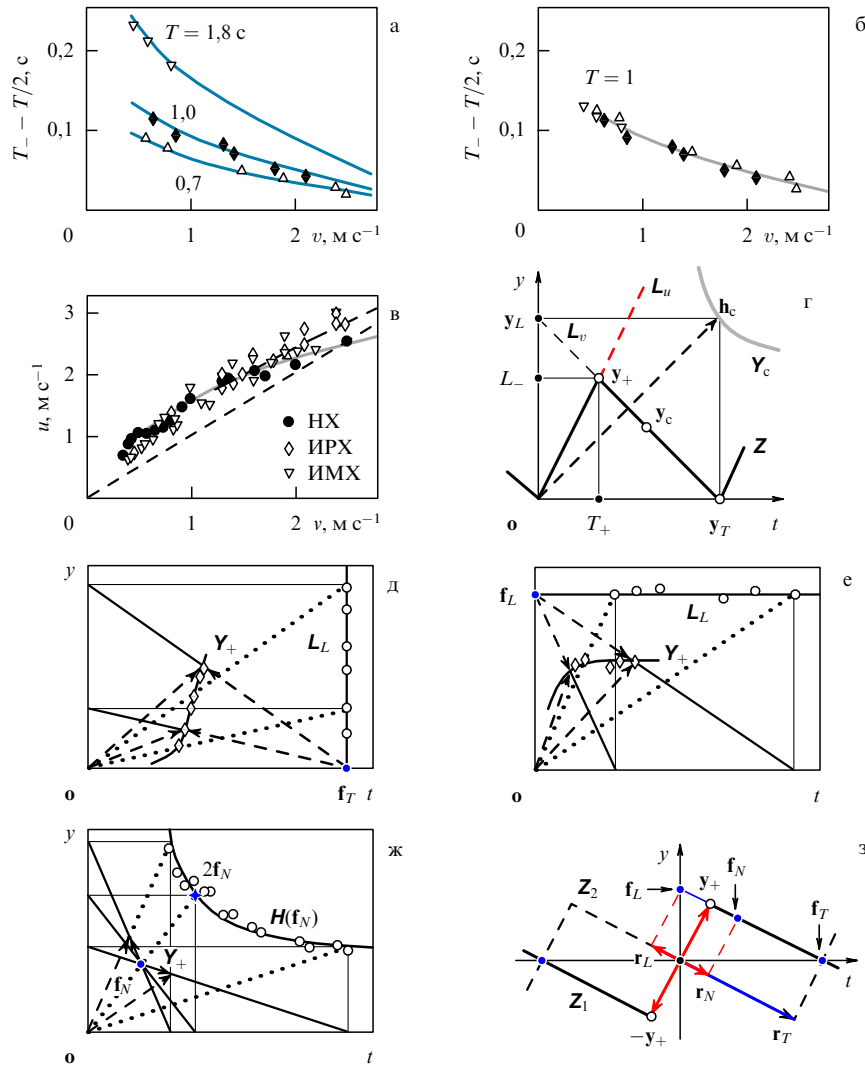


Рис. 6. Синергия структуры цикла: центрированные длительности фазы опоры для трех вариантов фиксации периода до (а) и после (б) нормировки на величину периода; (в) суммарное представление скоростных характеристик $u(v)$ трех режимов ходьбы человека (по тем же данным, что на рис. 4а); (г) схема представления целевого события наступания y_+ как соответствия двух прямых L_u и L_v ; (д–ж) примеры реконструкций структурных эталонов Y_+ для трех режимов ходьбы; (з) схема определения комплементарных событий трех режимов: r_T — ИРХ, r_L — ИМХ, r_N — НХ.

режимов ИРХ и ИМХ (при отдельной аппроксимации точек ИРХ и ИМХ получаются близкие кривые).

Замечание 2.7. Оценка пригодности линейной или другой формы функциональной связи $u(v)$ зависит не только от точности измерений, например, от длительности фаз шага, но также от диапазона зарегистрированных скоростей v (статистические оценки разных вариантов аппроксимаций см. в [49]). Обеспечить же в экспериментах реализацию достаточно больших диапазонов скоростей локомоции всегда непросто. Понятно, что при малом диапазоне скоростей локомоции приходится пользоваться линейным приближением скоростной характеристики $u(v)$, использование которой к тому же упрощает сравнительные оценки. Поэтому линейная форма зависимости $u(v)$ использовалась нами ранее для аппроксимации разных экспериментальных данных, относящихся к ходьбе людей: детей [3, 4], нормальных взрослых [27, 28], инвалидов [6] и др.

Практически единая скоростная характеристика $u(v)$ получается и в случае двух аллюров лошади (здесь не приводится).

2.5.2. Дробно-линейная форма. Нелинейные аппроксимации зависимости $u(v)$ аналитически описываются дробно-линейной функцией

$$u = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 v}{1 + \alpha_3 v}. \tag{2.52}$$

Величины коэффициентов формы (2.52) для тех кривых, которые аппроксимируют экспериментальные данные человека (рис. 6в), приведены в табл. 4.

Таблица 4. Коэффициенты дробно-линейной формы

Режим	α_1	α_2	α_3
НХ	0,14	2,25	0,15
ИРХ + ИМХ	0,11	1,74	0,52

Коэффициенты дробно-линейной формы (2.52) можно определять иначе:

$$u = \frac{a_1 + a_2 v}{a_3 + v} \equiv \text{fr}(v; \mathbf{A}). \tag{2.53}$$

Двум способам записи коэффициентов отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Leftrightarrow a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \quad a_3 = \frac{1}{\alpha_3}. \quad (2.54)$$

Старые α -коэффициенты более удобны для идентификации случаев малых значений коэффициента α_3 (см. табл. 4), т.е. случаев, когда дробно-линейная форма близка к линейной. Однако в дальнейших теоретических рассуждениях более удобна форма (2.53).

Возможен третий вариант определения коэффициентов гиперболической дробно-линейной формы, учитывающий алгебраическую связь этой формы с двойным отношением — вурфом (см. раздел 6.13), поскольку вурф явно содержит скоростные параметры асимптот в качестве эталонных констант, которые уместно называть *эталонными скоростями*:

$$u = \text{fr}(v; A) \Leftrightarrow w(v_1, v_2; c_1, c_2) = -q; \quad (2.55)$$

после простых преобразований вурфа получим дробно-линейную форму

$$u = \frac{c_1 c_2 + (q_1 c_2 + q_2 c_1)v}{q_1 c_1 + q_2 c_2 + v}. \quad (2.56)$$

Здесь $v_1 = -v, v_2 = u, q \equiv -s_1/s_2$ — константа ангармоничности, c_1, c_2 — эталонные скорости;

$$q_1 \equiv \frac{1}{1+q}, \quad q_2 \equiv \frac{q}{1+q} \Leftrightarrow q_1 + q_2 = 1, \quad \frac{q_2}{q_1} = q. \quad (2.57)$$

Из (2.56) и (2.53) находим

$$2a \equiv a_2 + a_3 = c_1 + c_2,$$

т.е. c_1, c_2 — корни квадратного уравнения:

$$c^2 - 2ac + a_1 = 0 \Rightarrow c_{1,2} = a \pm (a^2 - a_1)^{1/2};$$

константа ангармоничности q вычисляется так:

$$q = \frac{a_2 - c_2}{c_1 - a_2} = \frac{a_3 - c_1}{c_2 - a_3}.$$

Используя приведенные выше эмпирические оценки α -коэффициентов (см. табл. 4) и учитывая последующие замены (2.54), мы можем оценить эталонные скорости и константу ангармоничности для режимов ходьбы человека (табл. 5).

Таблица 5. Эталонные константы человека

Режим	$c_1, \text{ м с}^{-1}$	$c_2, \text{ м с}^{-1}$	$-q$
НХ	0,043	6,21	0,44
ИРХ + ИМХ	0,041	11,83	0,57

Аналогичные оценки эталонных констант для некоторых животных собраны в табл. 6.

Перечислим общие свойства эталонных констант (см. табл. 5, табл. 6):

1°) эталонные скорости имеют одинаковый знак (унидирекциональность);

Таблица 6. Эталонные константы животных

Объект	c_1	c_2	$-q$	[c]
Лошадь	0,099	14,1	0,850	м с^{-1}
Собака	0,046	4,3	0,307	м с^{-1}
Таракан	0,910	292,5	0,469	см с^{-1}
Сколопендра	1,648	323,2	1,150	см с^{-1}
Юлус	0,987	274,6	0,783	мм с^{-1}

2°) скорость c_2 значительно превосходит $c_1, c_2/c_1 \geq 100$ (анизотропность);

3°) константа q не равна 1 (ангармоничность).

Если свойство 2°) усилить и положить вторую эталонную скорость c_2 неограниченно большой, то дробно-линейная форма заменяется линейной формой:

$$c_2 \rightarrow \infty \Rightarrow u = u_0 + \alpha v,$$

где $u_0 = c_1/q_2, \alpha = q_1/q_2 = 1/q$. Если дополнительно положить первую эталонную скорость c_1 неограниченно малой, то получим простейший вариант линейной связи скоростей переноса и локомоции

$$c_2 \rightarrow \infty, \quad c_1 \rightarrow 0 \Rightarrow u = \frac{v}{q}.$$

Итак, согласно волновой интерпретации коэффициентов дробно-линейной формы (2.53) использование линейной аппроксимации скоростной характеристики $u(v)$ не означает выбора другой хронометрической модели, а означает выбор частного варианта, когда вторую эталонную скорость допустимо считать очень большой.

Замечание 2.8. Из определяющих условий (2.24) локомоторной модели Маррея следует постоянство параметра структуры цикла:

$$\gamma \equiv \frac{T_+}{T_-} \equiv \frac{L_+}{L_-} = \text{const}.$$

Отсюда получается линейная связь скорости переноса и скорости локомоции:

$$u \equiv \frac{L_-}{T_+} = \frac{v}{\gamma}.$$

Сравнивая эту запись с формулой (2.56), мы можем заключить: модели Маррея отвечает линейная версия скоростной характеристики $u(v) = v/q$, эталонные скорости которой имеют экстремальные величины $\{c_1 = 0, c_2 = \infty\}$, а константа ангармоничности равна постоянной структуре цикла, $q = \gamma$.

2.5.3. Метафора событийного управления. Баллистическая метафора шагательных движений сводит управление структурой цикла к определениям двух событий импульсной динамики — события отрыва стопы в конце опорной фазы и события наступания стопы в конце фазы переноса. Хотя баллистическая метафора сильно упрощает реальную картину локомоторного управления, игнорируя, например, мультиимпульсный характер формирования мышечных сил, выделенные события являются ключевыми в общей сложной схеме управления движениями многозвенных конечностей. Ограничиваясь рассмотрением только двух ключевых событий

отрыва и наступания, следует еще выяснить характер соподчинения этих событий в общем цикле шага. Далее нам понадобится понятие целевого события. Видимо, при ходьбе роль целевого события играет событие наступания ноги. Основанием такого заключения служат следующие наблюдения.

ИМХ. Когда человек старается идти по заданным меткам на полу, он осознанно решает задачу попадания стопы в нужное место и в нужный момент времени; в этом случае событие наступания можно считать *целевым*. При этом роль координационного *референта*, относительно которого решается целевая задача, играет контрлатеральная нога.

ИРХ. Человек предварительно на месте настраивается на заданный ритм по событию наступания, затем при ходьбе поддерживает ритм тоже по наступанию; следовательно, и в этом режиме событие наступания можно считать целевым. И здесь роль ритмического референта выполняет контрлатеральная нога, т.е. используется метод ритмической подстройки "полушагов".

НХ. События смен фаз реализуются подсознательно, но при необходимости "глядеть под ноги" обычно контролируется именно событие наступания.

Общую точку зрения на пространственно-временную организацию шагательной локомоции выражает следующий

Целевой принцип событийного управления. Задача построения шагательных движений решается мозгом так, что текущий контроль и корректировка каждого цикла шага при ходьбе осуществляются по целевому событию наступания, цель — поставить ногу в определенное место в определенный момент времени.

Естественной собственной системой отсчета для мозга является, конечно, ЛСО, и это следует учитывать при синтезе пространственно-временной геометрии управляющих процессов "локомоторного интеллекта". В мозге, возможно, имеются две карты: во-первых, карта тела, играющая роль ЛСО, во-вторых, карта внешнего пространства, играющая роль ДСО. Поэтому у мозга имеется задача производства пространственно-временных измерений в актах согласования собственной карты тела с движущейся картой внешнего пространства. Хорошо известно, что при отсутствии локомоции визуальному восприятию внешнего пространства присуще удивительное свойство "константности", но о свойствах перемещения визуального образа пространства при локомоции известно крайне мало.

2.5.4. Целевые эталоны. Вернемся к пространственно-временному образу *целевой траектории* (ЦТ) \mathbf{Z} . При синергетическом подходе интересна не столько какая-то конкретная ЦТ, сколько семейство $\mathbf{Z}(v)$, присущее каждому отдельно взятому режиму локомоции.

Пусть начало ЛСО $\mathbf{Y} \equiv \{\mathbf{y} = (t, y)'\}$ совмещено с событием отрыва ноги (рис. 2д); тогда следующее целевое событие наступания этой ноги есть $\mathbf{y}_+ \equiv (T_+, L_-)'$, а следующее событие отрыва есть $\mathbf{y}_T \equiv T\mathbf{e}_1$. Построим опорную прямую $\mathbf{L}_v \equiv \mathbf{L}(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_L)$ (см. (2.48)), которая инцидентна участку фазы опоры \mathbf{Z} и пересекает пространственную ось в точке $\mathbf{y}_L \equiv L\mathbf{e}_2$. Еще выделим вторую фазовую прямую $\mathbf{L}_u \equiv \mathbf{L}(\mathbf{o}, \mathbf{y}_+)$, которая инцидентна участку фазы переноса \mathbf{Z} . Целевое событие

определяется как точка пересечения двух прямых — фазовой и опорной:

$$\mathbf{y}_+ \equiv \mathbf{L}_u \cap \mathbf{L}_v, \quad (2.58)$$

иначе говоря, целевое событие является событием соответствия двух пучков прямых,

$$\mathbf{B}(u; \mathbf{o}) \equiv \{\mathbf{L}_u\}, \quad \mathbf{B}(v; \mathbf{y}_c) \equiv \{\mathbf{L}_v\},$$

которые, во-первых, имеют разные центры \mathbf{o} и \mathbf{y}_c , во-вторых, параметризованы величинами скоростей u и v ; значит, аналитическим выражением этого соответствия служит скалярная характеристика $u(v)$ — *структурная синергия цикла* (ССЦ).

Выше показано, что *синергии цикла* (ЦС) всех трех режимов ходьбы, НХ, ИРХ и ИМХ, формируются одинаковым образом — посредством вращения опорной прямой (см. лемму 2.2 и следствие 2.1). При изменении скорости v событие "конца цикла" $\mathbf{h}_c(v)$ замечает в общем случае эталонную линию цикла \mathbf{Y}_c , форма которой зависит от режима ходьбы, а режим в свою очередь геометрически определяется выбором центра опорного пучка:

$$\text{ИРХ: } \mathbf{y}_c = \mathbf{f}_T \Rightarrow \mathbf{Y}_c = \mathbf{L}_T \equiv \mathbf{L}(\mathbf{f}_T, \mathbf{y}_L);$$

$$\text{ИМХ: } \mathbf{y}_c = \mathbf{f}_L \Rightarrow \mathbf{Y}_c = \mathbf{L}_L \equiv \mathbf{L}(\mathbf{y}_T, \mathbf{f}_L);$$

$$\text{НХ: } \mathbf{y}_c = \mathbf{f}_N \Rightarrow \mathbf{Y}_c = \mathbf{H}(\mathbf{f}_N);$$

где \mathbf{f}_T и \mathbf{f}_L — осевые векторы фиксированных событий, $\mathbf{H}(\mathbf{f}_N)$ — базальная гипербола, центром которой служит фиксированное событие нормы $\mathbf{f}_N \in \mathbf{L}_v \equiv \mathbf{L}(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_L)$.

Теперь по аналогии с геометрической моделью формирования эталона цикла \mathbf{Y}_c мы можем сказать, что при изменении скорости локомоции v целевое событие $\mathbf{y}_+(v)$ тоже замечает некоторую кривую \mathbf{Y}_+ — целевой эталон, его форма тоже зависит от режима ходьбы.

Пример графической реконструкции эталонов ИРХ демонстрирует рис. 6д: здесь опорная прямая \mathbf{L}_v вращается вокруг точки оси времени $\mathbf{f}_T \equiv T\mathbf{e}_1$ ($T = 0,83$ с), суммарный вектор цикла

$$\mathbf{h}_c \equiv \mathbf{f}_T + \mathbf{y}_L \in \mathbf{L}_T$$

"скользит" по вертикальной прямой эталона цикла, а целевой вектор \mathbf{y}_+ при этом замечает кривую целевого эталона \mathbf{Y}_+ .

Аналогичная графическая реконструкция эталонов ИМХ показана на рис. 6е; здесь опорная прямая \mathbf{L}_v вращается вокруг точки пространственной оси $\mathbf{f}_L \equiv L\mathbf{e}_2$ ($L = 1,5$ м), вектор цикла $\mathbf{h}_c \equiv \mathbf{y}_T + \mathbf{f}_L \in \mathbf{L}_L$ замечает горизонтальную прямую эталона цикла, целевой вектор \mathbf{y}_+ замечает другую кривую целевого эталона \mathbf{Y}_+ .

Наконец, сходным образом строятся графические образы гиперболического эталона \mathbf{H} и целевого эталона \mathbf{Y}_+ в случае НХ (рис. 6ж), когда центр вращения опорной прямой совпадает с центром гиперболы $\mathbf{H}(\mathbf{f}_N)$.

Итак, геометрические правила построения эталонов цикла и целевых эталонов полностью проясняются и представляются однообразными при использовании модели вращений опорной прямой.

2.5.5. Комплементарные базисы. Для завершения темы структурной синергии цикла необходимо получить алгебраические описания целевых эталонов, т.е. тех

кривых \mathbf{Y}_+ , которые аппроксимируют экспериментальные точки $\mathbf{y}_+ \equiv (T_+, L_-)'$ на рис. бд–ж. Алгебраическая идентификация целевого эталона упрощается при системном подходе, когда совместно с целевым событием \mathbf{y}_+ рассматривается референтное событие \mathbf{y}_- . Эта пара событий образует базис ЦТ, представляемый матрицей $\mathbf{Y} \equiv (\mathbf{y}_-, \mathbf{y}_+)$ (см. (2.14)). Базисные векторы имеют соответствующие эталоны \mathbf{Y}_- и \mathbf{Y}_+ , образующие систему базисных инвариантов локомоторной хроногеометрии.

Задача 2.2. Определить формы целевого \mathbf{Y}_+ и референтного \mathbf{Y}_- эталонов для трех режимов — НХ, ИРХ и ИМХ.

Целесообразно рассматривать не одиночную ЦТ, а пару ЦТ \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* двух контралатеральных ног, совершающих противофазные шаги. Такие ЦТ пересекаются в средних точках фаз: когда одна нога находится в середине фазы переноса, вторая нога находится в середине фазы опоры (рис. 2д). Теперь более удобно начало ЛСО $\mathbf{Y} \equiv \{y = (t, y)'\}$ выбрать в точке пересечения пары ЦТ, относительно которой события наступания и отрыва обеих ног распределяются центрально-симметрично (рис. бз).

В качестве базисной сначала выделим пару событий фазовых переключений

$$\mathbf{y}_- \equiv \left(\frac{T_-}{2}, -\frac{L_-}{2} \right)' \in \mathbf{Z}^*, \quad \mathbf{y}_+ \equiv \left(\frac{T_+}{2}, \frac{L_-}{2} \right)' \in \mathbf{Z}. \quad (2.59)$$

Целевое событие \mathbf{y}_+ наступания ноги отличается от предыдущего определения (2.58) непринципиальным множителем $1/2$, и такие же множители появляются в определениях осевых событий опорной прямой $\mathbf{L}_v(\mathbf{y}_T, \mathbf{y}_L)$: $\mathbf{y}_T \equiv (T/2)\mathbf{e}_1$, $\mathbf{y}_L \equiv (L/2)\mathbf{e}_2$.

Референтное событие отрыва сопряженной ноги \mathbf{y}_- инцидентно прямой $\mathbf{R}_v \equiv \mathbf{L}_v(\mathbf{o}, \mathbf{y}_-)$, которая параллельна опорной прямой, $\mathbf{R}_v \parallel \mathbf{L}_v$, т.е. референтная прямая — это прямая опорного участка сопряженной ЦТ \mathbf{Z}^* .

Скалярное описание структурной синергии цикла (см. (2.53)) преобразуем в векторное условие проективности ортогональности:

$$u = \text{tr}(v; \mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{y}'_+ \mathbf{M} \mathbf{y}_- = 0, \quad \mathbf{M} = -\mathbf{F} \mathbf{A}. \quad (2.60)$$

Отличие данной локомоторной ситуации от предыдущей состоит только в том, что теперь используется инвертированная версия дробно-линейной формы, поэтому и связь матрицы коэффициентов \mathbf{A} с метрической матрицей \mathbf{M} записывается иначе.

Изоритмический случай оказался ключевым для унифицированного представления общей "локомоторной хроногеометрии", так как естественным образом выделяемая пара базисных событий (2.59) именно в условиях изоритмии приобретает замечательное свойство "фиксации суммы". Действительно, суммируя векторы (2.59), имеем $\mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ = (T/2)\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{y}_T$, а при дополнительном условии $T = T_{\text{fix}}$ получаем связь фиксированного события ИРХ $\mathbf{y}_T = \mathbf{f}_T$ с базисными векторами $\mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ = \mathbf{f}_T$.

Прежде чем переходить к ИМХ и НХ, введем следующее

Определение 2.6. Два события называются *комплементарными*, если их сумма равна фиксированному событию.

Поскольку фиксированное событие ИМХ известно — это $\mathbf{y}_L = (L_{\text{fix}}/2)\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{f}_L$, для обеспечения комплементарности базиса ИМХ приходится выбирать новое референтное событие $\mathbf{y}_- = \mathbf{f}_L - \mathbf{y}_+ \equiv \mathbf{r}_L$, сохраняя целевое событие \mathbf{y}_+ прежним. Выбор (2.59) референтного события ИРХ обозначим аналогично: $\mathbf{y}_- = \mathbf{f}_T - \mathbf{y}_+ \equiv \mathbf{r}_T$. К этим определениям остается добавить определение референтного события НХ: $\mathbf{y}_- = \mathbf{f}_N - \mathbf{y}_+ \equiv \mathbf{r}_N$ (рис. бз), где \mathbf{f}_N — центр гиперболы синергии цикла (см. предыдущий раздел).

Итак, если \mathbf{f} — произвольное фиксированное событие, то совместно с билинейной формой (2.60) получаем определяющие соотношения комплементарного базиса

$$\mathbf{y}'_+ \mathbf{M} \mathbf{y}_- = 0, \quad \mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ = \mathbf{f}, \quad (2.61)$$

и, как следствие, находим квадратичные формы метрических эталонов

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_+: \quad \mathbf{y}'_+ \mathbf{M} \mathbf{y}_+ - \mathbf{y}'_+ \mathbf{M} \mathbf{f} &= 0, \\ \mathbf{Y}_-: \quad \mathbf{y}'_- \mathbf{M} \mathbf{y}_- - \mathbf{f}' \mathbf{M} \mathbf{y}_- &= 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Следовательно, задача 2.2 решена. \blacklozenge

Теоретическая возможность единого метрического описания режимов ходьбы была описана нами в первом сводном отчете [49], на основании этого была выдвинута

Гипотеза гомометричности. Целевые эталоны всех трех режимов — ИРХ, ИМХ и НХ — представляются метрически однотипными гиперболами, которые имеют одну и ту же метрическую матрицу и отличаются положениями центров и величинами диаметров.

Используемый в этой работе метод фиксированных событий дает явное и простое обоснование гипотезы гомометричности локомоторной хроногеометрии. Диаметр базальной гиперболы $\mathbf{H}(\mathbf{y}_c)$ определяется центром \mathbf{y}_c , и вектор $2\mathbf{y}_c$ можно считать главным диаметром. Поэтому для таких гипербол описание гомометрии упрощается, так как диаметр не является третьим независимым параметром.

2.6. Волновая синергия походок

Постоянство скорости *метахрональной волны* (МВ) как следствие придуманного Уилсоном постоянства ипсилатеральной задержки не соответствует локомоторным реалиям. А пропорциональность скорости МВ скорости локомоции как следствие постоянства ипсилатеральной фазировки и стробоскопической метафоры Маррея ближе к действительности, поскольку правило "след-в-след", присущее некоторым членистоногим, представляет частный случай такой пропорциональности.

2.6.1. Метахрональные волны многоножек. С точки зрения правил волновой координации особый интерес представляют шагательные движения многоножек. Рассмотрим сначала локомоцию типичной "сороконожки" *Scolopendra*: число ног $N = 40$, длина тела $H = 5 - 10$ см [26]. Общее свойство ипсилатеральной координации сколопендры выражает

Правило "след-в-след". Выбор новой точки наступания осуществляют передние ноги, а остальные ноги каждой стороны наступают в "след" предшествующей ноге.

При большом числе ног это правило шагания легко распознать на мгновенной фотографии: опорные ноги

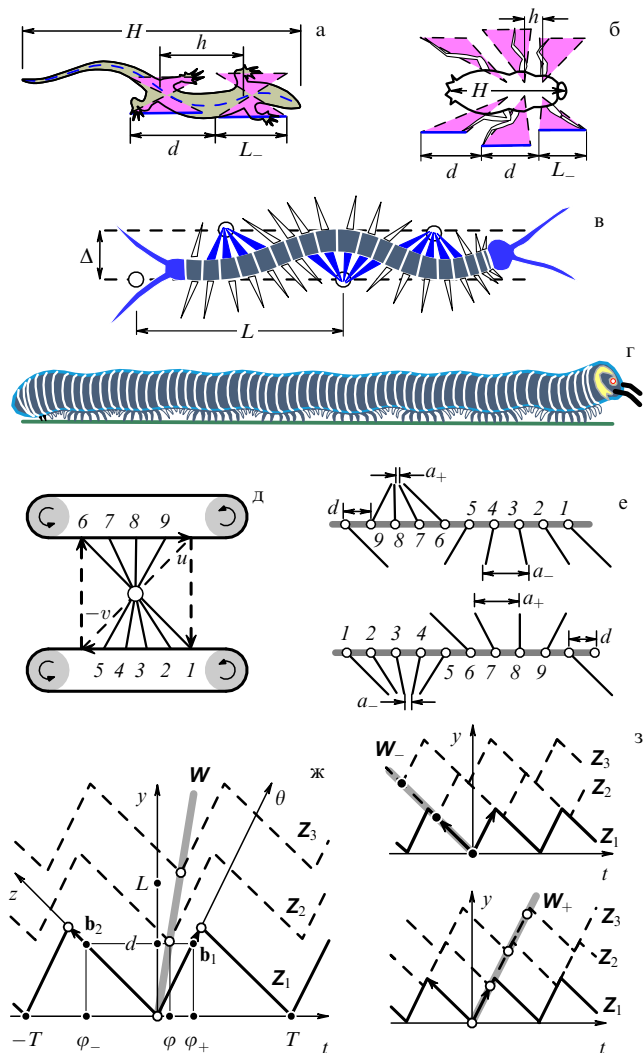


Рис. 7. Локомоторные позы ящерицы (а), таракана (б), сколопендры (в) и Юлуса (г) (у ящерицы и таракана выделены опорные треугольники ног, указаны расстояния между основаниями ног h и между основаниями треугольников d); (д) битредбанная схема локомоторного цикла; (е) прогрессивная и реверсивная пространственные развертки локомоторного цикла (представление в виде метакронального ряда); (ж) определение траекторной системы отсчета парой базисных векторов \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 для случая произвольной метакрональной волны \mathbf{W} ; (з) крайние варианты отрицательной \mathbf{W}_- и положительной \mathbf{W}_+ метакроний.

образуют пучки, сходящиеся к следовым точкам (рис. 7в). Аналитический критерий правила "след-в-след":

$$w = -v, \tag{2.63}$$

т.е. здесь скорость МВ w всегда равна по абсолютной величине скорости ходьбы v , но волна распространяется в направлении, обратном направлению локомоции (от головы к хвосту) — это *отрицательная* метакрония.

Замечание 2.9. В данном случае можно говорить о константности отношения скоростей волны и локомоции: $w/v = -1$. Отметим, что изгибная волна рыб тоже распространяется от головы к хвосту, и для плавания рыб тоже характерно постоянство отношения $w/v = k < 1$, которое следовало бы выражать отрицательной константой, но это не принято (см. [76]). У рыб константа k меньше единицы из-за проскальзывания

бегущей волны в воде. Значит, метакрония сколопендры — аналог рыбьей, но локомоция сколопендры реализуется без эффекта проскальзывания.

Другой вариант (рис. 7г) метакрональной координации демонстрирует многоножка *Julus* [56], которая имеет $N \geq 120$ пар ног (по две контралатеральные пары на сегмент). Малый положительный фазовый сдвиг делает волну переноса ипсилатеральных ног зрительно наглядной (контралатеральные пары ног шагают синфазно). По ипсилатеральному ряду ног от хвоста к голове одновременно бежит несколько волн, скорость и длина волны зависят от скорости локомоции.

На мгновенной фотографии идущей многоножки *Julus* (рис. 7г) переносные ноги образуют сходящиеся пучки — это конфигурационный признак положительной метакронии. Когда ноги в переносе сходятся в одну точку, получается своеобразный инвертированный вариант "следовой" ходьбы в фазе переноса [57]; этот вариант инвертированного правила "след-в-след" в переносе называется "мах-в-мах". Походка Юлуса близка к этому случаю, но все же не соответствует ему (см. ниже).

Кинематический критерий "мах-в-мах" аналогичен условию (2.63), только теперь

$$w = u \tag{2.64}$$

— скорость МВ положительна и равна скорости переноса ног.

Открытие двух фазово-сопряженных типов походок (2.63) и (2.64) инициировало разные кинематические интерпретации волновой координации и методов определения походок (см. [57–59]). Если случаи (2.63) и (2.64) рассматривать как граничные частные случаи межконечностной координации:

$$\text{"след-в-след": } w = -v, \quad \text{"мах-в-мах": } w = u, \tag{2.65}$$

то возникает следующая теоретическая

Задача 2.3. Требуется сконструировать такое определение походок, которое включало бы варианты (2.65) как частные случаи общего принципа.

Поиски решения этой задачи можно осуществлять на основе разных метафор походок. Ниже рассматриваются и сравниваются три способа — конфигурационный, следовой и релятивистский; последний формулируется как "принцип относительной метакронии".

2.6.2. Конфигурационная метафора. Характеризация походок многоножек формой пучков ног порождает новую метафору координации — "конфигурационную" [57, 58]. Частный случай конфигурации дает транзитная *метахронограмма* (МХГ) одной ноги (рис. 1а), в которой сочетается пространственная и временная развертка локомоторного цикла шагательного движения одной ноги. Но ту же самую транзитную МХГ мы можем интерпретировать чисто пространственным способом — как мгновенную фотографию коллективного шагания многих людей, образующих шеренгу. Тогда вполне уместен

Вопрос 2.4. Какую походку коллективного шагания имитирует транзитная МХГ?

Выше, используя преобразование Галилея, мы установили связь транзитной МХГ, получаемой в ДСО, с маятниковой МХГ, получаемой в ЛСО. Задачу постро-

ния произвольного метакронального ряда ("метаряда") можно решать похожим образом, но используя только пространственные преобразования маятниковой МХГ. Для простоты графических изображений мы ограничимся 1-звенной "телескопической" моделью ноги, а колебательные маятниковые движения такой ноги в ЛСО будем представлять в виде вращательного "колесного" движения.

Рассмотрим 2-точечную модель ноги, одна из которых — *базальная точка* (БТ), а другая — *дистальная точка* (ДТ). В ЛСО БТ неподвижна, а ДТ в фазе опоры движется назад со скоростью v вдоль прямолинейного отрезка опорного интервала длины L_- . Обычное маятниковое движение ноги получается, если полагать, что в фазе переноса ДТ движется вдоль того же отрезка (если пренебречь малым подъемом ДТ над грунтом), но движется вперед и со скоростью u . Для имитации вращательного движения ноги следует движение вперед в фазе переноса зеркально отобразить относительно базальной линии. Если при таком отображении отрезки опоры и переноса заменить движущимися в разные стороны лентами тредбанов (рис. 7д), то получается

Битредбанная метафора. В фазе опоры ДТ движется назад по ленте нижнего тредбана, а в фазе переноса ДТ движется вперед по ленте верхнего тредбана, мгновенно перескакивая в границах фаз с одной ленты на другую.

В этом случае нога в ЛСО вращается по часовой стрелке, а ДТ движется по прямоугольному контуру фаз. Битредбанная метафора наглядно демонстрирует кинематическую эквивалентность фаз опоры и переноса, которая существенна для конфигурационных и следовых критериев походок. Например, мы вправе далее говорить об обычных следах на нижней ленте и о сопряженных следах на верхней.

Чтобы правильно стробировать движение ДТ по контуру фаз, поделим период целевой траектории на временные интервалы

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

и перенесем пространственные координаты точек деления y_i , $i = 0, \dots, n$, на соответствующие отрезки фаз опоры и переноса. Согласно построению одинаковые расстояния между внутренними соседними ДТ разных фаз определяются следующим образом:

$$\Delta a_+ = u\Delta t, \quad \Delta a_- = v\Delta t.$$

Положим теперь временной интервал стробирования равным метакрональной задержке: $\Delta t = \varphi$. Для построения мгновенного образа метаряда выделим циклограмму индивидуального вращения ноги в ЛСО и распределим последовательные образы ноги циклограммы вдоль базальной прямой, смещая каждый образ ноги на расстояние d . Пусть образы ноги циклограммы пронумерованы по часовой стрелке. Тогда мы можем построить два типа метаряда, распределяя возрастающие номера поз либо от хвоста к голове (отрицательная метакрония; рис. 7е, верхний ряд), либо от головы к хвосту (вариант положительной метакронии; рис. 7е, нижний ряд). В каждом из двух случаев отрицательной (–) и положительной (+) метакроний расстояния между соседними ДТ в МХР описываются следую-

щими формулами:

$$a_- = d - \Delta a_- = \left(1 + \frac{v}{w}\right)d, \quad a_+ = d + \Delta a_+ = \left(1 - \frac{u}{w}\right)d \Leftrightarrow w < 0; \quad (-)$$

$$a_- = d + \Delta a_- = \left(1 + \frac{v}{w}\right)d, \quad a_+ = d - \Delta a_+ = \left(1 - \frac{u}{w}\right)d \Leftrightarrow w > 0; \quad (+)$$

которые с учетом знака скорости МВ можно заменить двумя формулами

$$\frac{a_-}{d} = 1 + \frac{v}{w}, \quad \frac{a_+}{d} = 1 - \frac{u}{w}. \quad (2.66)$$

Полагая в первой формуле $a_- = 0$, мы получаем (см. (2.67)) зависимость "след-в-след", а полагая во второй формуле $a_+ = 0$, — зависимость "мах-в-мах". Как на основе формул (2.66) получить обобщенное определение конфигурационных походок?

2.6.3. Конфигурационные походки. Если походки определять посредством конфигураций мгновенного распределения ног, то роль характеристических величин играют расстояния (2.66) между смежными ДТ в фазах опоры и переноса, которые зависят от расстояния d между смежными ЦТ. Но эта зависимость отсутствует в крайних вариантах походок из-за обращения в нуль соответствующих расстояний:

$$\text{"след-в-след": } a_- = 0, \quad \text{"мах-в-мах": } a_+ = 0. \quad (2.67)$$

По-видимому, и общее определение конфигурационной походки не должно зависеть явно от расстояния d , что следует из метафоры "прореживания".

Пусть исходно и метакрональная задержка φ , и расстояние d достаточно малы. Тогда получится достаточно плотный метаряд, содержащий большое число смежных ног в каждой из фаз опоры и переноса. Произведем с исходным метарядом операцию "прореживания", например, удалим все ноги "через одну" — все ноги с четными (или нечетными) номерами при их исходной натуральной нумерации. При этом все величины a_- , a_+ , d и φ увеличатся вдвое, но не изменятся скорость МВ, а также отношения a_-/d и a_+/d в формулах (2.66). Аналогичное заключение верно и для других вариантов "прореживания" метаряда, включая неоднородные случаи.

Обратный переход от "прореженного" метаряда к "непрореженному" метаряду можно определить как обратную операцию "вставки" промежуточных ног.

Объясним все метаряды, полученные на основе некоторого метаряда посредством операций прореживания и/или вставки, конфигурационно *эквивалентными*. Тогда конфигурационную походку можно определять условием постоянства одного из отношений a_-/d или a_+/d в формулах (2.66). Походки (2.67) — частные случаи такого определения.

Замечание 2.10. В модели Маррея (2.24) имеем $w = kv$, поэтому здесь постоянно первое отношение (2.66) для опорных следов: $a_-/d = 1 + 1/k = \text{const}$. В модели Уилсона, согласно (2.28), постоянно второе отношение (2.66) для сопряженных следов: $a_+/d = \text{const}$. Значит, обе модели (Маррея и Уилсона) удовлетворяют критериям конфигурационных походок.

Другой вариант определения конфигурационной походки — это когда вместо одного из двух условий (2.66) используется один общий критерий

$$Co \equiv \frac{a_-}{a_+} = \frac{w+v}{w-u}. \quad (2.68)$$

При таком подходе произвольная конфигурационная походка определяется условием константности данного критерия: $Co = \text{const}$. Походки (2.67) теперь являются частными случаями одного критерия:

$$\text{"след-в-след"}: Co = 0, \quad \text{"мах-в-мах"}: Co = \infty. \quad (2.69)$$

Геометрический смысл конфигурационного критерия (2.68) выясняется ниже. Более подробно конфигурационный подход рассмотрен в работах [57, 58].

2.6.4. Следовые походки. Если отвлечься от форм пучков, которые ноги "многоножки" формируют в фазах опоры и переноса, и ограничиться сравнениями рядов следов, которые они оставляют на нижней и верхней лентах двойного тредбана (рис. 7д), то следует расстояния между смежными следами сравнивать не с базальными расстояниями d , а с длинами шагов, учитывая, что эти длины различны для разных лент. Действительно, для нижней опорной ленты имеем обычное определение

$$L \equiv L^- \equiv vT,$$

а для верхней — сопряженное определение

$$L^+ \equiv uT.$$

С учетом этих коррекций метод определения походок по следам аналогичен конфигурационному, но здесь используется нормировка к длине шага, т.е. для следовых походок характеристическими величинами являются следующие простые отношения:

$$\frac{a_-}{L^-} \equiv \frac{a_-}{vT}, \quad \frac{a_+}{L^+} \equiv \frac{a_+}{uT},$$

а следовым критерием походки служит двойное отношение (см. [58])

$$Tr \equiv \frac{a_-/L^-}{a_+/L^+} = \frac{(w+v)/(w-u)}{v/u}. \quad (2.70)$$

На первый взгляд следовой критерий Tr не принципиально отличается от конфигурационного Co , но с его появлением утверждается новая идея возможности и, видимо, целесообразности свойства проективной инвариантности критериев походок. Действительно, нетрудно в двойном отношении разглядеть структуру вурфа. Чтобы эта структура проявилась более явно, введем дополнительную константную скорость c_0 и получим новый проективный критерий

$$Pr \equiv \frac{(v+c_0)/(v+w)}{(u-c_0)/(u-w)} = Pr(c_0). \quad (2.71)$$

Теперь мы можем фиксировать разные величины константы c_0 и тем самым выбирать разные предыдущие критерии:

$$Pr(0) = Tr, \quad Pr(\infty) = Co.$$

Итак, метафоры конфигурационных и следовых походок допускают обобщенную проективную интерпретацию, которая, по аналогии с частными вариантами, позволяет ввести обобщенное понятие проективной походки по критерию $Pr = \text{const}$.

2.6.5. Общая метахрональная схема. В общем случае, если локомоция $2n$ -пода стационарна и координационно однородна, то *локомоторный цикл* (ЛЦ) служит базисным мотивом трансляционного задания *целевой траектории* (ЦТ), а ЦТ служит базисным мотивом трансляционного задания *локомоторной системы*, иначе говоря, пространственно-временного "кристалла" локомоторной кинематики всех ног.

Согласно определению МВ (2.31) $\mathbf{w} \equiv (\varphi, d)'$ — вектор трансляции ЦТ одного ипсилатерального ряда ног, при этом начальные события ЦТ выстраиваются вдоль прямой линии \mathbf{W} , которая является формальным графическим образом МВ.

Если фиксировать параметры ЦТ и пространственный сдвиг d , то возможная изменчивость метахрональной задержки φ оказывается ограниченной значениями φ_- и φ_+ (рис. 7ж). ЦТ не пересекаются и невозможны столкновения смежных конечностей, когда $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$ — временной интервал кинематической безопасности.

Замечание 2.11. Факт существования "перекрывающихся" следов — явное свидетельство актуальности проблемы столкновения задних и передних ног тетрапод, которая решается структурным образом: колея задних ног у тетрапод шире колеи передних. У гексапод колеи разных сегментарных пар ног тоже имеют разную ширину (рис. 7а, б). Но у многоножек, в частности, у сколопендры [26] и Юлуса [56], колеи всех сегментарных пар ног имеют одинаковую ширину (рис. 7в). Видимо, поэтому у многоножек проблема предотвращения столкновения смежных ног решается кинематическими средствами.

Так как синфазным ЦТ соответствует нулевая задержка $\varphi = 0$ и бесконечная скорость МВ $w = \infty$, при использовании скоростных критериев походок вида (2.71) необходимо выделять два типа МВ — положительные и отрицательные, определяемые двумя скоростными интервалами кинематической безопасности:

$$\mathbf{W}_-: w \in (-\infty, -v), \quad \mathbf{W}_+: w \in [u, \infty). \quad (2.72)$$

В графическом пространственно-временном представлении правило "след-в-след" (2.65) выражается в том, что опорные участки ЦТ одного волнового множества инцидентны одной и той же опорной следовой прямой \mathbf{W}_- (рис. 7з), которая имеет в ЛСО отрицательный наклон $-v$, иначе говоря, в этом случае ЦТ "склеиваются" в пространстве-времени по опорным участкам, пока смежные ноги стоят в одной следовой точке.

Графический признак правила "мах-в-мах" описывается аналогичным образом: отрезки фаз переноса ЦТ смежных ног инцидентны одной пространственно-временной прямой \mathbf{W}_+ (рис. 7з), т.е. ЦТ "склеиваются" в пространстве-времени по участкам фаз переноса.

2.6.6. Принцип относительной метахронии. Рассмотрим ЦТ одного n -подного ряда, нумеруя индивидуальные ЦТ \mathbf{Z}_j от хвоста к голове, $j = 1, \dots, n$. Как видно (рис. 7ж), с первой ЦТ \mathbf{Z}_1 ассоциируется сетка следовых

линий, с которой можно связать *траекторную систему отсчета* (ТСО). На рисунке 7ж базисные векторы ТСО для наглядности изображены как сегменты ЦТ:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (-T_-, L_-)' = -T_-(1, -v)', \\ \mathbf{b}_2 &= (T_+, L_+)' = L_+(u^{-1}, 1)', \end{aligned} \quad (2.73)$$

но способ полного определения **В**-базиса еще предстоит определить (см. ниже).

Относительно ТСО походки (2.65) характеризуются следующим каноническим образом: МВ совпадает либо с одной осью ТСО, либо с другой осью. Обобщением этих крайних случаев служит свойство "жесткой" связи МВ с осями ТСО, что выражает

Принцип относительной метахронии (ПОМ). Относительно ТСО скорость МВ постоянна, т.е. релятивистским походкам отвечает такой закон изменчивости скорости МВ от скорости локомоции, при котором траектория МВ имеет постоянный наклон в ТСО.

Пусть в ЛСО выделено некоторое событие \mathbf{y} , инцидентное МВ, и пусть \mathbf{z} — эквивалентное событие в ТСО:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Bz} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \tau(1, w)', \quad \mathbf{z} = \theta(1, \omega)'.$$

Наклоны базисных осей задаются посредством ЦТ, $v_1 = -v$, $v_2 = u$, а масштабные параметры **В**-базиса будем считать произвольными:

$$\mathbf{B} \equiv (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\tau_b(1, -v)', \gamma_b(u^{-1}, 1)'). \quad (2.74)$$

Введем масштабную (калибровочную) скорость $v_b \equiv \gamma_b/\tau_b$ и формулы прямого и обратного *дробно-линейных преобразований* (ДЛП) значений скоростей МВ, которые непосредственно следуют из линейного преобразования (2.74):

$$w = \frac{\omega v_b + v}{1 + \omega v_b/u} \Leftrightarrow \omega = \frac{v_b^{-1}(w + v)}{1 - w/u}.$$

Сравнивая второе выражение с (2.71), мы видим, что ПОМ-константа ω может играть роль Pг-критерия, если калибровочная скорость

$$v_b = \frac{v + c_0}{1 - c_0/u}.$$

Следовательно, ПОМ совместим с предыдущими конфигурационными и следовыми определениями походки, чего и следовало ожидать.

Итак, теоретический анализ разных версий унифицированного объяснения факта существования фазово-сопряженных походок (2.65), позволяет заключить:

разнообразие локомоторных координаций подчиняется общему принципу проективного соответствия трех скоростей $\{v, u, w\}$ — скорости локомоции, скорости переноса и скорости метахронии.

Аналитической формулой такого вывода может служить двойное отношение (2.71), т.е. проективный инвариант (вурф) следующего общего вида:

$$PI: \mathbf{w}(-v, u; w, c_0) = s_0. \quad (2.75)$$

Весь предыдущий концептуальный экскурс был ориентирован на удовлетворение граничных функцио-

нальных условий (2.65), которые накладывают ограничения на формы функциональных зависимостей. В смысле введенных выше критериев каждый индивид всегда реализует одну и ту же походку. Если использовать в качестве определяющей формулу (2.75), походка идентифицируется двумя константами — s_0 и c_0 .

2.6.7. Проблема трех вурфов. Вурф (2.75), несомненно, замечателен тем, что связывает априори независимые сущности локомоторного управления — свойства *локомоторного цикла* (ЛЦ) и свойства *метахрональной волны* (МВ).

Если в обобщенной формуле (2.75) фиксировать скорость МВ, $w = \text{const} = w_0$, то, вводя новые обозначения констант, получим проективную связь скоростей v и u , т.е. описанный выше (см. (2.61)) *структурный инвариант*

$$SI: \mathbf{w}(-v, u, c_1, c_2) = q_0. \quad (2.76)$$

Альтернативная фиксация в формуле (2.75) скорости переноса, $u = \text{const} = u_0$, позволяет получить совместимый с общим условием (2.75) *волновой инвариант*

$$WI: \mathbf{w}(-v, w, c_1, c_2) = p_0. \quad (2.77)$$

Остается теперь понять следующее: инварианты *SI* и *WI* могут существовать независимо от исходных допущений константности либо метахрональной скорости w , либо скорости переноса u , поскольку инварианты *SI* и *WI* совместимы с проективным условием *PI*. Мы можем исходно постулировать инварианты *SI* и *WI*; тогда условие (2.75) можно считать следствием этих постулатов, выражая константы в (2.75) через константы условий (2.76) и (2.77):

$$c_0 = c_2, \quad s_0 = \frac{q_0(p_0 - 1)}{p_0 - q_0}.$$

Следовательно, ПОМ эквивалентен *WI*, но позволяет уточнить определение константы вурфа p_0 , если известны константы s_1 , s_2 и ω .

2.6.8. Волновые походки членистоногих. Так как первыми объектами наших локомоторных исследований были многоножки Юлус [56] и сколопендра [26], мы вынуждены были отойти от традиционных методов, разработанных преимущественно для тетрапод, и использовать волновой способ определения походок — на основе вида зависимости $w(v)$. Прежде чем продемонстрировать эффективность волнового метода и для описания походок тетрапод, рассмотрим походки многоножки Юлус и таракана.

Близость конфигурационных свойств метахронального ряда ног Юлуса к походке "мах-в-мах" легко видеть наглядно благодаря малому расстоянию d между смежными ипсилательными ногами и малой метахрональной задержке φ (рис. 7г). Поэтому как наблюдения, так и измерения свойств движения МВ существенно упрощаются. Например, при покадровом анализе локомоции Юлуса можно отмечать границы зон переноса ног и таким графическим способом реконструировать пространственно-временные треки движения фазовых зон, а затем явным способом определять

скорости движения МВ. Именно на основе таких зарисовок определялась в работе [56] связь скорости МВ w со скоростью локомоции v . Если дополнительно ввести понятие длины волны $\lambda_w \equiv wT$, а также понятия фазовых компонент длины волны, т.е. величины $\lambda_{\pm} \equiv wT_{\pm}$, то эти величины можно приближенно оценивать по мгновенным фотографиям, подсчитывая число ног в зонах переноса и опоры. Понятно, что для походки "след-след" длина волны совпадает с длиной шага, а компоненты длины волны — с компонентами длины шага:

$$\lambda_w = L \equiv L^-, \quad \lambda_{\pm} \equiv L_{\pm}.$$

А для походки "мах-в-мах" имеют место сопряженные равенства, при этом

$$\lambda_+ \equiv uT_+ = L_-.$$

В работах [26, 56] мы пользовались визуальными оценками компонент длин волн для коррекции покадровых временных измерений длительностей фаз шага.

На рисунке 8а, б приведены базовые синергии многоножки Юлус. Как видно, синергия цикла $L(T)$, синергия структуры цикла $L_-(T_+)$, а также скоростная характеристика $u(v)$ подобны рассмотренным выше аналогам для ходьбы человека. Параметры аппроксимаций зависимости $L(T)$ и $u(v)$ для Юлуса даны в табл. 3 и табл. 6 соответственно. Дополнительное отличие от "синергийного портрета" локомоции человека — в появлении волновой характеристики $w(v)$. При этом волновая функция $w(v)$ не совпадает со скоростной функцией $u(v)$, как это требуется для походки "мах-в-мах", так как

скорость МВ всегда примерно в полтора раза больше скорости переноса: $w(v) \approx 1,5u(v)$.

З а м е ч а н и е 2.12. Отдельно были исследованы локомоторные движения декапетированных препаратов Юлуса (после перерезок коннектив надглоточных ганглиев) [29]. В этих экспериментах локомоторные движения функционально иммобилизованного препарата формировались либо посредством электрической стимуляции ганглиев брюшной цепочки, либо посредством механической стимуляции, когда ноги смещались движущейся лентой тредбана. Таким образом, показано, что вызванная локомоция Юлуса имеет кинематические синергии, подобные нормальной локомоции.

Обратимся теперь к синергийному портрету бега таракана (рис. 8в, г), который построен преимущественно по экспериментальным данным Делькомина [75]. Как видно, наша теория вполне удовлетворительно описывает и эти данные (параметры соответствующих аппроксимаций см. в табл. 3 и табл. 6). Самостоятельный интерес здесь представляет свойство метахрональной координации. Делькомин критикует модель Уилсона постоянства метахрональной задержки (см. (2.28)) и убедительно показывает монотонное уменьшение этой задержки с ростом скорости локомоции. Чтобы имеющаяся в работе [75] информация о метахрональной задержке преобразовать в информацию о скорости МВ $w \equiv d/\varphi$, необходимо еще знать расстояние d между опорными интервалами (рис. 7а).

Наши оценочные кинорегистрации бега таракана *Periplaneta americana* позволили, с одной стороны, доопределить величину $d \approx 2,5$ см, а с другой — убедиться в близости наших кинематических оценок (задержки φ и длительностей фаз шагов) с данными Делькомина при малых и средних скоростях локомоции. При сравнении полученных графиков $u(v)$ и $w(v)$ выяснилось (рис. 8г), что $w(v) \approx u(v)$. Следовательно, во всем диапазоне скоростей у таракана реализуется волновая походка "мах-в-мах".

2.6.9. Эстафетные походки тетрапод. Волновая метафора не требует, вообще говоря, наличия большого числа ног ипсилатерального ряда. При соблюдении принципа кинематической однородности свойства волновой координации определяются одинаковым образом для любой пары смежных ипсилатеральных ног. Такой подход позволяет парные ипсилатеральные ряды тетрапод рассматривать как минимальные фрагменты общей волновой схемы.

С тех пор как в конце XIX века Мейбридж опубликовал фотоальбом последовательных локомоторных поз человека и животных [85], многие авторы сравнительных обзоров и исследований стали использовать наглядный способ иллюстрации локомоторных движений, создавая серии контурных рисунков либо на основе альбома Мейбриджа, либо на основе собственных кинорегистраций (см. [15, 61, 76]). Неудобство и громоздкость "метода картинок" для классификации походок понимал еще сам Мейбридж и для компенсации этих недостатков ввел метод опорных планов (см. выше раздел 2.3.4). Реконструкция свойств межконечностной координации с помощью графиков ЦТ тоже связана с покадровыми прорисовками, но не всего контура объекта, а только горизонтальных положений дистальных концов ног. Для выделенного фрагмента кинорегистрации строится гео-

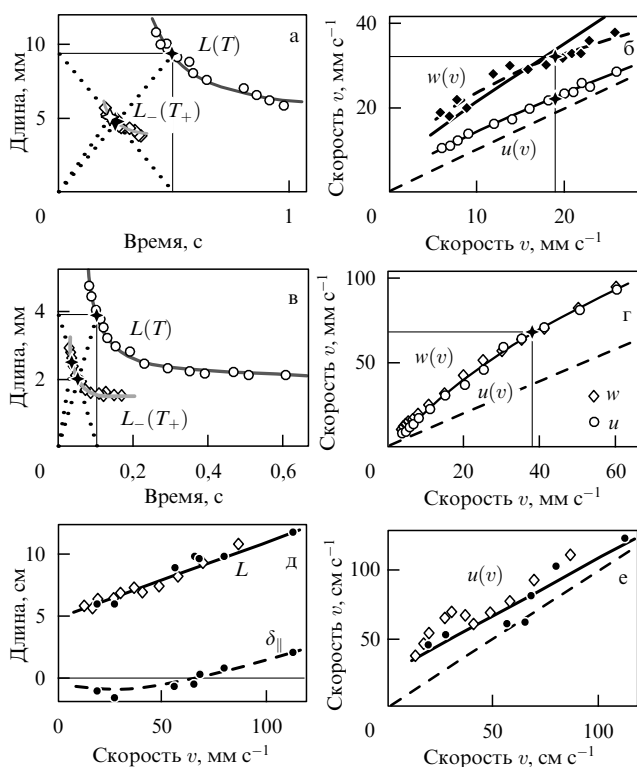


Рис. 8. Примеры базисных кинематических функций многоножки *Julus* (а, б), таракана *Periplaneta americana* (в, г) и сцинкового геккона *Teratoscincus scincus* (д, е).

хронограмма (ГХГ) в виде вертикального набора горизонтальных прямых, где каждая прямая представляет пространственную горизонтальную ось ДСО, вдоль которой точками отмечаются горизонтальные координаты дистальных концов ног. Прямые осей располагаются снизу вверх в порядке возрастания номеров кадров и со сдвигом по вертикали на величину межкадрового интервала Δt . После прорисовки фрагмента кинорегистрации отдельная нога на ГХГ представляется множеством точек с координатами $x_i(j\Delta t)$, где i — номер ноги, а j — номер кадра. Понятно, что ГХГ дают дискретные образы ЦТ ног, поэтому участки фаз опоры аппроксимируются вертикальными отрезками прямых, а участки фаз переноса — наклонными отрезками.

Для исследованной нами степной черепахи ($H = 17$ см, $d = 13$ см) удалось получить регистрации в широком диапазоне скоростей. Благодаря покадровым прорисовкам выяснилось, что походка черепахи при противофазности шагов контралатеральных ног является эстафетной (рис. 9а) — передняя нога начинает перенос примерно с того места, где останавливается задняя, и сразу после остановки задней ноги.

Понятно, что новый термин "эстафетная походка" — частный "тетраподный" вариант походки "мах-в-мах", поскольку для эстафеты существенно равенство $w = u$.

Наши кинорегистрации ходьбы лесной (подмосковной) ящерицы ($H = 9$ см, $d = 2,9$ см) немногочисленны. Два примера ипсилатеральных ЦТ для двух скоростей локомоции приведены на рис. 9б, из которых видно, что походка ящерицы, как и у черепахи, является эстафетной (для ног двух сторон тоже характерна противофазность).

Аналогичным образом, используя контурные рисунки из книги П.П. Гамбаряна, мы построили ГХГ для рыси лошади (рис. 9в). Тенденция к эстафетной координации здесь тоже наблюдается отчетливо.

Что касается собаки, то из приведенных в работе [7] опорных диаграмм (для скоростей 0,83 и 2,22 м с⁻¹) видно, что для описания походки и здесь более целесообразна эстафетная версия. В наших исследованиях [5] проводилось сравнение кинематик ходьбы нормальных собак до и после разрушения ядер мозжечка, которые показали, что такая операция не изменяет эстафетный принцип организации походки.

В заключение остановимся на данных В.Б. Суханова [61] по локомоции рептилий и покажем, что гипотеза эстафетной организации походок позволяет согласовать два типа независимых данных, полученных методом следовых дорожек и методом хронограмм. Для примера мы использовали данные, относящиеся к геккону (общая длина этого геккона $H = 12,5$ см, гленоацетобулярное расстояние $h = 4,2$ см), и построили графики (рис. 8д) зависимостей $\delta(v)$ и $L(v)$. Как видно из графиков, длина шага увеличивается с ростом скорости линейно, а смещение следов $\delta(v)$ от неокрытия до перекрытия примерно монотонно возрастает в окрестности нуля. Далее, выбирая данные для гекконов примерно одинаковых размеров, мы можем построить общую синергию цикла. Затем, усредняя имеющиеся для разных ног величины структуры цикла γ (Суханов обратную величину $1/\gamma$ называет "ритмом работы конечности"), мы можем для точек, участвующих в графике синергии цикла, вычислить скорости переноса $u = v/\gamma$, чтобы в последующих описаниях использовать линейную аппроксимацию: $u = 34,5 + 0,83v$ (рис. 8е).

Однако для оценки скорости МВ данные отсутствуют. Для характеристики походок Суханов вместо метахрональной задержки ϕ использует величину длительности диагональной опоры $\phi_d \equiv T_{2D}$. К сожалению, связь ϕ_d с ϕ не является взаимно однозначной, и поэтому величина ϕ_d является малополезной.

Другой теоретический путь решения обратной задачи реконструкции походки — в проверке гипотезы эстафеты: $w(v) = u(v)$. Тогда, вычисляя сначала $\phi = d/u$, мы можем для смещения ипсилатеральных следов получить зависимость

$$\delta = L - d - \phi v = L - \left(1 + \frac{v}{u}\right)d,$$

которая вполне удовлетворительно (рис. 8д) аппроксимирует экспериментальные точки.

Наконец, в книге Суханова имеются покадровые зарисовки контуров локомоторных поз геккона, строя по которым геохронограммы (рис. 9г) можно убедиться в справедливости эстафетной гипотезы.

2.7. Система локомоторных синергий

Прежде чем составлять резюме предыдущего экспериментального и теоретического изложения, кратко обсудим общие методологические вопросы.

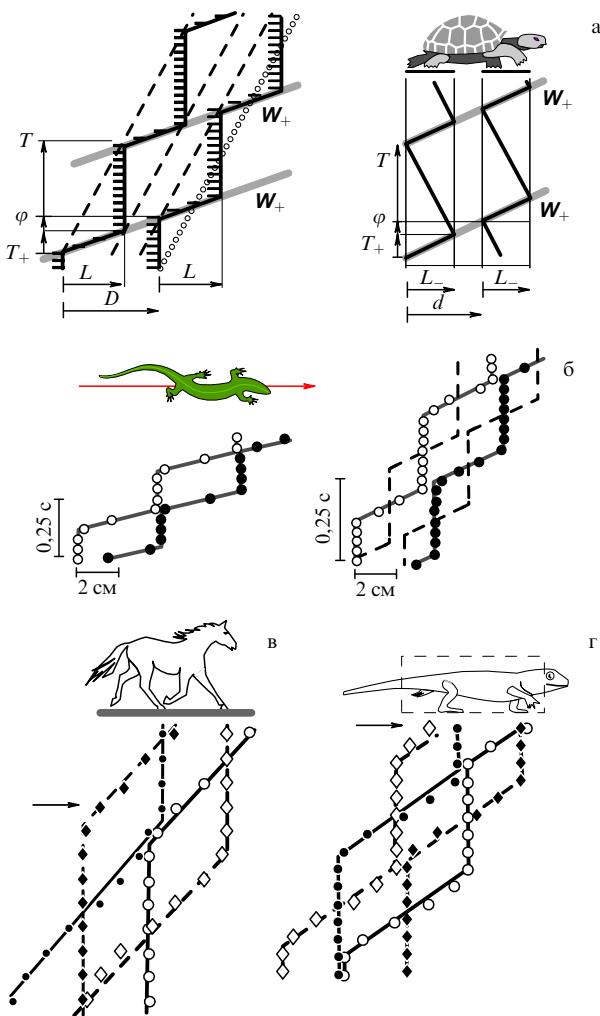


Рис. 9. Геохронограммы эстафетных походок черепахи (а), ящерицы (б), лошади (в) и геккона (г).

2.7.1. Локомоторные парадигмы. В начале этого раздела мы говорили о необходимости завершения программы Марей, которая исходно была ориентирована на выявление законов локомоции и которая с учетом стробоскопической метафоры была завершена еще самим Мареем (см. раздел 2.3.3). Только вот метафора, как это нам теперь понятно, была неадекватная, а поиск адекватной метафоры — это особая методологическая проблема, возможности решения которой обусловлены принятой научной парадигмой. Выше мы рассмотрели разные локомоторные метафоры, сравнивая разные способы определения походок. Теперь сравним разные способы определения законов локомоции.

"Мы называем законом определение числового отношения между различными явлениями. В этом смысле вполне совершенных физиологических законов пока еще существовать не может... и вмешательство математиков преждевременно, пока изучение природы и опыт не доставили точных данных, которые сами по себе могут служить отправной точкой для вычислений. Числовые отношения между жизненными явлениями существуют несомненно, и могут быть вскрыты раньше или позже, смотря по точности методов, которые будут приняты для исследования" [37].

Как видно, Марей связывал возможности экспериментального вскрытия биомеханических законов только с точностью измерительных методов. Такая позиция, несомненно, верна, но не полна, поскольку еще нужно знать, зачем, что и как измерять. Собственно с ответов на эти вопросы и начинается экспериментальное научное творчество, направляемое проблемным вопросом "зачем?", организуемое модельным вопросом "что?" и завершающееся методическими вопросами "как?".

Марей начинал свои экспериментальные исследования с проблемы классификации аллюров (это "зачем?") и свел эту проблему к задаче описания фазировок шагов разных ног, для решения которой необходимо измерять моменты времени наступания ног во время локомоторных движений, отвечающих разным аллюрам (это "что?"). Экспериментальный гений Маррея проявился в разработках подографических и других методик регистрации шагательных движений, т.е. в ответах на вопросы "как?". В рамках классификационной метафоры аллюров Маррей вполне успешно справился с поставленной проблемой и создал "синтетическую модель", которая описана выше (см. раздел 2.3.3), но "проблема законов" локомоторных движений осталась не решенной. Вернее, эта проблема осталась даже не поставленной, так как не были указаны возможные ответы на основной вопрос "зачем?".

Мог ли Марей дать такие ответы? Несомненно, в рамках стробоскопической метафоры — нет, поскольку эта метафора элиминировала проблему "законотворческой" деятельности "животных организмов". Потребовалось почти 100-летнее развитие биомеханики, прежде чем такая возможность появилась, и для этого потребовалась смена парадигм. Основополагающий вклад в развитие новой биомеханической парадигмы под эгидой "физиологии активности" внес Н.А. Бернштейн [10], который разработал концепцию иерархии уровней управления двигательными актами и выделил особый уровень формирования двигательных стереотипов, назвав управление этого уровня "синергией".

Как известно, парадигмальное мышление — это концептуальное мышление, ассоциированное с некоторым базовым множеством семантических референтов, на основе которых строится модель и теория явления. Поэтому смена парадигм неизбежно выражается в смене базовых понятий. Новым референтом физиологии активности стало понятие синергии. Это понятие оказалось сущностным и весьма продуктивным, ибо на его основе в последние годы формируется самостоятельное научное направление — синергетика, определяемая общенно как наука о кооперативных явлениях многокомпонентных систем.

Отметим, что смена метафор или аналогична смене парадигм, или является частным случаем такой смены, поскольку под метафорой мы понимаем вполне конкретный модельный образ исследуемого явления. Когда референтные понятия сохраняются, но меняется модель их связи или отношений, по-видимому, более правильно говорить о смене метафор. Например, кинематические понятия локомоторных движений заимствованы из механики и вряд ли могут измениться, но семантическая модель их системной организации изменяться может.

Трактовка задач управления локомоторными движениями как задач синергетических построений, предназначенных для преодоления избыточных свобод двигательных органов, а также двигательных актов, привела нас к сравнительным исследованиям режимов локомоции человека [27]. Наш вопрос "зачем?" был направлен на выяснение разнообразия локомоторных синергий, а вытекающий отсюда вопрос "что?" был направлен на выявление пространственных и временных характеристик локомоторных циклов, т.е. межпараметрических связей, формируемых мозгом в виде синергий. Особого вопроса "как?" для нас не было, поскольку мы пользовались известными методиками (кроме обеспечения специального контроля стационарности локомоции испытуемых). Наши первые серии экспериментов (см. [27]) во многом были похожи на мареевские, только вместо пневмодатчиков использовались электрические — для большей точности регистрации границ фаз шага. В сущности, мы пользовались старым мареевским методом, но решали новые, а именно синергетические задачи. Изменение метафоры кинематических экспериментов было обусловлено новым пониманием природы законов локомоторных движений.

2.7.2. Соответствие: синергия → инвариант. Интересно, что мареевское определение закона аналогично определению синергии. Действительно, в этом определении (см. предыдущую цитату) термин "числовое отношение" можно понимать как постоянное ("константное") отношение, а "различные явления" — как независимые и заданные посредством количественной информации, т.е. некоторым множеством величин. Так как число независимых величин, определяющих явление, суть число степеней свободы явления, всякое постоянное отношение выступает в роли постоянной связи, которая уменьшает число независимых величин — редуцирует число свобод системной организации явления. С учетом таких семантических модернизаций допустимо следующее

Определение 2.7. *Законом системной организации* (явления, объекта, движения и др.) называется постоянная связь между независимыми характеристическими

величинами, которая редуцирует свободы изменчивости системы.

В общем случае конкретные формы законов зависят еще от того, с какой собственно системой (структурой, функцией или управлением [55]) мы имеем дело.

Выше мы имели возможность рассмотреть свойства изменчивости форм траекторий суставов ног в ДСО и ЛСО (рис. 1а,б), например, при изменении скорости локомоции, и тем самым выявить синергии форм этих траекторий. Однако мы предпочли пройти мимо этой емкой темы, чтобы сосредоточиться на синергиях другого типа, имеющих непосредственное отношение к кинематическому управлению шагательными движениями, т.е. к кинематическим законам локомоции.

Дополнительное отличие нашей локомоторной программы состоит в том, что задача экспериментальных исследований синергий поставлена как

Задача "открой закон". На основе сравнений локомоторных режимов требуется выявить инвариантные функциональные связи между независимыми характеристиками локомоторных циклов.

Требование инвариантности здесь означает неизменность связи кинематических характеристик, во-первых, относительно естественной изменчивости локомоторных движений, обусловленной, в частности, изменением скорости локомоции v , во-вторых, относительно "режимной" изменчивости при вариациях режимных фиксаций и вариантов фиксируемых величин. Именно таким искусственным приемом удалось разобщить две синергии — синергию цикла и синергию структуры цикла.

Каждая такая синергия является элементарной — редуцирует одну параметрическую степень свободы целевой траектории. Такая математическая спецификация синергий и позволяет их интерпретировать как инварианты локомоторного разнообразия форм целевых траекторий и считать законами локомоторного цикла.

2.7.3. Проблема базовых синергий. В формировании целостных движений многозвенных конечностей участвует много синергий, так сказать, разных уровней управления. Поэтому существует проблема поиска критериев разобщения уровней синергетического управления. Необходимо, видимо, различать и классифицировать синергии по числу формируемых ими связей независимых переменных или параметров, т.е. по числу редуцируемых свобод изменчивости движения, и особо выделять элементарные синергии, которые редуцируют только одну степень свободы.

Выделяя базовые характеристики (см. раздел 2.2.6), мы руководствуемся в большей мере математическими критериями, но было бы более правильно в наших обоснованиях опираться на следующее

Определение 2.8. *Базовыми синергиями* называются функциональные связи между независимыми параметрами двигательного акта, которые формирует управляющая система, т.е. мозг, с целью обеспечения возможности целенаправленного управления — стратегического, тактического и оперативного.

Поэтому последующие поиски базовых синергий требовали дополнительных семантических обоснований в виде понятий "целевых и референтных событий",

"конфигурационных походов", "принципа относительной метахронии".

С нашей точки зрения, знать биомеханические законы локомоции животных и человека необходимо, чтобы знать те математические задачи, которые решает мозг, формируя двигательные синергии. Поэтому, хотя этап идентификации биомеханических законов и является по существу только промежуточным этапом физиологии двигательной активности, вместе с тем это — весьма ответственный этап, определяющий последующую направленность поиска адекватных нейрофизиологических моделей.

2.7.4. Новый метод — новая система. Теоретическим доказательством кинематического подобия шагательной локомоции всех ходоков — беспозвоночных и позвоночных — служит показанная выше интерорганизменная общность аналитического представления двух синергий — СЦ и ССЦ, которые можно интерпретировать геометрически как *систему локомоторных инвариантов* (СЛИ). Концепция СЛИ, развитая в данной работе, отличается от предыдущей нашей версии (см. [27, 28, 30, 49, 59]) большей математической общностью.

Впервые интеррежимное свойство скоростной характеристики $u(v)$ было выявлено нами в работе [27]. Это эмпирическое обстоятельство послужило основанием объявить характеристику $u(v)$ *общим инвариантом* (GI) всех трех кинематических режимов ходьбы. В таком математическом контексте одно из дополнительных условий, например, условие постоянства периода $T = \text{const}$ или постоянства длины шага $L = \text{const}$, естественно было назвать *частным инвариантом* (CI) соответственно ИРХ или ИМХ. Методологическая целесообразность введения "двухинвариантной" системы определения режимов ходьбы состояла прежде всего в том, что при формальном системном подходе "по аналогии" возникла проблема спецификации априорно неизвестного частного инварианта НХ.

Однако аналогия тогда виделась не только в содержательной части (в необходимости выделения "режимного инварианта"), но и в части соблюдения формы (в необходимости поиска величины, обладающей свойством "константности", специфическим именно для режима НХ). Первоначально величина, обладающая такими свойствами, была выявлена эмпирически. Оказалось, что величина произведения длительности переноса на длину шага, т.е. величина $P_+ \equiv T_+L$, сохраняет примерно постоянное значение во всем скоростном диапазоне ходьбы человека. Поэтому первая "продуктивная" модель СЛИ ходьбы человека (см. [27, 28]) формально определялась как

$$\text{СЛИ: } \{GI, CI\} \Leftarrow GI = \{u(v)\},$$

$$CI = \{P_+ = \text{const}, T = \text{const}, L = \text{const}\},$$

т.е. здесь GI имеет монофункциональное представление, а CI имеет полифункциональные режимные альтернативы, так сказать, переключательного типа: блок тактического управления способен переключаться на исполнение разных (в данном случае трех) режимных функций. Присутствие в этом блоке спецфункции НХ $P_+ = \text{const}$ неизбежно вело к функциональной дискретизации режимной исполнительной власти над локомоциями человека.

Использованный в этой работе метод фиксированных сумм представляется более адекватным задачам локомоторного управления, так как дает унифицированный вариант спецификации CI — на основе описанной выше конструкции *синергии цикла* (СЦ). Новая модель СЛИ, в которой роли двух инвариантов GI и CI играют две синергии СЦ и ССЦ, дает формальное определение новой модели

$$\text{СЛИ: } \{GI, CI\} = \{L(T), u(v)\}.$$

Эта система не является в общем случае полной, потому что не учитывает свойств межконечностной координации, но она является достаточной для бипод, когда постоянные свойства контралатеральных фазировок учитываются "по умолчанию". При числе ног $N \geq 4$ необходимо специально выделять и определять свойства ипсилатеральных фазировок локомоторных циклов. Поэтому полная версия СЛИ при неявном условии постоянства и однородности контралатеральных фазировок включает три инварианта:

$$\text{СЛИ: } \{CI, GI, WI\} = \{L(T), u(v), w(v)\}, \quad (2.78)$$

где WI — волновой инвариант.

Перепишем определяющие условия моделей (2.24) и (2.28) в виде формулы (2.78):

$$\text{СЛИ}_{\text{ММ}}: \left\{ L = \text{const}, u = \frac{v}{\gamma}, w = kv \right\};$$

$$\text{СЛИ}_{\text{МУ}}: \left\{ \frac{T_+}{T} + \frac{L_-}{L} = 1, u = \text{const}, w = \text{const} \right\};$$

получим для сравнения с общей моделью (2.78) частные версии СЛИ *модели Мареля* (ММ) и модифицированной *модели Уилсона* (МУ).

2.7.5. От многоножки до человека. Общность кинематических законов ходьбы у членистоногих и человека, обнаруженная в наших сравнительных исследованиях, естественно побуждает задуматься о механизмах филогенетической инвариантности именно кинематических программ управления в силу значительных динамических различий масс-инерционных свойств опорно-двигательных аппаратов позвоночных и беспозвоночных ходяков. В качестве предварительной версии здесь можно полагать, что поскольку локомоторные движения являются высокоавтоматизированными синергиями и их построения имеют общую генераторную природу, то простота структурно-функционального воплощения генератора локомоторных циклов является причиной филогенетической универсальности кинематических синергий.

Математики (а часто и физики) используют критерий "простоты" в качестве критерия "истины". Поскольку математика — лингвистическая наука, язык которой развивается в контексте решений разнообразных задач, допускающих математическую формулировку, эвристический принцип эквивалентности "простоты и истины" действительно может служить критерием адекватности "языка и задачи". С другой стороны, именно физика, ориентированная на познание законов природы, выступает в роли поставщика задач и потому зависит от

лингвистической адекватности. Но прогресс физики зависит не только от прогресса адекватных математических методов, но и от адекватных инструментов, а для последних существуют свои критерии истины и, следовательно, простоты. В биомеханике существует еще один — третий — критерий адекватности, который назовем *алгоритмическим*. У мозга при управлении произвольными и локомоторными движениями имеются свои критерии "простоты", и, по-видимому, метод синергий — это один из основных методов достижения "простоты" управления.

Многоножки и человек — это крайние представители огромного разнообразия педатарных локомоторных систем, и если крайности "сходятся" под "крышей" единой кинематической теории, то следует предполагать существование фундаментальной общности принципов управления, реализуемых с помощью нейрофизиологических механизмов (простые варианты нейрофизиологических моделей описаны в [49, 53]).

Прежние метафоры локомоторных синергий можно характеризовать как декларативные, описательные и классификационные, содержащие интуитивные и необоснованные правила качественного характера, поскольку перевод этих правил на количественный язык вскрывает их полную или частичную неадекватность реальному локомоторному закономерностям. Предлагаемую нами новую метафору можно характеризовать несколько иначе: с одной стороны, как либернетическую, поскольку ее разработка исходит из спецификации виртуальных свобод кинематического разнообразия целевых траекторий, а с другой, как синергетически каноническую, поскольку целью теории является выявление полного множества кинематических связей, трактуемых как синергии локомоторного управления. Мы пока еще не знаем, каким образом формируются кинематические синергии на нейрофизиологическом уровне, но уже несколько продвинулись в понимании того, какие типы математических задач должен решать мозг для целостной организации локомоторных движений.

3. Хронометрические постулаты

Теория относительности принадлежит к классу фундаментальных теорий.

А. Эйнштейн

Описанная в разделе 2 локомоторная геохронометрия аналогична известной геометрии Минковского, но явным образом эта аналогия сразу не видна, поскольку для выявления сходства необходимо сначала рассмотреть более общие модели СТО. В этом разделе, используя теоретическую стратегию А. Эйнштейна "от постулата", мы сначала обобщим эйнштейновский *постулат постоянства скорости света* (ППСС) и изучим математические следствия такого обобщения.

Наша стратегия построения обобщенной модели геохронометрии основывается на геометрическом методе спецификации *системы базисных инвариантов* (СБИ), который описан в приложении. В геометрии свободная группа аффинных преобразований редуцируется посредством СБИ в 1-параметрическую группу метрических преобразований. В локомоции, как показано в разделе 2, виртуальное разнообразие двигатель-

ных координаций редуцируется посредством *системы локомоторных инвариантов* (СЛИ) в 1-параметрическое разнообразие локомоторных реализаций, которое называется *режимом* локомоции. С формальной точки зрения, поскольку кинематика локомоторных движений имеет дело с пространственно-временными характеристиками двигательных актов, проблему идентификации СЛИ можно более явно интерпретировать как проблему СБИ той пространственно-временной геометрии, которая формируется управляющей системой, т.е. мозгом. Следовательно, в рамках такого контекста допустимо говорить о существовании определенной геохронометрии мозга и математические задачи описания локомоторных движений формулировать как задачи выявления метрических свойств геохронометрии локомоторного управления.

Формально говоря, постулатная стратегия Эйнштейна позволяет и нам декларировать существование в мозге таких "эталонных волн", скорости которых обладают свойством инвариантности относительно меняющейся скорости локомоции. При такой декларации мы не распространяем сферу действия СТО в область малых скоростей локомоторных движений, а только допускаем возможность существования других волновых процессов, которые являются аналогами световой волны СТО по свойствам независимости скорости волны от скорости перемещения системы отсчета. При этом скорости эталонных волн мозга соответствуют скоростям нервного проведения, т.е. существенно меньше скорости света. Такой способ формальной интерпретации *локомоторной теории относительности* (ЛТО) является аналитически корректным, но он не способствует пониманию нейрофизиологической природы локомоторного релятивизма. Поэтому формальный переход от релятивистской механики к "релятивистской биомеханике" не представлялся нам правомочным без поиска общей конструктивной основы. Чтобы не смешивать разные подходы, мы собственно конструктивные аспекты геохронометрических процедур вынесли в следующий раздел 4.

Итак, биомеханические исследования кинематических синергий шагательных движений животных и человека, вернее, не сами эти экспериментальные исследования, а теоретические попытки пространственно-временного представления синергий шага, вынуждают нас переосмыслить концептуальные основы СТО по меньшей мере с целью построения обобщенной модели геохронометрии.

Вообще говоря, задачу обобщения известной эйнштейновской версии СТО можно решать независимо от дополнительных целей установления связи с ЛТО. Такой независимый подход, описанный нами ранее в статье [54], воспроизводится ниже и дополняется кратким обзором известных методов вывода преобразования Лоренца.

3.1. Типы физических теорий

Физикам хорошо известно, что по своей математической структуре СТО чрезвычайно проста, даже, можно сказать, элементарна. Тем не менее осмысление ее физического содержания вызывает затруднения, порождающие споры и протесты [12, 18, 38, 42]. Природа этих психологических затруднений заложена, на наш взгляд, в декларативном методе построения СТО, который А. Эйнштейн назвал фундаментальным.

3.1.1. Классификация А. Эйнштейна. Широко известное несогласие А. Пуанкаре [42, 43] с декларативным методом построения физических теорий осталось нереализованным. Последнее не означает, что А. Эйнштейн — основной учредитель декларативного или фундаментального метода СТО — не считал такой подход единственно возможным (см. [69, с. 247, 248]):

"В физике различают несколько типов теорий. Большинство из них являются конструктивными, т.е. их задачей является построение картины сложных явлений на основе некоторых относительно простых предположений ...

Когда мы говорим, что понимаем какую-либо группу явлений природы, то это означает, что мы построили конструктивную теорию, охватывающую эту группу явлений. Помимо этого важнейшего класса теорий существуют другие теории, которые мы будем называть фундаментальными. В них используется не синтетический, а аналитический метод. Исходным пунктом и основой этих теорий являются не гипотетические положения, а эмпирически найденные общие свойства явлений, принципы, из которых следуют математически сформулированные критерии, имеющие всеобщую применимость ...

К достоинствам конструктивных теорий относятся их законченность, гибкость и ясность; достоинством фундаментальных теорий является их логическое совершенство, надежность исходных положений. Теория относительности принадлежит к классу фундаментальных теорий. Чтобы понять ее, нужно ознакомиться с принципами, на которых она основана".

Перечислив достоинства теорий каждого класса, А. Эйнштейн охарактеризовал неявным образом и основной недостаток использованной им фундаментальной методологии СТО — она не обеспечивает понимания той "группы явлений природы", которые охватывает. Для достижения же такого понимания, как следует из приведенной цитаты, необходима конструктивная теория релятивизма, т.е. практически более верным является обратный тезис — достижение понимания природы релятивизма является необходимой основой для построения конструктивной теории.

Таким образом, хотя сам А. Эйнштейн осознавал важность дальнейшего прояснения природы релятивистских понятий и целесообразность перехода от фундаментальной методологии к конструктивной, необходимой для такого перехода экспериментальной основы в его время не было. Новое основание для пересмотра релятивистских концепций появилось, как это отмечает Г. Бонди, с развитием радиолокационных методов измерения расстояний через измерения времени.

3.1.2. Варианты обобщений. Разные фундаментальные версии СТО, последующее появление которых было инициировано первой работой А. Эйнштейна, представляют по сути разные варианты вывода преобразований Лоренца для случая изотропного распространения света. Мы не согласны с мнением Г. Бонди [12], будто для понимания СТО не обязательно знание и понимание самого преобразования Лоренца, и показываем, что предлагаемый им метод не является полным. На наш взгляд, более существенно, что для понимания СТО знание традиционной формы преобразования Лоренца является недостаточным.

Для углубления понимания СТО полезны более общие аналоги преобразования Лоренца, в частности учитывающие анизотропный случай распространения света.

Возможно, для традиционных аспектов прикладного использования СТО такое обобщение не является существенным, поскольку реальное физическое пространство является изотропным, но для сравнительной оценки процедур тестирования анизотропии распространения света в других средах обобщение СТО, конечно, необходимо.

Вопрос 3.1. Возможны ли другие аспекты обобщения СТО, кроме очевидного учета анизотропии?

Оказывается, что на этот вопрос можно и ответить утвердительно, и показать существование по крайней мере еще одного аспекта обобщения СТО, который обусловлен свойством ангармоничности лучей света и осей системы отсчета.

Ниже мы рассмотрим алгебраическую схему спецификации инвариантов СТО и введем обобщенный постулат, учитывающий не только анизотропию распространения света, но и свойства ангармоничности лучей, с целью получения общей модели СТО. До перехода к обобщенным моделям релятивизма мы сравним разные известные методы вывода преобразований Лоренца, чтобы, с одной стороны, напомнить исторический генез основных понятий, а с другой — ввести на известных примерах необходимый алгебраический формализм.

3.2. Алгебра систем отсчета

Этот раздел является вспомогательным, здесь описаны основные соглашения, связанные с определением базисных хроногеометрических матриц.

3.2.1. 2-мерный мир. Пусть неподвижный эталон длины находится в абсолютной системе отсчета (АСО), а подвижный — в относительной системе отсчета (ОСО), которая движется относительно АСО с постоянной скоростью $v < c$, где c — скорость света. Кроме того, каждую СО необходимо снабдить соответственно неподвижными и подвижными часами — собственными эталонами времени. При этом представляется вполне естественным исходно постулировать

Условие инерциальной эквивалентности эталонов. В АСО и ОСО эталонные стержни имеют одинаковые длины $l = 1$, а эталонные часы имеют одинаковые периоды $T = 1$.

Однако голословное постулирование такой "одинаковости" бесполезно, пока не указаны какие-либо процедурные или другие правила ее подтверждения как для эталонов длины, так и для эталонов времени.

Удобно сразу отделить проблемы физической реализуемости тех или иных метрических процедур от проблем их математического описания и геометрической представимости. Например, задача синхронизации разноместных часов может решаться физически разными способами, и мы здесь не будем повторять описания А. Пуанкаре или А. Эйнштейна (см. [42, 43, 69]). Геометрически эта задача решается простым заданием осей одновременных событий, т.е. прямых, которые параллельны пространственным осям АСО или ОСО. Тогда ось времени АСО есть мировая линия "абсолютно неподвижного наблюдателя", а ось времени ОСО — это мировая линия "относительно неподвижного наблюдателя", т.е. неподвижного в ОСО и перемещающегося

относительно АСО с постоянной скоростью движения ОСО.

Замечание 3.1. Релятивистские проблемы, казалось бы, естественно сразу рассматривать в 4-мерном мире (4-мире). Но инерциальные движения — это всегда 1-мерные движения вдоль некоторой пространственной прямой. Поэтому, выбирая эту прямую за ось ОСО, можно, не теряя необходимой общности, сэкономить на писании несущественных межкоординатных соотношений и исходно сузить геометрическое описание до 2-мира, достигая большего эффекта наглядности и простоты. Такое планиметрическое сужение и используется ниже.

3.2.2. Базисные матрицы. Аналогично определениям АСК и ОСК (см. раздел 6.4), мы далее считаем, что события 2-мира АСО образуют некоторое выделенное плоское многообразие событий $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} = (t, x)' | \mathbf{E}\}$, которому принадлежит "точка зрения неподвижного наблюдателя", а события 2-мира ОСО образуют другое плоское многообразие событий $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y} = (\tau, y)' | \mathbf{B}\}$ — это мир "точек зрения подвижного наблюдателя". События \mathbf{x} и \mathbf{y} разных СО называются эквивалентными, если они связаны одним из условий

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — взаимно обратные базисы ОСО, совместимые с АСО: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(v)$, $\mathbf{B}(0) = \mathbf{E}$.

Общее формальное описание базисов ОСО (3.1) более удобно представлять кинематическим образом, т.е. в полярных координатах. Но для декартовых векторов $\mathbf{b}_1 = (t_1, x_1)'$ и $\mathbf{b}_2 = (t_2, x_2)'$ допустимы разные варианты выбора полярных представлений:

1) обе оси считаются времениподобными: $\mathbf{b}_1 = t_1(1, v_1)'$, $\mathbf{b}_2 = t_2(1, v_2)'$;

2) обе оси считаются пространственноподобными: $\mathbf{b}_1 = x_1(1/v_1, 1)'$, $\mathbf{b}_2 = x_2(1/v_2, 1)'$;

3) первая ось считается времениподобной, а вторая — пространственноподобной.

Ниже используется преимущественно вариант 3) кинематического определения базисов АСО и ОСО (это правило не соблюдается в изложениях литературных данных, где по возможности сохраняется авторский стиль математических обозначений). При выборе варианта 3) (рис. 10а) эталонные векторы оси времени \mathbf{b}_1 и пространственной оси \mathbf{b}_2 содержат калибровочные коэффициенты t_b ("местного времени"), x_b ("местного расстояния"), скорость движения $v_1 = v$, а также параметр v_2 , имеющий смысл величины скорости:

$$\mathbf{b}_1 = t_b(1, v_1)' \equiv t_b \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{b}_2 = x_b \left(\frac{1}{v_2}, 1 \right)' \equiv x_b \mathbf{v}_2.$$

Поэтому в общем матричном определении базиса

$$\mathbf{B} \equiv (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \mathbf{V}[v_1, v_2] \mathbf{D}[t_b, x_b] \quad (3.2)$$

можно выделить матрицы двух пар независимых параметров, имеющих разные физические содержания:

$$\mathbf{V}[v_1, v_2] \equiv \mathbf{E} + (v_1 \mathbf{e}_2, v_2^{-1} \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{D}[t_b, x_b] \equiv \text{diag}(t_b, x_b).$$

Если выделить события пересечения границ эталонов ОСО с осями АСО, которые обозначим как $t_c \mathbf{e}_1$ и $x_c \mathbf{e}_2$

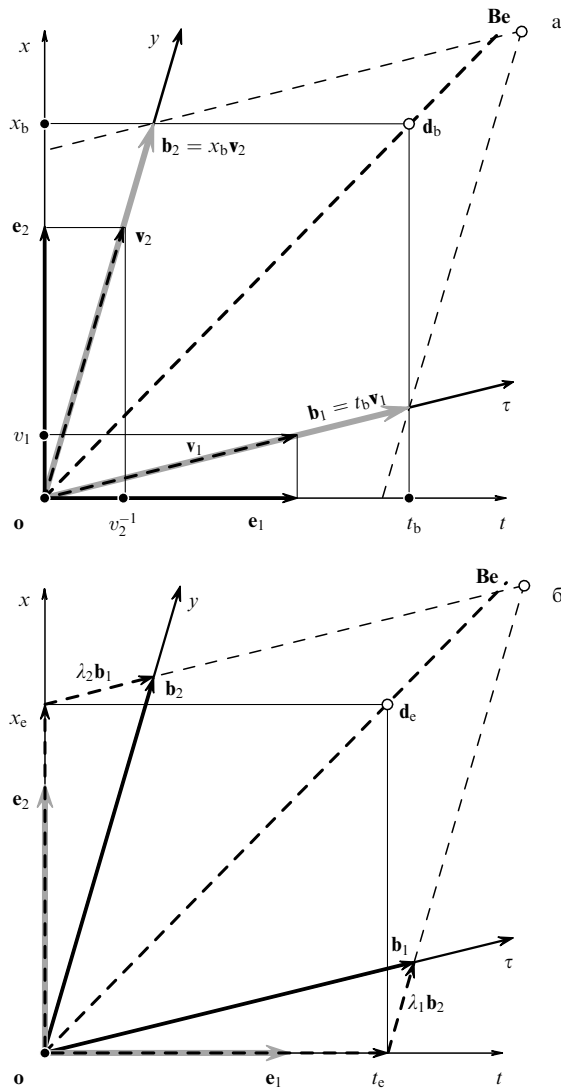


Рис. 10. К определению пространственно-временных базисов АСО и ОСО: (а) канонический вариант, (б) альтернативный вариант выбора эталонов.

(рис. 10б), то, решая уравнения

$$\mathbf{b}_1 = t_e \mathbf{e}_1 + \lambda_1 \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_2 = \lambda_2 \mathbf{b}_1 + x_e \mathbf{e}_2$$

с неопределенными множителями λ_1 и λ_2 , находим $\lambda_1 = v_1/v_b$, $\lambda_2 = v_b/v_2$ и базисную матрицу

$$\mathbf{B} = |\mathbf{V}|^{-1} \mathbf{D}[t_e, x_e] \mathbf{V} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_e & v_e \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

где $v_e \equiv x_e/t_e = v_b \equiv x_b/t_b$, т.е. калибровочные скорости равны, а также равны отношения масштабных величин: $t_e/t_b = x_e/x_b = 1 - v_1/v_2 \equiv |\mathbf{V}|$.

3.2.3. Базисные функции. Когда имеется некоторая ОСО и все, что мы знаем, это только ее скорость v относительно АСО, то понятно, что такая минимальная информация позволяет идентифицировать в описании \mathbf{B} -базиса только "угол" оси местного времени, $v_1 = v$. Вся остальная базисная тройка параметров ОСО $\{t_b, x_b, v_2\}$ остается неопределенной, иначе говоря, свободной.

Последнее означает, что либернетический резерв доопределения ОСО равен трем: $\text{lib}(\mathbf{B}) = 3$. Чтобы редуцировать параметрическую неопределенность произвольной ОСО, необходимо либо привлечь принцип или постулат, либо опираться на свойства инструментальных процедур.

Следовательно, аналитическая реконструкция ОСО на основе каких-либо принципов и постулатов сводится к идентификации множества трех параметров $B = \{t_b, x_b, v_2\}$, которые определяются как базисные функции инерциальной скорости v_1 , удовлетворяющие условиям совместности с АСО:

$$B = \{t_b(v), x_b(v), v_2(v) \mid v_1 = v; t_b(0) = x_b(0) = 1, v_2(0) = \infty\}. \quad (3.4)$$

Пример 3.1. Выделим базисные функции (3.4) и определяемые ими матричные базисы для трех классических метрических геометрий:

$$\text{ГГ: } B = \{1, 1, \infty\}, \quad \mathbf{B}(v) = \mathbf{E} + v \mathbf{E}_{21}, \quad (3.5a)$$

$$\text{ГМ: } B = \{\gamma_-, \gamma_-, v^{-1}\}, \quad \mathbf{B}(v) = \gamma_-(\mathbf{E} + v \mathbf{I}), \quad (3.5б)$$

$$\text{ГЕ: } B = \{\gamma_+, \gamma_+, -v^{-1}\}, \quad \mathbf{B}(v) = \gamma_+(\mathbf{E} + v \mathbf{J}), \quad (3.5в)$$

где $\gamma_{\pm}^2 = 1/(1 \pm v^2)$. Скоростная v -параметризация имеет физический смысл в геометрии Галилея (ГГ) и геометрии Минковского (ГМ), но в геометрии Евклида (ГЕ) обычно не используется ввиду отсутствия пространственно-временной версии такой геометрии. Когда ГЕ определяется для пространственных координат:

$$t \rightarrow x_1, \quad x \rightarrow x_2 \Rightarrow \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)',$$

скоростная параметризация $v = x/t$ имеет смысл проективной параметризации $v = x_2/x_1$.

Каждая из трех моделей ГГ, ГМ и ГЕ допускает бесчисленное множество параметризаций, среди которых следует выделить *аддитивные* параметризации, когда умножение базисных матриц эквивалентно суммированию параметров:

$$\mathbf{B}(\alpha_1) \mathbf{B}(\alpha_2) = \mathbf{B}(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (3.6)$$

Это условие предполагает возможность представления базиса в виде матричной экспоненты. Действительно, все "хорошие" геометрии обладают таким свойством (см. приложение 6.8–6.10). Но скоростная параметризация аддитивна только в геометрии Галилея, поэтому только в этой геометрии уместно говорить о "сложении скоростей". ♦

3.3. Обзор известных методов

В этом разделе сравниваются разные известные методы вывода преобразований Лоренца. Прежде чем переходить к новым обобщенным моделям релятивизма, полезно уяснить достоинства и недостатки "испытанных годами" методов.

3.3.1. Процедурный метод А. Эйнштейна. В первой работе 1905 г. [42] А. Эйнштейн использовал процедурный метод вывода преобразований Лоренца, включающий сравнительный анализ элементарных событий отражения лучей света от концов неподвижного и подвижного эталонных стержней и событий возврата отраженных лучей, т.е.

здесь события отражения и события возврата образуют пары эквивалентных событий, необходимые для определения базиса ОСО.

Процедура Эйнштейна. Из общего начала АСО и ОСО в направлении движения "посылается луч света", который затем отражается от передних концов стержней и возвращается в начало.

Тест, выполняемый в АСО, представляется (рис. 11а) лучом прямого хода $c_1 = t_1(1, c)'$ (от события инициации o до события отражения x_{10}) и лучом обратного хода $c_2 = t_2(1, -c)'$ (от события отражения x_{10} до события возврата x_{20}). В формировании тестовых событий $X_0 = (x_{10}, x_{20})$ участвуют *граничные* условия, определяемые мировыми линиями заднего и переднего концов стержня:

$$L_0: x = te_1; \quad L_1: x = te_1 + L_0e_2.$$

Учет граничных условий дает уравнения

$$x_{10} = (T_1, L_0)' = c_1 = (t_1, ct_1)',$$

$$x_{20} = (T_2, 0)' = c_1 + c_2 = (t_1 + t_2, (t_1 - t_2)c)',$$

из которых находим представление тестовых событий только через известные величины:

$$x_{10} = \left(\frac{L_0}{c}, L_0\right)', \quad x_{20} = \left(\frac{2L_0}{c}, 0\right)'.$$

Согласно графику этой процедуры (рис. 11а) прямой и обратный лучи формируют "равнобедренный" треугольник $X_3^2 = \{o, x_{10}, x_{20}\}$, середина основания которого синхронна с событием отражения; это свойство теста АСО Эйнштейн и принял за общий критерий одновременности, пригодный для всех инерциальных СО.

Для наблюдателя АСО основное новое свойство теста, выполняемого в ОСО, — в изменении граничных условий, которые определяют новые параллельные прямые

$$L_0: x = tv, \quad L_1: x = tv + Le_2,$$

где $v \equiv (1, v)'$ и L — априори неизвестная длина стержня, определяемая (рис. 11б) по точке пересечения пространственной оси ординат и прямой L_1 (такое пересечение можно условно интерпретировать как "моментальную фотографию" движущегося стержня, произведенную в начальный момент времени в АСО). Используя новые граничные условия

$$x_1 = (T_1, L + cT_1)' = c_1 = (t_1, ct_1)',$$

$$x_2 = (T_2, vT_1)' = c_1 + c_2 = (t_1 + t_2, (t_1 - t_2)c)',$$

находим новые тестовые события, зависящие от скорости относительного движения v :

$$x_1 = L(c - v)^{-1}c, \quad x_2 = 2\gamma^2 Lc^{-1}v,$$

где $c \equiv (1, c)'$ и $\gamma^2 \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1}$. ППСС выражается в том, что наблюдатель ОСО считает свой тест идентичным тесту АСО (3.7), $Y = X_0 \equiv (x_{10}, x_{20})$, а наблюдатель АСО интерпретирует матрицу Y как матрицу $X \equiv (x_1, x_2) = BY$, следовательно,

$$B \equiv XY^{-1} = \rho L(v; c),$$

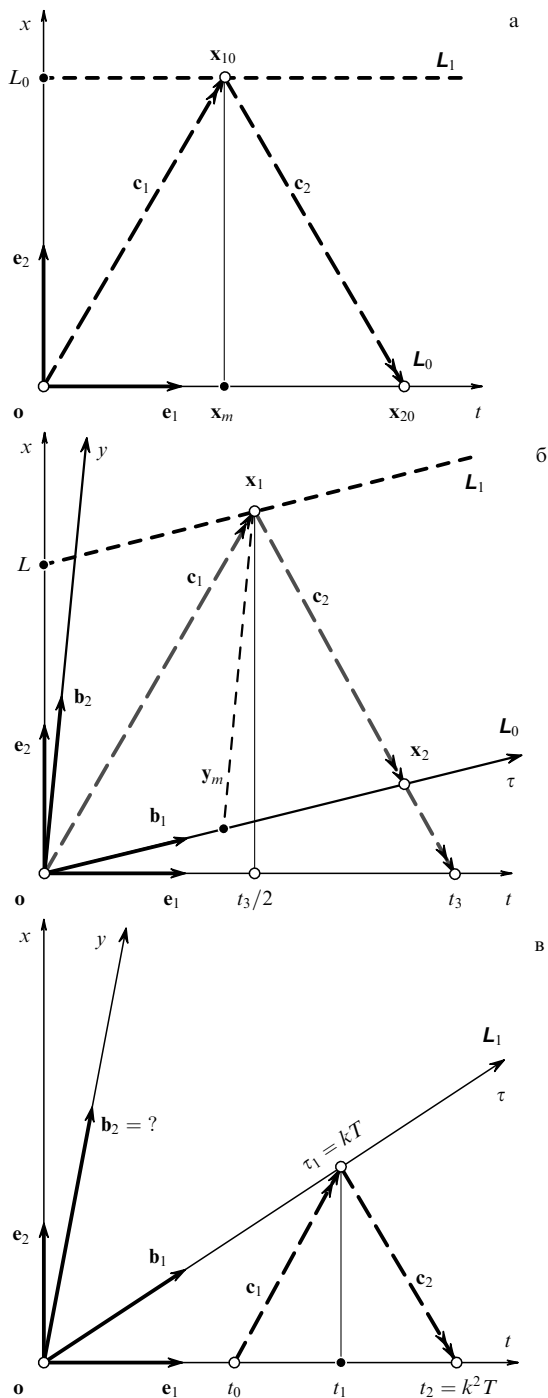


Рис. 11. Лучевые треугольники тестовых процедур А. Эйнштейна (а, б) и Г. Бонди (в).

где $L(v; c) \equiv \gamma(L + v(e_2, c^{-2}e_1))$ — матрица Лоренца, $\rho \equiv \gamma L/L_0$ — дополнительный множитель, содержащий неизвестный масштабный параметр L .

А. Эйнштейн решает проблему доопределения "лишнего" множителя ρ на основе условия факторной симметрии: множители прямого и обратного преобразований должны совпадать ($\rho = \rho^{-1}$), что возможно, если $\rho = 1$, и тогда искомый базис

$$B(v) = L(v; c), \quad |B| = 1, \tag{3.7}$$

эквивалентен унимодулярному преобразованию Лоренца.

Таким образом, математический смысл удаления "лишнего" множителя сводится к получению унимодулярного базиса. Существенное дополнительное свойство такого базиса состоит в том, что кажущиеся наблюдателю АСО (рис. 11б) масштабные величины длины L и времени T оказываются зависимыми от скорости ОСО:

$$\rho = 1 \Rightarrow L = Tc = \frac{L_0}{\gamma} \equiv L_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad (3.8)$$

а связи масштабных параметров АСО и ОСО $L/T = L_0/T_0 = c$ следуют из формул (3.3). Как видно из формулы (3.8), с ростом скорости v масштабные величины длины L и времени T уменьшаются, что принято называть *эффектом сокращения длины и замедления времени*.

Замечание 3.2. В работах Г. Лоренца [42, с. 67–87] и А. Пуанкаре [42, с. 90–93] исходные уравнения межкоординатных преобразований тоже содержат произвольный множитель (обозначенный в указанных работах буквой l), который затем полагается единичным из соображений необходимой унимодулярности.

Вывод 3.1. Процедура метод, основанный на ППСС, не полностью определяет базис ОСО: остается "лишний" параметр ρ в виде общего множителя преобразования Лоренца, доопределение которого требует привлечения дополнительных соображений.

3.3.2. Метод инвариантных лучей. В обзорной работе 1917 г. [69, с. 223–227] Эйнштейн более не анализирует свойства тестовой процедуры, а использует другой постулатный метод вывода преобразований Лоренца, который можно назвать *методом инвариантных лучей*.

Рассматриваются лучи света C_1 и C_2 , исходящие из общего начала АСО и ОСО в отрицательном и положительном направлениях. Согласно ППСС эти лучи в обеих СО имеют одинаковые ("инвариантные") скорости $\pm c$, т.е. описываются уравнениями

$$C_1: x + ct = 0 \Leftrightarrow y + ct = 0,$$

$$C_2: x - ct = 0 \Leftrightarrow y - ct = 0.$$

Следовательно, событие $\mathbf{x} \equiv (t, x)'$, инцидентное лучу в АСО, при переходе в ОСО преобразуется в эквивалентное событие $\mathbf{y} \equiv (\tau, y)'$, которое остается инцидентным тому же лучу. А. Эйнштейн это свойство *инвариантности изотропных лучей* выражает с помощью равенств с двумя неопределенными коэффициентами μ и λ :

$$x + ct = \mu(y + c\tau), \quad x - ct = \lambda(y - c\tau), \quad (3.9)$$

которые после введения матрицы $\mathbf{C} = (-c\mathbf{F}\mathbf{e}, \mathbf{e})$, $\mathbf{D} = \text{diag}(\mu, \lambda)$, переписываются следующим образом:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{y}.$$

Тогда согласно общему определению эквивалентности

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}.$$

Учитывая теперь кинематическое представление базиса (3.2), находим калибровочные параметры

$$t_b = x_b = d_+ \equiv \frac{\lambda + \mu}{2},$$

а затем, после простых преобразований, получаем матрицу

$$\mathbf{B} = \rho\mathbf{L}(v; c) \Leftrightarrow \rho = \frac{d_+}{\gamma}.$$

Для решения проблемы "лишнего" множителя Эйнштейн вводит метод "моментальных снимков", который аналогичен базисному представлению (3.3), когда калибровочные параметры заменяются масштабными отрезками осей. Отрезок длины $x_e = \rho\gamma$ называется *моментальным снимком* эталонного стержня ОСО, полученного наблюдателем АСО. Однако если аналогичный "снимок" аналогичного стержня АСО делает наблюдатель ОСО, то должна получиться длина $y_e = \gamma/\rho$. Теперь принцип относительности формулируется как равенство относительных масштабов эталонов длины: $x_e = y_e$, тогда $\rho = 1$, т.е. в итоге для ОСО опять получается базис Лоренца.

Вывод 3.2. Метод инвариантных лучей неполно определяет базис ОСО.

3.3.3. Метод k -коэффициента Г. Бонди. Предлагаемый Г. Бонди альтернативный способ изложения СТО на основе метода коэффициента k [12] в действительности отражает одно из свойств преобразования Лоренца, а именно представляет один из вариантов параметризации времениподобной оси ОСО.

Рассмотрим мировую линию инерциального движения $L_1: x = vt$ и событие \mathbf{x}_0 начального излучения в АСО тест-сигнала, например, света, с задержкой длительности T . Тогда событие $\mathbf{x}_0 = T\mathbf{e}_1$ (рис. 11в) служит начальной точкой луча

$$C_1: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(1, c)',$$

который при условии $v < c$ пересекает линию L_1 в мировой точке

$$\mathbf{x}_1 \equiv (t_1, x_1)' = C_1 \cap L_1.$$

В данном случае из двух определяющих условий АСО

$$\mathbf{x}_1 \in L_1 \Rightarrow x_1 = vt_1, \quad \mathbf{x}_1 \in C_1 \Rightarrow x_1 = c(t_1 - T),$$

явно вычисляется время достижения тест-сигнала линии L_1 :

$$t_1 = \frac{T}{1 - v/c}. \quad (3.10)$$

Вопрос 3.2. Как определить эквивалентное время этого события в ОСО?

Для ответа на этот вопрос Г. Бонди предлагает использовать следующее простое рассуждение [12]. Пусть τ_1 — искомое время часов ОСО. Положим $\tau_1 = kT$, где k — неизвестный коэффициент. Если дополнительно считать, что событие первого достижения является также событием отражения, то обратный сигнал вернется в начало АСО в момент времени $t_2 = k^2T$. Но, учитывая изотропные условия распространения сигнала и время достижения-отражения, t_1 можно выразить как полусумму времени излучения t_0 и времени возврата t_2 :

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2} = \frac{(1 + k^2)T}{2}.$$

Сравнение этой оценки с (3.10) позволяет выразить неизвестный коэффициент через отношение скоростей, и наоборот:

$$k^2 = \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}.$$

Следовательно, вместо скоростного параметра можно для характеристики инерциального движения использовать k -коэффициент.

Эталонный вектор $\mathbf{b}_1 = (b_{11}, b_{21})'$ времениподобной оси ОСО и событие достижения-отражения \mathbf{x}_1 коллинеарны: $\mathbf{x}_1 = kT\mathbf{b}_1$.

Отсюда после простых преобразований получаем k -параметризацию этого эталона:

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{k + k^{-1}}{2}, \frac{c(k - k^{-1})}{2} \right)'$$

Если же ввести дополнительную α -параметризацию, то эталонный вектор \mathbf{b}_1 можно выразить через гиперболические функции α -угла:

$$k = e^\alpha \Leftrightarrow \frac{v}{c} = \tanh \alpha \Leftrightarrow \mathbf{b}_1 = (\cosh \alpha, c \sinh \alpha)'$$

Вывод 3.3. Метод k -коэффициента позволяет полностью реконструировать эталон времени ОСО, но проблема эталона длины этим методом не решается, здесь необходимы дополнительные идеи.

3.3.4. Метод инвариантной квадратичной формы. А. Пуанкаре в исследованиях групповых свойств преобразования Лоренца перечисляет инварианты этой группы, в список которых при рассмотрении динамических проблем попадают разные формы (координат и скоростей; см. [42, с. 154–156]), но первичной является квадратичная форма гиперболического типа — "интервал".

Обратный геометрический подход Г. Минковского (см. [42, с. 167–180]) — это подход, основанный на первичном постулате инвариантности квадратичной формы

$$-t^2 + x^2 = -\tau^2 + y^2 \Rightarrow \mathbf{B}'\mathbf{F}\mathbf{B} = \mathbf{F}, \quad (3.11)$$

обеспечивающей гиперболическую метрику "единого" пространства-времени, или мира СТО. В таком подходе получается, что группа Лоренца — необходимое следствие инвариантности определяющей квадратичной формы (3.11) и соответствующего матричного уравнения; см. (П.33). Поскольку соответствующая этому методу геометрия Минковского описана в приложении (см. раздел 6.8 и рис. 18в), сделаем следующий

Вывод 3.4. Метод инвариантной квадратичной формы полностью определяет систему базисных инвариантов ОСО.

3.4. Обобщенные модели

Можно по-разному относиться к разным методам декларативного построения релятивистской кинематики, можно, например, критиковать одни и пропагандировать другие, как это часто делается в последнее время. На наш взгляд, каждый из описанных методов имеет свои преимущества:

- метод инвариантной квадратичной формы позволяет сразу получить полную СБИ, и отсюда возникает концепция фундаментального "единства пространства-времени";

- процедурный метод и метод инвариантных лучей являются 2-этапными; сначала базис Лоренца определяется с точностью до произвольного общего множителя, который затем доопределяется условием унимодулярности базиса.

Из сравнения разных методов вывода базиса Лоренца вытекают полезные следствия.

Следствие 3.1. Условия редукции общего базиса, определяемые ППСС и физическим принципом относительности (ФПО), являются процедурно независимыми и представляют разные инварианты эквивалентного множества СБИ.

Следствие 3.2. Поскольку ФПО используется для редукции одного "лишнего" параметра, значит, ППСС неявным образом заменяет два инварианта, а ФПО — только один.

Вопрос 3.3. Какие два инварианта СБИ неявно представляет ППСС?

Чтобы ответ на этот вопрос имел общий характер, необходимо обобщить формулировку ППСС. Первый шаг к обобщению очевиден — введение анизотропии.

3.4.1. Анизотропная версия. В первом методе Эйнштейна и в методе Бонди существенно используется свойство изотропии распространения тест-сигнала, поскольку время отражения сигнала оценивается делением пополам общего времени распространения сигнала "туда и обратно". Если пытаться "обобщить" такой метод оценки одновременности событий на анизотропный случай распространения сигнала, то возникает вопрос: как это сделать? Простой ответ получается, если посылку сигнала в одном направлении (с последующим отражением) заменить симметричной процедурой посылки двух синхронных сигналов сразу в двух направлениях. Тогда в изотропном варианте сигналы одновременно достигают равноудаленные границы, а в анизотропном варианте для обеспечения одновременности достижения следует расстояния устанавливать пропорционально скоростям сигналов. В этом разделе используется метод инвариантных лучей версии К. Ланцоша [36], модифицированный нами для анизотропного случая.

Пусть эквивалентные события \mathbf{x} и \mathbf{y} , $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$, инцидентны лучам света, исходящим из общего начала АСО и ОСО. Тогда согласно ППСС

$$x = c_1 t \Leftrightarrow y = c_i \tau, \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

Подставляя в первое равенство (3.12) определения координат x и t из общего базисного условия эквивалентности, имеем два уравнения для двух лучей,

$$C_1: x = c_1 t \rightarrow b_{21}\tau + b_{22}y = c_1(b_{11}\tau + b_{12}y),$$

$$C_2: x = c_2 t \rightarrow b_{21}\tau + b_{22}y = c_2(b_{11}\tau + b_{12}y).$$

Учет второго равенства (3.12) позволяет переписать эти уравнения "бескоординатным" образом. Но вводя матрицы

$$\mathbf{C} \equiv (c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}), \quad \mathbf{D} = \text{diag}(c_1, c_2),$$

мы можем преобразованные скалярные уравнения представить так:

$$\mathbf{C}\mathbf{b}_1 = -\mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{b}_2 \Leftrightarrow \mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{A} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}.$$

Следовательно, базисная матрица \mathbf{B} имеет следующую структуру:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}) = t_b(\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}) = t_b(\mathbf{E} + \mathbf{v}\mathbf{A}), \quad (3.13)$$

где $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{e}_2, -(c_1c_2)^{-1}\mathbf{e}_1 - (c_1^{-1} + c_2^{-1})\mathbf{e}_2)$ — матрица линейной связи базисных векторов, а базисный вектор $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 \equiv t_b(1, v)' = t_b\mathbf{v}$ содержит произвольный калибровочный параметр t_b , квадрат которого определяется из условия унимодлярности:

$$t_b^2 = \frac{1}{(1 - v/c_1)(1 - v/c_2)}.$$

При такой нормировке эталоны базисных векторов \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 представляются формами

$$B_1: \left(t - \frac{x}{c_1}\right)\left(t - \frac{x}{c_2}\right) = 1, \quad B_2: (c_1t - x)(c_2t - x) = 1, \quad (3.14)$$

а условие соответствия осей, или ориентационный инвариант, есть

$$OI: \frac{v_2}{c_2} + \frac{c_1}{v_1} = 1 + \frac{c_1}{c_2}. \quad (3.15)$$

Вывод 3.5. Метод инвариантных лучей позволяет построить анизотропную модель СТО и определить более общую систему базисных инвариантов.

3.4.2. Обобщенный постулат. В исходном методе инвариантных лучей Эйнштейна (см. (3.9)) присутствует только одна константа c , характеризующая изотропную скорость света. В анизотропной модификации этого метода (см. (3.12)) имеется две константы c_1 и c_2 — это скорости света в разных 1-мерных направлениях. Возможно еще одно обобщение анизотропной релятивистской кинематики, содержащее четыре константы: в АСО скорости света представляются константами c_1 и c_2 , а в ОСО — константами s_1 и s_2 . Понять и объяснить физическую целесообразность учета таких различий можно только на основе конструктивного подхода (см. раздел 4.1.3), здесь же, соблюдая правила фундаментального подхода, мы просто декларируем

Обобщенный ППСС. В АСО свет в отрицательном и положительном направлениях распространяется с разными скоростями c_1 и c_2 , а во всех ОСО тестируются другие постоянные скорости s_1 и s_2 соответственно.

Изучим связь двух лучевых базисов — базиса лучей АСО

$$\mathbf{C} \equiv (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \mathbf{V}[c_1, c_2] \mathbf{D}[t_C, x_C] \equiv \mathbf{V}_C \mathbf{D}_C \quad (3.16)$$

и базиса лучей \mathbf{S} , определяемого относительно базиса ОСО (3.2) в виде

$$\mathbf{S} \equiv (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbf{V}[s_1, s_2] \mathbf{D}[t_S, x_S] \equiv \mathbf{V}_S \mathbf{D}_S. \quad (3.17)$$

Таким образом, задача определения метрического базиса ОСО \mathbf{B} сводится к задаче идентификации двух

лучевых базисов \mathbf{C} и \mathbf{S} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{V}_C \mathbf{D}_V \mathbf{S}^{-1}. \quad (3.18)$$

При этом естественно выделяется общая диагональная матрица

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_C \mathbf{D}_S^{-1} = \mathbf{D} \left[\frac{t_C}{t_S}, \frac{x_C}{x_S} \right] \equiv \mathbf{D}[d_1, d_2]. \quad (3.19)$$

Замечание 3.3. Перечислим основные варианты полярных параметризаций произвольной диагональной 2-матрицы $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}[d_1, d_2]$. Во всех этих вариантах параметр "длины" ρ определяется как модуль произведения элементов, или "норма" детерминанта, $\rho^2 = |d_1 d_2| = \|\mathbf{D}\|$:

- 1) $\lambda^2 = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow \mathbf{D} = \rho \mathbf{D}[\lambda^{-1}, \lambda]$;
- 2) $\lambda = e^\alpha \Rightarrow \mathbf{D} = \rho (\cosh \alpha \mathbf{E} + \sinh \alpha \mathbf{F})$;
- 3) $\frac{v}{c} = \tanh \alpha \Rightarrow \mathbf{D} = \rho \gamma \left(\mathbf{E} + \frac{v}{c} \mathbf{F} \right), \quad \gamma^{-2} \equiv 1 - \frac{v^2}{c^2}$;
- 4) $e^\alpha = w(v, c_0, c_1, c_2)$.

Вариант 1) является аналогом k -параметризации Бонди; вариант 4) при использовании вурфа соответствует проективной параметризации Клейна; варианты 2) и 3) — это стандартные варианты гиперболической и кинематической параметризаций.

В общем лучевом представлении базиса ОСО (3.18) существенно, что переменные калибровочные параметры содержатся только в диагональной 2-матрице \mathbf{D} . Так как калибровочные параметры разных лучевых базисов входят в матрицу (3.19) в виде отношений, явное разобщение их вкладов не представляется возможным, следовательно, доказана

Основная теорема СТО. Базис ОСО, удовлетворяющий ППСС, имеет два свободных параметра — элементы диагональной матрицы \mathbf{D} ,

$$\{\mathbf{B}(v_1, v_2, t_b, x_b) \mid \text{ППСС}\} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{V}_C \mathbf{D}_V \mathbf{S}^{-1}. \quad (3.20)$$

Следствие 3.3. Базисные векторы ОСО (3.20) линейно зависимы:

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{A} \equiv -\mathbf{V}_C \mathbf{D}[s_2, s_1]^{-1} \mathbf{V}_C^{-1}. \quad (3.21)$$

Доказательство. В общем описании базисных векторов

$$\mathbf{b}_1 = (1 - q)^{-1} \left(d_1 - \frac{d_2 s_1}{c_2}, d_1 c_1 - d_2 s_1 \right)',$$

$$\mathbf{b}_2 = (1 - q)^{-1} \left(-\frac{d_1}{s_2} + \frac{d_2}{c_2}, d_2 - \frac{d_1 c_1}{s_2} \right)'$$

выделим вектор $\mathbf{d} \equiv (d_1, d_2)'$ и матрицы $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{D}[1, -s_1]$, $\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}[-s_2^{-1}, 1]$:

$$\mathbf{b}_1 = |\mathbf{V}_S|^{-1} \mathbf{V}_C \mathbf{D}_1 \mathbf{d}, \quad \mathbf{b}_2 = |\mathbf{V}_S|^{-1} \mathbf{V}_C \mathbf{D}_2 \mathbf{d}. \quad (3.22)$$

Исключая вектор \mathbf{d} , находим линейную связь базисных векторов: $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{b}_1$. ♦

Следствие 3.4. Геометрия ППСС — аналог геометрии двойных чисел.

Доказательство. Введем гиперболическую параметризацию (см. замечание 3.3) и выделим нормированный базис

$$\mathbf{V}(\alpha)\mathbf{V}_0^{-1} \equiv \mathbf{X},$$

где $\mathbf{V}_0 \equiv \mathbf{V}(0)$. Тогда матрица

$$\mathbf{X} = \frac{\rho}{\rho_0} (\cosh \alpha \mathbf{E} + \sinh \alpha \mathbf{N}) \quad (3.23)$$

является матричным представлением двойного числа $\mathbf{N} \equiv \mathbf{V}_C \mathbf{F} \mathbf{V}_C^{-1}$, $\mathbf{N}^2 = \mathbf{E}$. ♦

3.4.3. Новая система инвариантов. Перепишем уравнение (3.20), выделяя диагональную матрицу

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_C^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}_S. \quad (3.24)$$

Приравнявая нулю недиагональные компоненты тройного произведения правой части, имеем две межпараметрические связи, которые можно представить в виде двух инвариантов — *проективного инварианта (PI)* и *калибровочного инварианта (CI)*:

$$PI: \frac{(v_1 - c_1)/(v_1 - c_2)}{(v_2 - c_1)/(v_2 - c_2)} = \frac{s_1}{s_2}, \quad (3.25a)$$

$$CI: \frac{s_1 v_b + v_1 - c_1}{s_2 v_b + v_1 - c_2} = \frac{c_1 s_1}{c_2 s_2}, \quad (3.25b)$$

где $v_b \equiv x_b/t_b$ — калибровочная скорость. Следуя классической схеме, переход к однопараметрическому базису $\mathbf{V}(v)$ можно осуществить, используя унимодулярный инвариант

$$UI: |\mathbf{B}| \equiv t_b x_b \left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right) = 1. \quad (3.26)$$

Итак, обобщенную версию СТО, построенную на основе ППСС, можно характеризовать как геометрию проективного, калибровочного и унимодулярного инвариантов:

$$\mathbf{V}(v) = \{\mathbf{V}(v_1, v_2, t_b, x_b) \mid PI, CI, UI\}. \quad (3.27)$$

Сравним вариант СБИ геометрии Минковского (П.36) с новым вариантом СБИ (3.27). Нетрудно видеть, что два специфицированных множества инвариантов

$$\text{СБИ}_1 = \{MI_1, MI_2, OI\}, \quad \text{СБИ}_2 = \{PI, CI, UI\}$$

являются различными, хотя и определяют в принципе одинаковые геометрии. Множество СБИ_2 не содержит метрических инвариантов, но неметрический инвариант OI из СБИ_1 является аналогом проективного инварианта PI .

3.4.4. Базис лучей. Пусть $\bar{\mathbf{V}}$ — базис ОСО, заданный относительно базиса лучей \mathbf{V}_C , т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{V}_C \bar{\mathbf{V}}$. Тогда общее описание ОСО в базисе лучей задается аналогично (3.2):

$$\bar{\mathbf{V}} \equiv (\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2) = \mathbf{V}[\bar{v}_1, \bar{v}_2] \mathbf{D}[\bar{t}_b, \bar{x}_b],$$

а диагональное представление (3.24) определяется следующим образом:

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_C^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{D} \mathbf{V}_S \Rightarrow \mathbf{D} = \bar{\mathbf{V}} \mathbf{V}_S^{-1}. \quad (3.28)$$

Отсюда для недиагональных элементов имеем равенства

$$\bar{v}_b \equiv \frac{\bar{x}_b}{\bar{t}_b} = -\frac{\bar{v}_2}{s_2} = -\frac{\bar{v}_1}{s_1},$$

т.е. в базисе лучей двойное отношение проективного инварианта (3.25a) заменяется простым отношением, а формула калибровочного инварианта (3.25b) тоже упрощается:

$$PI: \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{s_1}{s_2}; \quad CI: \bar{v}_b = -\frac{\bar{v}_1}{s_1}. \quad (3.29)$$

При этом межбазисные связи скоростей тоже выражаются простыми отношениями:

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 - c_1}{1 - v_1/c_2}, \quad \bar{v}_2 = \frac{1 - c_1/v_2}{v_2^{-1} - c_2^{-1}}, \quad (3.30)$$

а диагональные элементы матрицы \mathbf{D} определяются так:

$$d_1 = \bar{t}_b = \frac{t_b(1 - v_1/c_2)}{1 - c_1/c_2}, \quad d_2 = \bar{x}_b = \frac{x_b(1 - c_1/v_2)}{1 - c_1/c_2}.$$

Замечание 3.4. Базисы ОСО \mathbf{V} и $\bar{\mathbf{V}}$ совпадают в случае "экзотического" вырождения анизотропии распространения сигналов, когда $c_1 = 0$ и $c_2 = \infty$, так как тогда $\mathbf{V}_C = \mathbf{V}[0, \infty] = \mathbf{E}$.

Совокупно инварианты (3.29) выражают линейную связь базисных векторов:

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{D}_S \bar{\mathbf{b}}_2, \quad \mathbf{D}_S \equiv \mathbf{D}[s_2, s_1]; \quad (3.31)$$

это аналог следствия 3.3 в базисе лучей (ср. с (3.21)).

Замечание 3.5. Другой вариант перехода от вурфа (3.25a) к линейной связи базисных векторов возможен на основе преобразования (П.61). Из сравнения двух вариантов выясняется квазиинволютивное свойство матрицы $\mathbf{V}_C \mathbf{F}$, в чем можно убедиться непосредственно: $(\mathbf{V}_C \mathbf{F})^2 = |\mathbf{V}_C| \mathbf{E}$.

Вывод 3.6. Два скалярных инварианта, (3.25) или (3.29) (проективный и калибровочный), представимы одним векторным условием линейной связи базисных векторов.

3.4.5. Гармонично изотропный мир. Выделенный выше проективный инвариант PI , т.е. вурф (см. раздел 6.13)

$$q \equiv w(v_1, v_2; c_1, c_2) = \frac{s_1}{s_2}, \quad (3.32)$$

характеризует взаимное положение четырех прямых, которые образуют пучок, содержащий две пары прямых. Первая пара $B = \{v_1, v_2\}$ в данном порядке скоростных аргументов вурфа (3.32) является "базисной", а вторая пара $C = \{c_1, c_2\}$ — "лучевой". В общем случае возможны два основных варианта взаимного положения этих пар [65] B и C . Физический интерес представляет случай отрицательного вурфа: если $q < 0$, то пары B и C разделяют друг друга.

Среди отрицательных вурфов особо интересен гармонический случай $q = -1$.

С физической точки зрения гармоничность замечательна тем, что

$$q = -1 \Leftrightarrow s_1 = s, \quad s_2 = -s. \quad (3.33)$$

В этом случае, даже если $c_1/c_2 \neq 1$ (т.е. если "абсолютный эфир" анизотропен), "относительный эфир" согласно (3.33) тестируется как изотропный.

Классический вариант СТО — случай *гармоничной изотропии* эфира, когда свет во всех направлениях и во всех СО распространяется с одинаковой скоростью c :

$$c_1 = s_1 = c, \quad c_2 = s_2 = -c. \quad (3.34)$$

Тогда формулы проективного и калибровочного инвариантов упрощаются:

$$PI: v_1 v_2 = c^2, \quad CI: v_b = 1. \quad (3.35)$$

Итак, формальное использование обобщенного ППСС вскрывает

Проективное свойство ОСО СТО. Оси ОСО и лучи света находятся в проективно-гармоническом соответствии.

Если вернуться к анизотропной версии метода Ланцоша, то можно убедиться, что полученный неметрический инвариант OI (3.15) тоже является проективным инвариантом, но для случая, когда $s_1 = c_1, s_2 = c_2$. Инварианты ППСС этой версии представимы так:

$$PI: w(v_1, v_2; c_1, c_2) = \frac{c_1}{c_2}, \quad CI: v_b = 1 - \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) v_1. \quad (3.36)$$

Здесь, вообще говоря, проективный инвариант ангармоничен: $q = c_1/c_2 \neq -1$; и этот случай мы можем называть *ангармонизмом анизотропии*.

В известном обзоре В. Паули приводится перечень важнейших для физики групп преобразований (см. [41, с. 44, 45]), где по поводу проективной группы имеется следующий интересный для нашей темы комментарий:

"Она играла большую роль в ранних исследованиях математиков по неевклидовой геометрии. Для физиков эта группа не так важна".

Вывод 3.7. Анализ системы инвариантов обобщенного ППСС демонстрирует важное значение проективной группы для релятивистской кинематики.

4. Волновые часы

Когда мы говорим, что понимаем какую-либо группу явлений природы, то это означает, что мы построили конструктивную теорию, охватывающую эту группу явлений.

А. Эйнштейн

Развитие конструктивного аспекта требует пересмотра традиционной концепции часов, представляющей последние в виде "черного ящика" с циферблатом. Если же хронометраж в разных инерциальных системах отсчета осуществлять на основе эталонных движений, например, используя оптический хронометр (см. ниже), то унификация этой процедуры позволяет конструировать хроногеометрию, опираясь не на постулат, а на свойство постоянства скорости света. Более того, можно показать, что выбор типа хронометра предопределяет и выбор хроногеометрии, т.е. последняя не

абсолютна, как полагал Г. Минковский, а относительна, или процедурно зависима. Если использовать хронометр, в котором роль эталонной волны выполняет не свет, а, например, звук, то мы получим акустическую модель хроногеометрии Минковского, в которой абсолютная (предельная) скорость c будет равна скорости звука в соответствующей среде. Следовательно, с позиций конструктивного метода становится ясным, что "абсолютизм" (и связанный с ним "фатализм") фундаментального метода обусловлен тем простым обстоятельством, что свет и электромагнитные волны выполняют функцию основной эталонной волны во многих физических пространственно-временных измерениях.

Таким образом, конструктивная теория релятивизма не изменяет математическую структуру фундаментальной теории, но позволяет изменить отношение к релятивистским эффектам на основе понимания их измерительной природы. Иначе говоря, наша критика фундаментального подхода сводится к отказу от концепции "глобального единства пространства-времени", декларированной Г. Минковским, и к защите конструктивной концепции "инструментального единства". Существенным обстоятельством такой смены парадигм является возможность значительного расширения областей приложения релятивистских представлений, а также увеличения разнообразия хроногеометрий.

4.1. Часы Ланжевена

Попытки переизложения основ СТО, предпринимаемые критически настроенными физиками, например, Г. Бонди, содержат правильные предпосылки [12]:

"Любая величина в физике определяется посредством того способа, который использован для ее измерения. Следовательно, время — это то, что измеряется часами. Нет никаких оснований думать, что все часы независимо от состояния их движения будут показывать одно и то же время".

Но эти предпосылки, как отмечалось выше, не получили конструктивного развития.

Если смотреть на "проблему часов" и их парадоксов широко, то, видимо, следовало бы подвергнуть релятивистскому анализу все известные часы — солнечные и песочные часы, клепсидры, а также маятниковые и атомные часы. Однако такой сравнительный анализ разных часов в современной релятивистской физике отсутствует. Поэтому в анализе процедур согласования часов разных инерциальных наблюдателей опираются не на модели конкретных типов часов, а лишь на декларации, в итоге согласующиеся с геометрией Минковского.

Возможно, отсутствие релятивистской теории механических часов не является, так сказать, упущением или недосмотром теоретиков, но некоторое недопонимание причин отсутствия такой теории все же имеется. Дело в том, что классические теории механических часов основаны на законах классической механики, которые инвариантны относительно преобразования Галилея, но не инвариантны относительно преобразований Лоренца. В этом нетрудно убедиться на простом примере математического маятника или даже на более простом примере линейного осциллятора, содержащего только массу и идеальную пружину.

Следствие 4.1. *Единая релятивистская теория часов невозможна. Поэтому говорить в релятивистском контексте о "произвольных часах" не следует.*

На наш взгляд, релятивистская теория — это теория других, а именно "волновых часов", когда существенны свойства распространения той "эталонной волны", которая используется для измерительных целей. Действительно, в описаниях релятивистских эффектов часто фигурируют специальные хронометры, например (см. [11, 38, 62]), часы Ланжевена.

Часы Ланжевена. Твердый метровый стержень, имеющий на концах пару параллельных зеркал, между которыми "тикает" импульс света, последовательно отражаясь (без затухания) то от одного зеркала, то от другого.

По существу часы Ланжевена — это замкнутый вариант хронометрической процедуры А. Эйнштейна (см. раздел 3.3.1). Поэтому "ход" часов Ланжевена должен быть в согласии с релятивистской теорией, но только какой — фундаментальной или конструктивной?

Теперь у нас имеется возможность осуществить "процедурное инвертирование" теории: не вводить фундаментальных постулатов, а использовать часы Ланжевена и как хронометр, и как линейку, т.е. считать, что все инерциальные наблюдатели пользуются именно этим прибором для решения хроногеометрических навигационных проблем.

Вопрос 4.1. Что следует из того, что часы Ланжевена подчиняются законам хроногеометрии Минковского?

Понятно, что если мы сначала принимаем ППСС и условие унимодулярности, то часы Ланжевена должны соответствовать геометрии Минковского. А если исходно не следовать стратегии А. Эйнштейна и не использовать ППСС?

Рассмотрим эту обратную ситуацию отдельно.

4.1.1. Гипотеза эфира. Выше, при формулировке обобщенного ППСС, мы не настаивали на целесообразности обратного принятия гипотезы эфира (см. раздел 3.4.2), поскольку для фундаментальной концепции релятивизма ("от постулата") не так уж существенно, что постулировать — эфир, обеспечивающий постоянство скорости света, или, без упоминания эфира, только свойство постоянства скорости света. Кинематический характер СТО позволяет отвлечься от физических аспектов распространения световых (электромагнитных) волн и анализировать необходимые и достаточные условия существования релятивистских эффектов с чисто геометрических позиций — как проблему инвариантных лучей. Из сравнительного обзора теоретических методов, приведенного в разделе 3, видно, что постулатная методология стала доминирующей в изложениях и переизложениях СТО, а первый процедурный метод А. Эйнштейна служит главным образом иллюстрацией возможности получать и таким "экспериментальным" способом те же результаты (если при этом исходить из ППСС), которые дают непроцедурные методы.

При переходе к конструктивной концепции релятивизма у нас нет других альтернатив, кроме использования исключительно процедурных методов, для которых гипотеза эфира становится обязательным компонентом. Отказываясь от первичного декларирования ППСС, необходимо иметь его "материальный" заменитель. Разобшим основные ингредиенты ППСС:

П1) скорость света не зависит от скорости источника;

П2) скорость света не зависит от скорости приемника.

Именно положение П1) составляет кредо концепции эфира — светоносной среды, — отражая материалистические устремления классической (нерелятивистской) научной методологии физиков, пытавшихся устранить метафизическую обособленность электромагнитных явлений, ведь многие другие процессы, быть может, кроме гравитации, обладают материальными носителями (тепло, звук, нервный импульс и др.). Вообще говоря, гипотеза эфира вполне естественна для физического мировоззрения, другое дело, как к ней относиться.

Вопрос 4.2. Нужно ли отказываться от того, от чего можно не отказываться, или лучше отказаться от того, что не удается выявить явно?

Суть СТО не состоит в необходимости отказа от гипотезы эфира. Для понимания смысла положения П2) как раз полезно сначала исходить из этой гипотезы, а уже потом решать, позволяют ли кинематические средства "привязаться" к системе отсчета эфира. Чтобы исследовать конструктивные возможности, далее принимается

Гипотеза эфира. *Однородная светоносная среда существует.*

Теперь положение П1) можно интерпретировать как следствие гипотезы эфира. Посмотрим, какие другие следствия можно еще извлечь из этой гипотезы.

4.1.2. Оптический хронометр. Как в процедуре Эйнштейна, так и в методе Бонди используются асимметричные варианты посылки тестовых сигналов, тогда как более правильно сразу вводить симметричные варианты, чтобы рассматривать не треугольники трех событий, а параллелограммы четырех событий, совмещая начала АСО и ОСО с серединой стержня хронометра (см. ниже). Преимущества такой процедурной симметризации обусловлены известной теоремой проективной геометрии, согласно которой четыре прямые, инцидентные двум диагоналям и двум сторонам параллелограмма, находясь в гармоническом соответствии.

Следствие 4.2. *Выделение параллелограмма лучей света служит прямым геометрическим доказательством проективной инвариантности базисов ОСО.*

Если бы Эйнштейн пользовался симметричным вариантом тестовой процедуры, то ему бы не потребовалось вводить дополнительное предположение о том, что ось одновременных событий проходит через середину основания треугольника тестовых событий, так как диагонали параллелограмма всегда пересекаются в средних точках.

Целесообразно так модернизировать конструкцию часов Ланжевена, чтобы за один такт лучи света формировали параллелограмм.

Оптический хронометр (ОХМ). Стержень длины $2L_0$ имеет торцевые зеркала, а в середине — импульсный источник света и два приемника (два фотоэлемента), каждый из которых принимает отраженные импульсы своего плеча; повторная вспышка генерируется, когда оба отраженных сигнала приходят одновременно.

Конструктивный подход отличается от фундаментального главным образом тем, что исходным определяющим условием служит не ППСС, а гипотеза эфира, так как необходимая информация о скоростях света содержится в гипотезе эфира. Для расчета тактов ОХМ достаточно знать граничные и начальные условия —

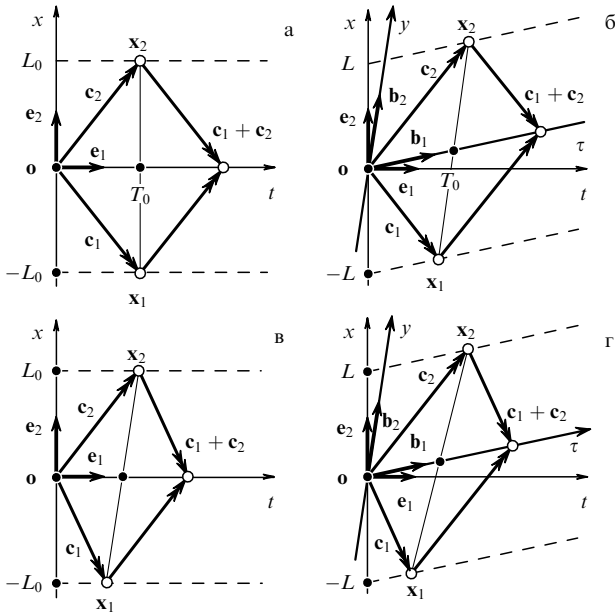


Рис. 12. Лучевые параллелограммы волновых часов в АСО (а, в) и ОСО (б, г), когда среда изотропна (а, б) или анизотропна (в, г).

длину плеч L_0 и момент $t = 0$ генерации начальной вспышки (δ -импульса света).

Начальный элементарный акт хода лучей света от центра ОХМ к равноудаленным зеркалам и обратно формирует параллелограмм лучей (рис. 12а, б)

$$\mathbf{P} \equiv \{\mathbf{o}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\}; \tag{4.1}$$

вершинами которого служат: \mathbf{o} — событие инициации,

$$\mathbf{c}_1 \equiv (t_1, x_1)' = t_C(1, c_1)', \quad \mathbf{c}_2 \equiv (t_2, x_2)' = x_C(c_2^{-1}, 1)'$$

— события отражения от заднего и переднего зеркал, $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ — событие синхронного возврата.

АСО. В случае изотропного эфира ($c_2 = -c_1 = c$), как на рис. 12в, события отражения одновременны: $t_1 = t_2 = T_0$, и зеркально симметричны относительно оси времени: $x_2 = -x_1 = L_0$. Поэтому событие возврата оказывается на оси времени АСО в момент $2T_0$, так как $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = (2T_0, 0)'$. Параллелограмм лучей (4.1) в этом случае имеет форму ромба.

Пару начальных лучей, как и ранее (см. (3.16)), представим матрицей

$$\mathbf{C} \equiv (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \equiv \mathbf{V}_C \mathbf{D}_C \equiv \mathbf{V}[-c, c] \mathbf{D}[t_C, x_C],$$

а граничные условия — матрицей

$$\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = ((t_1, -L_0)', (t_2, L_0)').$$

Решая граничную задачу $\mathbf{C} = \mathbf{X}$, определим калибровочную матрицу \mathbf{D}_C :

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{D}_C = \text{diag}\left(\frac{L_0}{c}, L_0\right). \tag{4.2}$$

В отличие от предыдущего метода (см. (3.18)) здесь сначала из векторов полудиagonalей параллелограмма лучей формируется "параллелограммный базис" $\mathbf{P}_0 \equiv (\mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{20})$, который простым образом связан с базисом

лучей:

$$\mathbf{c}_1 \equiv \mathbf{p}_{10} - \mathbf{p}_{20}, \quad \mathbf{c}_2 \equiv \mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{P}_0 \mathbf{S},$$

где дополнительная матрица

$$\mathbf{S} \equiv (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbf{E} - \mathbf{J}$$

есть, с одной стороны, алгебраический оператор аддитивной связи векторов лучей и диагоналей, но с другой стороны,

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{V}[-1, 1] \mathbf{D}[1, 1]$$

— это геометрический базис лучей \mathbf{C} , определяемый относительно параллелограммного базиса.

Рассматриваемая тривиальная ситуация потому и важна для введения матричной символики, что является типовой — последующие общие случаи описываются практически таким же образом. После простых вычислений находим

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} = (T_0 \mathbf{e}_1, L_0 \mathbf{e}_2), \tag{4.3}$$

где $T_0 = L_0/c$, т.е. в данном простейшем случае базис \mathbf{P}_0 коллинеарен \mathbf{E} -базису АСО.

ОСО. Так как вариант, когда ОХМ находится в базисе ОСО, мы описываем относительно АСО, то траектории лучей согласно гипотезе эфира остаются прежними (рис. 12б). Изменяются только граничные условия, которые теперь представляются матрицей

$$\mathbf{X} = ((t_1, -L + vt_1)', (t_2, L + vt_2)'), \tag{4.4}$$

а решение новой граничной задачи дает новую калибровочную матрицу

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{D}_C = \text{diag}\left(\frac{L}{c+v}, \frac{L}{1-v/c}\right). \tag{4.5}$$

Элементарный акт хода лучей света от центра ОХМ к равноудаленным зеркалам и обратно формирует в АСО параллелограмм лучей, который в векторной нотации описывается той же формулой (4.1), но при этом согласно (4.5) изменяется базис лучей и, как следствие, изменяется параллелограммный базис ОСО:

$$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1}. \tag{4.6}$$

Однако ОСО-наблюдатель в собственном базисе \mathbf{B} представляет \mathbf{P} как \mathbf{P}_0 . Алгебраический перевод "точки зрения ОСО-наблюдателя" в "точку зрения АСО-наблюдателя" производится простой заменой \mathbf{E} -базиса на \mathbf{B} -базис. Действительно, заменяя в матрице (4.3) векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 на векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 , получим описание базиса (4.6) относительно искомого базиса \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (T_0 \mathbf{b}_1, L_0 \mathbf{b}_2) = (T_0 \mathbf{B} \mathbf{e}_1, L_0 \mathbf{B} \mathbf{e}_2) = \\ &= \mathbf{B}(T_0 \mathbf{e}_1, L_0 \mathbf{e}_2) = \mathbf{B} \mathbf{P}_0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Следовательно, искомый базис ОСО выражается через параллелограммные базисы:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{P}_0^{-1} = \rho \mathbf{L}(v; c), \tag{4.8}$$

где $\rho = \gamma L/L_0$ — тот же "лишний" множитель, который имеет место и в фундаментальной версии СТО, а $\mathbf{L}(v; c)$ — базис преобразования Лоренца (см. (3.7)). Иначе говоря, мы получили старую формулу новым методом. Самое главное в новом методе — это то, что мы исходно не использовали ППСС, а ограничились гипотезой эфира и симметричной конструкцией оптохронометра. Благодаря этому появилась возможность изменить отношение к проблеме "единства пространства-времени".

Пусть многочисленные и независимые инерциальные "путешественники" снабжены разнообразными часами, включая персональные ОХМ, которые из-за различий в конструкциях "ходят" по-разному. Следует ли нам относиться при этом к ОХМ иначе, чем к другим часам, т.е. считать, что ОХМ показывают "более истинное" время, чем какие-либо другие часы? Нам представляется, что не следует (см. заключение).

Вывод 4.1. При наличии светоносной среды релятивистская хроногеометрия — следствие выбора модели волновых часов.

4.1.3. Процедурный изоморфизм. Метод параллелограмма лучей позволяет наглядно продемонстрировать те психологические трудности, которые возникают при переходе к анизотропной модели эфира. В фундаментальной версии СТО эти трудности не проявляются явным образом только при использовании метода инвариантных лучей, поэтому этот метод и был использован нами для обобщений. Однако в конструктивной версии приходится пользоваться процедурными методами, и здесь трудности понимания начинаются с параллелограммного базиса АСО, диагонали которого не коллинеарны осям АСО. Поэтому при описании ОСО и возникает проблема выбора принципа построения базиса ОСО. Эту проблему удастся решить посредством обобщения процедуры согласования точек зрения разных наблюдателей на векторную структуру параллелограммных базисов, которая описана выше при выводе формулы (4.8) из формулы (4.6). Параллелограмм лучей — это одна из разновидностей тестовой процедуры, предназначенной для выявления хроногеометрических свойств волновых часов. Именно в таком понимании теста формулируется следующий

Принцип процедурного изоморфизма (ППИ). Произвольная ОСО процедурно эквивалентна АСО, если пространственно-временное описание теста выражается геометрически в замене \mathbf{E} -базиса АСО на \mathbf{B} -базис ОСО.

Предыдущее описание (4.1) параллелограммных базисов ОХМ содержит векторные и матричные формулы, которые справедливы также для анизотропного эфира. Решая те же граничные задачи без дополнительного условия изотропии, имеем

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{D}_C = \text{diag} \left(\frac{L}{c_1 + v}, \frac{L}{1 - v/c_2} \right). \quad (4.9)$$

Отсюда для АСО (рис. 12в), когда $v = 0$, находим сначала матрицу \mathbf{C}_0 и матрицу

$$\mathbf{P}_0 \equiv \mathbf{C}_0 \mathbf{S}^{-1} = (t_+ \mathbf{e}_1, t_- \mathbf{e}_1 + L_0 \mathbf{e}_2), \quad (4.10)$$

где

$$t_+ = \frac{t_2 + t_1}{2} = \frac{L_0}{c_+}, \quad t_- = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{L_0}{c_-},$$

$$c_+^{-1} \equiv \frac{c_2^{-1} - c_1^{-1}}{2}, \quad c_-^{-1} \equiv \frac{c_2^{-1} + c_1^{-1}}{2}.$$

Затем для ОСО (рис. 12г), когда $v \neq 0$, находим сначала матрицу \mathbf{C} и матрицу

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{S}^{-1} = (t_+ \mathbf{b}_1, t_- \mathbf{b}_1 + L_0 \mathbf{b}_2) = \mathbf{B} \mathbf{P}_0. \quad (4.11)$$

Следовательно, метрический базис произвольной ОСО есть

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{P} \mathbf{P}_0^{-1} = \rho \mathbf{P}_0 \mathbf{H}(\alpha) \mathbf{P}_0^{-1}. \quad (4.12)$$

Полученный базис ОСО — аналог анизотропной версии метода Ланцоша (раздел 3.4.1).

Вывод 4.2. Опираясь в определениях базисов лучей АСО и ОСО на гипотезу эфира, а также на принцип процедурного изоморфизма в определении связи параллелограммного базиса с метрическим, мы получили процедурно-инструментальное определение хроногеометрии, которая при условии унимодулярности $\rho = 1$ подобна геометрии Минковского.

4.1.4. Акустический хронометр. Для описанной модели волновых часов — *оптического хронометра* (ОХМ) — в действительности несуществен ни тип источника волны (например, света или звука), ни тип среды распространения волны (например, воздуха, воды и др. для звука). Необходимо только каждую модель часов, связанную с определенным типом волны, определять автономно и считать среду бесконечной: автономизация важна для понимания необходимости замкнутого определения волновой хроногеометрии.

Известные противопоставления физических свойств света и звука возможны только потому, что свойства звуковых волн мы можем изучать на основе зрительной информации или посредством световых или электромагнитных волн, имеющих значительно большую скорость, тогда как свойства электромагнитных волн изучаются теми же средствами — с помощью электромагнитных волн. Однако если сознательно отказаться от визуальных критериев и от использования электромагнитных волн, т.е. изучать свойства звука только акустическими методами и средствами, то мы неизбежно придем к концепциям акустического релятивизма, в частности к постулатам о постоянстве скорости звука.

Чтобы это лучше понять, следует представить "модель развития слепого человечества", обладающего всеми органами чувств, кроме зрения. Какая могла бы быть физика в этом случае? Тогда наверняка звук считался бы самым быстрым сигналом и вместо радиолокационных методов использовались бы акустолокационные, что и характерно для пространственной ориентации слепых. Но и для "зрячего человечества" вполне полезно определить

Акустический хронометр (АХМ). АХМ отличается от ОХМ наличием импульсного источника звука, упругими экранами вместо зеркал и заменой "светоносной" среды на "звуконосную".

Теория АХМ будет представляться теми же формулами, полученными выше для ОХМ, в которых константы c_1 и c_2 — скорости звука для анизотропной модели.

Конечно, используя опыт визуальных исследований, нам нетрудно придумать эксперименты по выявлению "эффектов увлечения воздушной среды", например, помещая пару АХМ на внутренней и внешней сторонах движущегося вагона или самолета и при синхронной регистрации "тиков" двух АХМ. В данном случае мы исходно знаем, где и как увлекается среда. Но осуществленные порознь такие эксперименты не выявят эффектов увлечения.

Важно понять, что эффекты увлечения несущественны для внутренней геометрии релятивизма, связанного с определенным типом эталонной волны:

если в разных ОСО, находящихся в относительных движениях, регистрируется одна и та же скорость эталонной волны, то не имеет значения, существуют ли дополнительные инерциальные движения среды, обусловленные "увлечением".

Поэтому когда невозможно создать границу раздела увлекаемой и неувлекаемой сред для односторонней и одновременной регистраций, невозможно и выявить существование среды в кинематических экспериментах с одним типом эталонной волны.

4.1.5. Механический хронометр. Формальный переход от геометрии Минковского к геометрии Галилея (ГГ) обычно совершается на основе предельного перехода, когда скорость света в случае изотропного распространения неограниченно возрастает. Действительно, если "константная скорость света", понимаемая как формальный математический параметр, беспрельдно увеличивается, то матрица Лоренца $L(v; c)$ (см. (3.7)) трансформируется в матрицу Галилея $G(v)$:

$$L(v; c)_{c \rightarrow \infty} \rightarrow G(v) \equiv E + vE_{21}. \quad (4.13)$$

С математической точки зрения такой предельный переход представляется безупречным, но с физической он ведет к интерпретации ГГ как хроногеометрии бесконечно быстрых или мгновенных взаимодействий. Но если исходить из физического постулата отсутствия мгновенных взаимодействий, то предельная интерпретация ГГ (4.13) ставит ее в разряд фиктивных моделей пространственно-временных отношений.

Более правильно, на наш взгляд, определять ГГ на основе других свойств инерциальных движений, не связанных непосредственно с волновыми свойствами распространения света. С целью прояснения альтернативной концепции изучим

Механический хронометр (МХМ). В середине стержня длины $2L_0$ установлены два "пулемета", стреляющие "материальными точками" в положительном и отрицательном направлениях, на краях стержня закреплены идеально упругие экраны.

Ограничимся изотропной версией: в АСО скорости движения материальных точек есть $c_2 = -c_1 = c$. Рассматривая далее тестовую процедуру, аналогичную случаю ОХМ, мы для варианта неподвижного МХМ получим аналогичный параллелограмм "лучей" или траекторий материальных точек, описываемый матричным равенством

$$C_0 = P_0 S \Leftrightarrow C_0 = V[-c, c] D \left[\frac{L_0}{c}, L_0 \right], \quad P_0 = D \left[\frac{L_0}{c}, L_0 \right].$$

Если же МХМ движется со скоростью v , то, следуя обычным законам механики, определим скорости дви-

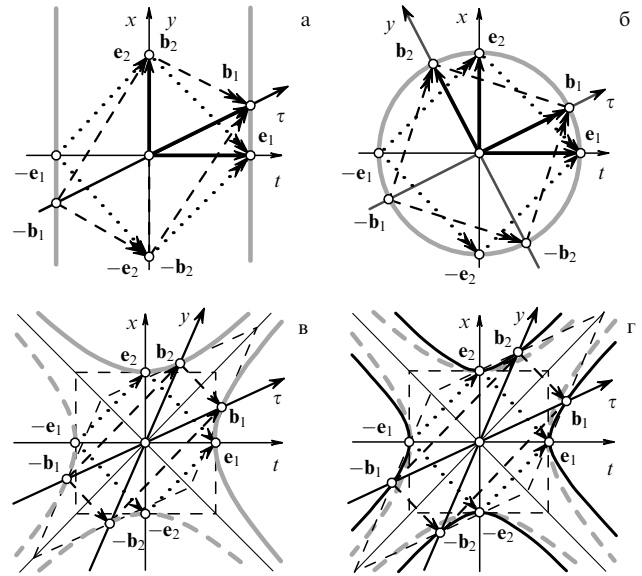


Рис. 13. Лучевые модели геометрий: Галилея (а), Евклида (б), Минковского (в) и изоритметрической версии (г).

жения материальных точек в отрицательном и положительном направлениях обычным образом (рис. 13а):

$$c_1 = -c + v, \quad c_2 = c + v. \quad (4.14)$$

Тогда получается матрица лучей

$$C \equiv V[c_1, c_2] D[t_c, x_c] = V[c_1, c_2] D \left[\frac{L}{c}, L + \frac{Lv}{c} \right],$$

в которой масштабные параметры доопределяются граничными условиями (4.4). Далее, по аналогии с (4.8) находим метрический базис для ОСО МХМ:

$$B = PP_0^{-1} = CC_0^{-1} = \frac{L}{L_0} G(v), \quad (4.15)$$

т.е. если полагать, что скорость инерциального движения не влияет на длину стержня МХМ и во всех ОСО множитель L/L_0 равен 1, то $B = G(v)$ — базис геометрии Галилея (4.11), который при этом является унимодулярным.

Вывод 4.3. Определение геометрии Галилея можно получить на основе хронометрической процедуры волнового типа, но используя не волновые, а "корпускулярные" определяющие соотношения (4.14).

Замечание 4.1. Метод лучей можно использовать и для формального определения геометрии Евклида (рис. 13б), выбирая в уравнении $C = BS$ следующую матрицу лучей:

$$C = (\sin \alpha + \cos \alpha)E + (\sin \alpha - \cos \alpha)J;$$

при этом матрица S сохраняет стандартный вид $S = E - J$.

4.1.6. Постулат постоянства длины. В предыдущих описаниях волновых и корпускулярных часов фигурирует априори произвольная длина стержня $L(v)$, которая графически идентифицируется длиной отрезка пространственной оси АСО, выделяемого мировыми

линиями концов стержня ОХМ (рис. 12б). При доопределении базиса Галилея (4.15) мы положили

$$L(v) = \text{const} \equiv L_0, \quad (4.16)$$

т.е. фактически приняли постулат постоянства длины (ППД) для всех ОСО и АСО.

В случае ОХМ "произвол" выбора функции длины $L(v)$ связан с выбором величины общего множителя ρ (см. (4.8) и (4.12)), который под именем "лишнего" множителя рассматривался в разделе 3 (см. (3.9)) и который в изотропном варианте связан с другими параметрами следующим образом:

$$\rho^2 = \frac{(L/L_0)^2}{1 - v^2/c^2} = \left(\frac{L}{L_0} \gamma\right)^2 = \left(\frac{L}{L_0} \cosh \alpha\right)^2. \quad (4.17)$$

Эпитет "лишний" появился главным образом потому, что унимодулярной геометрии Минковского соответствует условие исчезновения этого множителя:

$$\rho = 1 \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\cosh \alpha}, \quad (4.18)$$

но при этом порождается релятивистский эффект "сокращения длины" $L(v)$ при росте скорости инерциального движения v . Из лучевой схемы геометрии Минковского видно (рис. 13в), что в этом случае параллелограммы лучей являются касательными к гиперболическим эталонам, поэтому длины отрезков осей, отсекаемые этими касательными, уменьшаются с ростом скорости ОСО согласно (4.18).

Вопрос 4.2. Возможно ли доопределение "лишнего" множителя на основе постулата постоянной длины?

Возможно, но тогда мы получим новую хроногеометрию с гиперболическими эталонами, но без эффектов сокращения длины и замедления времени.

Выберем вместо (4.18) условие (4.16). Тогда согласно (4.17) имеем

$$L = L_0 \Rightarrow \rho = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \cosh \alpha. \quad (4.19)$$

Тогда у стандартной матрицы базиса Лоренца или гиперболического поворота появляется дополнительный множитель:

$$\mathbf{B} = \rho \mathbf{L}(v; c) = \cosh \alpha \mathbf{H}(\alpha),$$

наличие которого модифицирует базис следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \cosh \alpha \mathbf{H}(\alpha) = (\cosh \alpha)^2 \mathbf{E} + \cosh \alpha \sinh \alpha \mathbf{I} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{H}(2\alpha)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Учитывая, что матрица \mathbf{H} является решением производящего уравнения геометрии Минковского (см. (П.33) и (3.11)), мы можем для базиса (4.20) написать матричное уравнение

$$(2\mathbf{B} - \mathbf{E})' \mathbf{F} (2\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{F} \quad (4.21)$$

— производящее уравнение изометрической версии.

Нетрудно убедиться, что в данной модификации геометрии Минковского условие изометричности (4.19) обеспечивает сразу и условие изоритмичности $T = T_0$,

поскольку эти параметры (см. (3.9)) связаны условием $L/T = L_0/T_0 = c$. Графическое сравнение унимодулярной и изометрической версий дано на рис. 13г: стороны параллелограммов лучей изометрической и изоритмической версий являются секущими гиперболических эталонов, при изменении скорости ОСО стороны параллелограммов "вращаются" вокруг базисных точек $\pm \mathbf{e}_1$ и $\pm \mathbf{e}_2$, которые тем самым являются фиксированными событиями всех ОСО.

Вывод 4.4. Возможна хроногеометрия, удовлетворяющая ППСС, в которой отсутствуют эффекты сокращения длин и замедления времени, обобщенно определяемая матричным уравнением (4.21).

4.2. Процедура Паскаля

Общей частью рассмотренных выше хронометров были торцевые зеркала или экраны, предназначенные для отражения эталонных процессов, способных, так сказать, отражаться и тем самым изменять направление распространения (свет, звук) или движения (корпускулы). Назовем такое устройство часов *зеркальной метафорой*: кинематически зеркала в АСО и ОСО представляются прямыми линиями, которые параллельны оси времени; параллелограмм лучей представляется двумя парами вершин, одна пара соответствует начальному событию излучения и конечному событию встречи лучей, которые инцидентны оси времени, а вторая пара соответствует промежуточным событиям отражения от зеркал, которые в изотропном случае интерпретируются как одновременные события, определяющие пространственноподобную ось.

Данная в разделе 2 хроногеометрическая интерпретация локомоторных синергий не соответствует зеркальной метафоре, и мы будем ее условно называть *локомоторной метафорой*. В этой интерпретации аналогами событий отражения являются референтные события, инцидентные опорной прямой (рис. 5г и рис. 6з). Чтобы объяснить формирование гиперболических эталонов локомоторных синергий (рис. 6д–ж), необходимы дополнительные гипотезы об инструментальных свойствах управляющей системы мозга.

4.2.1. Волновые инструменты мозга. Если следовать освоенной в технических системах теории регулирования, то и инварианты шага можно пытаться объяснять на основе цепей обратных связей. Однако более адекватной для распределенных сред мозга нам представляется гипотеза волнового управления, ведущая к новым понятиям нейрофизиологического релятивизма. Умозрительное освоение этого аспекта естественно начинать с постулата "эталонных волн", но прежде полезно договориться в абстрактной форме о связи событий внешнего мира (например, представляющих целевую траекторию движения конечности) с внутренними событиями центральной нервной системы. Для обеспечения минимального согласования реальных кинематических событий с их виртуальными образами выделим два предположения.

Гипотеза целевой карты. В распределенных средах мозга формируется некоторый линейноподобный образ целевой траектории конечности.

Такое предположение позволяет для описания внутрицентрального образа целевой траектории использовать (с точностью до линейного изоморфизма) те же

параметры, что и ранее, а также совмещать пространственно-временные траектории конечности и эталонной волны как кинематические сущности карты мозга. Вообще говоря, следует предполагать (и этому имеются нейрофизиологические подтверждения) существование в мозге двух карт — *карты тела*, играющей роль АСО и связанной с образом целевой траектории, а также *карты внешнего пространства*, играющей при локомоции роль ОСО.

Кинематические задачи локомоторного управления тогда можно интерпретировать как задачи согласования событий этих двух карт. Несомненно, задача согласования событий карты тела и карты подвижного внешнего пространства актуальна для "локомоторного интеллекта", другой вопрос — каковы инструментальные механизмы решения этой задачи средствами нервной системы.

Гипотеза эталонных волн. Измерительные процедуры упорядочения событий в картах мозга осуществляются посредством стандартных распространяющихся процессов — эталонных волн нервной природы.

Оценки констант c_1 и c_2 , полученные в описаниях структурной синергии цикла (см. табл. 5, 6) можно интерпретировать как скорости эталонных волн, участвующих в формировании этой синергии. Выше были перечислены основные количественные свойства этих скоростей (см. раздел 2.5.2): по свойствам унитарности, анизотропии и ангармоничности эталонные волны *локомоторной теории относительности* (ЛТО) отличаются от хорошо известного физического аналога — эталонных волн СТО.

Из-за необычных свойств эталонных волн пространственно-временные диаграммы ЛТО строятся иначе, чем в СТО. Выше мы построили анизотропные и ангармонические версии СТО и тем самым доказали возможность учета таких модификаций в рамках зеркальной метафоры. Однако свойство унитарности эталонных волн противоречит зеркальному методу хронометрии, и для учета таких свойств необходимы принципиально другие конструктивные решения.

4.2.2. Модель реинициации вторичных лучей. На рисунке 14а приведен пример новой диаграммы, который в кинематической форме представляет алгоритм построения целевого события окончания фазы переноса $y_+ \in Z$ посредством волновой процедуры, которая отличается от процедуры Эйнштейна (рис. 11а, б) и от параллелограмма лучей ОХМ (рис. 12а, б). Здесь $o \in Z$ — пейсмекерное событие инициации двух первичных лучей c_1 и c_2 , для которых опорный участок сопряженной траектории Z^* выполняет функцию граничного условия реинициации вторичных лучей; r_1 и r_2 — события реинициации, определяемые относительно точки c_0 пересечения траекторий. Вторичные лучи формируют целевое событие $y_+ = c_1 + c_2$, совпадающее с четвертой вершиной параллелограмма лучей эталонных волн.

Ограничиваясь кинематическим ракурсом, следует обратить внимание на проективные свойства диаграмм с унитарными эталонными волнами (рис. 14а), где опорная прямая имеет проективный смысл так называемой прямой Паскаля. Учет этого простого математического обстоятельства позволяет понять, как на основе измерительно-логических процедур может формироваться с участием эталонных волн гиперболическая метрика пространства-времени. Подчеркивая проективное содержание этой схемы, ее удобно назвать

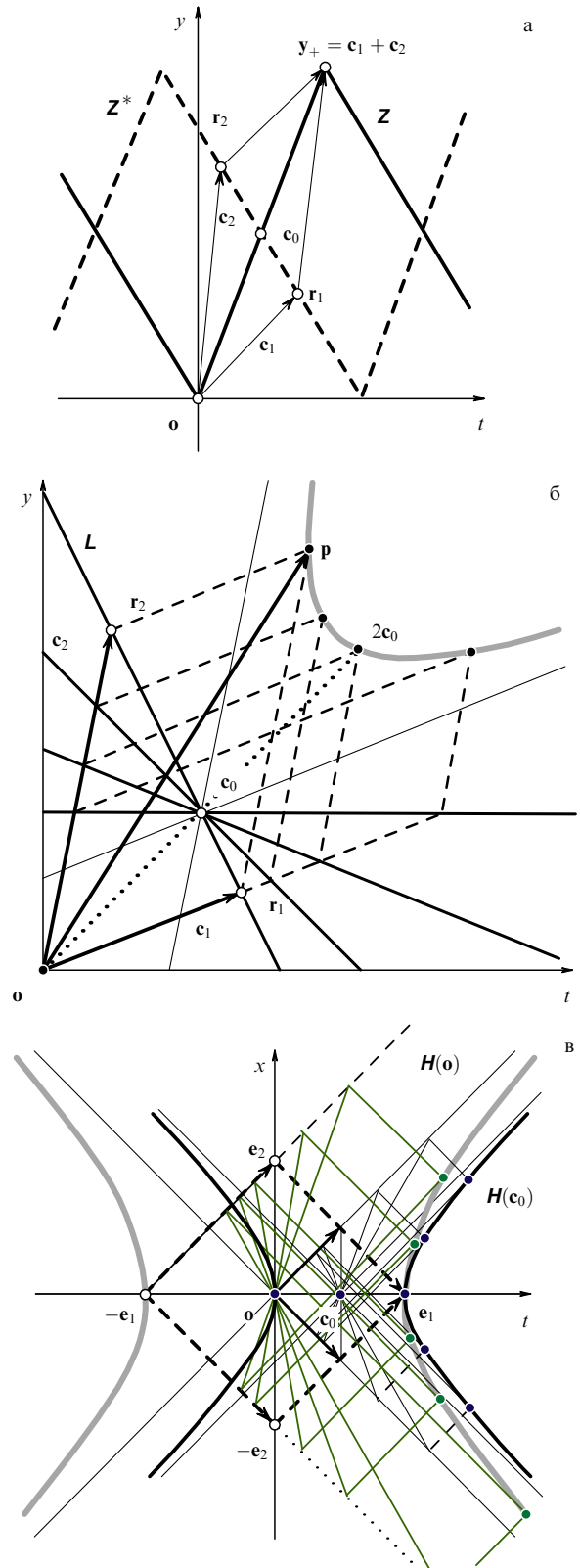


Рис. 14. Лучевая схема формирования целевого события шага (а), которая служит синтетическим механизмом (процедурой Паскаля) гиперболической метрики локомоторного управления; (б, в) лучевой метод построения канонической гиперболы $H(o)$ геометрии Минковского и базальной гиперболы $H(c_0)$ изоритмометрической геохронометрии.

ская метрика пространства-времени. Подчеркивая проективное содержание этой схемы, ее удобно назвать

процедурой Паскаля, чтобы отличать от физической процедуры Эйнштейна, представляющей с математической точки зрения определенную модификацию процедуры Паскаля.

Процедура Паскаля элементарна в том смысле, что позволяет осуществить графическое построение гиперболы только посредством рейсшины, но именно эта инструментальная простота, возможно, имеет глубокое значение для понимания конструктивной природы нейрорхроногеометрии (где роль рейсшины играют эталонные волны).

4.2.3. Метод опорной прямой. Чтобы определить базисную матрицу \mathbf{B} "часов Паскаля", нужно воспользоваться предыдущим общим методом построения параллелограммного базиса \mathbf{P} вида (4.6), но с учетом новых граничных условий для первичных лучей. Выделяя затем начальный параллелограмм \mathbf{P}_0 , мы определим метрический базис ОСО \mathbf{B} , понимая его как базис, относительно которого произвольный параллелограмм $\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{P}_0$ представляется как начальный параллелограмм \mathbf{P}_0 . В предыдущих моделях релятивистских часов естественным критерием выделения начального параллелограмма АСО \mathbf{P}_0 было условие нулевой относительной скорости, $v = 0$. Но в часах Паскаля такой критерий не всегда возможен, и альтернативным аналогом здесь служит условие $v = v_0$ — выбор характеристической скорости.

В общем матричном определении параллелограммного базиса $\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}$ матрица лучей $\mathbf{C} \equiv (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ доопределяется (рис. 14б) граничными условиями пересечения лучей с опорной прямой $\mathbf{L}(\mathbf{r}; \mathbf{c}_0)$, где $\mathbf{r} \equiv (t_r, x_r)' = t_r(1, v)'$ — направляющий вектор, $\mathbf{c}_0 \equiv (t_0, x_0)'$ — центр вращения прямой. Выделяя на опорной прямой коллинеарные события \mathbf{r}_1 и $\mathbf{r}_2 \equiv \lambda \mathbf{r}_1$, для начальных лучей имеем граничные условия

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_0 + \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_0 + \mathbf{r}_2.$$

Переходя к матричной записи этих условий

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \equiv (\mathbf{c}_0 + \mathbf{r}_1, \mathbf{c}_0 + \lambda \mathbf{r}_1),$$

учтем (см. (3.16)) разложение матрицы лучей в произведение двух матриц — базисной матрицы и калибровочной матрицы, $\mathbf{C} \equiv \mathbf{V}_C \mathbf{D}_C$, что позволяет сразу выделить диагональную матрицу

$$\mathbf{D}_C = \mathbf{V}_C^{-1} \mathbf{X} \equiv (\bar{\mathbf{c}}_0 + \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{c}}_0 + \lambda \bar{\mathbf{r}}_1).$$

Тогда правая часть граничных условий — это определенный ранее (см. раздел 3.3.4) переход в базис лучей (черта над векторами означает представление этих векторов в базисе лучей). Решая данные уравнения, находим $\lambda = \bar{v}/\bar{v}_0$ и компоненты калибровочной матрицы \mathbf{D}_C :

$$\bar{t} = \bar{t}_0 + \frac{\bar{x}_0}{\bar{v}}, \quad \bar{x} = \bar{v}\bar{t}_0 + \bar{x}_0 \quad (4.22)$$

— элементы вектора $\bar{\mathbf{p}} \equiv (\bar{t}, \bar{x})'$, половина которого формирует зеркально симметричный параллелограммный базис

$$\bar{\mathbf{P}} \equiv \mathbf{D}_C \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{F}\bar{\mathbf{p}}).$$

Из параметрических уравнений (4.22) видно, что вектор $\bar{\mathbf{p}} \equiv (\bar{t}, \bar{x})'$ инцидентен равнобочной гиперболе $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{c}}_0)$, центр которой совпадает с центром вращения опорной прямой (аналогичное построение описано выше; рис. 5г). Характеристической скорости $\bar{v} = \bar{v}_0$ соответствует базис $\bar{\mathbf{P}}_0 = (\bar{\mathbf{c}}_0, \mathbf{F}\bar{\mathbf{c}}_0)$, который и принимается за "начальный", поэтому

$$\bar{\mathbf{B}} \equiv \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{P}}_0^{-1} = \mathbf{D} \left[\frac{\bar{t}}{\bar{t}_0}, \frac{\bar{x}}{\bar{x}_0} \right] = \mathbf{D} \left[1 + \frac{\bar{v}_0}{\bar{v}}, 1 + \frac{\bar{v}}{\bar{v}_0} \right]. \quad (4.23)$$

Отсюда находим метрический базис

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}_C \bar{\mathbf{B}} \mathbf{V}_C^{-1} \equiv \mathbf{V}_C \mathbf{D} [d_1, d_2] \mathbf{V}_C^{-1}. \quad (4.24)$$

Здесь записаны общие символы $d_1 \equiv 1 + \bar{v}_0/\bar{v}$, $d_2 \equiv 1 + \bar{v}/\bar{v}_0$, в расшифровке которых следует отношения скоростей, определяемые в лучевом базисе, заменить следующим вурфом:

$$\frac{\bar{v}}{\bar{v}_0} = w(v, v_0; c_1, c_2); \quad (4.25)$$

для получения этого вурфа достаточна первая формула (3.30).

Исключая из уравнений параметр скорости, заменим их квадратичной формой:

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{c}}_0)' \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{c}}_0) &= \bar{\mathbf{c}}_0' \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{c}}_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathbf{p} - \mathbf{c}_0)' \mathbf{M}(\mathbf{p} - \mathbf{c}_0) &= \mathbf{c}_0' \mathbf{M} \mathbf{c}_0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $\mathbf{M} \equiv (\mathbf{V}_C^{-1})' \mathbf{I} \mathbf{V}_C^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})' \mathbf{I} \mathbf{C}^{-1}$, поскольку $\mathbf{D} \mathbf{I} \mathbf{D} = |\mathbf{D}| \mathbf{I}$, т.е. целевой эталон базиса \mathbf{B} "часов Паскаля" — базальная гипербола $\mathbf{H}(\mathbf{c}_0; \mathbf{C})$ с центром \mathbf{c}_0 и с асимптотами, направляющими которых служат векторы лучевой матрицы \mathbf{C} . Базальность этой гиперболы: $\mathbf{o} \in \mathbf{H}(\mathbf{c}_0; \mathbf{C})$ — прохождение одной из ветвей через начало координат (см. определение 2.5), следует из правой части ее квадратичной формы, так как аналогичная гипербола общего положения с выделенной фиксированной точкой $\mathbf{p}_1 \in \mathbf{H}(\mathbf{c}_0; \mathbf{C})$ описывается аналогичной формой

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}_0)' \mathbf{M}(\mathbf{p} - \mathbf{c}_0) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_0)' \mathbf{M}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_0). \quad (4.27)$$

Следствия требования инвариантности общей квадратичной формы с симметричной метрической матрицей рассматривались выше (см. раздел 2.2.4).

4.2.4. Инварианты "часов Паскаля". Базис "часов Паскаля" (4.24) является по общей алгебраической структуре частным случаем обобщенной модели (3.20), когда базис лучей процедурно инвариантен, что выражается в равенстве $\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_C$. Поэтому проективный и калибровочный инварианты базиса (4.24) совпадают с инвариантами анизотропной версии метода Ланцоша (3.36). Чтобы подтвердить этот вывод, применим к базису (4.24) следствие 3.3, в результате получим линейную связь базисных векторов $\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}\mathbf{b}_1$ с матрицей связи \mathbf{A} вида (3.13).

Оригинальные свойства часов Паскаля сосредоточены в калибровочных переменных (4.22), из которых формируются элементы диагонального базиса (4.23). Так как в естественной скоростной параметризации итогового базиса (4.24) выделяется вурф (4.25), то замена

$$\mathbf{e}^{2x} = w(v, v_0; c_1, c_2) \quad (4.28)$$

эквивалентна проективной репараметризации Φ . Клейна (см. замечание 3.3), результатом которой является стандартное представление базального базиса

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{H}(2\alpha; c_1, c_2)) = \cosh \alpha \mathbf{H}(\alpha; c_1, c_2),$$

где $\mathbf{H}(\alpha; c_1, c_2) \equiv \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{N}}$ — матрица обобщенного гиперболического поворота, обобщенная структурная матрица которого $\mathbf{N} \equiv \mathbf{V}_C \mathbf{FV}_C^{-1}$, $\mathbf{N}^2 = \mathbf{E}$ (ср. с (3.23)). Обобщенное производящее уравнение "опорной хроногеометрии Паскаля" имеет, следовательно, следующий вид:

$$(2\mathbf{B} - \mathbf{E})' \mathbf{M}(2\mathbf{B} - \mathbf{E}) = \mathbf{M}, \tag{4.29}$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{JN}^{-1}$ — метрическая матрица (см. раздел 6.3). В частном каноническом случае изотропной модели имеем

$$\mathbf{H}(\alpha; -1, 1) \equiv \mathbf{H}(\alpha), \quad \mathbf{N} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{F},$$

т.е. в этом случае уравнение (4.26) превращается в уравнение (4.21). Опорная реконструкция канонической изометрической хроногеометрии (рис. 14в) наглядно демонстрирует конструктивные свойства часов Паскаля в сравнении с оптохронометром (рис. 12а).

Выше уравнение (4.21) получено в рамках "зеркальной метафоры" хронометрии, основанной на процедуре Эйнштейна, но при этом потребовалось дополнительное условие постоянства эталонной длины (или периода). Теперь такая же по своей алгебраической структуре хроногеометрия построена на основе процедуры Паскаля и без дополнительных изометрических или изоритмических условий. Именно из-за отсутствия дополнительных условий "опорную метафору" можно считать более адекватной для конструктивной интерпретации изометрических свойств хронометрии, порождающей базальные эталоны уравнения (4.26).

Вывод 4.5. Геохронометрия, удовлетворяющая ППСС, в которой отсутствуют эффекты сокращения длин и замедления времени, конструктивно определяется с помощью процедуры Паскаля.

4.3. Метод фиксированных событий

Наиболее трудная часть конструктивной хроногеометрии — это процедурное обоснование проективного ангармонизма, который обусловлен не анизотропией распространения эталонных сигналов, а дополнительными свойствами проективного соответствия пучков базисных осей. Преодолению этой трудности помогает метод фиксированных событий (МФС), предварительное описание которого дано выше, при аналитическом обосновании синергии структуры шагательного цикла (см. раздел 2.5.5). В этом разделе рассматриваются общие геометрические свойства МФС как дополнительной концепции ("метафоры") конструктивного релятивизма. Процедура Паскаля пригодна для построения не только гипербол, но и других кривых 2-го порядка. Аналогично и МФС можно использовать для формирования негиперболических метрических эталонов, но, очевидно, для хроногеометрических приложений более существенны гиперболические формы.

4.3.1. Две задачи на построение. Многие свойства окружности тесно связаны с понятием перпендикулярности,

например: касательная перпендикулярна радиусу; диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен этой хорде. Для гиперболы аналогом такого свойства ортогонального соответствия служит свойство гармонического соответствия.

Пусть $\mathbf{C}(\mathbf{x}_c; \mathbf{x}_1)$ — окружность с центром \mathbf{x}_c и инцидентной точкой \mathbf{x}_1 . Аналогично, пусть $\mathbf{H}(\mathbf{x}_c; \mathbf{x}_1)$ — гипербола, для которой, кроме центра \mathbf{x}_c и инцидентной точки \mathbf{x}_1 , необходимо знать еще асимптотические направления, определяемые константами c_1 и c_2 (далее мы будем по умолчанию считать направления асимптот известными).

Задача 4.1. Заданы центр \mathbf{x}_c и точка \mathbf{x}_1 фигуры (окружности или гиперболы); требуется построить вторую произвольную точку этой фигуры.

Решение для обеих фигур дано на рис. 15а, б. Для окружности $\mathbf{C}(\mathbf{x}_c; \mathbf{x}_1)$ проводится произвольная радиальная прямая L_2 , строится биссектриса L_3 и на нее из точки \mathbf{x}_1 опускается перпендикуляр, продолжение которого пересекает прямую L_2 в искомой точке \mathbf{x}_2 . Параллелограмм $\mathbf{P} \equiv \{\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, формируемый векторами $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_c$ и $\mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_c$, есть ромб, его диагонали — хордальная прямая $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и радиальная прямая $L(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_3)$ — перпендикулярны.

Для гиперболы $\mathbf{H}(\mathbf{x}_c; \mathbf{x}_1)$ сначала через заданную точку \mathbf{x}_1 проводятся две прямые, \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 , параллельные асимптотам. Затем произвольная радиальная прямая L пересекает прямые \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 в точках \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 . Через новые вспомогательные точки \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 проводим дополнительные прямые \mathbf{A}_3 и \mathbf{A}_4 , параллельные асимптотам; тогда искомая точка $\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4$. Параллелограмм асимптот $\mathbf{P} \equiv \{\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{a}_2\}$ имеет хордальную диагональ $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и радиальную диагональ $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, которые находятся в

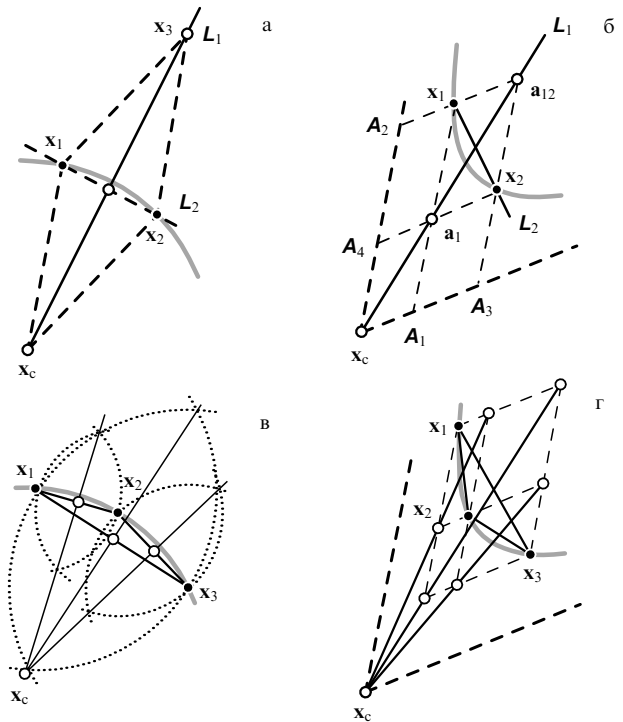


Рис. 15. Построения окружности (а) и гиперболы (б) по заданному центру и одной точке; обратные построения центра окружности (в) и гиперболы (г) по трем точкам.

гармоническом соответствии. Диагонали центрального параллелограмма $\mathbf{P} \equiv \{x_c, x_1, x_2, x_3\}$ коллинеарны диагоналям параллелограмма асимптот. \blacklozenge

Задача 4.2. Заданы три различные точки $\{x_1, x_2, x_3\}$ фигуры — окружности или гиперболы; требуется построить точку центра x_c этой фигуры.

Решение для обеих фигур дано на рис. 15в, г. Сначала заданные точки попарно соединяются хордами — получается треугольник хорд. Затем для построения центра описанной окружности $\mathbf{C}(x_c; x_1)$ через середины хорд проводятся перпендикулярные прямые, которые пересекаются в центре x_c .

В случае гиперболы $\mathbf{H}(x_c; x_1)$ для каждой хорды строится параллелограмм асимптот, тогда прямые радиальных диагоналей этих параллелограммов пересекаются в центре x_c . \blacklozenge

В хроногеометрическом контексте параллелограммы асимптот эквивалентны параллелограммам лучей. Выше мы убедились, что проективные соответствия проще всего представляются в базисе лучей. Если описанные две задачи для гипербол преобразовать в базис лучей, то параллелограммы лучей превратятся в прямоугольники, диагонали которых зеркально симметричны, следовательно, зеркальная симметрия прямых или векторов — частный и простейший случай гармоничности. Ниже для большей аналитической простоты и краткости дальнейшее изложение МФС проводится в базисе лучей (при этом использованный выше идентификатор этого базиса — надсимвольная черта — опускается).

4.3.2. Линейное соответствие пучков. Плоский базис $\mathbf{V} = (\mathbf{b}_1(v_1), \mathbf{b}_2(v_2))$, как отмечалось выше, есть пара пучков координатных осей, центры которых совмещены и помещены в начало системы координат \mathbf{o} . Ориентационный инвариант устанавливает скалярное соответствие осей (см. раздел 6.7), которое можно выражать в векторной форме. Например, если соответствие осей удовлетворяет условию зеркальной симметрии, то наклоны осей отличаются знаком:

$$\mathbf{b}_2 = \lambda \mathbf{F} \mathbf{b}_1 \Rightarrow v_2 = -v_1,$$

т.е. такие пучки находятся в гармоническом соответствии. Простейший вариант ангармоничного линейного соответствия обеспечивается постоянной дополнительной деформацией:

$$\mathbf{b}_2 = \lambda \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{b}_1 \Rightarrow v_2 = -qv_1; \tag{4.30}$$

тогда $q \equiv d_2/d_1$ — коэффициент линейного соответствия, если $\mathbf{D} \equiv \text{diag}(d_1, d_2)$.

Выше мы убедились, что проективное соответствие базисных векторов, определяемое обобщенным ППСС, представляется в базисе лучей (см. раздел 3.4.4) в виде линейной связи (4.27). Теперь мы изучим геометрические условия, обеспечивающие линейное соответствие двух пучков, $\mathbf{V}_1(v_1; x_1)$ и $\mathbf{V}_2(v_2; x_2)$, центры которых не совпадают: $x_1 \neq x_2$.

Представляет интерес соответствие пучков хорд гиперболы, порождаемое принадлежностью гиперболе \mathbf{H} трех точек. Поэтому вернемся к трем точкам задачи 4.2 и положим

$$\{x_1 = \mathbf{f}, x_2 = \mathbf{o}, x_3 = \mathbf{h}_1\} \in \mathbf{H}(x_c; \mathbf{h}_1),$$

т.е. будем считать первую и вторую точки фиксированными точками некоторой гиперболы \mathbf{H} , а третью точку свободной. Вектор $x_3 - x_2 = \mathbf{h}_1 - \mathbf{o} = \mathbf{h}_1$ соответствует первой хорде, а вектор $x_3 - x_1 = \mathbf{h}_1 - \mathbf{f} \equiv -\mathbf{h}_2$ — второй хорде, т.е. векторы $\mathbf{h}_1 \equiv (t_1, x_1)'$, $\mathbf{h}_2 \equiv (t_2, x_2)'$ можно представлять как векторы, которые исходят из начальной точки \mathbf{o} и удовлетворяют условию фиксированной суммы:

$$\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{B}_1(v_1; \mathbf{o}) \cap \mathbf{B}_2(v_2; \mathbf{f}). \tag{4.31}$$

Чтобы не путать центры фигур с центрами пучков, введем следующее

Определение 4.1. Центры пучков прямых называются *фокусами*.

Заметим, что это номенклатурное определение согласуется с известными понятиями фокусов, например, эллипса и гиперболы, которые в лучевой интерпретации тоже представимы как центры пучков (рис. 16а), а векторы точек соответствия удовлетворяют условию (4.28).

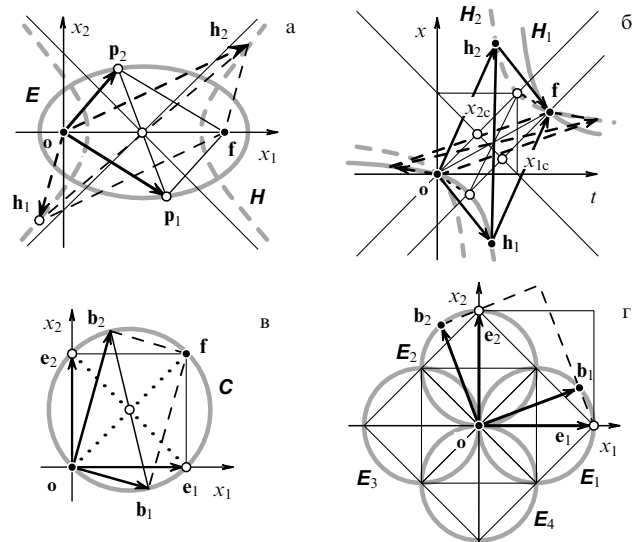


Рис. 16. Варианты фокальных геометрий: (а) фокальные параллелограммы эллипса \mathbf{E} и гиперболы \mathbf{H} ; (б) гиперболические эталоны метода фиксированных событий; (в) фиксированная точка \mathbf{f} геометрии базальной окружности \mathbf{C} ; (г) геометрия двух пар базальных окружностей.

Теорема 4.1. Если общая точка двух пучков, а также их центры (фокусы) принадлежат гиперболе, то такие пучки находятся в линейном соответствии:

$$\{\mathbf{o}, \mathbf{h}_1, \mathbf{f}\} \in \mathbf{H}(x_c) \Rightarrow v_2 = -qv_1 \Leftrightarrow q = \frac{v_f}{v_c}. \tag{4.32}$$

Доказательство. Гипербола $\mathbf{H}(x_c)$ в базисе лучей описывается параметрическими уравнениями (4.22), которые короче записываются в векторной форме, например,

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{V}_1 x_c,$$

где $\mathbf{V}_1 \equiv \mathbf{V}[v_1] = \mathbf{E} + (v_1 \mathbf{e}_2, v_1^{-1} \mathbf{e}_1)$. Аналогично, согласно (4.29) можем написать

$$\mathbf{f} = \mathbf{V}_f x_c, \quad \mathbf{o} = \mathbf{V}_0 x_c,$$

где $\mathbf{V}_f \equiv \mathbf{V}[v_f]$ и $\mathbf{V}_0 \equiv \mathbf{V}[v_0]$, т.е. $v_0 = -v_c$. Для комплиментарного вектора \mathbf{h}_2 получаем уравнение

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f} - \mathbf{h}_1 = (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_1)\mathbf{x}_c,$$

согласно которому $v_2 = -v_1 v_f / v_c$. ♦

Конструктивное значение доказанной теоремы не только в том, что определилась связь фиксированных и нефиксированных событий с гиперболой, но еще выяснился геометрический смысл коэффициента ангармоничности. Так как величина v_c — это характеристическая скорость, то гармонический случай — это, когда $\mathbf{f} = 2\mathbf{x}_c$, т.е. когда фиксированное событие является характеристическим, и тогда $q = 1$. В противном же случае фиксированное событие не совпадает с характеристическим. Пример построений дан на рис. 16б.

Вывод 4.6. Ангармоническое соответствие выражает степень смещения фиксированного события \mathbf{f} относительно характеристического события $2\mathbf{x}_c$.

4.3.3. Базис хорд. Введенные выше векторы \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 можно рассматривать раздельно — как векторы, формирующие базис хорд $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$.

Теорема 4.2. При ангармоническом соответствии осей базис гиперболических хорд является бифокальным и бицентральный: метрические эталоны разных осей представляются гиперболами, которые проходят через фокусы и имеют разные центры,

$$\mathbf{H} \equiv (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = (\mathbf{V}_1 \mathbf{x}_{c1}, \mathbf{V}_2 \mathbf{x}_{c2}). \tag{4.33}$$

Доказательство. Если считать, что ангармонизм соответствия осей базиса хорд задается величиной q , то выявленную выше скалярную связь $q = v_f / v_c$ можно использовать для определения связи фокального и центрального векторов:

$$t_c = q_1 t_f, \quad x_c = q_2 x_f \Rightarrow \mathbf{x}_c = \mathbf{D}\mathbf{f}, \tag{4.34}$$

где $\mathbf{D} \equiv \text{diag}(q_1, q_2)$. Коэффициенты q_1, q_2 этой векторной связи формируют диагональную матрицу и выражаются через параметр q следующим образом:

$$q_1 \equiv \frac{q}{1+q}, \quad q_2 \equiv \frac{1}{1+q}, \tag{4.35}$$

т.е. $q_1 + q_2 = 1, q_1 / q_2 = q$.

Полагая $\mathbf{x}_c \equiv \mathbf{x}_{c1}$ и $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{D}$, можно уравнение для базисного вектора \mathbf{h}_1 заменить:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{x}_{c1} \Leftarrow \mathbf{x}_{c1} = \mathbf{D}_1 \mathbf{f}. \tag{4.36}$$

Далее, согласно исходному определению

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{f} - \mathbf{h}_1 = (\mathbf{E} - \mathbf{V}_1 \mathbf{D}_1) \mathbf{f} = \mathbf{V}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{f},$$

где $\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{I} \mathbf{D}_1 \mathbf{I}$, т.е. вектор \mathbf{h}_2 определяется следующим параметрическим уравнением:

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{V}_2 \mathbf{x}_{c2} \Leftarrow \mathbf{x}_{c2} = \mathbf{D}_2 \mathbf{f}, \tag{4.37}$$

и формирует гиперболу, центр которой \mathbf{x}_{c2} не совпадает с центром \mathbf{x}_{c1} , если различны матрицы \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 . Только в частном случае гармонического соответствия, когда

$$q = 1: \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \frac{\mathbf{E}}{2} \Rightarrow \mathbf{x}_{c1} = \mathbf{x}_{c2} = \frac{\mathbf{f}}{2},$$

центры ветвей \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 совпадают, имеем $v_2 = -v_1 = -v$, и остается эффект смещения начала \mathbf{o} относительно центра гиперболы $\mathbf{H} = (\mathbf{V}(v) \mathbf{f} / 2, \mathbf{V}(-v) \mathbf{f} / 2)$. ♦

4.3.4. Обратная задача. Инвертируем постановку предыдущей задачи. Теперь мы не будем исходно считать, что центры пучков принадлежат некоторой гиперболой. Пусть роль исходного условия играет условие линейного соответствия

$$v_2 = -q v_1 \tag{4.38}$$

для двух произвольных пучков $\mathbf{B}_1(v_1; \mathbf{x}_1), \mathbf{B}_2(v_2; \mathbf{x}_2)$ с точкой соответствия $\mathbf{x} = \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$. Не нарушая общности, мы можем вернуться к предыдущей схеме векторов. Это достигается посредством замен

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{o}, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{f}.$$

Кроме того, преобразуем скалярное условие (4.35) в векторное условие

$$\mathbf{h}_2 = \lambda \mathbf{A} \mathbf{h}_1,$$

где $\mathbf{A} \equiv \mathbf{D}_2 \mathbf{F}$ и λ — произвольный вещественный параметр. Отсюда для векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ имеем следующие определяющие соотношения:

$$\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{f}, \quad \mathbf{h}_2 = \lambda \mathbf{A} \mathbf{h}_1. \tag{4.39}$$

Теорема 4.3. Плоский базис $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$, определяемый векторными условиями (4.36), эквивалентен базису хорд гиперболы.

Доказательство. Уравнения (4.36) можно переписать в виде матрицы

$$\mathbf{H} = (\mathbf{E} + \lambda \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{f}, \lambda \mathbf{A} \mathbf{f}). \tag{4.40}$$

Чтобы завершить построение решения, необходимо формальный параметр λ заменить скоростными параметрами v_1 или v_2 . Производя замены, после преобразований имеем

$$\mathbf{H} = (\mathbf{V}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{f}, \mathbf{V}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{f}) = (\mathbf{V}_1 \mathbf{x}_{c1}, \mathbf{V}_2 \mathbf{x}_{c2})$$

— тот же базис хорд, который получен выше (см. (4.30)). ♦

Замечание 4.2. Своеобразие рассмотренного синтеза геометрий становится более наглядным, когда в качестве базисного эталона выбирается базальная окружность (рис. 16в). Такая модель определяется соотношениями (4.36), если $\mathbf{A} = \mathbf{J}$, т.е. условие линейной связи базисных векторов эквивалентно условию ортогональности

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{f}, \quad \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_1 = 0.$$

"Евклидов" аналог общего матричного уравнения (4.26) получается при выборе единичной метрической матрицы $\mathbf{M} = \mathbf{E}$, тогда вместо (4.20) имеем базис

$$\mathbf{B} = \cos \alpha \mathbf{R}(\alpha) = \cos \alpha (\cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{J}),$$

содержащий пару базальных окружностей (рис. 16г). ♦

На этом алгебраическое описание и геометрическое обоснование метода фиксированных событий завершается.

5. Заключение

Доверять следует прежде наблюдению, а затем уже теориям, а таковым лишь настолько, насколько они подтверждаются наблюдаемыми фактами.

Аристотель

В данном разделе мы кратко обсудим семантическую эволюцию основных понятий, относящихся к теме этой работы.

5.1. Физические сущности

Пространство, время и движение — три первичные (фундаментальные) сущности физики, т.е. науки о Природе, как ее впервые учредил Аристотель [2]. Тема сравнения свойств и причин движений физических тел и организмов тоже начинается с "Физики" Аристотеля. Для выделения общих причин движения неживых и живых объектов Аристотель вводит понятия "силы" и "энергии", а для спецификации движений организмов изобретает дополнительное понятие "энтелехии", современная интерпретация которого эквивалентна понятию "целенаправленного управления" [52].

Исходное аристотелевское определение физики подразумевало познание всех природных объектов (и живых, и неживых), но последующее развитие физики сконцентрировалось на более простых, первичных механических понятиях, а также на механических проблемах, решение которых растянулось на века и которыми занимались Галилей, Гюйгенс, Ньютон, Эйлер, Лагранж, Лаплас и др. При этом первичное кибернетическое определение сущности жизни, данное Аристотелем, осталось сначала невостребованным из-за преимущественной ориентации на разработку механических концепций, а затем было отброшено и забыто из-за попыток построения новых определений на основе механических представлений, т.е. без привлечения "без надобности" других сущностей.

Основной вклад Аристотеля в дело учреждения и создания физики как науки — это концептуальный, связанный с семантической разработкой практически всех базисных сущностей (референтов) познания Природы. Кроме трех сущностей — пространства, времени, движения — в список физических сущностей вошли: место, скорость, ускорение, сила, материя, тяготение, энергия и др. Все эти понятия были подвергнуты Аристотелем логическому анализу, а для некоторых он даже ввел символические формулы, например для скорости.

Т. Кун [35] связал научные революции с появлением новых референтных понятий, и один из его примеров таков: Галилей ввел в физику понятие "скорости", а Ньютон ввел понятие "ускорения". Но понятие скорости исходно ввел Аристотель, иначе ему бы не удалось объяснить апории Зенона — "Ахиллес и черепаха", "Стрела" и др. Более того, апория "Стадион" имеет непосредственное отношение к релятивистской теме "сложения скоростей относительных движений": на стадионе перед трибунами перемещаются навстречу друг другу два отряда всадников; требуется определить, как

отличаются оценки относительной скорости сближения всадников двумя наблюдателями, один из которых находится на трибуне, а второй сам является всадником.

Важную роль в объяснениях Аристотеля играло понятие места точки, а также развитые им понятия непрерывности пространства и времени, проявляющиеся в непрерывности механических движений. Вообще говоря, по критериям Куна, Аристотель совершил самую выдающуюся научную революцию, но мало кто из физиков это знает и понимает, даже Кун, что видно из его сравнительного анализа истории физики [35].

5.2. Время

Первый развернутый и глубокий семантический анализ понятия времени дал Аристотель. Тексты о времени из его "Физики" [2] хорошо известны, вот краткий фрагмент:

"Время скорее всего представляется каким-то движением и изменением... Изменение может идти быстрее или медленнее, время же не может, так как медленное и быстрое определяются временем: быстрое есть далеко продвигающееся за малое время, а медленное — мало за большое, время же равномерно везде и при всем. Движущееся движется от чего-нибудь к чему-нибудь и выражается непрерывной величиной: вследствие непрерывности величины непрерывно движение, а вследствие движения — время. Предыдущее и последующее первоначально относятся к месту — связаны с положением. Время есть мера нахождения тела в состоянии движения — оно измеряет движение путем другого ограниченного движения (так локоть измеряет длину путем определения некоторой величины, которая служит мерой произвольной длины). Каким будет движение, таким будет и время".

В приведенном фрагменте содержится аристотелевский способ доказательства существования времени. С одной стороны, в каждый момент времени существует много разных движений и изменений — быстрых, медленных и др.; с другой стороны, существует нечто общее, присущее всем движениям, которое и следует называть *временем*. Для измерения общей части всех движений, т.е. времени, мы вынуждены выбрать некоторое *эталонное движение* ("часы") и пользоваться понятием, так сказать, инструментального времени. Выбор эталонного движения можно производить разными способами. Тогда, каким будет эталонное движение, таким будет и инструментальное время. В последнем аристотелевском выводе зависимости инструментального времени от выбора эталонного движения содержится и современная релятивистская концепция времени.

Более современный анализ понятия времени сделал в конце XIX века А. Пуанкаре [42, 43]. Интересно, что анализ Пуанкаре во многом совпадает с анализом Аристотеля, правда, без ссылок на последнего, но содержит и новые темы, в частности тему синхронизации часов. Из сравнения двух текстов можно заключить, что за века, разделяющие Аристотеля и Пуанкаре, мало что изменилось в общем понимании времени, а главная компонента эволюции понятия времени — это появление индивидуального, или местного, времени, породившее проблему синхронизации часов. Аристотель знал три типа часов — солнечные, песочные и водяные ("клепсидры"), но только солнечные часы играли роль основ-

ных поверочных часов. Поэтому можно сказать, что аристотелевскому мировоззрению более присуща концепция глобального единого времени всей Вселенной.

В книге Э.Тейлора и Дж.Уилера [62] наглядно изображена механическая модель пространства-времени в виде бесконечной 3-мерной кубической решетки (из метровых стержней), во всех узлах которой находятся часы. При этом авторы подчеркивают, что "часы могут быть любой конструкции". Любой ли? Как изменится наше понимание времени, если в узлах решетки Тейлора–Уилера поместить солнечные часы? А если — песочные? Конечно, авторы под словами "любые часы" скорее понимают современные механические или электронные часы либо же часы Ланжевена. Обсуждение следствий выбора разных типов часов дано выше (см. разделы 4.1.1, 4.1.2) и здесь мы повторим только главное: переход от механических часов к световым ("волновым") породил релятивистскую революцию физического мировоззрения.

Итак, от Аристотеля до наших дней происходит определенная эволюция понятия времени, обусловленная массовым внедрением "персональных хронометров", а решением возникшей проблемы синхронизации часов стала заниматься всемирная "служба единого времени", которая возвращает наше релятивистское мировоззрение к аристотелевской концепции глобального (абсолютного) времени Вселенной. Действительно, перефразируем силлогизм Аристотеля (см. выше): если в каждый момент времени мы можем пользоваться многими разными часами, то существует нечто общее, что и следует называть "единым временем" или просто временем.

5.3. Пространство

По существу понятие "относительной системы отсчета" ввел еще Аристотель. Хотя в целом аристотелевская модель Вселенной геоцентрическая, роль локальной системы отсчета в ней играет понятие "места" [2]:

"Место кажется чем-то особенным и трудным для понимания... Место имеет три измерения: длину, ширину и глубину, т.е. те самые измерения, которыми определяется всякое тело... Но мы не находим никакого различия между точкой и местом точки. Место не стали бы исследовать, если бы не было движения относительно места. Подобно тому как сосуд есть переносимое место, так и место есть неподвигающийся сосуд. Поэтому когда что-нибудь движется внутри движущегося, например, лодка в реке, оно скорее относится к нему как к сосуду. Место предпочтительно должно быть неподвижным, поэтому место — это скорее вся река, так как в целом она неподвижна. Таким образом, первая неподвижная граница объемлющего — это и есть место. Тело, снаружи которого находится какое-нибудь другое объемлющее его тело, находится в некотором месте... Тело, у которого этого нет, не находится. Вселенная нигде не находится".

Аристотелевское понятие "объемлющего места или тела" и является, так сказать, наивным аналогом современного понятия "системы отсчета", но правило "первой неподвижной границы объемлющего места" правильно указывает, как следует определять относительные системы отсчета, "объемлющая последовательность" которых заканчивается Вселенной (именно поэтому "Вселенная нигде не находится").

Научная революция Галилея не во введении понятия скорости (что он и сам отмечал), а во внедрении инструментально-измерительной методологии в физический эксперимент, в открытии количественных законов простых механических движений, в обосновании понятия инерциальных механических систем. Именно Галилей впервые ввел в механику образ равномерно движущейся системы отсчета ("корабля") с целью обоснования невозможности определения скорости относительного перемещения корабля с помощью механических экспериментов.

Рассуждения о "месте" имеются у Декарта, Ньютона, Лейбница и даже у Эйлера [68]:

"Что собственно представляет собой место? На этот вопрос не так легко ответить".

Трудности ответа были обусловлены тем, что когда Эйлер издал в 1736 г. свою книгу "Механика, т.е. наука о движении, изложенная аналитическим методом", он еще не владел понятием "системы координат". Декарт фактически ввел метод оцифровки плоскости с помощью двух неколлинеарных прямых, а понятие и название "декартова система координат" ввел Маклорен в 1742 г. (см. [68, с.11]). Когда Эйлер познакомился с этим понятием, он срочно написал новую версию "Механики" (1765 г.). Позже Лагранж в "Аналитической механике" (1788 г.) ввел "обобщенные координаты", но для формирования векторной аксиоматики аналитической геометрии потребовалось много других "революций" — геометрии Лобачевского, Римана, Клейна, Вейля, Минковского и др.

Вопрос 5.1. Изменили ли эти геометрические "революции" наше понимание пространства?

Утвердительный ответ на этот вопрос следует дополнить оговоркой — не окончательно. С одной стороны, многочисленные метрические геометрии разрушили монополию и даже диктатуру, как считает Г. Вейль [13], евклидовой геометрии на единственную возможность выбора метрической модели физического пространства. С другой же стороны, если придерживаться физической, т.е. инструментальной (по средствам) и конвенциональной (по методам), точки зрения на природу метрических геометрий, на чем настаивал А. Пуанкаре [43], то нам приходится соглашаться с возможностью совместного существования разных метрических моделей Вселенной (механической, гравитационной, электромагнитной и др.). Но встав на такую обобщенную релятивистскую точку зрения, мы неизбежно логически приходим к концепции "абсолютного пространства" и тем самым снимаем искусственно созданное противопоставление ньютоновской и эйнштейновской моделей Вселенной. Действительно, применяя предыдущий силлогизм Аристотеля, мы можем заключить: если в физическом описании Вселенной мы можем совместно пользоваться многими разными системами координат или системами отсчета, то существует нечто общее, что и следует называть "абсолютным пространством" или просто пространством.

5.4. Принцип презумпции независимости

Физики XX века долго привыкали к идее единства пространства-времени, выдвинутой Г. Минковским в начале века, и в конце концов привыкли, о чем свидетельствует попадание темы СТО в школьные учебники. На таком фоне просветительского благополучия

попытки современных ревизий основ СТО выглядят, казалось бы, запоздалыми.

Но не следует забывать, что неудовлетворенность пятым постулатом Евклида пробивалась к новым геометрическим концепциям много веков, и также много веков евклидова геометрия служила базовым предметом школьного образования и, что тоже важно, продолжает служить. Поэтому (возможны и другие примеры) часто используемый преимущественно преподавателями аргумент "это известно даже школьникам" не является императивом для всегда и во всем сомневающимся учених.

История пятого постулата Евклида интересна во многих ракурсах, но в сравнении с постулатом постоянства скорости света (ППСС) следует обратить внимание на то, что когда неудовлетворенность его формулировкой разрешилась геометрией Лобачевского, была осознана неединственность евклидовой геометрии как математической метафоры физического пространства.

Весьма симптоматично, но не очень-то логично, что, познав неединственность одной геометрии, физики и математики стали упорно искать более общую, но обязательно единую или единственную геометрию или теорию поля и т.д. Нам, однако, представляется, что истинное познание Природы не в поисках единой, единственно верной модели, а в плюрализме разных методов, подходов и моделей. Что касается физики, простирающейся от микромасштабных проблем элементарных частиц, до макромасштабных проблем астрофизики, то на разных уровнях познания нужны и разные "часы", и разные "линейки". Более нужны адекватные и независимые инструменты, а не универсальные.

Особенность декартовой координатизации состоит в том, что при ее абстрактной реализации разные измерения параметризуются независимо: в этом случае не только пространство и время вводятся априорно независимо, но и все линейные подпространства самого пространства определяются "мультиодномерным" и линейным способом. Такой общий взгляд на метрическую структуру пространства и времени можно обозначить как "принцип презумпции независимости", который геометрически выражается в независимом выборе как направлений линейных осей координат, так и линейных единиц масштабов для каждой оси.

Отстаивание презумпции независимости пространства и времени в противовес идеям "монолитного единства" представляется нам чрезвычайно важным аспектом фундаментальной физики, поскольку только в этом случае мы остаемся максимально свободными в конструировании обобщенных моделей, удовлетворяющих тем или иным дополнительным постулатам, например, типа ППСС, и в понимании тех ограничений, которые порождаются использованием конкретных измерительных инструментов.

В линейной алгебре и, следовательно, в аффинной геометрии главным критерием размерности пространства (подпространства) служит число независимых векторов соответствующей размерности. При этом неважно, является ли само пространство непрерывным или дискретным, бесконечным или конечным. Либернетический критерий независимости, обеспечивающий степени свободы независимого выбора определенного числа координат пространства или параметров системы,

является конструктивным и потому, что это — наиболее существенный критерий размерности и пространств, и управления.

5.5. Организм-машина

Научный подход Маррея можно охарактеризовать как механистический, если ориентироваться на название книги [36], но более правильно характеризовать марреевский подход как машиноведческий [36]:

"Во все эпохи живые существа сравнивали с машинами, но только в наше время можно понять всю важность и справедливость такого сравнения... Сравнение животных с машинами крайне полезно с разных точек зрения... Механик может почерпнуть полезные сведения в изучении природы, которое ему много раз укажет, как самые сложные задачи могут быть решены с удивительной простотой".

То, что управление (энтелехия) является характеристическим свойством жизни, понимал еще Аристотель [2], в чем и проявилась его гениальность, но его понимание не было воспринято другими, поэтому критика и неприятие "витализма" растянулись на века. Позже только некоторые гении проникались аристотелевским пониманием, например, Р. Декарт [22], который разрабатывал свою концепцию "организм-машина". Поэтому биология, не имея собственного научного содержания и, следовательно, собственных задач познания сущности жизни, развивалась только в описательном духе аристотелевской "Истории животных" [1], т.е. в направлении сбора и систематизации данных, что тоже было полезно. Кроме того, другие науки находили в биосистемах свои интересы, формируя смежные направления повышенной научной активности — биомеханика, биофизика, биохимия, биоматематика, бионика и др.

Знаменитые лекции "Что такое жизнь? С точки зрения физика" были прочитаны Э. Шрёдингером в 1943 г. (см. [67]) незадолго до появления "Кибернетики" Н. Винера [14] (в 1948 г.). В лекциях Шрёдингера отсутствует явное обсуждение аристотелевской энтелехии, тем не менее эти лекции способствовали последующему конструктивному восприятию кибернетических концепций. Наши попытки согласовать разные точки зрения на понимание сущности управления и жизни отражены в работах [50–52, 55]; стратегия согласования исходит из концепции "организм-конструктор" и основана на выделении свобод (степеней свободы) в качестве базовых референтов управления. Для более четкой идентификации функций управления мы предложили закрепить за кибернетикой проблемы "исполнительной власти" и выделить либернетику, занимающуюся проблемами "законодательной власти".

Итак, только в середине XX века математик Н. Винер [14] вернул биологии потерянное научное содержание (без ссылок на Аристотеля).

Почему же аристотелевская энтелехия была предана забвению, а винеровская кибернетика совершила революцию в биологии?

На наш взгляд, аргументация Винера оказалась более убедительной, поскольку основывалась на тезисе единства сущности управления в "животном и машине", а у Аристотеля еще не было удачного машинного аналога для сравнения, не было примера управляющей машины или автомата, хотя понятие "автомата" тоже было введено Аристотелем. Иначе говоря, многовековой

прогресс машин и подготовил современный прогресс в биологии.

От Аристотеля до наших дней произошло по меньшей мере пять "машинных революций":

1) на смену ручным орудиям труда пришли механические машины, способствуя интеграции производства;

2) тепловые машины — прогресс всех видов транспорта;

3) электрические машины — электрификация всей Земли;

4) электронные машины — средства связи и автоматизации;

5) информационные машины — всемирное информационное пространство.

Пока вычислительные машины, а также автоматы и роботы оставались механическими, они не только не способствовали пониманию сущности управления, но скорее мешали. Современное же информационное понимание управления стало формироваться благодаря разработкам и внедрениям языков программирования высокого уровня, средств "объектно ориентированного программирования", за которым должно последовать "семантически ориентированное программирование".

Таким образом, приведенное выше мнение Маррея о пользе сравнения организмов с машинами звучит в наше время еще более категорично, чем век назад, если учесть, что технической машине каждого типа найдется соответствующий биоаналог. Указывает ли организменный симбиоз многих типов машин на невозможность определения жизни в рамках одного типа машин?

Проходят века, меняются машины, открывая новые горизонты полезных сравнений с ними неизменных организмов, содержащих в себе как все уже открытые машины, так, видимо, и все, которые будут еще открыты на основе очередных сравнений. Следовательно, машинное исчерпание сущности жизни продолжается. Синергетическое представление локомоторных и других движений — это тоже по существу машинный подход.

5.6. Биопрограммирование

Хотя Маррей использовал в своих локомоторных исследованиях пневмодатчики для регистрации опорных сил и акселерометры, позволяющие оценивать силы инерционных компонент, основными для него были кинематические проблемы формирования шагательных циклов отдельных ног и фазовых отношений циклов разных ног. Напротив, последующие исследования Брауна и Фишера, выполненные в конце XIX века [73], были направлены на динамическую реконструкцию одного шага человека. Динамический подход к задачам построения шагательных движений стал одним из главных в биомеханических исследованиях XX века как в силу огромной сложности детальной картины биодинамики опорно-двигательных аппаратов [10, 15, 25, 47, 76, 82], так и благодаря более широкому использованию лагранжева формализма для модельных и теоретических описаний "силовых полей" конечностей [8, 21, 82, 83, 86, 92]. Вместе с тем во второй половине XX века усилился специальный интерес к кинематическому аспекту анализа движений [7, 15, 45, 61, 75, 77–80, 86, 91], к которому относятся и наши исследования [3–6, 27, 28, 57–60].

Н.А. Бернштейн в своей выдающейся монографии 1947 г. (см. [10]), опередившей во многих отношениях винеровскую кибернетику, развернуто обосновал поня-

тие топологической энграммы как обобщенного и кинематического образа целостных движений. Например, при рисовании геометрических фигур разных размеров и ориентаций, в разных позах как тела, так и руки, при использовании разных инструментов и даже конечностей характерные признаки той или иной фигуры сохраняются, как будто в нашей памяти имеется некоторый эталонный образ, по образу и подобию которого воспроизводится конкретный оригинал. Аналогично и в написаниях букв и слов выдерживаются индивидуальные инвариантные признаки, устойчивость которых допускает графологический анализ почерка. Перечисленные простые способности мануального выполнения целенаправленных движений хорошо знакомы каждому и потому не кажутся удивительными, если не задуматься, каким же способом достигается и простота, и естественность таких движений, а также многих других.

Простой предварительный ответ сводится к гипотезе существования в нашем мозге программ кинематического планирования дистальных целевых траекторий, которые служат эталонами для динамических исполнительных программ, вернее, для программ, осуществляющих текущий контроль целевой точности динамического исполнения. Такой ответ представляется нам вполне удовлетворительным и убедительным, поскольку современные робототехнические манипуляторы управляют аналогичным образом, т.е. с использованием компьютеров, снабженных управляющими программами трех типов — кинематического планирования, целевой коррекции и динамического исполнения. Но заметим, что приведенный "правдоподобный" ответ основан на известных технических, т.е. машинных, решениях, а не на знании свойств и программ реального нейромоторного управления. Собственно для того и нужна компьютерная робототехническая метафора управляющей деятельности мозга, чтобы было что искать в бескрайних просторах ментальной активности. Правда, принцип "что ищешь, то и находишь" способен оказывать и "медвежью услугу". Например, искали павловские рефлексы головного мозга, уподобив мыследеятельность слюноотделению, и, как известно, находили. Напомним, что такие поиски не так давно, еще в XX веке, считались истинной наукой, а все прочие — лженаукой. Не следует ли поэтому и современные поиски элементов нейропрограммирования осуществлять более осторожно, опасаясь, что уподобление мыследеятельности компьютерному программированию тоже может оказаться неадекватным реальным нейрофизиологическим процессам?

На наш взгляд, напротив, нужно интенсифицировать такие поиски, смелее устремляясь к выявлению противоречий и несоответствий, т.е. к получению отрицательных результатов. Нетрудно убедиться, что главные достижения павловской школы физиологии как раз и содержатся в отрицательных результатах, на основе которых стала формироваться новая компьютерная парадигма. Ведь, с другой стороны, хотя лозунг "мозг — компьютер!" и вопрос "может ли машина мыслить?" появились уже на заре кибернетики, существенных конструктивных продвижений в этих направлениях пока не произошло [33, 45, 77, 87–89], т.е. пока не ясно, какими вычислительными задачами загружен мозг и какие семантические задачи пока недоступны компьютеру, поскольку такие задачи не удается формализовать и программировать.

Динамическая вариативность управления ходьбой человека на фоне существенно более устойчивой кинематической картины, выявленная В.С. Гурфинкелем, С.В. Фоминым и Т.К. Штилькиндоном [21], позволяет и для локомоторных движений предполагать самостоятельную значимость кинематического образа как целевой функции динамического управления. Повышение эффективности и адаптивности интерактивного кинематического управления было экспериментально подтверждено на макете шагающего аппарата [20, 39]. Поэтому не следует противопоставлять кинематический и динамический аспекты управления — каждый играет свою ключевую роль в общей задаче построения движений: кинематическое планирование — необходимый компонент сенсомоторного целеполагания ("сенсомоторного интеллекта"), тогда как динамические ресурсы и стратегии — средства достижения целевых установок.

Общность кинематических законов ходьбы у членистоногих и человека, обнаруженная в наших сравнительных исследованиях [30, 60], подтверждает общность кинематических задач шагательных движений всех ходяков — беспозвоночных и позвоночных, — что побуждает задуматься о нейрофизиологических механизмах филогенетической инвариантности кинематических программ управления ввиду значительных различий конструкций ног и динамики их движений [15, 34, 76, 81, 82].

5.7. Концепция "релятивистский мозг"

Выше, в разделе 4, показано, что метод фиксированных событий наиболее адекватен геохронометрической концепции локомоторных синергий. Взгляд на управление движениями как на управление событиями пространственно-временного континуума — таков общий итог анализа биомеханической природы инвариантов шагательной локомоции, который кратко можно выразить следующими тезисами:

- задача построения целевой траектории движения конечности решается мозгом как целостная пространственно-временная задача;
- алгоритм построения целевой траектории реализуется в распределенных структурах мозга посредством использования волновых процессов нервной природы с целью определения координат опорных событий, например событий переключения фаз движения;
- конечные значения скоростей распространения сигналов по нервным волокнам обуславливают релятивистскую хроногеометрию управляющих процессов мозга, т.е. релятивизм в данном случае имеет инструментальную измерительную природу.

Окончательная проверка концепции "релятивистский мозг" — дело будущих экспериментальных исследований, включая, несомненно, нейрофизиологические. Здесь предстоит еще много подготовительной работы, так как пока не ясна форма необходимых экспериментов:

- как тестировать эталонные волны и доказать, что они эталонные;
- как понять роль карты тела в решении задач построения движения;
- как выявить образ целевой траектории.

Из этих неясностей следует, что релятивистская концепция, предлагая новый язык представления внутри-мозговых процессов, требует разработки и новых экспериментальных подходов.

Таким образом, прикладная адекватность биорелятивизма — это пока в области проектов, непонятно, насколько скоро осуществимых. Тем не менее фундаментальная значимость такой парадигмы уже налицо — это конструктивное переосмысливание общей природы релятивизма, включая физический, на основе более свободной трактовки хроногеометрий как следствий измерительных процедур с использованием волн в качестве эталонных процессов.

6. Приложение

Определение геометрии как теории геометрических инвариантов восходит к Ф. Клейну [27, 35]. Конструктивная версия этой теории сводится к идентификации систем базисных инвариантов [42, 44].

6.1. Ссылки и обозначения

Формулы, выделенные предложения (определения, леммы и др.), а также рисунки и таблицы нумеруются сквозным образом в пределах каждого раздела, поэтому далекие ссылки дополняются номером раздела.

Строчными буквами a, b, α, β и др. обозначаются скаляры, т.е. вещественные числа. Векторы обозначаются строчными полужирными буквами, например \mathbf{a} и \mathbf{b} . Векторы 2-го порядка (2-векторы) в развернутой записи представляются как 2-местные столбцы — $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2)'$, $\mathbf{b} \equiv (b_1, b_2)'$; штрих означает операцию транспонирования (в данном случае для строчной записи столбца).

Стандартные векторы: $\mathbf{o} \equiv (0, 0)'$, $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0)'$, $\mathbf{e}_2 \equiv (0, 1)'$, $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1, 1)'$.

Базисное разложение вектора: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$.

Скалярное произведение векторов — произведение строки на столбец: $\mathbf{a}'\mathbf{b} \equiv a_1b_1 + a_2b_2$.

Матрицы обозначаются прописными полужирными буквами: \mathbf{A}, \mathbf{B} и др.

Следует обратить внимание на часто используемый способ краткой поливекторной записи матриц — в виде строки столбцов (векторов); например, для 2-матриц такая запись выглядит следующим образом:

$$\mathbf{0} \equiv (\mathbf{o}, \mathbf{o}), \quad \mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \equiv ((a_{11}, a_{21})', (a_{12}, a_{22})'),$$

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda\mathbf{a}_1, \lambda\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2),$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_2), \quad \mathbf{A}\mathbf{b} = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2.$$

6.2. Алгебраические базисы

Стандартный алгебраический базис матриц нильпотентен:

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{jk} = \mathbf{E}_{ik}, \quad \mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{mk} = \mathbf{0}, \quad j \neq m;$$

но 2-матрицы можно представлять в нестандартном базисе матриц $\{\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{I}, \mathbf{J}\}$:

$$\mathbf{E}_{11} \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{o}), \quad \mathbf{E}_{12} \equiv (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{E}_{21} \equiv (\mathbf{e}_2, \mathbf{o}), \quad \mathbf{E}_{22} \equiv (\mathbf{o}, \mathbf{e}_2), \quad (\text{П.1а})$$

$$\mathbf{E} \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{F} \equiv (-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I} \equiv (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{J} \equiv (\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1). \quad (\text{П.1б})$$

Пусть произвольная 2-матрица \mathbf{A} представлена в этих базисах следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv a_{11}\mathbf{E}_{11} + a_{12}\mathbf{E}_{12} + a_{21}\mathbf{E}_{21} + a_{22}\mathbf{E}_{22} = \\ &= a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{F} + a_3\mathbf{I} + a_4\mathbf{J}; \end{aligned}$$

тогда линейные связи скалярных компонент двух базисов таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv ((a_{11}, a_{21})', (a_{12}, a_{22})') = \\ &= ((a_1 - a_2, a_3 + a_4)', (a_3 - a_4, a_1 + a_2)'). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Матрицы нестандартного базиса (П.1б) — элементы диэдрической группы:

$$\begin{aligned} D^4 &\cong \{\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, -\mathbf{E}, -\mathbf{F}, -\mathbf{I}, -\mathbf{J} | \mathbf{F}^2 = \\ &= \mathbf{I}^2 = -\mathbf{J}^2 = -\mathbf{FIJ} = \mathbf{E}\}. \end{aligned}$$

Группа диэдра 8-го порядка D^4 представляет все элементарные симметрии квадрата (зеркальные, центральные и поворотные; см. ниже) и является некоммутативной:

$$\mathbf{FI} = -\mathbf{IF} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{FJ} = -\mathbf{JF} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{JI} = -\mathbf{IJ} = \mathbf{F}.$$

Симметричная и кососимметричная компоненты произвольной 2-матрицы \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \text{symm}(\mathbf{A}) &\equiv \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}'}{2} = a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{F} + a_3\mathbf{I}, \\ \text{skew}(\mathbf{A}) &\equiv \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}'}{2} = a_4\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Нестандартное базисное представление произвольной 2-матрицы

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{F} + a_3\mathbf{I} + a_4\mathbf{J} \quad (\text{П.4})$$

можно интерпретировать как "диэдрический кватернион", кратко "дикватернион" (другое название — "антикватернион" [39]), вещественная матрица \mathbf{E} — аналог вещественной единицы, а матрицы $\mathbf{F}, \mathbf{I}, \mathbf{J}$ — вещественные аналоги мнимых единиц.

Дикватернион является решением квадратного характеристического уравнения

$$\mathbf{A}^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + |\mathbf{A}|\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (\text{П.5})$$

содержащего два скалярных коэффициента — след матрицы и детерминант:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A}) &\equiv a_{11} + a_{22} = 2a_1, \\ |\mathbf{A}| &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

В диэдрическом базисе детерминант равен сумме детерминантов компонент:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &\equiv |a_1\mathbf{E}| + |a_2\mathbf{F}| + |a_3\mathbf{I}| + |a_4\mathbf{J}| \Leftarrow \\ &\Leftarrow |\mathbf{E}| = -|\mathbf{F}| = -|\mathbf{I}| = |\mathbf{J}| = 1. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

При выделении векторов-столбцов детерминант 2-матриц представим в виде кососимметричной билинейной формы:

$$|\mathbf{A}| \equiv |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2| = \mathbf{a}'_1 \mathbf{J} \mathbf{a}_2. \quad (\text{П.8})$$

Следствие 6.1. 2-матрица с нулевым следом квазиинволютивна:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^2 = -|\mathbf{A}|\mathbf{E} \equiv (a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)\mathbf{E}. \quad (\text{П.9})$$

Кватернионно сопряженная матрица

$$\mathbf{A}^* \equiv a_1\mathbf{E} - a_2\mathbf{F} - a_3\mathbf{I} - a_4\mathbf{J} = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{E} - \mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{П.10})$$

полезна для выделения "действительной" и "мнимой" компонент:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathbf{A}) &\equiv \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*}{2} = a_1\mathbf{E}, \\ \text{Im}(\mathbf{A}) &\equiv \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^*}{2} = a_2\mathbf{F} + a_3\mathbf{I} + a_4\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Следствие 6.2. Мнимая часть дикватерниона квазиинволютивна.

6.3. Конгруэнтные матрицы

По умолчанию считается, что рассматриваются только 2-матрицы. Такое ограничение нам необходимо для того, чтобы использовать 2-матрицы диэдрического базиса без дополнительных оговорок.

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} называются конгруэнтными, если существует такая невырожденная матрица \mathbf{X} , которая удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}; \quad (\text{П.12})$$

матрица \mathbf{M} автоконгруэнтна, если конгруэнтные матрицы совпадают:

$$\mathbf{X}'\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{M}. \quad (\text{П.13})$$

Лемма 6.1. Кососимметричная матрица \mathbf{J} автоконгруэнтна с множителем, равным детерминанту преобразующей матрицы: $\mathbf{X}'\mathbf{J}\mathbf{X} = |\mathbf{X}|\mathbf{J}$.

Доказательство следует из (П.12) с учетом билинейной формы (П.8). ♦

Следствие 6.3.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{J}'\mathbf{A}'\mathbf{J}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}. \quad (\text{П.14})$$

Лемма 6.2. Решения уравнения (П.13) образуют матричную группу автоконгруэнций.

Доказательство очевидно. ♦

Теорема 6.1. Матрицы группы автоконгруэнций представимы в виде матричной экспоненты.

Доказательство. Допустим, матрицы \mathbf{X} непрерывной группы автоконгруэнций представлены как функции вещественного группового параметра α : $\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}(\alpha)$. Дифференцируя уравнение (П.13) по параметру α , выделим показательную матрицу \mathbf{N} :

$$\mathbf{N}'\mathbf{M} = -\mathbf{M}\mathbf{N} \Leftarrow \mathbf{N} \equiv \frac{d\mathbf{X}}{d\alpha} \mathbf{X}^{-1}. \quad (\text{П.15})$$

1) Пусть матрица \mathbf{M} симметрична: $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. В этом случае уравнение (П.15) можно переписать следующим образом: $\mathbf{N}'\mathbf{M} = (\mathbf{M}\mathbf{N})' = -\mathbf{M}\mathbf{N}$, т.е. произведение $\mathbf{M}\mathbf{N}$ кососимметрично; поэтому его можно заменить, если

$|\mathbf{M}| \neq 0$, матрицей \mathbf{J} :

$$\mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}. \quad (\text{П.16})$$

Теперь для известной постоянной матрицы \mathbf{N} согласно определению (П.15) получаем

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\alpha} = \mathbf{N}\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{e}^{\alpha\mathbf{N}}. \quad (\text{П.17})$$

2) Пусть матрица \mathbf{M} кососимметрична: $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$. Тогда, полагая $\mathbf{M} = \mathbf{J}$, из (П.15) получим $(\mathbf{J}\mathbf{N})' = \mathbf{J}\mathbf{N}$, т.е. произведение $\mathbf{J}\mathbf{N} \equiv \mathbf{A}$ — симметричная матрица. Используя теперь (П.4): $\mathbf{A} = a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{F} + a_3\mathbf{I}$, вычислим показательную матрицу:

$$\mathbf{N} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A} = -\mathbf{J}\mathbf{A} = n_2\mathbf{F} + n_3\mathbf{I} + n_4\mathbf{J}. \quad (\text{П.18})$$

На этом формальная часть доказательства теоремы завершается. \blacklozenge

Диэдрический базис (П.16) содержит три элементарные симметричные матрицы:

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{I}\} \Rightarrow \mathbf{N} = \{\mathbf{J}, \mathbf{I}, \mathbf{F}\},$$

которым соответствуют канонические формулы поворотов

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{e}^{\alpha\mathbf{J}} = \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{J} \equiv \mathbf{R}(\alpha), \quad (\text{П.19})$$

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{e}^{\alpha\mathbf{I}} = \cosh \alpha \mathbf{E} + \sinh \alpha \mathbf{I} \equiv \mathbf{H}(\alpha), \quad (\text{П.20})$$

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{e}^{\alpha\mathbf{F}} = \cosh \alpha \mathbf{E} + \sinh \alpha \mathbf{F} \equiv \mathbf{H}(\alpha). \quad (\text{П.21})$$

Следствие 6.4. *Случай $\mathbf{M} = \mathbf{E}$ эквивалентен группе круговых поворотов $\mathbf{R}(\alpha)$, $\mathbf{M} = \mathbf{F}$ — группе канонических гиперболических поворотов $\mathbf{H}(\alpha)$, $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ — группе равнобоковых гиперболических поворотов $\mathbf{H}(\alpha)$.*

Если \mathbf{M} — произвольная симметричная 2-матрица, то согласно (П.3) $\mathbf{M} = m_1\mathbf{E} + m_2\mathbf{F} + m_3\mathbf{I}$. Используя еще раз формулу (П.14), находим общую показательную матрицу:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{m_1\mathbf{E} - m_2\mathbf{F} - m_3\mathbf{I}}{|\mathbf{M}|} \Rightarrow \mathbf{N} = n_2\mathbf{F} + n_3\mathbf{I} + n_4\mathbf{J}, \quad (\text{П.22})$$

где $n_2 \equiv m_3/m$, $n_3 \equiv -m_2/m$, $n_4 \equiv m_1/m$, $|\mathbf{M}| = m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 \equiv m$.

Следствие 6.5. *В общем случае симметричной автоконгруэнтной 2-матрицы \mathbf{M} показательная матрица \mathbf{N} экспоненциальной формы (П.17) представляется мнимой частью дикватерниона, которая (см. следствие 6.2) квазинволютивна.*

Не нарушая общности, можно автоконгруэнтную матрицу уравнения (П.13) считать нормированной, т.е. считать, что $|\mathbf{M}| = \pm 1$. Тогда из общего определения с учетом леммы 6.1 для квадрата показательной матрицы получим

$$\mathbf{N}^2 \equiv \mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J} = |\mathbf{M}|^{-1}\mathbf{J}^2 = -|\mathbf{M}|^{-1}\mathbf{E}. \quad (\text{П.23})$$

Следовательно, в общем случае возможны согласно (П.23) две ситуации:

- 1) $|\mathbf{M}| = +1 \Rightarrow \mathbf{N}^2 = -\mathbf{E}$ — круговой поворот;
- 2) $|\mathbf{M}| = -1 \Rightarrow \mathbf{N}^2 = +\mathbf{E}$ — гиперболический поворот.

6.4. Геометрические базисы

Декартова процедура координатизации плоскости — 2-мерного линейного многообразия \mathbf{X}^2 — сводится к выделению начальной точки $\mathbf{o} \equiv (0, 0)'$ и двух осей, представленных прямыми $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}(\mathbf{o}, \mathbf{e}_1)$ и $\mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{L}(\mathbf{o}, \mathbf{e}_2)$, которые инцидентны парам точек \mathbf{o}, \mathbf{e}_1 и \mathbf{o}, \mathbf{e}_2 . Единичные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — эталоны длины для определения (измерения) координат произвольной точки

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)' = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{E}\mathbf{x}, \quad (\text{П.24})$$

т.е. здесь единичная матрица $\mathbf{E} \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ суть базисная матрица, а введенная система координат $\mathbf{X}^2 \equiv \{\mathbf{x}|\mathbf{o}, \mathbf{E}\}$ — это абсолютная система координат (АСК).

Новая относительная система координат (ОСК) $\mathbf{Y}^2 \equiv \{\mathbf{y}|\mathbf{b}_0, \mathbf{B}\}$ определяется относительно АСК (рис. 17а) заданием новой начальной точки \mathbf{b}_0 и новых базисных векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, образующих базисную матрицу $\mathbf{B} \equiv (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Теперь старый вектор \mathbf{x} представляется в виде суммы новых векторов:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathbf{b}_0 + y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 \equiv \mathbf{b}_0 + \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (\text{П.25})$$

где $|\mathbf{B}| \neq 0$. Новые координаты y_i суть длины векторов \mathbf{y}_i относительно эталонов \mathbf{b}_i .

При переходе в базис \mathbf{Y}^2 новая ОСК приобретает статус АСК и, наоборот, старая АСК превращается в ОСК, что формально описывается согласно формулам (П.24) и (П.25) простым обращением базисной матрицы $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b}_0)$. Результат аналогичен (П.25):

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{E}\mathbf{y} = \mathbf{a}_0 + x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (\text{П.26})$$

где $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}^{-1}$ — обратная 2-матрица, $\mathbf{a}_0 \equiv -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_0$ — обратный начальный вектор.

В алгебраической модели линейного пространства (П.24)–(П.26) единичная матрица \mathbf{E} всегда представляет собственный базис наблюдателя. Поэтому всякий наблюдатель вправе объявлять собственный базис единичным \mathbf{E} -базисом и принимать его за АСК, а неединичные базисы \mathbf{B} или \mathbf{A} считать чужими базисами и принимать их за ОСК.

6.5. Операторная метафора

Предыдущая базисная интерпретация векторного равенства (П.25) ориентирована на метафору "эквивалентных точек".

Определение 6.1. Две точки называются эквивалентными, если они в разных системах координат представляют одну и ту же точку пространства.

Пусть начала АСК и ОСК совпадают, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{o}$ и заданы две пары эквивалентных точек $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \in \mathbf{X}^2, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} \in \mathbf{Y}^2$. Требуется восстановить базис ОСК, т.е. найти такую матрицу \mathbf{B} , что $\mathbf{x}_i = \mathbf{B}\mathbf{y}_i, i = 1, 2$.

Матрицы эквивалентных пар $\mathbf{X} \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и $\mathbf{Y} \equiv (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ связаны базисной матрицей

$$\mathbf{B}: \mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{B}\mathbf{y}_1, \mathbf{B}\mathbf{y}_2) = \mathbf{B}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \mathbf{B}\mathbf{Y}, \quad (\text{П.27})$$

поэтому $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}$.

Концептуальной альтернативой базисной метафоре служит операторная, которая предполагает существование не только одного и того же пространства, но и одной

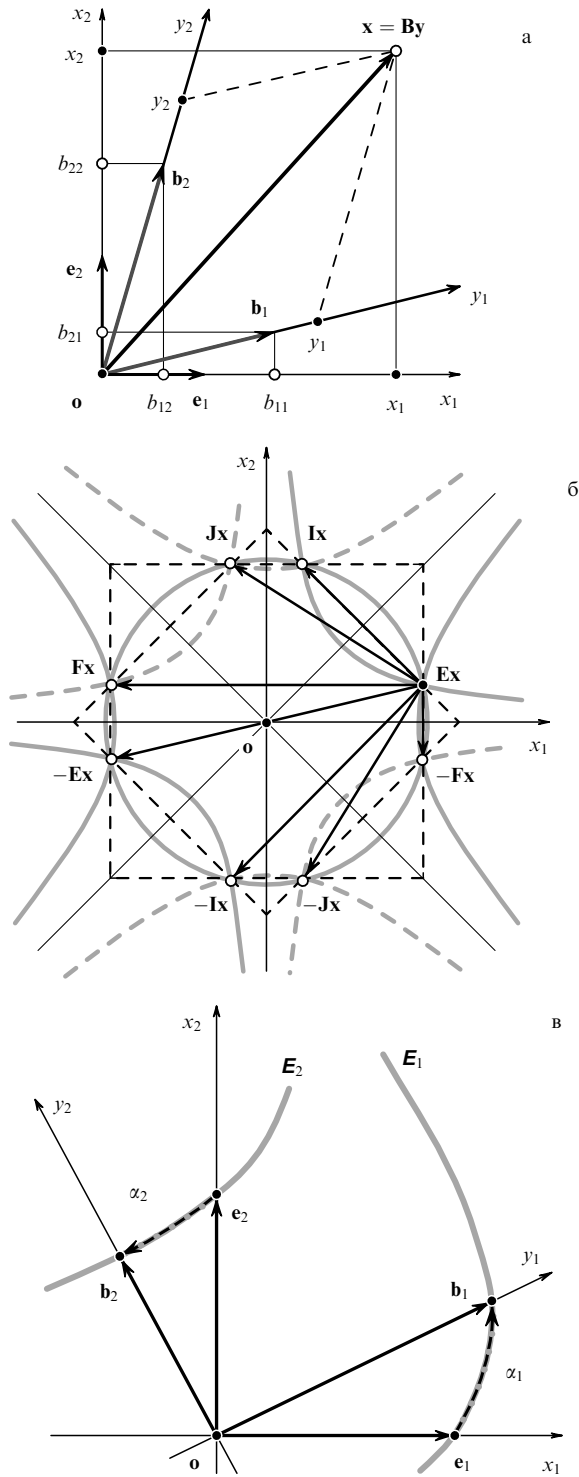


Рис. 17. Эквивалентные точки двух систем координат (а); симметрии элементарных образов произвольной точки при действии матричных операторов базисной диэдрической группы (б); обобщенная метафора метрических эталонов плоскости (в).

системы координат, а именно АСК. Тогда векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} в уравнениях (П.25) и (П.26) представляют в общем случае разные точки, получаемые в результате действия оператора прямого \mathbf{A} или обратного \mathbf{B} аффинного преобразования,

$$\mathbf{B} \equiv \{\mathbf{b}, \mathbf{B}\}: \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{A} \equiv \{\mathbf{a}, \mathbf{A}\}: \mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{П.28}$$

Пример. Матрицы диэдрической группы, действуя как операторы на произвольную точку \mathbf{x} , порождают вершины центрально симметричного октогона (рис. 17б).

Точка плоскости $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)'$ имеет две произвольные координаты, поэтому акт выбора точки характеризуется двумя свободами. Такое *либернетическое* свойство точки обозначим как $\text{lib}(\mathbf{x}) = 2$ (в общем случае многомерных пространств $\text{lib}(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{x})$ — число координатных свобод точки совпадает с размерностью пространства).

При операторном подходе естественно возникает вопрос о либернетическом ресурсе произвольного преобразования (П.28). Этот вопрос решается с помощью "пробных фигур", содержащих фиксированное множество $X_m^n \equiv \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ произвольных точек; в символе X_m^n нижний индекс — число точек (вершин), верхний индекс — размерность пространства, $\text{lib}(X_m^n) = mn$.

Вопрос 6.1. При каком максимальном числе точек произвольная пара фигур X_m^n и Y_m^n совместима (конгруэнтна) посредством заданного преобразования?

Ответ для линейных преобразований (П.28) дает основная теорема аффинной геометрии. В общем случае $m = n + 1$, так как в этом случае ресурсы свобод аффинных преобразований и фигур равны:

$$\text{lib}(X_{n+1}^n) = \text{lib}(\mathbf{A}) \equiv \text{lib}(\mathbf{A}) + \text{lib}(\mathbf{a}) = n^2 + n = n(n + 1). \tag{П.29}$$

Частный вариант этой общей ситуации представляют базисы ОСК (П.25), которые как геометрические объекты — 3-вершинники:

$$\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_2\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \equiv X_3^2 \Rightarrow \text{lib}(X_3^2) = 6. \tag{П.30}$$

Следовательно, произвольные базисы ОСК аффинно конгруэнтны благодаря одинаковым ресурсам параметрических свобод и преобразований и базисов.

6.6. Свободные геометрии

Декартов метод оцифровки плоскости с помощью двух неколлинеарных прямых использует минимальные метрические правила, достаточные для решения проблемы координатизации плоскости. Метрические правила — неизбежные спутники всякой координатизации. В этом смысле неметрических геометрий не существует.

Вопрос 6.2. Определив АСК (П.24) и правила преобразования ОСК (П.25), (П.26), можем ли мы считать, что имеем дело с некоторой геометрией?

Ответ на этот вопрос следует искать в интерпретации геометрии Ф. Клейна (см. [27, 35]) как теории геометрических инвариантов. Чтобы внести в рассмотрение этой темы конструктивный аспект, примем следующее

Определение 6.2. *Инвариантом* преобразования (или базиса, или фигуры) называется дополнительное условие, ограничивающее одну степень свободы этого преобразования (или базиса, или фигуры).

При этом нам представляется полезным отделять инварианты фигур от инвариантов преобразований и именно последние считать инвариантами геометрий [44].

В общей систематике геометрий Ф. Клейн опирался на групповой принцип, а для ранжирования разных геометрий использовал критерий числа свобод преобразований.

Групповой принцип. Каждой геометрии соответствует некоторая непрерывная группа, и наоборот, чем больше параметрических свобод имеет группа преобразований, тем выше иерархическое положение соответствующей геометрии.

Геометрические проблемы, связанные с исследованием общих свойств линейных преобразований, принято относить к аффинной геометрии. При клейновской трактовке геометрии следует выявить базовые референты такой теории, т.е. ее инварианты.

Пусть $LG(n, m)$ — общий идентификатор линейной группы, где n — размерность пространства, m — число параметрических свобод преобразования. Общие аффинные преобразования по признаку сохранения операторной структуры при композициях преобразований образуют общую линейную группу $LG(n, n^2 + n)$, единицей которой служит, как и должно быть, тождественный оператор $\mathbf{E} = \{\mathbf{o}, \mathbf{E}\}$. Группа LG , имея максимальное число свобод, присущих линейным преобразованиям, не имеет параметрических ограничений — является свободной группой и, значит, согласно определению 6.2 не имеет инвариантов.

Следствие 6.6. *Аффинная геометрия как геометрия общей линейной группы не имеет собственных инвариантов, т.е. является свободной геометрией.*

В дальнейших рассуждениях в качестве начальной свободной группы используются *центроаффинные* преобразования, определяемые всеми невырожденными матрицами, которые образуют линейную группу $LG(n, n^2)$.

6.7. Общая метрическая метафора

Метрические геометрии, например, геометрии Евклида, Галилея и Минковского, представляются в планиметрическом варианте 1-параметрическими группами координатных преобразований, которые являются подгруппами общей линейной группы LG . Поэтому метрические геометрии можно интерпретировать как подгеометрии, получаемые из аффинной геометрии посредством редукции параметрических свобод координатных преобразований или координатных базисов.

При конкретном задании аффинного базиса $\mathbf{V} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ мы вольны всякий раз выбирать эталонные векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 произвольно и независимо.

Пусть в АСК даны две произвольные кривые \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , проходящие через единичные точки \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 (рис. 17в). Объявим кривые \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 эталонами длины всех ОСК.

Что дает нам такая глобальная декларация?

Построим также в АСК произвольные прямые $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}(\mathbf{o}, \mathbf{b}_1)$ и $\mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{L}(\mathbf{o}, \mathbf{b}_2)$, пересекающие эталоны \mathbf{E}_i в некоторых точках \mathbf{b}_i . Тогда векторы \mathbf{b}_i — базисные эталоны новой ОСК. Именно в такой линейной (аффинной) параметризации прямых \mathbf{L}_i — осей ОСК — состоит смысл глобальной метризации плоскости с помощью эталонных линий \mathbf{E}_i — это единичные эквидистанты для всех возможных направлений осей \mathbf{L}_i .

Новый 2-параметрический базис $\mathbf{V}(\alpha_1, \alpha_2)$ (рис. 17в) определяется заданием вектор-функций $\mathbf{b}_i(\alpha_i)$ — метрических инвариантов (MI) аффинного базиса,

$$MI_1: \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(\alpha_1), \quad MI_2: \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(\alpha_2).$$

Дополнительное необходимое ограничение: $\mathbf{V}(0, 0) = \mathbf{E}$.

При независимых изменениях углов α_i оси базиса образуют независимые пучки прямых. Для редукции

независимости выбора направлений осей ОСК необходимо дополнительное правило соответствия осей, т.е. третий неметрический инвариант, который уместно обобщенно называть *ориентационным инвариантом* (OI),

$$OI: \mathbf{b}_1 \rightarrow \mathbf{b}_2 \Rightarrow \varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \text{const}.$$

Итак, редукция аффинной геометрии (АГ) в метрическую геометрию (МГ) обеспечивается системой базисных инвариантов (СБИ):

$$\text{СБИ} \sim \{MI_1, MI_2, OI\}: \text{АГ} \rightarrow \text{МГ}; \quad (\text{П.31})$$

свободная аффинная геометрия теряет три свободы из четырех, а метрическая геометрия наследует одну свободу на поворотные преобразования.

6.8. Геометрии симметричных квадратичных форм

Вывод преобразования "твердотельного" поворота геометрии Евклида опирается на требование инвариантности квадратичной формы для эквивалентных точек \mathbf{x} и \mathbf{y} :

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}'\mathbf{x} = \mathbf{y}'\mathbf{V}'\mathbf{V}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{y},$$

которое (см. (П.13)) эквивалентно свойству автоконгруэнтности единичной матрицы \mathbf{E}

$$\mathbf{V}'\mathbf{E}\mathbf{V} = \mathbf{E}; \quad (\text{П.32})$$

матрицы \mathbf{V} как решения этого производящего уравнения представляют необходимые ортогональные базисы, образующие собственную ортогональную группу.

В геометрии Минковского инвариантной квадратичной формой служит не сумма, а разность квадратов координат эквивалентных точек \mathbf{x} и \mathbf{y} :

$$-x_1^2 + x_2^2 = -y_1^2 + y_2^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}'\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{y}'\mathbf{V}'\mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{F}\mathbf{y},$$

поэтому матричное производящее уравнение содержит метрическую матрицу \mathbf{F} :

$$\mathbf{V}'\mathbf{F}\mathbf{V} = \mathbf{F}. \quad (\text{П.33})$$

Условие инвариантности общей квадратичной формы с произвольной симметричной (невырожденной) метрической матрицей \mathbf{M} приводит к матричному уравнению

$$\mathbf{V}'\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{M}. \quad (\text{П.34})$$

Свойства базисов \mathbf{V} этого уравнения описаны выше (теорема 6.1, следствия 6.4 и 6.5).

Традиционные определения метрических геометрий ограничиваются постулированием инвариантных свойств скалярного произведения векторов, но именно матричные формы (П.34) специфицируют всю систему базисных инвариантов:

$$\mathbf{V}'\mathbf{M}\mathbf{V} \equiv ((\mathbf{b}'_1\mathbf{M}\mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_2\mathbf{M}\mathbf{b}_1)', (\mathbf{b}'_1\mathbf{M}\mathbf{b}_2, \mathbf{b}'_2\mathbf{M}\mathbf{b}_2)') = \mathbf{M}.$$

Здесь диагональные скалярные равенства представляют метрические инварианты, а недиагональные — ориентационный инвариант. Следовательно, метод инвариантной квадратичной формы соответствует обобщенной метрической модели СБИ (П.30).

Из (П.32) для геометрии Евклида (ГЕ) имеем

$$\text{СБИ}_{\mathbf{M}=\mathbf{E}} \sim \{b'_1 b_1 = b'_2 b_2 = 1, b'_1 b_2 = 0\}, \quad (\text{П.35})$$

т.е. эталоны \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 базисных векторов совпадают с одной и той же единичной окружностью (рис. 18а), что позволяет нам говорить об угле между осями координат и выразить геометрическое содержание OI следующим образом: угол между осями всегда одинаков и равен прямому, $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$. При эллиптическом повороте (рис. 18б) эталоны \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 представляются разными эллипсами, но для определения углов используется общая единичная окружность.

Из (П.33) для геометрии Минковского (ГМ) имеем

$$\text{СБИ}_{\mathbf{M}=\mathbf{F}} \sim \{b'_1 F b_1 = -1, b'_2 F b_2 = 1, b'_1 F b_2 = 0\}. \quad (\text{П.36})$$

Здесь эталоны \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — это разные гиперболические ветви, имеющие общие диагональные асимптоты $x_2 = \pm x_1$ (рис.18в). В этой геометрии мы не можем говорить об угле между осями координат, но, определяя углы осей ОСК α_1 и α_2 относительно разных осей АСК, мы можем сравнивать их по величине, и тогда геометрическое содержание OI сводится к констатации равенства

углов: $\alpha_2 = \alpha_1$. Иначе это равенство углов отражает векторное равенство $b_2 \equiv I b_1$ — оси ОСК диагонально симметричны.

В следствии 6.4 еще выделена третья модель геометрии $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, эталонами которой служат равнобочные гиперболы (рис. 18г) — их асимптоты совпадают с осями координат. По свойствам метрических инвариантов эта модель выглядит "экзотической":

$$\text{СБИ}_{\mathbf{M}=\mathbf{I}} \sim \{b'_1 I b_1 = b'_2 I b_2 = 0, b'_1 I b_2 = 1\}, \quad (\text{П.37})$$

т.е. понятие длины здесь расшифровывается иначе, чем в случаях (П.35) и (П.36).

6.9. Линейные повороты

Если в описании общей метрической метафоры кривые эталоны заменить прямыми, то базисные векторы ОСК

$$b_1(\alpha_1) \equiv e_1 + \alpha_1 c_1, \quad b_2(\alpha_2) \equiv e_2 + \alpha_2 c_2$$

будут совершать линейные повороты. Выбирая для доопределения матрицы $\mathbf{B}(\alpha)$, где $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)'$, групповой принцип аддитивной параметризации

$$\mathbf{B}(\alpha_1)\mathbf{B}(\alpha_2) = \mathbf{B}(\alpha_1 + \alpha_2),$$

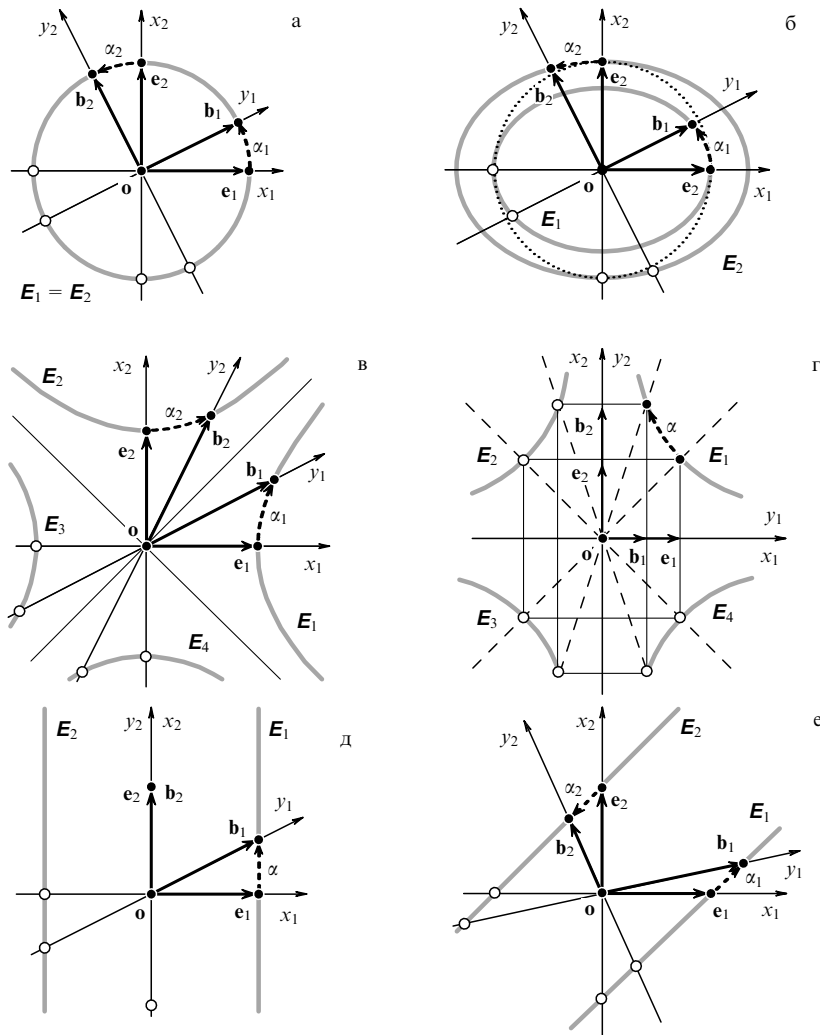


Рис. 18. Примеры задания типовых метрических геометрий посредством базисных эталонов.

получим 1-параметрическую группу линейных поворотов

$$\mathbf{V} = \mathbf{E} + \alpha \mathbf{N} = \mathbf{e}^{\alpha \mathbf{N}}, \quad (\text{П.38})$$

где структурная матрица $\mathbf{N} \equiv (\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2, -c^{-1}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ нильпотентна:

$$\text{tr}(\mathbf{N}) = 0, \quad |\mathbf{N}| = 0 \Rightarrow \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{V}| = \mathbf{e}^{\text{tr}(\alpha \mathbf{N})} = 1.$$

Для геометрии линейного поворота (ГЛП) имеет место ($c = 1$, рис. 18е)

$$\begin{aligned} \text{СБИ}_{\text{ГЛП}} &\sim \\ &\sim \left\{ b_{11} - \frac{b_{21}}{c} = 1, \quad cb_{12} - b_{22} = -1, \quad \frac{c}{v_1} + \frac{v_2}{c} = 2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.39})$$

Теорема 6.2. Геометрия Галилея — это предельный вариант геометрии линейного поворота при $c \rightarrow \infty$.

Доказательство. До осуществления предельного перехода следует сначала линейную α -параметризацию заменить на проективную v -параметризацию:

$$v_1 \equiv \frac{b_{21}}{b_{11}} = \frac{c}{1 + \alpha_1^{-1}}, \quad v_2 \equiv \frac{b_{22}}{b_{12}} = c(1 + \alpha_2^{-1}).$$

Базисная матрица (П.38), сохраняя структуру, становится параметрически нелинейной, но после предельного перехода базис линейно зависит от параметра:

$$\mathbf{V}(v; c) = \mathbf{E} + \left(\frac{v}{c-v} \right) \mathbf{N} \Big|_{c \rightarrow \infty} \rightarrow \mathbf{V}(v) = \mathbf{E} + v\mathbf{N} \equiv \mathbf{e}^{v\mathbf{N}}, \quad (\text{П.40})$$

где $v \equiv v_1$ и $\mathbf{N} \equiv \mathbf{E}_{21} \equiv (\mathbf{I} + \mathbf{J})/2$ — новая структурная матрица. Теперь $\mathbf{E}_1: \mathbf{b}_1(v) \equiv \mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$ — вертикальная прямая (рис. 18д), а $\mathbf{E}_2: \mathbf{b}_2 \equiv \mathbf{e}_2$, что и требовалось доказать. \blacklozenge

6.10. Числовые модели геометрий

Ранее предпринимались попытки связать комплексные и другие 2-местные алгебраические числа (бинионы) с метрическими геометриями (см., например, [39, 60]). Адекватная геометрическая интерпретация бинионов возможна при использовании вещественных матричных представлений, которые позволяют определять числа посредством соответствующей системы инвариантов, т.е. так же, как геометрии.

Для перехода от 4-параметрической аффинной группы к 2-параметрической бинионной группе необходима система из двух инвариантов, поэтому бинионные геометрии — это геометрии двух инвариантов. Общее матричное представление биниона

$$\mathbf{X} = x_1 \mathbf{E} + x_2 \mathbf{N} \quad (\text{П.41})$$

содержит структурную матрицу \mathbf{N} "мнимой" части, которая неявно доопределяется условиями

$$\text{tr}(\mathbf{N}) = 0, \quad \mathbf{N}^2 \in \{-\mathbf{E}, \mathbf{0}, \mathbf{E}\},$$

варианту $\mathbf{N}^2 = -\mathbf{E}$ соответствуют комплексные числа (КЧ), $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ — дуальные числа, или ниль-числа (НЧ), $\mathbf{N}^2 = \mathbf{E}$ — двойные числа (ДЧ).

Простые явные матрицы \mathbf{N} для КЧ и ДЧ следуют из диэдрического базиса (П.1б), а для НЧ — из базиса геометрии Галилея (П.40) (см. табл. 7).

Таблица 7. Структурные матрицы бинионов

Число	\mathbf{N}	\mathbf{N}^2	$ \mathbf{N} $	$ \mathbf{X} $
КЧ	\mathbf{J}	$-\mathbf{E}$	1	$x_1^2 + x_2^2$
НЧ	\mathbf{E}_{21}	$\mathbf{0}$	0	x_1^2
ДЧ	\mathbf{F}, \mathbf{I}	\mathbf{E}	-1	$x_1^2 - x_2^2$

Если пары инвариантов бинионов определять на основе сравнения общей базисной матрицы $\mathbf{V} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ с матрицей (П.41), то редукцию общего базиса $\{I_1, I_2\}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X}$ можно выразить одним векторным условием

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{N}\mathbf{b}_1: \quad \mathbf{V} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}, \mathbf{N}\mathbf{b}). \quad (\text{П.42})$$

Инварианты КЧ представимы с помощью скалярных произведений:

$$\{I_1, I_2\} \sim \{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 = 0\}; \quad (\text{П.43})$$

I_1 — это условие равенства евклидовых длин базисных векторов, I_2 — условие евклидовой ортогональности базисных векторов. Из полярного представления $\mathbf{V} = \rho(\cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{J})$, видно: для получения евклидовой геометрии необходим третий инвариант

$$I_3: \quad |\mathbf{V}| = 1, \quad (\text{П.44})$$

который доопределяет метрические эталоны до единичной окружности.

Для ДЧ вместо (П.43) имеем аналогичные инварианты

$$\{I_1, I_2\} \sim \{\mathbf{b}'_2 \mathbf{F} \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}'_1 \mathbf{F} \mathbf{b}_1, \mathbf{b}'_1 \mathbf{F} \mathbf{b}_2 = 0\}; \quad (\text{П.45})$$

I_1 — это условие равенства длин базисных векторов в метрике Минковского, I_2 — условие ортогональности базисных векторов в той же метрике. Из гиперболической параметризации ДЧ

$$\mathbf{V} = \rho(\cosh \alpha \mathbf{E} + \sinh \alpha \mathbf{I})$$

видно: для редукции геометрии ДЧ в геометрию Минковского необходим третий инвариант — условие унимодулярности (П.44).

Геометрия НЧ образуется из аффинной геометрии посредством двух инвариантов, ее унимодулярный вариант эквивалентен геометрии Галилея:

$$\{I_1, I_2, I_3\} \sim \{\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2, \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, |\mathbf{V}| = 1\}.$$

Числовые модели геометрий (ЧМГ) демонстрируют одинаковые схемы спецификации инвариантов, посредством которых геометрии Евклида, Минковского и Галилея выделяются из аффинной геометрии. В этих моделях первый инвариант можно назвать метрическим (MI), второй — ориентационным (OI), а третий — унимодулярным (UI).

Итак, доказана следующая

Теорема 6.3. СБИ числовых моделей геометрий отличается от СБИ общей метрической метафоры (П.31):

$$\text{СБИ}_{\text{ЧМГ}} \sim \{I_1, I_2, I_3\} \sim \{MI, OI, UI\}. \quad (\text{П.46})$$

Если группы (алгебры) бинионов интерпретировать как подгруппы (подалгебры) группы (алгебры) дикватерниона

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{F} + a_3\mathbf{I} + a_4\mathbf{J},$$

то можно указать алгебраические системы двух инвариантов, посредством которых осуществляется необходимая редукция: кватернион \rightarrow бинион, или $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{X}$, если \mathbf{X} вида (П.41). Например, вариантам выбора матрицы \mathbf{N} из табл. 7 соответствуют следующие пары условий:

$$\begin{aligned} \text{КЧ: } a_2 = a_3 = 0, \quad \text{НЧ: } a_2 = a_3 + a_4 = 0, \\ \text{ДЧ: } a_2 = a_4 = 0 \vee a_3 = a_4 = 0. \end{aligned}$$

Геометрии КЧ и ДЧ строятся в разных групповых базисах матриц $\{\mathbf{E}, \mathbf{I}\}$ и $\{\mathbf{E}, \mathbf{J}\}$. Матрицы $\{\mathbf{E}, \mathbf{I}\}$ образуют циклическую группу $C^2 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{I}\} \cong \{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\}$, или группу инволюций.

Алгебра ДЧ определяется в базисе диэдрической группы

$$D^2 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{I}\} \times \{\mathbf{E}, -\mathbf{E}\} \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{I}, -\mathbf{E}, -\mathbf{I}\}.$$

Алгебра КЧ определяется в групповом базисе циклической группы 4-го порядка:

$$C^4 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{J}, -\mathbf{E}, -\mathbf{J}\} \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{J}, \mathbf{J}^2, \mathbf{J}^3\}.$$

Среди абстрактных групп 4-го порядка существуют только две неизоморфные группы (см. [40]) — циклическая C^4 и диэдрическая D^2 .

Следствие 6.7. Геометрии КЧ и ДЧ, а также геометрии Евклида и Минковского имеют неизоморфные групповые базисы.

Базис НЧ не является групповым, нильпотентная матрица \mathbf{N} , $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$, не может быть элементом дискретной мультипликативной группы, но алгебра, построенная в нильпотентном базисе, является непрерывной группой. Аналогичная ситуация имеет место и при выборе стандартного нильпотентного базиса матриц (П.1а).

6.11. Модели полярных координат

Экспоненциальные формулы (П.20) — матричные аналоги известной скалярной формулы Эйлера для комплексных чисел — вводят полярные представления базисных и других матриц, поскольку выделяемый скалярный параметр α геометрически интерпретируется как угол поворотного преобразования. Экспоненциальные представления поворотов — это канонические полярные формы, обеспечивающие аддитивность углов при композициях поворотов:

$$\mathbf{V}(\alpha_1)\mathbf{V}(\alpha_2) = \mathbf{V}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Рассмотрим другие модели полярных представлений.

При переходе от декартовых координат точки $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)'$ к полярным координатам $\mathbf{x} \equiv \rho\mathbf{a}(\alpha)$ роль эталонов длины ρ и транспортиров угла α могут выполнять разные прямые или кривые. Эталоны длины либо могут "по совместительству" служить и транспортирами углов, что характерно для геометрий Евклида, Минковского и Галилея (рис. 18а, в, д), либо задачи определения

длин и углов могут решаться с помощью разных эталонов. В определении эллиптических поворотов (рис. 18б) эталоны длины — разные эллипсы, а транспортиры углов — общая единичная окружность.

Рисунок 19а демонстрирует три варианта выбора эталонных прямых:

$$L_1 \equiv L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}) \quad L_2 \equiv L(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}), \quad L_3 \equiv L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2),$$

которые дают три линейные модели полярных координат (ПК):

$$\mathbf{x} = \rho_1(1, \alpha_1)' \Leftarrow \rho_1 \equiv x_1, \quad \alpha_1 \equiv \frac{x_2}{x_1}; \tag{П.47}$$

$$\mathbf{x} = \rho_2(\alpha_2, 1)' \Leftarrow \rho_2 \equiv x_2, \quad \alpha_2 \equiv \frac{x_1}{x_2}; \tag{П.48}$$

$$\mathbf{x} = \rho(1 - \lambda, \lambda)' \Leftarrow \rho \equiv \mathbf{e}'\mathbf{x}, \quad \lambda \equiv \frac{x_2}{\rho}. \tag{П.49}$$

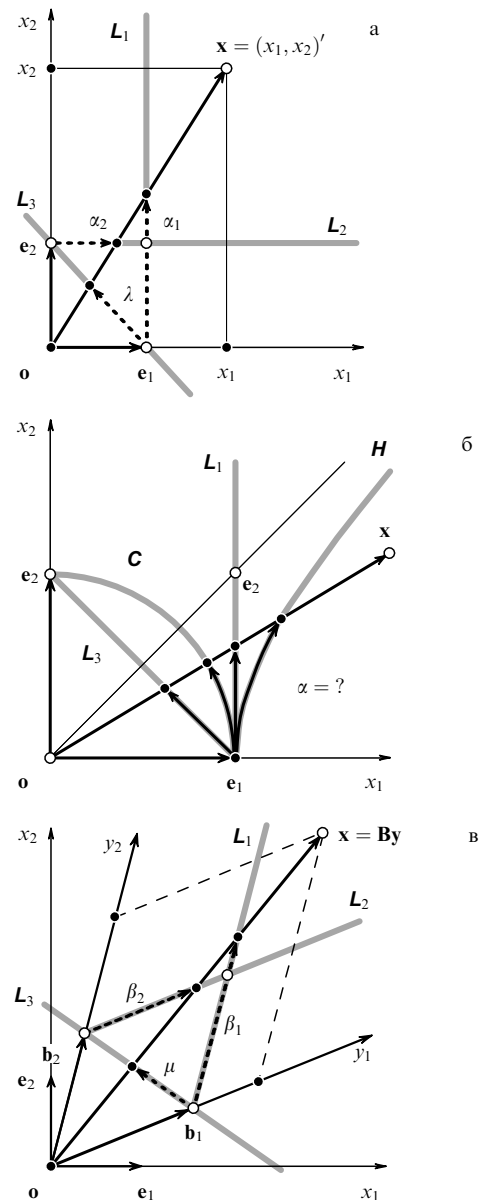


Рис. 19. Угловые меры линейных и нелинейных эталонов.

Собственные угловые меры этих эталонов связаны дробно-линейным образом:

$$\lambda = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} = \frac{1}{1 + \alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}. \quad (\text{П.50})$$

Эти связи можно использовать для переноса (отображения) угловых параметризаций с одного эталона на другой. При отображении $\lambda \rightarrow \alpha \equiv \alpha_1$ вместо аффинной λ -параметризации (П.49) получим проективную α -параметризацию:

$$\mathbf{x} \equiv \rho \mathbf{a}(\alpha) = \rho(\text{cl}(\alpha), \text{sl}(\alpha))' \Leftarrow \rho \equiv \mathbf{e}'\mathbf{x}, \text{tl}(\alpha) \equiv \frac{x_2}{x_1}; \quad (\text{П.51})$$

здесь введены функции линейного косинуса и синуса

$$\text{cl}(\alpha) \equiv \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \text{sl}(\alpha) \equiv \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \text{cl}(\alpha) + \text{sl}(\alpha) = 1,$$

а также линейного тангенса

$$\text{tl}(\alpha) \equiv \frac{\text{sl}(\alpha)}{\text{cl}(\alpha)} = \alpha.$$

В полярных описаниях линейного (П.51), кругового и гиперболического поворотов

$$\mathbf{x} = \rho(\cos \alpha, \sin \alpha)' \Leftarrow \rho^2 \equiv \mathbf{x}'\mathbf{E}\mathbf{x}, \tan \alpha \equiv \frac{x_2}{x_1}, \quad (\text{П.52})$$

$$\mathbf{x} = \rho(\cosh \alpha, \sinh \alpha)' \Leftarrow \rho^2 \equiv \mathbf{x}'\mathbf{F}\mathbf{x}, \tanh \alpha \equiv \frac{x_2}{x_1} \quad (\text{П.53})$$

видна стандартная тенденция предпочтения проективного параметра — отношения декартовых координат x_2/x_1 — в качестве первичной угловой меры, на основе которой для эталонов разной формы (рис. 19б) определяются разные функции угла α .

Замечание 6.1. Определение евклидова угла как евклидовой длины дуги окружности на основе дифференциальной квадратичной формы $dx^2 = dx'\mathbf{E}dx$ порождает тригонометрические функции угла. Этот метод используется в дифференциальной геометрии с целью натуральной параметризации произвольных непрерывных линий. Гиперболические эталоны геометрии Минковского тоже можно подвергнуть натуральной параметризации, но гиперболическим функциям угла соответствует параметризация, выполненная на основе гиперболической квадратичной формы $dx^2 = dx'\mathbf{F}dx$.

6.12. Дробно-линейные преобразования

Пусть \mathbf{x} и \mathbf{y} — эквивалентные точки АСК и ОСК. Аффинная связь декартовых координат этих точек преобразуется в дробно-линейную связь углов этих точек:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} \Rightarrow \alpha = \frac{b_{11}\beta + b_{12}}{b_{21}\beta + b_{22}} \equiv \text{fr}(\beta; \mathbf{B}); \quad (\text{П.54})$$

здесь $\alpha \equiv x_1/x_2 \equiv \alpha_2$, $\beta \equiv y_1/y_2 \equiv \beta_2$ (рис. 19а,б), $\text{fr}(\beta; \mathbf{B})$ — общий идентификатор дробно-линейного преобразования (ДЛП), ассоциированного с матрицей \mathbf{B} аффинного линейного преобразования (АЛП).

Переход АЛП \rightarrow ДЛП происходит с явной потерей размерности базисного преобразования: преобразование

векторов заменяется преобразованием скаляров, при этом происходит неявная потеря одной параметрической свободы, которая скрыта в возможности сокращения общего множителя числителя и знаменателя.

Обратный переход ДЛП \rightarrow АЛП:

$$\alpha \equiv \frac{x_1}{x_2} \rightarrow \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)', \quad \beta \equiv \frac{y_1}{y_2} \rightarrow \mathbf{y} \equiv (y_1, y_2)', \quad (\text{П.55})$$

осуществляется методом введения общего неопределенного скалярного множителя, который должен восстановить параметрические свободы АЛП:

$$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{y} = \rho \mathbf{A}\mathbf{x} \vee \alpha = \text{fr}(\beta; \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{x} = \sigma \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (\text{П.56})$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, $\sigma = \rho^{-1}$. Преобразования (П.55) принято называть *переходом от неоднородных координат прямой к однородным координатам плоскости* [65].

Произвольные ДЛП (П.54) с невырожденной 2-матрицей коэффициентов \mathbf{B} , $|\mathbf{B}| \neq 0$, образуют 3-параметрическую проективную группу $PG(1,3)$ относительно операции композиции $\text{fr}(\text{fr}(\beta; \mathbf{B}_1); \mathbf{B}_2) = \text{fr}(\beta; \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1)$, которая эквивалентна произведению матриц — групповой операции аффинной группы. Основные варианты матричных преобразований в формулах ДЛП приведены в табл. 8.

Таблица 8. Основные формулы ДЛП

1	$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{E})$	$\beta = \alpha$
2	$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{A})$	$\alpha = \text{fr}(\beta; \mathbf{A}^{-1})$
3	$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{A}_1), \gamma = \text{fr}(\beta; \mathbf{A}_2)$	$\gamma = \text{fr}(\alpha; \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)$
5	$\text{fr}(\alpha; \mathbf{A}_1) = \text{fr}(\beta; \mathbf{A}_2)$	$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1)$
6	$\beta^{-1} = \text{fr}(\alpha^{-1}; \mathbf{A})$	$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{A})$
7	$\beta = \text{fr}(d_1\alpha/d_2; \mathbf{A})$	$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{A}\mathbf{D})$
8	$\beta = (d_1/d_2)\text{fr}(\alpha; \mathbf{A})$	$\beta = \text{fr}(\alpha; \mathbf{D}\mathbf{A})$

Формулы распределены по нумерованным строкам: 1 — тождественное преобразование, 2 — обратное преобразование, 3 — композиция и т.д. В формулах 7 и 8 матрица $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2)$.

Явную реконструкцию 3-параметрической матрицы ДЛП можно осуществить с помощью скалярного проективного базиса.

В АСК (рис. 19а) трем точкам $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}/2, \mathbf{e}_2\} \in \mathbf{L}_3 \equiv \mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (см. (П.50)) соответствуют следующие тройки величин угловых параметров:

$$\lambda = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \rightarrow \alpha_1 = \{0, 1, \infty\} \rightarrow \alpha_2 = \{\infty, 1, 0\}.$$

В ОСК (рис. 19в) трем эквивалентным точкам $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}/2, \mathbf{b}_2 | \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2\} \in \mathbf{L}_3 \equiv \mathbf{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ соответствуют те же самые величины эквивалентных угловых параметров:

$$\mu = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \rightarrow \beta_1 = \{0, 1, \infty\} \rightarrow \beta_2 = \{\infty, 1, 0\}.$$

Подставляя базисные значения $\beta = \{0, 1, \infty\}$ в ДЛП (П.54), получим

$$\beta = \frac{(\alpha_1 - \alpha_\infty)/(\alpha_1 - \alpha_0)}{(\alpha - \alpha_\infty)/(\alpha - \alpha_0)}; \quad (\text{П.57})$$

здесь $\alpha_1 \equiv \text{fr}(1; \mathbf{B})$ и т.д., т.е. матрица коэффициентов $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}^{-1}$ 3-параметрической базисной ДЛП $\beta \equiv \text{fr}(\alpha; \mathbf{A})$

представима в виде произведения двух матриц:

$$\mathbf{A} \equiv \text{diag}(\alpha_1 - \alpha_\infty, \alpha_1 - \alpha_0)(\mathbf{e}, -\alpha_0\mathbf{e}_1 - \alpha_\infty\mathbf{e}_2), \quad (\text{П.58})$$

$$|\mathbf{A}| = (\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_\infty)(\alpha_0 - \alpha_\infty).$$

Обратное ДЛП определяется таким же образом.

6.13. Проективный инвариант

Проективный инвариант (вурф) четырех углов $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ традиционно представляется в виде двойного отношения четырех разностей:

$$w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \equiv \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)/(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_2 - \alpha_3)/(\alpha_2 - \alpha_4)}. \quad (\text{П.59})$$

Вурф интересен тем, что его величина — инвариант ДЛП:

$$\alpha = \text{fr}(\beta; \mathbf{B}) \Rightarrow w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = w(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4).$$

Из сравнения (П.59) с (П.57) находим связь

$$\beta = w(\alpha, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_\infty), \quad (\text{П.60})$$

т.е. базисное ДЛП, являясь функцией, представимо в виде вурфа. Обратное представление вурфа в виде ДЛП тоже возможно:

$$w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \alpha_2 = \text{fr}(\alpha_1; \mathbf{A}),$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}$ и $\mathbf{X} \equiv -\mathbf{F} + (x_4^{-1}\mathbf{e}_2, -x_3\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{D} \equiv \text{diag}(d_1, d_2)$.

Для систематики инвариантов плоских геометрий полезно представление вурфа в виде билинейной формы:

$$\frac{y_1}{y_2} = \text{fr}\left(\frac{x_1}{x_2}; \mathbf{A}\right) \Rightarrow \mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{J}\mathbf{A}. \quad (\text{П.61})$$

Билинейное условие $\mathbf{y}'\mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ при $\mathbf{A} = \mathbf{J}$ соответствует евклидовой ортогональности векторов \mathbf{y} и \mathbf{x} . Поэтому когда \mathbf{A} — произвольная матрица ДЛП, условие (П.61) можно интерпретировать как условие проективной ортогональности.

6.14. Унимодулярный инвариант

Поскольку унимодулярные матрицы образуют группу, в соответствии с групповым принципом Клейна можно говорить об унимодулярной геометрии. Плоский вариант такой геометрии имеет особый интерес. Из леммы 6.1 следует соответствие

$$|\mathbf{B}| = 1 \Leftrightarrow \mathbf{B}'\mathbf{J}\mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad (\text{П.62})$$

т.е. унимодулярная планиметрия эквивалентна симплектической планиметрии, порождаемой инвариантной кососимметричной формой [13, 20].

Согласно теореме 6.1, т.е. формулам (П.17) и (П.18),

$$\mathbf{B}(\alpha) = \mathbf{e}^{\alpha\mathbf{N}} = b_1\mathbf{E} + b_2\mathbf{N} \Leftrightarrow \mathbf{N} = n_2\mathbf{F} + n_3\mathbf{I} + n_4\mathbf{J}. \quad (\text{П.63})$$

Функциональный вид скалярных компонент b_1 и b_2 бинионной формы (П.63) определяется величиной детерминанта структурной матрицы \mathbf{N} , поскольку $\mathbf{N}^2 = -|\mathbf{N}|\mathbf{E}$, где $|\mathbf{N}| = -n_2^2 - n_3^2 + n_4^2$. Трём значениям этого детерминанта $|\mathbf{N}| = \{1, 0, -1\}$ соответствуют геометрии трех типов поворотов — эллиптического, линейного и гиперболического. При фиксации детерминанта струк-

турная матрица \mathbf{N} имеет два свободных параметра, которые можно представить как углы α_1 и α_2 тригонометрических и гиперболических функций, приведенных в табл. 9.

Таблица 9. Компоненты симплектического базиса

$ \mathbf{N} $	\mathbf{N}^2	b_1	b_2	n_2	n_3	n_4
1	$-\mathbf{E}$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\sinh \alpha_1 \cos \alpha_2$	$\sinh \alpha_1 \sin \alpha_2$	$\sinh \alpha_1$
0	$\mathbf{0}$	1	α	$\alpha_1 \cos \alpha_2$	$\alpha_1 \sin \alpha_2$	α_1
-1	\mathbf{E}	$\cosh \alpha$	$\sinh \alpha$	$\cos \alpha_1$	$\sin \alpha_1 \cosh \alpha_2$	$\sin \alpha_1 \sinh \alpha_2$

Метрические геометрии Евклида (ГЕ), Галилея (ГГ) и Минковского (ГМ) можно теперь трактовать как частные случаи симплектической планиметрии:

$$\text{ГЕ: } |\mathbf{N}| = 1, \alpha_1 = 0; \quad \text{ГГ: } |\mathbf{N}| = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{ГМ: } |\mathbf{N}| = -1, \alpha_1 = 0. \quad (\text{П.64})$$

Итак, исходное постулирование унимодулярности базисной 2-матрицы является вполне конструктивным для аналитической спецификации симплектических моделей планиметрий благодаря дополнительному учету свойства автоконгруэнтности кососимметрической 2-матрицы.

Список литературы

1. Аристотель *История животных* (М.: ИЦ РГГУ, 1996)
2. Аристотель *Сочинения* Т. 3 (М.: Мысль, 1981)
3. Артемьева Е Н, Смолянинов В В *Биомеханика* **24** 70 (1992)
4. Артемьева Е Н, Смолянинов В В *Биофизика* **38** (4) 714 (1993)
5. Артемьева Е Н и др., в кн. *Мозжечок и структуры ствола мозга* (Ереван: Гитугюн, НАН РА, 1995) с. 14
6. Артемьева Е Н и др. *Медицинская биомеханика* **3** 26 (1986)
7. Аршавский Ю И и др. *Биофизика* **10** (3) 665 (1965)
8. Белецкий В В *Двуногая ходьба* (М.: Наука, 1984)
9. Беллман Р *Введение в теорию матриц* (М.: Наука, 1969)
10. Бернштейн Н А *Очерки по физиологии движений и физиологии активности* (М.: Медгиз, 1966)
11. Бёрке У *Пространство-время, геометрия, космология* (М.: Мир, 1985)
12. Бонди Г *Гипотезы и мифы в физической теории* (М.: Мир, 1972)
13. Вейль Г *Классические группы. Их инварианты и представления* (М.: ИЛ, 1947)
14. Винер Н *Кибернетика или управление и связь в животном и машине* 2-е изд. (М.: Сов. радио, 1968)
15. Гамбарян П П *Бег млекопитающих* (Л.: Наука, 1972)
16. Гельфанд И М, Цетлин М Л *ДАН СССР* **131** (6) 1242 (1960)
17. Гельфанд И М и др., в кн. *Модели структурно-функциональной организации некоторых биологических систем* (М.: Наука, 1966) с. 264
18. Гинзбург В Л *О теории относительности* (М.: Наука, 1979)
19. Губо А, Баррье Г *Экстерьер лошади* (Орел, 1901)
20. Гурфинкель В С и др., в кн. *Исследования робототехнических систем* (М.: Наука, 1980) с. 15
21. Гурфинкель В С, Фомин С В, Штилькинд Т К *Биофизика* **15** 380 (1970)
22. Декарт Р *Рассуждение о методе. С приложениями: "Диоптрика", "Метеоры", "Геометрия"* (М.: Изд. АН СССР, 1953)
23. Дубровин Б А, Новиков С П, Фоменко А Т *Современная геометрия* 2-е изд. (М.: Наука, 1986)
24. Дьедонне Ж *Линейная алгебра и элементарная геометрия* (М.: Наука, 1972)
25. Запирский В М, Аруин А С, Селуянов В Н *Биомеханика двигательного аппарата человека* (М.: Физкультура и спорт, 1981)
26. Карпович А Л, Смолянинов В В *Журнал эволюционной биохимии и физиологии* **10** (5) 480 (1974)
27. Карпович А Л, Смолянинов В В *Физиология человека* **1** (1) 167 (1975)

28. Карпович А Л, Смолянинов В В, в сб. *Биомеханика* (Труды Рижского НИИ травм. и ортопедии, Вып. 13) (Рига, 1975)
29. Карпович А Л, Смолянинов В В *Журнал эволюционной биохимии и физиологии* **13** (1) 31 (1977)
30. Карпович А Л, Смолянинов В В, в кн. *Локомоция животных и биомеханика опорно-двигательного аппарата* (Киев: Наукова думка, 1979) с. 182
31. Клейн Ф *Элементарная математика с точки зрения высшей* Т. 1 *Арифметика, алгебра, анализ*, Т. 2 *Геометрия* (М.: Наука, 1987)
32. Клиффорд В К *Здоровый смысл точных наук* (Петроград, 1922)
33. Крик Ф, в кн. *Мозг* (М.: Мир, 1982) с. 256
34. Кубланов М Г, Смолянинов В В, в кн. *Интеллектуальные процессы и их моделирование* (М.: Наука, 1992) с. 117
35. Кун Т *Структура научных революций* (М.: Прогресс, 1975)
36. Ланцош К *Вариационные принципы механики* (М.: Мир, 1965)
37. Марей Э *Механика животного организма* (СПб.: Знание, 1875)
38. Мардер Л *Парадокс часов* (М.: Мир, 1974)
39. *Некоторые вопросы механики роботов и биомеханики* (М.: МГУ, 1978)
40. Норден А П (Ред.) *Об основаниях геометрии* (М.: Гостехиздат, 1956)
41. Паули В *Теория относительности* 2-е изд. (М.: Наука, 1983)
42. Тяпкин А А (Сост.) *Принцип относительности* (М.: Атомиздат, 1973)
43. Пуанкаре А *О науке* (М.: Наука, 1983)
44. Розенфельд Б А *Неевклидовы геометрии* (М.: ГИТТЛ, 1955)
45. Сентаготаи Я, Арбиб М *Концептуальные модели нервной системы* (М.: Мир, 1976)
46. Скорняков Л А *Элементы алгебры* (М.: Наука, 1980)
47. Скворцов Д В *Клинический анализ движений. Анализ походки* (М.: МБН, 1996)
48. Смолянинов В В, в кн. *Математическая теория биологических процессов. Тезисы докладов 1-й конф., Калининград, 1976* (Отв. ред. А К Приц) (Калининград, 1976) с. 276
49. Смолянинов В В "Локомоторная теория относительности", Препринт ИППИ АН СССР (М.: ИППИ АН СССР, 1984) 75 с.
50. Смолянинов В В "Структурные и функциональные инварианты распределенных биологических систем", Препринт Пушкино, НЦБИ АН СССР (Пушино: НЦБИ АН СССР, 1985) 43 с.
51. Смолянинов В В, в кн. *Интеллектуальные процессы и их моделирование* (М.: Наука, 1987) с. 66
52. Смолянинов В В *Биологический журнал Армении* **8** 712 (1990)
53. Смолянинов В В, в кн. *Мозжечок и структуры ствола мозга* (Ереван: Гитугюн, НАН РА, 1995) с. 378
54. Смолянинов В В *ДАН* **341** (4) 478 (1995)
55. Смолянинов В В *Биологические мембраны* **14** (6) 574 (1997)
56. Смолянинов В В, Карпович А Л *Журнал эволюционной биохимии и физиологии* **8** (5) 523 (1972)
57. Смолянинов В В, Карпович А Л *Биофизика* **20** (3) 527 (1975)
58. Смолянинов В В, Карпович А Л *Биофизика* **20** (4) 709 (1975)
59. Смолянинов В В, Карпович А Л *Биофизика* **20** (5) 925 (1975)
60. Смолянинов В В, Карпович А Л, в кн. *Локомоция животных и биомеханика опорно-двигательного аппарата* (Киев: Наукова думка, 1979) с. 176
61. Суханов В Б *Общая система симметричной локомоции наземных позвоночных* (Л.: Наука, 1968)
62. Тейлор Э Ф, Уилер Дж А *Физика пространства-времени* (М.: Мир, 1969)
63. Федосеев П Н и др. (Ред.) *Философские проблемы современного естествознания. Труды Всесоюзного совещания по философским вопросам естествознания* (М.: Изд-во АН СССР, 1959)
64. Хайнд Р *Поведение животных* (М.: Мир, 1975)
65. Четверухин Н Ф *Проективная геометрия* 8-е изд. (М.: Просвещение, 1969)
66. Шмит-Нильсон К *Размеры животных: почему они так важны?* (М.: Мир, 1987)
67. Шрёдингер Э *Что такое жизнь? С точки зрения физика* 2-е изд. (М.: Атомиздат, 1972)
68. Эйлер Л *Основы динамики точки* (М.-Л.: ГРТТЛ, 1938)
69. Эйнштейн А *Физика и реальность* (М.: Наука, 1965)
70. Яглом И М *Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия* (Библиотека математического кружка, Вып. 11) (М.: Наука, 1969)
71. Braitenberg V *Progress in Brain Research* **25** 334 (1967)
72. Borelli J A *De Motu Animalum* (Lugduni Batavorum, 1680)
73. Braune W, Fischer O *Sachsische Gesellschaft der Wissenschaften* **26** 561 (1889)
74. Das P, McCollum G *Neuroscience* **25** 1023 (1988)
75. Delcomyn F J. *Exp. Biol.* **54** 443 (1971)
76. Gray J *Animal Locomotion* (New York: W.W. Norton and Co., 1968)
77. Grillner S, in *Handbook of Physiology* (1982) p. 1179
78. Grillner S et al. *Brain Research* **165** 177 (1979)
79. Halbertsma J *Acta Physiol. Scand., Suppl.* **521** 75 (1983)
80. Hughes G M J. *Exp. Biol.* **34** 306 (1957)
81. Kuznetsov A N J. *Theor. Biol.* **172** 95 (1995)
82. Lewandowski A A *Acta Ornithol.* **16** 365 (1978)
83. Mena D, Mansour J M, Simon S R J. *Biomechanics* **14** 823 (1981)
84. Mochon S, McMahon T A J. *Biomechanics* **13** 49 (1980)
85. Muybridge E *Animal Locomotion* 2nd ed. (Philadelphia, 1887) (New York: Animal in motion, 1957).
86. *Neural Control of Locomotion* (Advances in Behavioral Biology, Vol. 18) (New York: Plenum Press, 1976) 822 p.
87. *Neurobiological Basis of Human Locomotion* (Tokyo: Japan Scientific Societies Press, 1991)
88. Pellionisz A, Llinas R *Neuroscience* **16** (2) 245 (1985)
89. Rohrer H et al. *J. Biomechanics* **17** 409 (1984)
90. Weber W, Weber E *Mechanik der Menschlichen Werkzeuge* (Gottingen, 1836)
91. Wilson D M *Ann. Rev. Entomol.* **11** 103 (1966)
92. Winter D A *Biomechanics of Human Movement* (New York: John Wiley and Sons, 1979)

Spatio-temporal problems of locomotion control

V.V. Smolyaninov

Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences

117334 Moscow, ul. Bardina 4, Russian Federation

Tel. (7-095) 135-55 23. Fax (7-095) 135-61 11

E-mail: smolian@iitp.ru

Viewed in cybernetics terms, constructing human and animal movements is 'overcoming superfluous degrees of freedom of an impellent body' according to N A Bernstaine. The problem of the spatio-temporal construction of legged movements involves structural motion freedoms due to the multi-link structure of the extremities, kinematical freedoms of the stepping cycle, and inter-extremity coordination freedoms, which are organized (to serve a prescribed purpose) by means of appropriate synergies — i.e. additional functional links the brain's control system forms. The main focus of attention in this work is on the kinematical and coordination synergies of the legged movements of humans and animals. The comparative historical analysis of experimental data and modelling metaphors concentrates on obtaining a unified description, whereas the ultimate mathematical metaphor reduces to space-time geometry, with base step synergies as invariants. Thus, Bernstainian's overcoming concept is transformed to an analogue of the Kleinian geochronometry concept, actually a modification of Minkowskian geometry. To determine the spectrum of possible geochronometries, the consequences of a generalized 'postulate of a constant speed of light' are studied and different models of wave chronometers compared.

PACS numbers: **01.70. + w**, **02.40.Dr**, **03.30. + p**, **87.19.St**

Bibliography — 92 references

Received 25 May 2000