

СОДЕРЖАНИЕ

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

- 225 От редакционной коллегии
227 Л.И. Пономарёв. Я.Б. Зельдович и ядерная энергетика
231 В.Е. Фортков, И.В. Ломоносов. Я.Б. Зельдович и проблемы уравнений состояния вещества в экстремальных условиях
247 М.Ф. Иванов, А.Д. Киверин, Б.А. Клумов, В.Е. Фортков. От горения и детонации к окислам азота
265 Г.И. Баренблатт, А.Дж. Корин, В.М. Протокишин. Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса: уроки новых исследований
273 В.С. Попов, Б.М. Карнаков. Атом водорода в сильном магнитном поле
297 А. Рузмайкин. Климат как игра случая
313 Д.Д. Соколов, Р.А. Степанов, П.Г. Фрик. Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту
336 Новости физики в сети Internet (Ю.Н. Ерошенко)



Москва
Редакция журнала
«Успехи физических наук»

УФН

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ISSN 0042-1294

Успехи физических наук

Журнал основан в 1918 г.

уфн

2014 март
ТОМ 184

№3

ЯКОВ БОРИСОВИЧ ЗЕЛЬДОВИЧ
(1914 – 2014)



Yakov Zel'dovich

8 марта 2014 года исполняется 100 лет со дня рождения Якова Борисовича Зельдовича

В этом и следующем номерах журнала "Успехи физических наук" (УФН) помещены статьи, посвящённые современному развитию научного наследия выдающегося физика Я.Б. Зельдовича — академика Российской академии наук (Академии наук СССР), трижды Героя Социалистического Труда, избранного также в Национальную академию наук США, Лондонское Королевское общество и ряд других национальных Академий, почётного доктора многих знаменитых университетов, лауреата премии Дирака, награждённого многими орденами и медалями, включая золотую медаль Королевского астрономического общества Великобритании.

Работы Якова Борисовича стали основой многих новых направлений в физико-химической кинетике, физике процессов горения и взрывов, физике ударных волн, ядерной физике и энергетике, физике элементарных частиц и, наконец, последней его любви — астрофизике и космологии. И актуальность их не уменьшается, а у некоторых продолжает возрастать. Обзоры, публикуемые в этих двух выпусках УФН, представляют современное состояние именно этих областей, и вместе с тем показывают присутствие Зельдовича и значимость его идей на самом переднем фронте современной физики.

Редколлегия УФН гордится тем, что Яков Борисович Зельдович опубликовал на страницах УФН более полусотни обзоров, а в течение почти трёх десятилетий вплоть до своей кончины был одним из самых активных членов Редколлегии, во многом определявшим лицо нашего журнала.

Подробнее сами работы и о работах Я.Б. Зельдовича, а также о замечательной личности этого выдающегося учёного см. в книгах и статьях:

Зельдович Я.Б. *Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика* (Под ред. Ю.Б. Харитона) (М.: Наука, 1984);

Зельдович Я.Б. *Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная* (Под ред. Ю.Б. Харитона) (М.: Наука, 1985);

Яков Борисович Зельдович (воспоминания, письма, документы) (Под ред. С.С. Герштейна, Р.А. Сюняева) 2-е изд., доп. (М.: Физматлит, 2008);

Personalia в журнале УФН:

Сморodinский Я.А., Франк-Каменецкий Д.А. "Яков Борисович Зельдович (к пятидесятилетию со дня рождения)" *УФН* **82** 567 (1964);

Герштейн С.С., Гуревич И.И., Имшенник В.С., Новиков И.Д., Понтекорво Б.М., Сагдеев Р.З. "Яков Борисович Зельдович (к шестидесятилетию со дня рождения)" *УФН* **112** 533 (1974);

Арнольд В.И., Баренблатт Г.И., Гинзбург В.Л., Кадомцев Б.Б., Капица П.Л., Окунь Л.Б., Питаевский Л.П., Сагдеев Р.З., Сюняев Р.А., Фаддеев Л.Д., Френкель В.Я., Харитон Ю.Б. "Яков Борисович Зельдович (к семидесятилетию со дня рождения)" *УФН* **142** 531 (1984);

Александров А.П., Арнольд В.И., Боровик-Романов А.С., Велихов Е.П., Герштейн С.С., Гинзбург В.Л., Гольданский В.И., Каган Ю.М., Кадомцев Б.Б., Овчинников А.А., Окунь Л.Б., Питаевский Л.П., Прохоров А.М., Сагдеев Р.З., Сахаров А.Д., Сюняев Р.А., Халатников И.М., Харитон Ю.Б. "Памяти Якова Борисовича Зельдовича" *УФН* **155** 729 (1988);

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Я.Б. Зельдович и ядерная энергетика

Л.И. Пономарёв

Гомогенный ядерный реактор впервые был рассмотрен в работе Я.Б. Зельдовича и Ю.Б. Харитона в 1939 г. С тех пор эта идея претерпевала взлёты и падения и сегодня вновь возродилась, но уже вобрав в себя знания и опыт прошедших лет. Представлена одна из современных версий развития идеи гомогенного реактора — жидкосолевого с U–Pu-топливным циклом.

PACS numbers: 01.65.+g, 28.41.–i, 28.50.–k

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403a.0227

Сообщение об открытии деления урана достигло Ленинграда в марте 1939 г., а вскоре появились работы Фриша, Пайерлса, Ферми и Сциларда, Жоллио-Кюри с сотрудниками и др., из которых, в частности, следовало, что при делении ядра урана освобождается 2–3 нейтрона, т.е. в принципе в уране возможна незатухающая цепная реакция с выделением огромной энергии. Я.Б. Зельдовичу и особенно Ю.Б. Харитону, сотруднику Н.Н. Семёнова, тематика цепных химических реакций была близка, и они немедленно использовали свои знания для изучения возможности реализации цепной ядерной реакции в уране. К концу их занятий появился обстоятельный обзор Бора и Уилера, посвящённый делению урана, но Зельдовича и Харитона интересовал не сам механизм деления, а кинетика этого процесса. В своей первой небольшой заметке "К вопросу о цепном распаде основного изотопа урана" [1] (поступившей в редакцию ЖЭТФ 7 октября 1939 г.) они рассмотрели возможность реализации цепной реакции в бесконечной среде урана с учётом замедления и поглощения нейтронов. Тогда гипотеза Бора о том, что практически все наблюдаемые осколки деления принадлежат редкому изотопу ^{235}U , а не "основному изотопу" ^{238}U , ещё не была подтверждена экспериментально, поэтому Зельдович и Харитон считали, что деление ^{235}U вносит только "весьма малое дополнительное количество нейтронов". Определённых выводов в статье [1] нет, поскольку в то время ещё не было надёжных данных ни о числе вторичных нейтронов деления (ν), ни о их начальной энергии и плохо были известны сечения деления (σ_f) и захвата (σ_c) нейтронов в уране (особенно в резонансной области) (рис. 1). Однако методология исследования в статье уже обозначена и даже сформулированы критерии для экспериментального доказательства осуществимости цепной реакции в

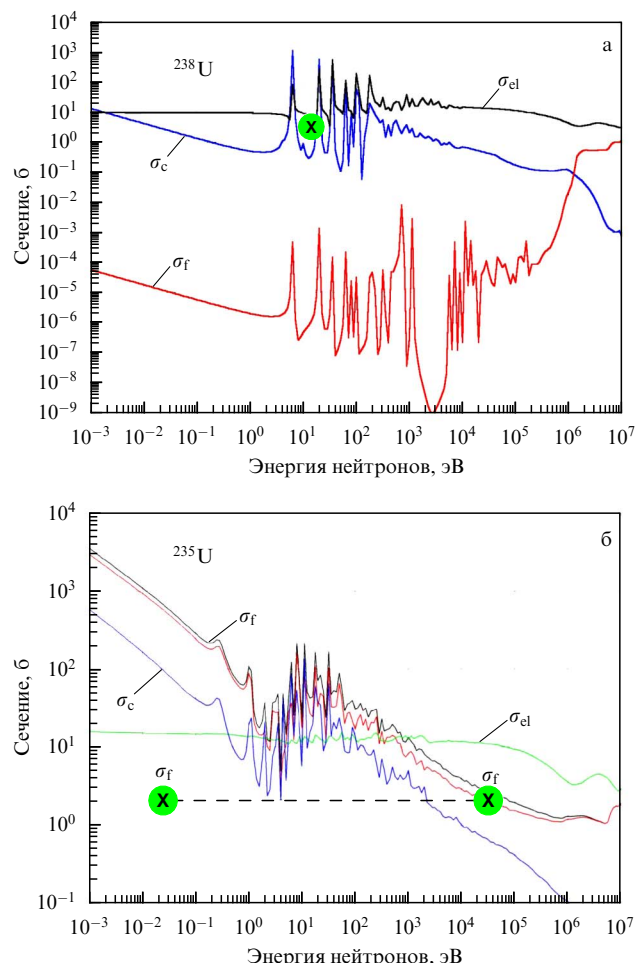


Рис. 1. Сечения деления σ_f , захвата σ_c и упругого рассеяния σ_{el} изотопов (а) ^{238}U и (б) ^{235}U . Кружками отмечены значения сечений, используемые в работах [1–3].

Л.И. Пономарёв. Высокотехнологичный научно-исследовательский институт неорганических материалов им. академика А.А. Бочвара ул. Рогова 5а, 123098 Москва, Российская Федерация E-mail: leonidp2008@mail.ru

Статья поступила 8 октября 2013 г.,
после доработки 11 декабря 2013 г.

уране. (Вывод о невозможности цепной реакции в природном уране сделан авторами в примечании при корректуре.)

Уже через две недели (22 октября 1939 г.) в печать была направлена вторая статья: "О цепном распаде урана

под действием медленных нейтронов" [2]. В ней впервые было подчеркнуто различие физики реакций деления под действием быстрых и медленных нейтронов, систематически рассматривалось резонансное поглощение нейтронов в уране в присутствии замедлителя (водорода), а также условия, при которых возможна цепная реакция в ^{235}U . В этой же статье появились обозначения ν , ν , ϕ , которые знакомы теперь каждому студенту-ядерщику и условие, необходимое для возникновения цепной реакции: $\nu\phi = 1$. Несмотря на бедность экспериментальных данных, вычисленное в статье значение $\phi = 0,844$ (вероятность избежать резонансного захвата нейтрона в ^{238}U) достаточно хорошо согласуется с результатами позднейших расчётов. В статье [2] сделан уверенный вывод о невозможности цепной реакции в гомогенной смеси воды и уранилнитрата, однако отмечается, что при замене обычной воды (H_2O) тяжёлой водой (D_2O), а также при замене природного урана ураном, обогащённым изотопом ^{235}U (до 1–2 %), цепная реакция становится возможной. Как мы теперь знаем, обе эти возможности впоследствии были реализованы.

Наконец, в апреле 1940 г. в журнале *Успехи физических наук* был опубликован обстоятельный обзор Я.Б. Зельдовича и Ю.Б. Харитона "Деление и цепной распад урана" [3]. К тому времени уже было выполнено довольно много экспериментальных и теоретических работ по физике деления урана (библиография обзора содержит 85 названий), и с учётом новых результатов заключения их статей в *ЖЭТФ* [1, 2] были уточнены, хотя основные утверждения остались неизменными:

- в гомогенной смеси природного урана с водой цепная реакция невозможна;
- для осуществления цепной реакции необходимо обогащение природного урана изотопом ^{235}U либо замена обычной воды тяжёлой.

В мае 1941 г. к Я.Б. Зельдовичу и Ю.Б. Харитону присоединился И.И. Гуревич и вместе они выполнили исследование "Критические размеры и масса, необходимые для цепного деления ядер нейтронами", которое тут же было засекречено (оно будет опубликовано только через полвека [4]). В этих расчётах для ^{235}U они использовали значения $\sigma_c = 0$, $\sigma_f = 3 \times 10^{-24} \text{ см}^2$, значение ν варьировали от 2 до 4, а сечение упругого рассеяния изменяли в пределах $\sigma_{el} = (3-6) \times 10^{-24} \text{ см}^2$. При этих предположениях Зельдович, Харитон и Гуревич получили для критической массы ^{235}U "реактора на быстрых нейтронах" (иначе говоря, атомной бомбы) разумные значения — от 0,9 кг до 16,6 кг. В этой же статье были рассмотрены условия достижения критичности в реакторе на тепловых нейтронах с водой в качестве замедлителя и было показано, что при обогащении урана изотопом ^{235}U до 4–5 % такой гомогенный реактор может достичь критичности при соотношении концентраций урана и водорода $\sim 0,1-0,2$. (Отметим, что в то время идея гетерогенного реактора ещё не стала общепринятой и всё рассмотрение проводилось для гомогенной жидкой смеси замедлителя и растворённой в нём соли урана.)

Как известно, цепная реакция деления в природном уране впервые была осуществлена Ферми в гетерогенном реакторе, который представлял собой решётку из урановых блоков в толще графита. Несколько подобных уран-графитовых реакторов (РБМК — реактор большой мощности канальный) до сих пор работает на атомных

электростанциях (в них используют уран, обогащённый изотопом ^{235}U до $\approx 2\%$). Но основу ядерной энергетики ($\approx 80\%$) образуют твердотопливные водо-водяные энергетические реакторы (ВВЭР) (Pressurized Water Reactor (PWR), Boiling Water Reactor (BWR)), в которых вода является одновременно и замедлителем, и теплоносителем, а в качестве топлива используются таблетки урана, обогащённого изотопом ^{235}U до 3–5 %. Сейчас в мире работают около 440 ядерных реакторов общей мощностью $\approx 370 \text{ ГВт}$, которые вырабатывают $\approx 14\%$ электроэнергии, и, кроме того, примерно 500 судовых реакторов на кораблях и подводных лодках.

На фоне этих успехов атомной энергетики идея гомогенного реактора ушла в тень, хотя первый такой реактор мощностью 5 кВт был построен в Лос-Аламосе ещё в 1944 г. и Ферми принимал самое активное участие в его создании. (Реактор представлял собой шар диаметром 30 см, заполненный раствором соли ^{235}U в воде.) По свидетельству Эмилио Сегре, даже во время своей напряжённой работы над атомной бомбой в Лос-Аламосе Ферми часто обсуждал идею гомогенного реактора (как он говорил, "кипящего") [5, 6]. Ученик Ферми и участник пуска первого реактора Алвин Вайнберг осуществил эту мечту: в 1965 г. в Окридже (США) он запустил жидко-солевой реактор MSRE (Molten-Salt Reactor Experiment), в котором топливом служил расплав соли $2\text{LiF}-\text{BeF}_2$ с растворёнными в нём фторидами урана (UF_4) и тория (ThF_4), а замедлителем — графит [7]. Тепловой спектр нейтронов этого реактора был ориентирован на Th–U-цикл, и большую часть времени он работал именно в этом цикле. Реактор MSRE проработал безаварийно около пяти лет, но был закрыт в связи с проектом реактора на быстрых нейтронах. Сегодня в мире работает только один жидко-солевой реактор — "Аргус" мощностью 20 кВт, в котором топливом служит раствор уранилсульфата (UO_2SO_4) в воде с 90%-ным обогащением по ^{235}U (Курчатовский институт).

Освобождение энергии деления ядра — самое крупное достижение человечества со времён приручения им огня. Но уже Ферми понимал, что ядерная энергетика (ЯЭ), основанная на тепловых реакторах, потребляющих редкий изотоп ^{235}U , не имеет устойчивого будущего без решения четырёх ключевых проблем, о которых в угаре военной гонки особо не задумывались:

- ресурсное обеспечение;
- безопасность;
- нераспространение делящихся материалов;
- замыкание ядерного топливного цикла.

Первая проблема — ключевая: мировые ресурсы коммерческого ^{235}U (которого в природном уране всего 0,72 %) оцениваются примерно в 50 тыс. тонн, современное потребление составляет около 600 т в год и к середине столетия оно возрастет приблизительно до 1000 т в год [8], т.е. ресурс современной ЯЭ на тепловых нейтронах не превышает 50–100 лет. Хорошо известно, однако, что проблема ресурсов ЯЭ может быть решена при переходе от тепловых реакторов, потребляющих ^{235}U , к быстрым реакторам, потребляющим ^{238}U . Имеются также серьёзные аргументы в пользу того, что при этом попутно будет решена и проблема обращения с долгоживущими радиоактивными отходами ЯЭ. Проблема безопасности также может быть решена, если удастся создать быстрый реактор с естественной безопасностью (inherent safety [9]).

Такой реактор должен удовлетворять, помимо прочих, следующим требованиям [10]:

- минимальный избыток реактивности;
- отрицательные температурный и объёмный коэффициенты;
- отсутствие пожароопасных и химически активных теплоносителей;
- отсутствие давления в первом контуре.

В реакторе на быстрых нейтронах происходит деление не только ^{235}U , но и ^{238}U , а также ^{239}Pu , который образуется в реакции захвата нейтрона $n + ^{238}\text{U} \rightarrow ^{239}\text{Pu} + \gamma$. При делении ^{239}Pu образуется $\nu = 2,84$ вторичных нейтронов вместо $\nu = 2,42$ при делении ^{235}U . Кроме того, для ^{239}Pu в быстром реакторе отношение $\alpha = \sigma_c/\sigma_f \approx 0,1-0,2$ (вместо $\alpha \approx 0,4$ в тепловом), что приводит к дополнительной генерации нейтронов, которые могут быть использованы, в частности, для расширенного воспроизводства ^{239}Pu . Однако идея использовать наработанный ^{239}Pu в тепловых реакторах оказалась ущербной, поскольку при этом почти 30 % ^{239}Pu превращается в изотопы ^{240}Pu и ^{241}Pu , а последний — в трансурановые элементы Am и Cm — наиболее опасную часть радиоактивных отходов (в быстрых реакторах эта доля снижается до $\approx 10\%$).

Оказалось также, что в быстром реакторе при концентрации $\approx 10\%$ ^{239}Pu (или $\approx 13\%$ ^{235}U) в смеси U и Pu возможен равновесный режим ядерного горения: реактор достаточно подпитывать только ^{238}U , поскольку он эффективно воспроизводит сгоревший ^{239}Pu при захвате нейтрона. Такой промышленный реактор мощностью 350 МВт впервые был построен в СССР в 1972 г., и он успешно проработал 25 лет. Сейчас в России работает единственный в мире промышленный быстрый реактор БН-600 мощностью 600 МВт, в котором теплоносителем служит пожароопасный натрий, и разрабатывается быстрый реактор со свинцовым теплоносителем [11]. В этих реакторах могут быть решены сразу две ключевые проблемы: ресурсная (горят ^{239}Pu и ^{238}U вместо ^{235}U) и проблема уничтожения трансурановых элементов. Однако для замыкания ядерного топливного цикла (т.е. многократного использования отработавшего топлива) необходимо решить довольно трудную инженерную и технологическую задачу изготовления новых твердотопливных элементов из высокоактивного отработавшего ядерного топлива (ОЯТ), выгружаемого из реактора.

Это только одна из причин возрождения идеи гомогенного реактора, в котором в качестве ядерного топлива используется расплав фторидной соли с растворёнными в нём солями урана и плутония. Для такого реактора нет необходимости изготавливать твердотопливные элементы, но для замыкания ядерного топливного цикла необходимо, чтобы спектр нейтронов жидкосолевого реактора (ЖСР) был быстрым. А это в свою очередь возможно только в том случае, если в расплаве соли концентрация атомов урана и плутония составляет не менее 10 ат. % (около 50 % по массе). Такая соль, однако, до сих пор не была известна (растворимость PuF_3 в расплаве соли $2\text{LiF}-\text{BeF}_2$ не превышает ≈ 1 мол. %), и только в последние два года было установлено, что в эвтектике $\text{LiF}-\text{NaF}-\text{KF}$ (FLiNaK) при температуре 700°C (рабочая температура ЖСР) растворяется ≈ 45 мол. % UF_4 и ≈ 30 мол. % PuF_3 (рис. 2) [12–15]. Спектр нейтронов такого жидкосолевого реактора достаточно близок к спектру твердотопливного быстрого реактора (рис. 3) [16, 17].

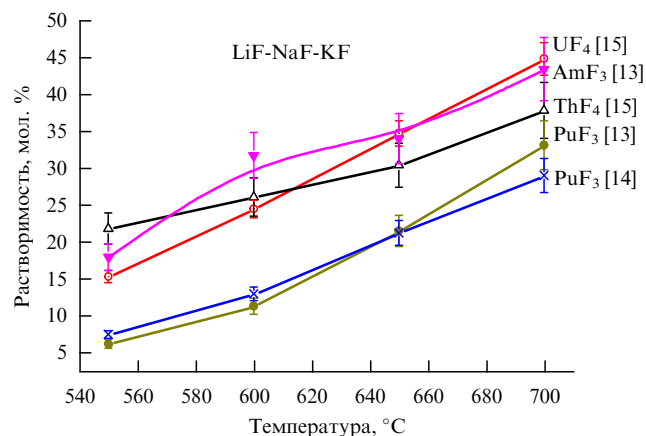


Рис. 2. Растворимость фторидов актинидов в FNiNaK.

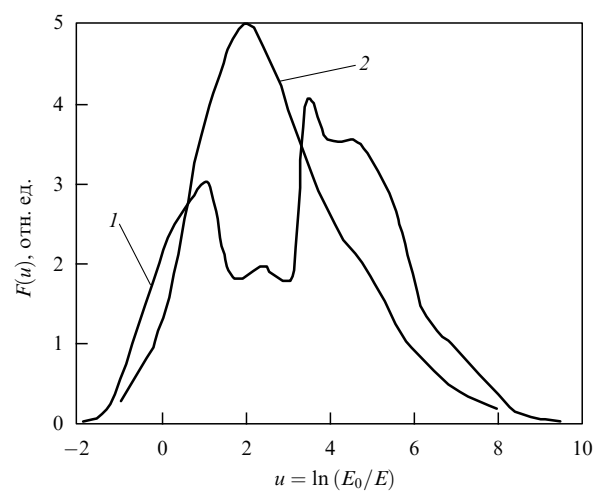


Рис. 3. Спектры $F(u)$ нейтронов ЖСБР (кривая 1) и быстрого реактора (кривая 2) как функции логарифма $u = \ln(E_0/E)$ ($E_0 = 2$ МэВ) [16, 17].

ЖСР удовлетворяет перечисленным выше требованиям к реакторам с "естественной безопасностью" и прежде всего ключевому требованию: отрицательные температурный и пустотный эффекты, что исключает тяжёлые аварии типа Чернобыльской. Топливный цикл жидкосолевого быстрого реактора (ЖСБР) существенно упрощается, поскольку он не требует изготовления топливных элементов из высокоактивного ОЯТ и становится возможной пристанционная переработка топлива, что в свою очередь снижает риск несанкционированного распространения делящихся материалов.

Кроме того, ЖСР рассматривают сейчас как один из перспективных способов уничтожения долгоживущих радиоактивных отходов (в основном Am), накопленных за предыдущие 60 лет существования ЯЭ. Уже сегодня в мире накоплено ≈ 240 тыс. тонн ОЯТ, в которых содержится около 300 т ^{241}Am , и каждый год эта масса увеличивается примерно на 10 т за счёт распада $^{241}\text{Pu} \rightarrow ^{241}\text{Am}$ [17]. Для уничтожения этих отходов ЖСР приспособлен наилучшим образом: один ЖСР тепловой мощностью 1 ГВт, управляемый ускорителем, способен "сжечь" за год работы около 300 кг Am, т.е. основную часть долгоживущих отходов примерно от 30 тепловых реакторов равной мощности [18].

В настоящее время FLiNaK — единственная известная соль с такой высокой растворимостью фторидов

актинилов. Не исключено, что со временем найдут другие соли с таким же свойством, но, возможно, более приемлемые с экономической точки зрения, более удобные для переработки, обладающие меньшей коррозионной активностью и т.д., но главная идея ЖСБР при этом остаётся неизменной: *быстрый реактор с жидким топливом и U–Pu–топливным циклом*. На пути к реализации этой идеи предстоит преодолеть множество научных, технологических и инженерных проблем, но конечная цель того стоит.

Со времени появления первых статей Я.Б. Зельдовича и Ю.Б. Харитона прошло более 70 лет, за этот период многочисленные процессы, происходящие в ядерном реакторе, были досконально изучены, и сейчас любой студент знает о них больше, чем все авторы статей того времени (см. рис. 1). Тем не менее главные задачи ядерной энергетики до сих пор не решены: не построен безопасный и экономически приемлемый быстрый ядерный реактор, не разработан его замкнутый топливный цикл и не решена проблема обращения с радиоактивными отходами. И одна из причин этого — отсутствие в огромной армии инженеров и технологов атомной индустрии учёных такого калибра, как Я.Б. Зельдович и Э. Ферми. Создав атомное оружие, они навсегда покинули область знаний, связанную с ядерной энергетикой, и в ней постепенно стали превалировать не научные, а технологические и инженерные проблемы. При этом утрачено понимание того, что создание устойчивой ядерной энергетики представляет собой прежде всего *научную* проблему, по сложности (и значимости) многократно превышающую проблему создания ядерного оружия. И если в скором времени сложившаяся тенденция не изменится, то мы рискуем безвозвратно потерять возможность использовать ядерную энергию — единственный долгосрочный (на несколько сотен тысяч лет) источник энергии, без которой наша цивилизация окажется нежизнеспособной [19].

Список литературы

1. Зельдович Я Б, Харитон Ю Б "К вопросу о цепном распаде основного изотопа урана" *ЖЭТФ* **9** 1425 (1939)
2. Зельдович Я Б, Харитон Ю Б "О цепном распаде урана под действием медленных нейтронов" *ЖЭТФ* **10** 29 (1940)
3. Зельдович Я Б, Харитон Ю Б "Деление и цепной распад урана" *УФН* **23** 329 (1940)
4. Гуревич И И, Зельдович Я Б, Харитон Ю Б "Критические размеры и масса, необходимые для цепного деления ядер нейтронами", в сб. *Юлий Борисович Харитон. Путь длиною в век* (Ред.-сост. В И Гольданский, А Ю Семёнов, М Б Черненко) (М.: Эдиториал УРСС, 1999) с. 172
5. Segrè E *Enrico Fermi: Physicist* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1970) [Серге Э Энрико Ферми — физик (М.: Мир, 1973)]
6. Понтекоров Б М, Покровский В Н *Энрико Ферми в воспоминаниях учеников и друзей* (М.: Наука, 1972)
7. MacPherson H G *Nucl. Sci. Eng.* **90** 374 (1985)
8. "Uranium 2011, Resources, Production and Demand", Joint Report (Paris: OECD Nuclear Energy Agency, 2012); <http://www.oecd-neo.org/ndd/pubs/2012/7059-uranium-2011.pdf>
9. Weinberg A M *The Second Nuclear Era: a New Start for Nuclear Power* (New York: Praeger, 1985)
10. Адамов Е О и др. *Атомная энергия* **112** 319 (2012) [Adamov E O et al. *Atom. Energy* **112** 391 (2012)]
11. Орлов В В и др. *Атомная энергия* **72** 317 (1992) [Orlov V V et al. *Atom. Energy* **72** 287 (1992)]
12. Пономарев Л И и др. *Атомная энергия* **115** 6 (2013) [Ponomarev L I et al. *Atom. Energy* **115** 5 (2013)]
13. Лизин А А и др. *Атомная энергия* **115** 11 (2013) [Lizin A A et al. *Atom. Energy* **115** 11 (2013)]
14. Воложин М В и др. *Атомная энергия* **115** 17 (2013) [Volozhin M V et al. *Atom. Energy* **115** 18 (2013)]
15. Лизин А А и др. *Атомная энергия* **115** 20 (2013) [Lizin A A et al. *Atom. Energy* **115** 22 (2013)]
16. Дяттерев А М, Пономарев Л И *Атомная энергия* **112** 367 (2012) [Degtyarev A M, Ponomarev L I *Atom. Energy* **112** 451 (2012)]
17. Дяттерев А М и др. *Атомная энергия* **114** 183 (2013) [Degtyarev A M et al. *Atom. Energy* **114** 225 (2013)]
18. "2010 Key World Energy Statistics", Report (Paris: IEA, 2010); http://ua-energy.org/upload/files/key_stats_2010.pdf
19. Орлов В В, Пономарев Л И *Природа* (3) 4 (2011)

Ya.B. Zeldovich and nuclear power

L.I. Ponomarev

A.A. Bochvar High-Technology Research Institute of Inorganic Materials,
ul. Rogova 5a, 123098 Moscow, Russian Federation
E-mail: leonidp2008@mail.ru

The idea of a homogeneous nuclear reactor, first considered by Ya.B. Zeldovich and Yu.B. Khariton in 1939, has since had its ups and downs and is now re-emerging, enriched with knowledge and experience accumulated over the years. One of the current versions of the idea, the molten salt fast reactor with a U–Pu cycle, is presented in this paper.

PACS numbers: **01.65. + g, 28.41. – i, 28.50. – k**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403a.0227

Bibliography — 19 references

Received 8 October 2013, revised 11 December 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 227–230 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (3) (2014)

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Я.Б. Зельдович и проблемы уравнений состояния вещества в экстремальных условиях

В.Е. Фортов, И.В. Ломоносов

Среди поразительных по широте спектра научных интересов Якова Борисовича Зельдовича — от общих проблем химической физики, кинетики, горения, детонации и ударных волн до физики элементарных частиц и космологии — физика экстремальных состояний вещества занимает особое место. Рассмотрены отдельные задачи физики ударных волн и уравнения состояния вещества, над которыми работал ЯБ. Им был выдвинут ряд основополагающих идей и методов: построение термодинамически полных уравнений состояния по данным ударно-волновых экспериментов, методы ударного сжатия пористого вещества и адиабатического расширения ударно-сжатого вещества. На практических примерах показано, как широко эти фундаментальные идеи используются и развиваются в современной физике экстремальных состояний вещества.

PACS numbers: 01.60. + q, 62.50. – p, 64.10. + h, 64.30. – t, 65.40. – b

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403b.0231

Содержание

1. Введение (231).
 2. Ударные волны и экстремальные состояния вещества (234).
 3. Задача Ферми – Зельдовича. Построение термодинамически полного уравнения состояния по результатам динамических измерений (236).
 4. Ударное сжатие пористого вещества (237).
 5. Изотропическое расширение ударно-сжатых веществ (239).
 6. Модели уравнения состояния вещества (241).
 7. Заключение (243).
- Список литературы (244).

1. Введение

Кто-то из классиков естествознания, кажется Л.Д. Ландау, сказал, что если учёного и его работы помнят спустя пять лет после его смерти, то это выдающийся учёный.

Вот уже более 25 лет мы живём без Якова Борисовича Зельдовича, но такое ощущение, что он где-то рядом. Его идеи, предложения, советы и сегодня составляют основу современных исследований по горению, детонации, уравнениям состояния вещества и физико-химии ударных и детонационных волн, т.е. по всему тому, что сегодня

принято называть "физика экстремальных состояний вещества" [1 – 10] или "физика высоких плотностей энергии" [11].

Работы в этой области уже давно ведутся при других параметрах, иными методами, на других установках людьми, никогда не видевшими Якова Борисовича, но, по существу, являющимися его учениками в третьем и четвёртом поколениях, — учениками, потому что они учились и учатся по "библии ударных волн" — замечательной книге Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* [4], а также у прямых учеников ЯБ и развивают то новое, что было заложено трудами ЯБ.

Ударные и детонационные волны [1, 2, 4] были, пожалуй, первой и самой глубокой любовью ЯБ, а его путь в науке был последовательным изучением взрывных явлений нарастающей интенсивности разной физической природы — от химических взрывов до взрыва ядерного и взрывов космического масштаба.

Я.Б. Зельдович внёс основополагающий вклад во многие научные направления; в последние годы был всецело поглощён космологией, но всегда испытывал "особую слабость" к мощным ударным и детонационным волнам, называя эту тему "вечнозелёной", был в курсе текущих исследований, собирал материал для новой монографии по ударным волнам. Он живо и неформально интересовался происходящими в этой области физики событиями и новостями, был на высоком профессиональном уровне в этих вопросах.

Любопытно, что ЯБ создал свою знаменитую теорию горения и детонации более чем вовремя — как раз в тридцатые годы, к открытию в 1939 г. О. Ганном и Р. Штрассманом деления ядер урана под действием нейтронов, что и ознаменовало вхождение человечества в атомную эру. Именно поэтому академик Я.Б. Зельдович навсегда останется в истории технической цивилизации одним из ярчайших пионеров этой эпохи.

В.Е. Фортов. Российская академия наук,
Ленинский просп. 14, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: fortov@ras.ru

И.В. Ломоносов. Институт проблем химической физики РАН,
просп. Академика Семёнова 1, 142432 Черноголовка,
Московская обл., Российская Федерация
E-mail: ivl143@icp.ac.ru
Томский государственный университет,
просп. Ленина 36, 634050 Томск, Российская Федерация

Статья поступила 22 ноября 2013 г.,
после доработки 23 декабря 2013 г.

ЯБ очень много и продуктивно работал сам и требовал того же от других. Обсуждения кончались предложением доделать что-то и завтра-послезавтра принести результаты. Поражала его ответственность и обязательность в научных делах.

Его обзорные доклады на симпозиумах по горению и взрыву были современными, яркими и глубокими с большой ориентацией на перспективу — не на дела дней минувших, как это часто любят делать "научные генералы". При этом ЯБ тщательно готовил свои выступления и доклады, советовался с широким кругом специалистов, просматривал литературу и будоражил коллег новыми идеями и предложениями. Он остро чувствовал свою ответственность за состояние науки о горении и взрыве в стране, всячески возбуждал активность и искал новые задачи, подходы. ЯБ создал и возглавил в Академии сильный и многопрофильный Совет по горению.

Одним из первых ЯБ оценил возможности импульсных лазеров [12] и пучков заряженных частиц [13] для генерации ударных волн и активно призывал этим заниматься. Сегодня это вылилось в одно из наиболее серьезных направлений в физике высоких плотностей энергии с множеством новых и неожиданных идей, эффектов и приложений. Также ЯБ продвигал работы по физике неидеальной плазмы [14], считая, что именно в этой области есть много интересного и неожиданного, что именно мощные ударные волны — наиболее подходящий инструмент для изучения таких экзотических на Земле, но столь распространенных в космосе [10] состояний вещества. Он сразу же оценил возможности мощных электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и активно участвовал в работах по математическому моделированию динамики плазмы, рэлей-тейлоровской неустойчивости, расчётам нестационарных явлений в детонации и моделированию критического диаметра направленного взрыва конденсированных взрывчатых веществ (ВВ). Его феноменальная интуиция здесь была неоценимой.

Начав научную работу лаборантом, ЯБ очень тонко понимал эксперимент, много и с удовольствием работал с экспериментаторами, и эта работа была крайне продуктивной для всех её участников. Обладая огромным опытом прикладных и инженерных работ, он в полной мере понимал специфику ограничения теоретических и экспериментальных методов, говоря: "Теоретики на 100 % верят экспериментальным данным, а экспериментаторы считают теоретический результат стопроцентной истиной. Но те и другие не знают, что жизнь где-то посередине".

Приезжая к нам на взрывные стенды в Черноголовку, часто со своими друзьями академиками Н.Н. Семёновым и Ю.Б. Харитоновым, ЯБ часами обсуждал постановки и результаты опытов, вникал, казалось бы, в мелкие детали и всегда предлагал остроумные подходы, часто выводившие из тупика. Но главное — это его способность интерпретировать экспериментальные данные, часто даже без оценок, благодаря удивительной интуиции и большому опыту спецработ.

В начале 1970-х годов, в эпоху расцвета импульсного термояда, возникла идея использовать конические мишени для квазисферического ударноволнового сжатия термоядерной плазмы. Идея показалась привлекательной. Собралась большая кооперация: Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова (ИАЭ) использовал реляти-

вистские электронные пучки, Институт общей физики АН СССР (ИОФАН) — лазеры, Филиал Института химической физики АН СССР (ФИХФ) — химические взрывчатые вещества и электровзрывы фольг. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау взялся за теорию. Организовали кооперацию быстро, без типичной для нашего времени волокиты, уймы бумаг и формализма. В первых же выстрелах получили 10^3 – 10^7 термоядерных DD-нейтронов.

Приехало большое начальство — Н.Н. Семёнов, А.М. Прохоров, Ю.Б. Харитон, проверили всё ещё раз — нейтроны подтвердились. Возникла интересная перспектива приложений, связанная с благоприятным скейлингом по размеру мишени. ЯБ внимательно ознакомился с данными, предложил ряд новых постановок, которые показали определяющую роль кумулятивных эффектов, нарушающих скейлинг, но удивительно хорошо описывающих практически все опытные данные.

Работая над этой задачей, он призывал шире использовать технику химического ВВ для получения горячей плазмы, как термоядерной, так и неидеальной. Кстати, одна из похожих взрывных термоядерных идей в комбинации с электродинамическим преднагревом получила сейчас неожиданное и перспективное развитие [15].

ЯБ дал путёвку в жизнь и другим направлениям работ, основанным на применении ударных волн в физике неидеальной плазмы. Хорошо известен его основополагающий вклад в динамическую физику высоких давлений: ЯБ вместе со своими коллегами (Л.В. Альтшулером, С.Б. Кормером, В.В. Крупниковым, А.А. Бакановой) провели пионерские эксперименты по ударно-волновому сжатию веществ до мегабарных давлений. Эти опыты настолько опередили своё время, что американские коллеги, не зная деталей генерации, полагали даже, что эти ультравысокие давления получены при столкновении баллистических ракет на орбите Земли. Эти замечательные работы 1960-х годов относились к металлам и диэлектрикам, в то время как плазменные состояния были вне сферы действия динамической техники высоких давлений.

В начале 1970-х годов в Черноголовке на межинститутском семинаре (который вёл тогда академик Н.Н. Семёнов), где собирались учёные всех институтов центра, обсуждался вопрос о плазме полупроводников. По ходу докладов выяснилось, что очень мало известно о физических свойствах плотной плазмы с сильным межчастичным взаимодействием, о её фазовом составе и термодинамике. Возникла острая дискуссия, и мы предложили провести динамические эксперименты в этой области, отметив, между прочим, что известны параметры критических точек только у трёх из всех металлов, составляющих 80 % всех элементов периодической системы.

Академик Н.Н. Семёнов, который до этого спокойно вёл дискуссию, попивая крепкий чай, не на шутку встревожился: "Это полное безобразие! Не может такого быть! Вы что-то путаете. Мы ещё до войны говорили с Зельдовичем об измерениях критических точек металлов. Неужели с тех пор ничего не сделано? Я пошёл ему звонить!" Минут через двадцать Николай Николаевич вернулся в аудиторию ещё более расстроенный и сказал, что Зельдович подтвердил отсутствие данных по околокритическим параметрам металлов. Дело в том, что параметры критических точек очень высоки и недоступны для традиционной техники физического экспери-



Фото 1. Третий Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву, 5–10 июля 1971 г., Ленинград. На переднем плане академик Я.Б. Зельдович (слева) и аспирант В.Е. Фортов. Одному из авторов настоящего обзора (В.Е.Ф.) посчастливилось познакомиться с ЯБ и быть свидетелем "ренессансного" периода его ударно-волнового творчества. До сих пор поражает мощь и продуктивность интеллекта, абсолютная преданность науке и обаяние этой выдающейся личности, определившей облик, состояние и перспективы науки об ударных и детонационных волнах на многие годы вперед.

Моё (В.Е.Ф.) знакомство с ЯБ состоялось заочно где-то в середине 1960-х годов, когда нам — студентам аэрофизического факультета Московского физико-технического института (МФТИ) — читали секретный курс физической газодинамики, имея в виду подготовку специалистов для работы над ядерными и плазменными ракетными двигателями, а также над гиперзвуковой аэродинамикой входа в атмосферу боеголовки и космических кораблей. Так вот, добрая половина необходимого нам материала содержалась в только что вышедшей книге Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера [4], которой широко пользовались наши преподаватели и которую я видел на рабочих столах разработчиков ракетной техники в сверхсекретном тогда НИИ-1 (ныне Государственный научный центр им. М.В. Келдыша).

Именно работы по физике ударных волн привели к нашему скорому личному знакомству. Дело в том, что для создания ядерного ракетного двигателя с плазменным реактором необходимы сведения об уравнении состояния, транспортных свойствах и составе плазмы урана, водорода, лития в области высоких давлений и температур. Проблема оказалась трудной и вполне фундаментальной, а наш руководитель проекта член-корреспондент Академии наук СССР В.М. Иевлев, обладая большой широтой взглядов и физической интуицией, поставил в Министерстве общего машиностроения масштабные исследования фундаментальных свойств неидеальной плазмы.

В одной из созданных тогда установок ударные волны применялись не только для сжатия и разогрева плазмы цезия, но и одновременно для измерений параметров уравнений состояния ударно-сжатой плазмы. Данные получались в термодинамически неполном виде, так как не содержали температуру и энтропию. Темой моего диплома, а затем и кандидатской диссертации стало построение термодинамически полного уравнения состояния по данным ударно-волновых измерений, получившее впоследствии название "проблема Ферми–Зельдовича". Выполнив эту задачу в достаточно общем виде и применив этот формализм к неидеальной плазме цезия и других металлов, я опубликовал результаты в *Журнале экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)* [17] и, закончив аспирантуру, был вынужден кардинально сменить тематику. Отсутствие московской прописки и более чем туманные перспективы с жильём привели к распределению во Владивостокский институт автоматики. Был куплен билет и получены подъёмные. Оставалась последняя формальность — сделать двадцатиминутный доклад на Симпозиуме по горению и взрыву в Ленинграде и покончить с ударно-волновой тематикой, как казалось, навсегда.

В маленькой аудитории было полно народу, а в первом ряду в одиночестве сидел плотный подвижный человек средних лет, который, перебивая докладчика, вполне раскованно вёл дискуссию с элементами агрессивности и нажима. Досталось и мне, но, не зная, что это "сам Зельдович", я тоже не был вполне политкорректен. Словом, сильно поспорили, а когда мне сказали, кто был мой оппонент, я лишился дара речи. После моего доклада и пикировки ЯБ вполне спокойно и доброжелательно продолжил дискуссию в коридоре, предложив ряд новых содержательных задач в развитие доклада. Я с извинениями стал отказываться, ссылаясь на отъезд и смену тематики. "Сейчас я всё устрою!" — сказал ЯБ и тут же в фойе конференции подвёл меня к академику Н.Н. Семёнову и члену-корреспонденту АН СССР Ф.И. Дубовицкому, которые пригласили меня в Черногоровку, что я считаю большой своей жизненной удачей и за что всю жизнь буду благодарен ЯБ. Большой удачей я считаю и то, что таким образом я попал на "орбиту Зельдовича" и имел счастье многие годы общаться, работать с этим феноменальным человеком и учиться у него.

Кстати, в том же разговоре он обратил внимание на свою короткую заметку в [18], в которой он развивал похожие идеи и на которую я не сослался. Моё незнание этой работы ЯБ резко осудил, продемонстрировав особую щепетильность людей этого круга (Л.В. Альтшулер, Г.М. Гандельман, С.Б. Кормер) к вопросам приоритета. За этим, мне кажется, стоит не только естественное желание "застолбить" свои результаты, но и, что много важнее, — большое уважение к труду и результатам коллег и, конечно, к своему собственному, необходимость справедливой оценки результата, корректность и внутренняя культура человеческих взаимоотношений в науке. Всё это сейчас как-то теряется и уходит и у нас, и за границей. Люди увлекаются самоцитированием и стараются не замечать сделанного другими. Наверное, это издержки системы грантов, основанной на особой технике подготовки бумаг для референтов и, в конечном счёте, на особой технике выбивания денег.

И ещё у ЯБ была феноменальная память. Мог назвать не только автора и номер тома, но и страницу, где можно подробнее прочесть о том или ином физическом процессе. Как-то мы обсуждали мою работу по расширению и сжатию материала, и он говорит: "Вы не учили такой-то механизм". Я спрашиваю: "А где об этом можно почитать?" — "В журнале *Physical Review* 1942 г.". Я решил, что такой журнал мне нигде не достать. Всё-таки тогда шла война — Сталинград — и было не до научных журналов. Тем не менее пошёл в библиотеку. И что вы думаете? Все номера за 1942 г. стояли на полке! Во время войны государство тратило деньги на то, чтобы учёные могли следить за мировыми научными достижениями и нормально работать!

мента! ЯБ сказал Семёнову, что это интересная и трудная область и он даже предсказывал вместе с Ландау [16] фазовые переходы в околосверхпроводящей плазме в связи с её металлизацией. Тогда Зельдович даже придумал соответствующий эксперимент, "хотел стрелять в цезий из винтовки", но в то время ничего путного не вышло, так как возникающие даже в легкокипящем цезии параметры плазмы сильно не дотягивали до критики. Н.Н. Семёнов, посетовав на судьбу и неповоротливость своих сотрудников, дал "зелёный свет" нашим работам по физике динамической плазмы, снабдив её своей неформальной поддержкой до конца своих дней, а на замечание из зала, что в плане института такой темы нет, резонно заметил, что "и вас когда-то в плане не было".

Этот эпизод, как и многие примеры такого рода, вполне передаёт дух научной свободы и демократизма, который царил в нашей Академии наук тех лет и который так отличается от сегодняшнего смутного времени, когда во главу угла вместо живого дела ставят "концепции", "приоритеты" и "лоты". А реальное научное дело годами барахтается в бюрократическом болоте и, конечно, благополучно глохнет в безответственности и бестолковщине толпы околоснаучных паразитов-начальников.

Будучи человеком, азартно увлечённым наукой, переполненным идеями, ЯБ находил и притягивал к себе способных людей и плодотворно с ними работал, мало обращая внимание на формальности, чинопочитание и субординацию, чем, как мне кажется, раздражал некоторых начальников, для которых он часто не находил нескольких минут (в основном для обсуждения личных выборных дел), в то время как его ученики и коллеги проводили с ЯБ многочасовые дискуссии и писали совместные статьи. Мне не известны реальные мотивы его прохладного приёма в ИХФ, но я убеждён, что если бы ЯБ после "исхода" из Арзамаса оказался в родном ему Институте химической физики, то польза нашему делу была бы огромная, в особенности в связи с наступившим в 1980-х годах для него и нас "ренессансом" горения и взрыва.

Работы по критической точке металлов в результате "телефонного" импульса Зельдовича получили энергичное развитие. Возник метод адиабат разгрузки, позволивший достигнуть околосверхпроводящих состояний у многих металлов и измерить параметры высокотемпературной части их кривых кипения именно в той области, которую Ландау и Зельдович считали наиболее трудной и интересной с точки зрения металлизации и рельефного проявления эффектов неидеальности [16]. Жаль, что ЯБ не увидел эти результаты, как и недавние результаты проявления плазменного фазового перехода [19], ионизации плазмы мегабарным давлением [20] или проблему вязкости неидеальной электромагнитной и кварк-глюонной плазмы [21].

Остро чувствуя пустоту, которую оставил уход Якова Борисовича, мы всё же должны быть бесконечно благодарны ЯБ за то многое, что он дал нам всем в науке и в жизни: за этот пример безукоризненного поведения в трудных и неоднозначных ситуациях и за ту (потерянную навсегда!) возможность просто позвонить ему и рассказать о новом — уж он-то оценит! Именно ЯБ мы бы и хотели рассказать о тех новых результатах, о которых пойдёт речь в последующих разделах этого краткого обзора.

2. Ударные волны и экстремальные состояния вещества

Уравнение состояния — функциональная зависимость между параметрами, характеризующими состояние вещества, — является основной количественной характеристикой вещества, дающей возможность применения общего формального аппарата термодинамики и динамики сплошных сред (математической физики) к описанию различных физических объектов и процессов чрезвычайно разнообразной природы — от тепловых машин и биологических структур до ультраэкстремальных условий Большого взрыва и релятивистских адронных столкновений [11, 22].

Законы сохранения являются отражением наиболее фундаментальных свойств симметрии пространства-времени (теорема Нётер); законы сохранения (массы, импульса и энергии) в максимально общем математическом виде отражают всю совокупность процессов в окружающей нас природе, в то время как уравнение состояния (УРС) вводит в этот общий формализм и конкретную количественную специфику именно данного (конкретного) состояния вещества: газа, жидкости, твёрдого тела, электромагнитной или кварк-глюонной плазмы, излучения ядерной материи. Поэтому интерес к УРС вещества всегда был достаточно высок не только с точки зрения многочисленных прагматических (технических и энергетических) приложений, но и с точки зрения понимания и описания процессов и явлений при экстремально высоких концентрациях энергии — на стадиях Большого взрыва, а также на конечных стадиях эволюции астрофизических объектов (нейтронных звёзд, чёрных дыр), когда под действием гравитационного сжатия и термоядерного энерговыделения реализуются ультравысокие давления и температуры ядерного вещества [5, 10, 23–30]. Революционные открытия в астрономии последних десятилетий [5, 10, 13, 26–35] (нейтронные звёзды, пульсары, чёрные дыры, кротовые норы, γ -всплески, экзопланеты) свидетельствуют о новых примерах экстремальных состояний, изучение которых необходимо для решения принципиальных вопросов современной астрофизики.

Начало исследований высоких давлений в XX в. связано с пионерскими работами П. Бриджмена [36], удостоенными в 1946 г. Нобелевской премией* "за изоб-

* Интересно отметить, что ещё в 1918 г., то есть за 28 лет до присуждения Перси Бриджмену Нобелевской премии, в самом первом томе журнала *Успехи физических наук (УФН)* редактор-основатель *УФН* (академик П.П. Лазарев) и его помощники (кураторы — аналог нынешней редколлегии *УФН* — академики А.Н. Крылов и П.И. Вальден) сочли необходимым рассказать читателям журнала (как об одном из самых выдающихся успехов в экспериментальной физике тех лет!) о работах Бриджмена, поместив в *УФН* (в первых трёх последовательных выпусках 1918 г.) подробнейший обзор А.В. Раковского "Исследования Бриджмена в области высоких давлений" [37], который завершался словами: "Поскольку можно судить по статьям Бриджмена, в ближайшем времени мы должны ожидать от него не только новых экспериментальных исследований, но и ряда теоретических изысканий в изучаемой им области. Нам остаётся терпеливо ждать и горячо пожелать молодому (родился в 1882 г.) американскому учёному дальнейших успехов" [37, с. 203]. А в 1995 г. уже наоборот — американский учёный Н. Кирилл говорит о талантливых исследователях из Черноголовки — учениках школы Я.Б. Зельдовича, отмечая уникальность их работ (и в чём-то аналогичность работам Бриджмена) по созданию совершенно новой области физики — динамической физики плотной плазмы [38, с. 597]. (Примеч. ред.)

речение прибора, позволяющего создавать сверхвысокие давления, и за открытия, сделанные в связи с этим в физике высоких давлений". Эти исследования сжимаемости и других физических свойств веществ проводились в условиях статического эксперимента при давлениях до порядка 10 ГПа¹. Можно только поражаться удивительной прозорливости классика, который отмечал [39]: "Нет сомнений, что наиболее высокие давления будут достигнуты и в дальнейшем при помощи того или иного использования ударных волн".

И действительно, это время наступило очень скоро — уже с 1945 г. измерения ударной сжимаемости веществ при давлениях в несколько десятков ГПа стали проводиться в Лос-Аламосской национальной лаборатории, а в Российском федеральном ядерном центре (Арзамас-16) аналогичные планомерные работы независимо начались в 1948 г. ЯБ был одним из пионеров — основателей ударно-волнового направления. Сегодня максимальные давления, достигнутые в ударно-волновых экспериментах, в тысячу раз превосходят статические пределы.

При использовании динамических — ударно-волновых — методов исследователям приходится иметь дело с ситуациями, в которых в течение короткого времени происходит динамическое воздействие на вещество, сопровождающееся большими изменениями — градиентами — всех физических параметров, возникает движение среды и т.п. В общем виде эти процессы описываются уравнениями газовой динамики в частных производных, которые выражают законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \pi) = 0, \\ \frac{\partial \rho (E + u^2/2)}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\rho \mathbf{u} \left(E + \frac{u^2}{2} \right) + \pi \mathbf{u} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\partial/\partial t$ — обозначение локальной, т.е. относящейся к данной точке пространства, частной производной по времени, ρ — плотность вещества, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор скорости, $\pi = (\pi_{ik})$ — тензор напряжений². Система (1), которая замыкается уравнением состояния $E = E(p, \rho)$, как правило, решается численно.

Для случая автомодельного течения уравнения (1) упрощаются, и поэтому в динамическом эксперименте стремятся реализовать именно автомодельные режимы. Практически важным является случай стационарной ударной волны [4].

Ударная волна является особым физическим объектом с уникальными свойствами. При распространении по веществу стационарного ударного разрыва на его фронте выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии [4], которые связывают кинематические параметры — скорость ударной волны D и массовую скорость вещества за её фронтом u — с термодинамическими величинами — удельной внутренней энергией E , давлением p и удельным объёмом V — простыми

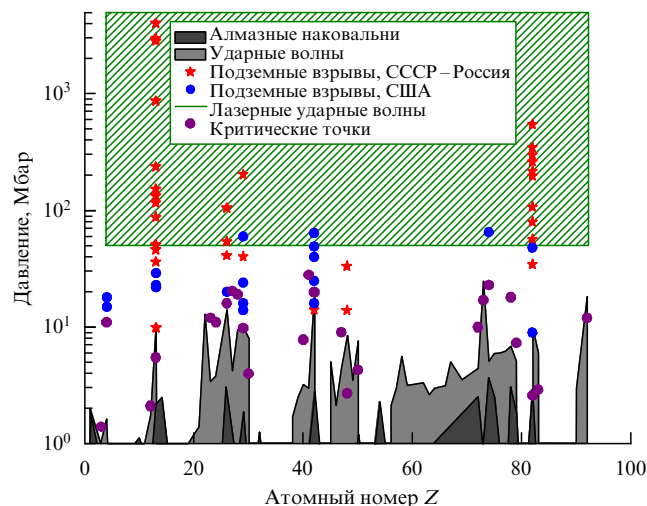


Рис. 1. Исследованная область давлений элементов. Статические давления — алмазные наковальни, динамические — ударные волны, подземные взрывы, лазерные ударные волны.

алгебраическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{V}{V_0} &= \frac{D - u}{D}, \quad p = p_0 + \frac{Du}{V_0}, \\ E &= E_0 + \frac{1}{2} (p + p_0)(V_0 - V), \end{aligned} \quad (2)$$

где индексом 0 отмечены параметры покоящегося вещества перед фронтом ударной волны. Уравнения (2), известные как законы Гюгоньо, позволяют по регистрации любых двух из пяти параметров, E , p , V , D , u , характеризующих ударный разрыв, найти гидро- и термодинамические характеристики вещества. Наиболее просто и точно базисными методами измеряется скорость ударной волны D . Выбор второго измеряемого параметра зависит от конкретных условий эксперимента, а результатом измерений и применения уравнений (2) является калорическое УРС $E = E(p, V)$.

Другое важное автомодельное решение относится к случаю центрированной волны разрежения Римана [4]. В экспериментах по фиксации кривых изоэнтропического расширения ударно-сжатого вещества [23, 26] состояния в центрированной волне разгрузки описываются интегралами Римана [4]

$$V = V_H + \int_p^{p_H} \left(\frac{du}{dp} \right)^2 dp, \quad E = E_H - \int_p^{p_H} p \left(\frac{du}{dp} \right)^2 dp, \quad (3)$$

которые вычисляются вдоль измеренной изоэнтропы $p_s = p_s(u)$ (V_H , p_H и E_H — соответственно удельный объём, давление и внутренняя энергия исходного состояния на ударной адиабате). Проводя регистрации при различных начальных условиях и интенсивностях ударных волн, также можно определить калорическое УРС $E = E(p, V)$.

Методы измерений ударной сжимаемости веществ, проблемы генерации высоких и сверхвысоких давлений и увлекательная история вопроса подробно изложены в монографиях [4, 23, 26] и обзорах [6, 8–10, 40–49]. В указанных источниках подробно рассмотрены основные этапы развития физики высоких динамических давлений — от первых работ 1950-х годов, в которых с

¹ В физике высоких давлений наряду с единицами давлений системы СИ также применяются внесистемные единицы, в частности бар или атмосфера, 1 бар = 10^5 Па = 0,987 атм.

² Отметим, что в гидродинамическом приближении тензор напряжений сферический: $\pi_{ik} = p\delta_{ik}$, δ_{ik} — символ Кронекера.

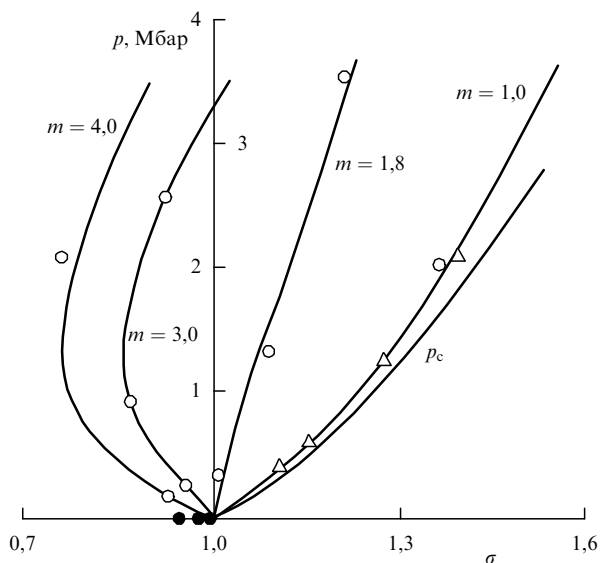


Рис. 3. Фазовая диаграмма вольфрама, согласно [51], в плоскости давление (p)–степень сжатия (σ), где $\sigma = V_0/V$, V_0 — удельный объём в нормальных условиях. Кривые — ударные адиабаты пористого металла при разных значениях степени пористости m , указанных около кривых ($m = V_{00}/V_0$, V_{00} — начальный удельный объём пористого вещества). p_c — кривая холодного сжатия. Различными символами показаны экспериментальные данные.

Необходимые для расчёта правых частей (5), (6) зависимости $E(p, V)$ определялись по экспериментальным данным в виде степенных полиномов

$$\sum_i \sum_j a_{ij} p^i V^j,$$

а для $\gamma(E, V)$ — в виде дробно-рациональных функций.

Определение точности полученного решения в зависимости от экспериментальных погрешностей и погрешностей начальных данных осуществлялось методом Монте-Карло посредством численного моделирования вероятностной структуры процесса измерения [23, 26].

Данный термодинамический метод носит общий характер — он свободен от ограничивающих предположений о свойствах, характере и фазовом составе исследуемой среды, поскольку основан на первых принципах механики сплошной среды: законах сохранения (2), (3) и основном термодинамическом тождестве (4). Эта термодинамическая универсальность дала возможность построить по единой методике уравнения состояния широкого спектра конденсированных сред, а также применить его для описания фазовых превращений [23, 26]. Особенно эффективным этот метод оказался для изучения термодинамики неидеальной плазмы цезия [23] на основе экспериментов по ударному и адиабатическому сжатию насыщенных паров металлов основной и переходной групп, ионных кристаллов, оксида кремния. Результаты расчёта такого рода для вольфрама представлены на рис. 3.

4. Ударное сжатие пористого вещества

В 1950-е годы ЯБ предложил экспериментально исследовать ударное сжатие одного и того же вещества при различных начальных плотностях [4]. В таком случае

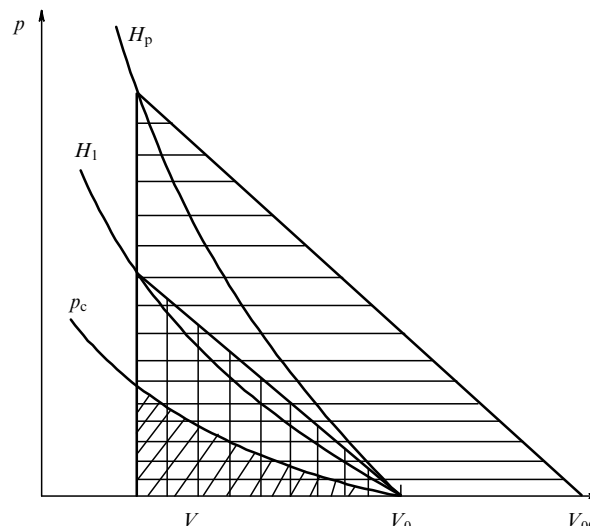


Рис. 4. Диаграмма давление–удельный объём ударного сжатия пористого вещества согласно [4]. H_p и H_1 — ударные адиабаты пористого и кристаллического вещества, p_c — кривая холодного сжатия. Горизонтальной штриховкой показана внутренняя энергия, приобретённая при ударном сжатии пористого вещества, вертикальной — при ударном сжатии кристалла, косой штриховкой — упругая энергия.

ударного сжатия пористого вещества — веер адиабат H_p — реализуется область фазовой диаграммы, отличная от основной ударной адиабаты H_1 и имеющая относительно неё пониженную плотность (см. рис. 2). Идея метода представлена на рис. 4. Из геометрического рассмотрения процесса ударного сжатия пористого образца физически понятно, что при сжатии до одного и того же конечного объёма V возрастание пористости вещества увеличивает тепловую часть энергии и, соответственно, тепловую компоненту давления.

ЯБ проанализировал также влияние тепловых эффектов на положение ударной адиабаты в фазовой плоскости и, исходя из простых физических соображений о виде УРС, теоретически получил эффект аномального ударного сжатия пористого вещества. Оказывается, что ударное сжатие вещества с низкой плотностью приводит к настолько большим величинам теплового давления, что плотность в конечном состоянии оказывается меньше нормальной. Данный эффект аномального хода ударной адиабаты был экспериментально подтверждён в первых же исследованиях ударной сжимаемости пористых металлов: вольфрама [52], алюминия, меди, никеля и свинца [53].

Выполненное впоследствии систематическое изучение ударных адиабат пористых веществ (см., например, работы [44, 54–68]) позволило получить референтную для построения широкодиапазонных УРС информацию и значительно расширило наши представления о термодинамических свойствах плотной жидкости и плазмы. Так, например, одновременно с получением данных о свойствах жидких металлов при мегабарных давлениях ударного сжатия [53] было построено полумпирическое УРС металлов с учётом переменной теплоёмкости атомов решётки и вклада электронов проводимости.

Следует отметить, что учёт эффектов ангармонизма тепловых колебаний атомов определялся отношением тепловой составляющей энергии к упругой и осуществлялся на основе данных по ударному сжатию пори-

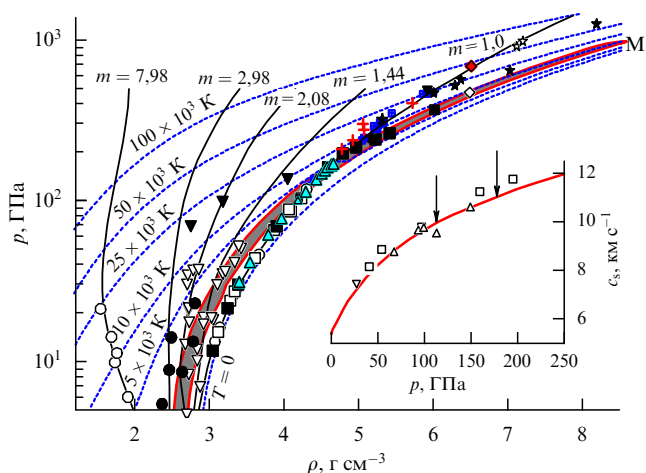


Рис. 5. Фазовая диаграмма алюминия при высоких давлениях. Результаты расчёта по УРС: изотермы (штриховые кривые) при температурах, указанных на рисунке, и ударные адиабаты пористых образцов (сплошные кривые) при значениях степени пористости m , указанных около кривых; М — область плавления. Символами показаны экспериментальные данные. На вставке — скорость звука $c_s(p)$ в ударно-сжатом алюминии: расчёт по УРС (кривая) и экспериментальные точки (символы); стрелки указывают положение плавления в ударной волне.

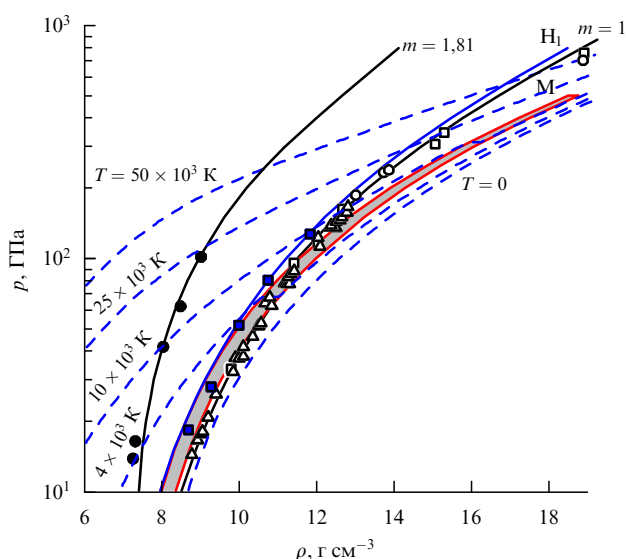


Рис. 6. Фазовая диаграмма олова при высоких давлениях. Расчёт по УРС: изотермы (штриховые кривые) при температурах, указанных на рисунке; ударные адиабаты пористых образцов (сплошные кривые) при значениях степени пористости $m = 1$ и 1.81 ; H_1 — ударная адиабата жидкого металла, М — область плавления. Символы — экспериментальные данные.

стого вещества. Рисунок 5 иллюстрирует качество расчёта фазовой диаграммы алюминия при высоких давлениях с помощью многофазного УРС [69].

Интересно сопоставить на фазовой диаграмме результаты измерений сжимаемости пористого вещества и нагретого до высокой температуры жидкого металла. Такие эксперименты были выполнены для легкоплавких металлов: цинка, олова, свинца, кадмия и висмута [70, 71]. Как видно из рис. 6, значительное увеличение начальной температуры позволяет исследовать область фазовой диаграммы, соответствующую сжатому жидкому веществу вблизи области плавления. Однако срав-

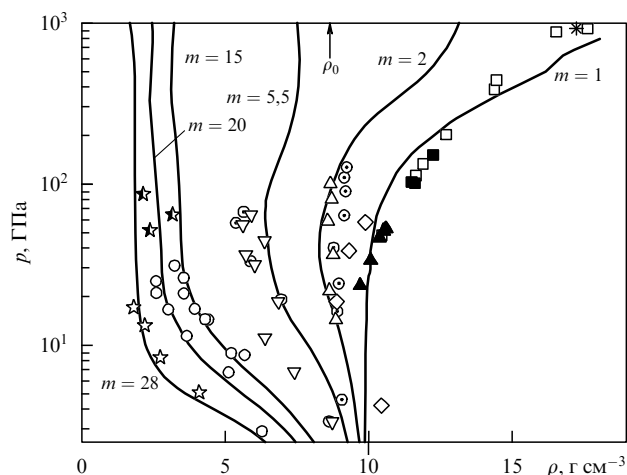


Рис. 7. Ударные адиабаты (сплошные кривые) пористого никеля — результат расчёта согласно химической модели плазмы [63]; $m = V_{00}/V_0$. Символами показаны экспериментальные данные.

нение ударных адиабат жидкого и пористого металлов наглядно показывает преимущества идеи ЯБ — сжатие пористого вещества приводит к гораздо большим тепловым эффектам в давлении и энергии, что позволяет дальше отойти от основной ударной адиабаты и реализовать больший диапазон плотностей на фазовой диаграмме.

Уникальные результаты получены при исследовании ударной сжимаемости сильнопористого никеля — в работах [62, 63, 68] были исследованы ударные адиабаты образцов с начальной плотностью, в 10–28 раз меньшей, чем нормальная, при мегабарных давлениях. Конечные состояния ударного-сжатого никеля оказываются в диапазоне плотностей от 0,2 от нормальной и в области давлений до 90 ГПа, что соответствует высоким температурам, до 10^5 К. В таких условиях уже реализуются состояния не только плотной горячей жидкости, но и, согласно расчётам по химической модели плазмы [63], ионизованного металла со степенью ионизации $\alpha \leq 1$ и параметром кулоновской неидеальности $\Gamma = E_C/E_k$, где E_C — энергия межчастичного кулоновского взаимодействия, E_k — кинетическая энергия (рис. 7).

Совершенно особое место на фазовой диаграмме занимают уникальные данные измерений ударной сжимаемости пористых меди, железа и вольфрама с пористостью $m = 3–4$, полученные в условиях подземных ядерных взрывов [42, 56, 61]. В этих опытах конечная плотность на ударной адиабате близка к нормальной при экстремально высоких значениях давления (терапаскального диапазона) и температуры $\lesssim 3 \times 10^5$ К (рис. 8). Оценки показывают, что в экспериментах [42, 56, 61] реализованы состояния с доминирующим вкладом электронной компоненты, соответствующие слабовырожденному электронному газу с чрезвычайно высокой удельной концентрацией энергии, ~ 1 МДж г $^{-1}$.

Таким образом, воплощение идеи Я.Б. Зельдовича [4] позволило не только поставить реперные точки на фазовой диаграмме при более низких, чем на ударной адиабате кристалла, плотностях вещества, но и исследовать такие разные физические состояния, как плотная жидкость, неидеальная плазма и слабовырожденный электронный газ.

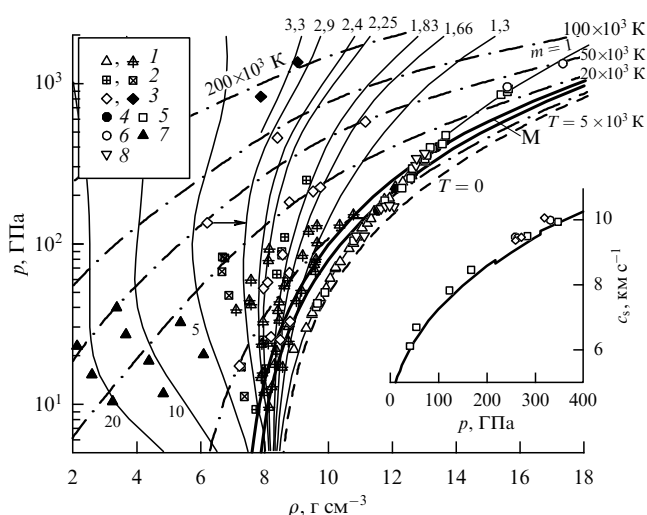


Рис. 8. Фазовая диаграмма железа при высоких давлениях. Расчёт по УРС: изотермы (штрихпунктирные кривые) и ударные адиабаты (сплошные кривые) пористых образцов при разных значениях степени пористости m , указанных на рисунке; М — область плавления. Символами показаны экспериментальные данные: 1–2, 5–8 — ударное сжатие с помощью химических ВВ, 3 — результаты [61] (светлые ромбы — ударное сжатие с помощью химических ВВ, тёмные — в условиях подземного взрыва). На вставке — скорость звука $c_s(p)$ в ударно-сжатом железе: расчёт по УРС (кривая) и экспериментальные точки (символы).

5. Изэнтропическое расширение ударно-сжатых веществ

Ещё в 1945–1948 годах американским и отечественным исследователям удалось экспериментально реализовать автомодельное течение в виде стационарной ударной волны, описываемой законами Гюгонио (2), и начать масштабные регистрации ударных адиабат веществ. В случае второго инварианта уравнений газовой динамики (4)–(6) — соотношений для центрированной волны разрежения Римана (3) — идея Я.Б. Зельдовича [3] была осуществлена значительно позднее. Сегодня можно указать две экспериментальные методики исследования УРС вещества при изэнтропическом расширении.

В первом случае в широком диапазоне давлений ударного сжатия определяются начальная и конечная точки на изэнтропах, т.е. на ударной адиабате и при расширении в преграду с фиксированной жёсткостью. Так, при расширении в воздух из различных давлений ударного сжатия были определены изэнтропы расширения свинца, алюминия, меди, железа, молибдена, тантала и углерода [59, 72–75]. Для свинца (рис. 9) ввиду наличия характерных немонокотонностей зависимости скорости расширения в воздух от массовой скорости в ударно-сжатом веществе был сделан вывод об испарении в волне разгрузки при давлении выше 1,32 Мбар [72]. Для металлов с более высокими, чем у свинца, параметрами плавления и испарения изменение наклона на изэнтропах разгрузки (и, следовательно, эффект испарения) не наблюдается.

В качестве примера приведём результаты расчёта по широкодиапазонному УРС [69] изэнтропического расширения алюминия из твёрдой (изэнтропы S_1 – S_{14} на рис. 10) и жидкой (изэнтропы S_{15} – S_{31} на рис. 11) фаз при различных начальных давлениях ударного сжатия. Дей-

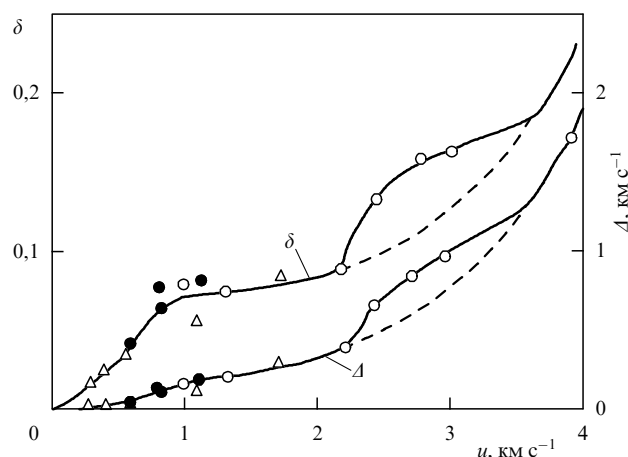


Рис. 9. Испарение свинца при разгрузке в воздух [72]. $\Delta = w - 2u$, $\delta = \Delta/2u$, где w и u — соответственно конечная и начальная скорости волн расширения (разгрузки в воздух и массовая скорость на ударной адиабате). Сплошные кривые соответствуют равновесному состоянию, штриховые — метастабильному. Символами показаны экспериментальные точки.

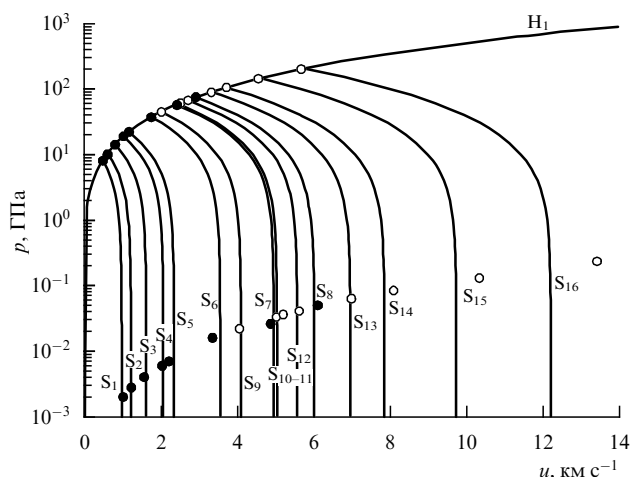


Рис. 10. Изэнтропы разгрузки твёрдого и расплавленного алюминия. Кривые — результаты расчёта по УРС, H_1 — основная ударная адиабата, S_i — изэнтропы разгрузки. Тёмные кружки — экспериментальные данные [74], светлые — [73].

ствительно, на энтропийной диаграмме (рис. 12) конечные состояния в волнах изэнтропического расширения (S_{1-31}) находятся выше положения области испарения и алюминий при разгрузке в воздух не испаряется, что видно также из рис. 2.

Отечественные исследователи разработали стандартные взрывные генераторы ударных волн различных типов [9, 43–46]. С их помощью метод изэнтропического расширения (3) реализуется в полном объёме в соответствии с идеей ЯБ [3]: для конкретной изэнтропы измеряются скорости разлёта при различных давлениях разгрузки $p_s = p_s(u)$. С этой целью в серии экспериментов определяются состояния вещества, возникающие при изэнтропическом расширении исследуемого образца из одной точки на ударной адиабате в преграды с различной жёсткостью. Уже в первых экспериментах, выполненных в такой постановке [57], были реализованы высокоэнергетические состояния меди и свинца в широком интервале параметров вблизи линии равновесия жидкость —

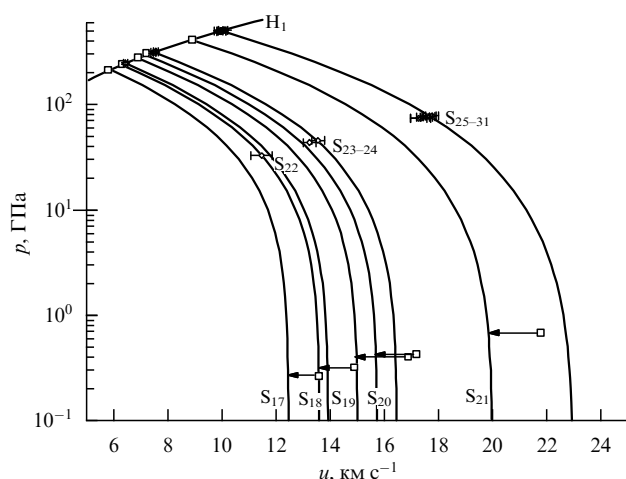


Рис. 11. Изоэнтропы разгрузки жидкого алюминия. Кривые — результаты расчёта по УРС: H_1 — основная ударная адиабата, S_i — изоэнтропы разгрузки. Экспериментальные данные: квадраты — [59], ромбы — разгрузка в аэрогель [76]. Стрелки указывают, к какой изоэнтропе относится экспериментальная точка.

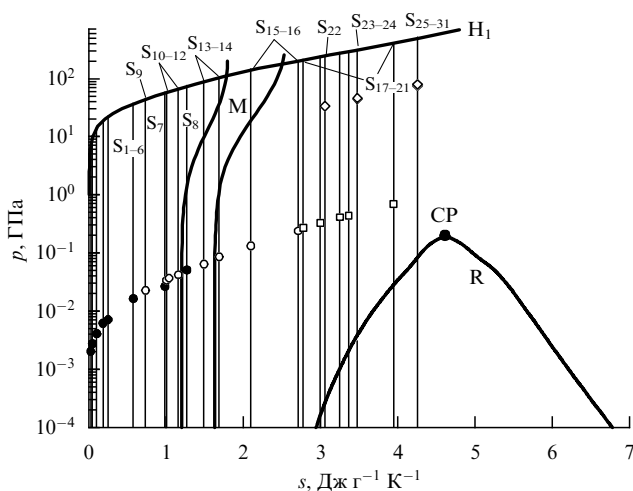


Рис. 12. Диаграмма давление (p) – энтропия (s) алюминия. Кривые — результаты расчёта по УРС: H_1 — основная ударная адиабата, S_i — изоэнтропы разгрузки; М — область плавления, R — двухфазная область жидкость – пар с критической точкой CP. Символы соответствуют экспериментальным точкам, показанным на рис. 10, 11.

пар, причём необходимое для этого большое значение энтропии в исходной точке на ударной адиабате и, соответственно, на изоэнтропе было получено за счёт использования пористых образцов. В качестве сред-преград применялись конденсированные материалы, такие как плексиглас, полиэтилен, пенопласты, а также воздух и инертные газы с известными УРС, находящиеся при различном начальном давлении.

Полученные данные охватили ранее не изученную область фазовой диаграммы: четыре порядка по давлению, три — по плотности и четыре — по температуре, от области горячей плотной жидкости, характеризующейся разупорядочиванием ионов и вырождением электронов, до областей неидеальной плазмы, испарения с критической точкой, квазиидеальной бoльцмановской плазмы и разреженного металлического пара.

По мере расширения в системе снимается вырождение электронов, происходит значительная перестройка

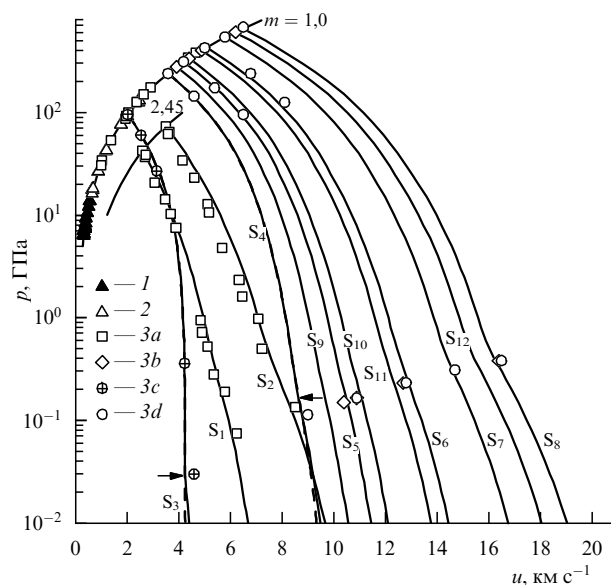


Рис. 13. Ударные адиабаты ($m = 1$ и $2,45$) и изоэнтропы разгрузки S_i (сплошные кривые — равновесные, штриховые — метастабильные) висмута. Стрелки указывают вхождение в двухфазную область жидкость – пар. Различными символами показаны экспериментальные результаты: точки 1 и 2 получены при ударном сжатии, точки 3a, 3c получены с помощью плоских генераторов ударных волн, 3b — многокаскадных, 3d — конических.

энергетического спектра атомов и ионов, осуществляется частичная рекомбинация плотной плазмы. В электронной неупорядоченной системе реализуется переход металл – диэлектрик и образуется неидеальная по отношению к различным видам межчастичного взаимодействия плазма в окрестности линии равновесия жидкость – пар и критической точки. Вхождение изоэнтроп в двухфазную область жидкость – пар сопровождается испарением, а со стороны газовой фазы — конденсацией, что приводит к изменению наклона экспериментальных зависимостей скорости волны разгрузки от давления.

Исследованный диапазон фазовой диаграммы был расширен в последующих экспериментах с алюминием, висмутом и медью [59, 77]. На рисунке 13 представлены данные по изотропическому расширению висмута, а на рис. 14 — положения ударных адиабат и изоэнтроп на энтропийной диаграмме. Расчёты в рамках "химической" модели плазмы [23, 26, 78–80] показали, что конечные состояния на изоэнтропах S_2 , S_7 , S_8 и S_{12} соответствуют разреженной слабонеидеальной плазме со степенью ионизации $\alpha \approx 10^{-2} - 10^{-1}$. Равновесные свойства такой плазмы висмута рассчитываются с достаточно высокой степенью надёжности стандартными методами статистической физики, что позволяет на основе данных механических измерений [59] описать термодинамические свойства вещества и решить таким образом задачу Ферми – Зельдовича.

Альтернативная возможность замкнуть термодинамическое описание появляется, как видно из уравнения (6), если измерить температуру в волне изотропической разгрузки. Следует отметить, что температурные измерения имеют самостоятельную ценность.

Рисунок 15 иллюстрирует сопоставление расчётных и экспериментальных изоэнтроп разгрузки свинца [81] в области испарения и окрестности критической точки. Как видно из рисунка, регистрация температуры в

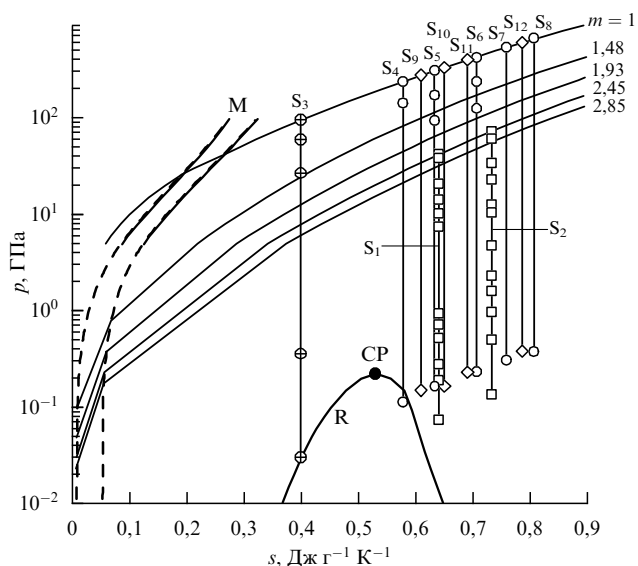


Рис. 14. Диаграмма давление (p) – энтропия (s) висмута. Результаты расчёта по УРС: изоэнтропы разгрузки S_i и ударные адиабаты при различных значениях пористости $m = V_{00}/V_0$, указанных около кривых, М — область плавления, R — двухфазная область с критической точкой CP. Символы соответствуют экспериментальным точкам, показанным на рис. 13.

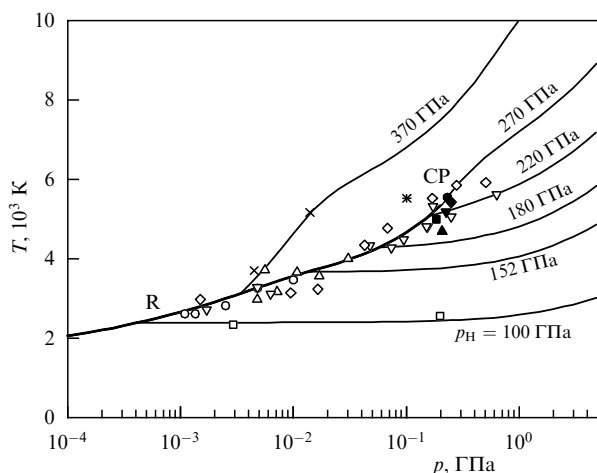


Рис. 15. Фазовая диаграмма давление – температура свинца. Кривые — результаты расчётов по УРС, R — область жидкость – пар с критической точкой CP, p_H — давление на ударной адиабате (около кривых указаны соответствующие значения). Светлыми символами показаны экспериментальные точки [81], тёмными — оценки критической точки.

волнах изоэнтропического разгрузки позволяет экспериментально определить положение области испарения во всём диапазоне температур вплоть до критической. Хорошее согласие результатов измерений при различных начальных давлениях ударного сжатия и, соответственно, при различных положениях вхождения изоэнтроп в двухфазную область жидкость – пар со стороны как жидкости, так и плазмы подтверждает этот факт.

Дальнейшие экспериментальные исследования с помощью метода изоэнтропического расширения ударно-сжатого вещества позволили получить референтные данные для построения УРС металлов [67, 74, 82–85] и органических соединений [86–88].

Идея ЯБ лежит также в основе метода изохорического нагрева интенсивными пучками тяжёлых ионов и

последующего изоэнтропического расширения (HINEX — Heavy Ion Heating and Expansion) [89, 90].

6. Модели уравнения состояния вещества

Современное состояние проблемы теоретического расчёта УРС вещества в широкой области фазовой диаграммы отражено в монографии [91]. Следует отметить, что, хотя в последние годы достигнут впечатляющий прогресс в расчётах отдельных областей фазовой диаграммы с помощью рафинированных методов функционала плотности и квантовой молекулярной динамики, по-прежнему остаётся нерешённой задача сквозного, в рамках одной теоретической методики, прохождения всей фазовой плоскости от области сжатого кристалла до области горячей жидкости, неидеальной плазмы и квазиидеальных газовых состояний. Поэтому на практике широко используются полумпирические модели УРС [69, 91–98], в которых термодинамический потенциал представляется в виде аналитической зависимости либо рассчитывается самосогласованным образом во всей фазовой плоскости. Функциональные зависимости в таких моделях, основанные на результатах строгих теорий, обеспечивают получение корректных физических асимптотик в различных предельных случаях. Численные коэффициенты частично представляют собой значения индивидуальных характеристик вещества, а частично — подгоночные коэффициенты, подбираемые из условий наилучшего соответствия результатов строгих теоретических расчётов совокупности экспериментальных данных. Методические требования, принципы построения и примеры расчёта УРС детально изложены в монографиях [91, 96, 98] и обзорах [69, 97, 99]. Мы проиллюстрируем предлагаемый подход на примере многофазного УРС молибдена.

Модель УРС, которая задаётся в виде термодинамического потенциала свободной энергии [69, 95, 97], учитывает вклады упругой компоненты при $T = 0$, атомов решётки и электронов проводимости, наиболее важные физические эффекты: ангармонизм тепловых колебаний атомов решётки, плавление, испарение и ионизацию. Основная часть коэффициентов уравнения состояния, которые являются характерными для каждого металла константами (атомный вес, заряд ядра, плотность в нормальных условиях и т.п.), берётся из справочников, остальные находятся из условий наилучшего описания наиболее существенных экспериментальных данных и воспроизведения асимптотик к результатам теоретических расчётов. Для построения уравнения состояния привлекается следующая информация при высоких давлениях и температурах: измерения изотермической сжимаемости в алмазных наковальнях, данные по плотности и скорости звука в жидких металлах, $p - T$ -измерения фазовых диаграмм в статических условиях, результаты исследований по изобарическому расширению, регистрации ударной сжимаемости сплошных и пористых образцов в падающей и отражённой волнах, результаты исследований сравнительной ударной сжимаемости в подземных ядерных взрывах, данные по изоэнтропическому расширению ударно-сжатых металлов, оценки параметров критической точки. Кроме того, используются результаты расчётов по теории Томаса – Ферми, различным зонным теориям и с помощью метода квантовой молекулярной динамики.

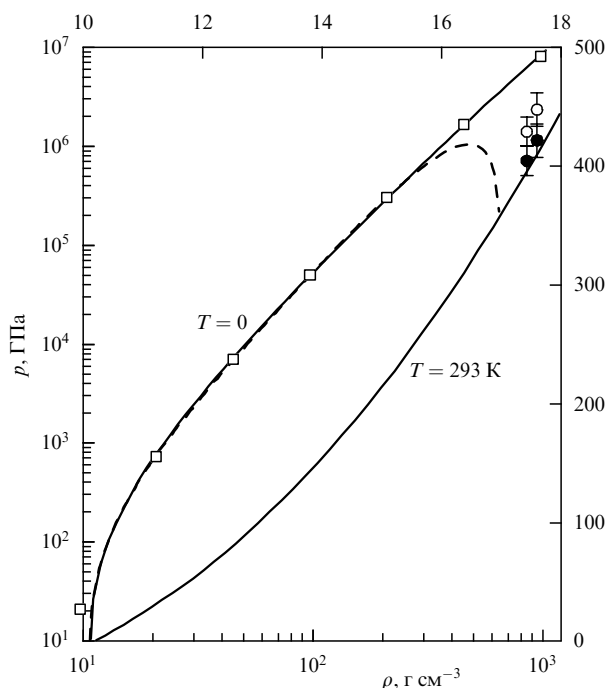


Рис. 16. Давление в молибдене при $T = 0$ (левая и нижняя оси координат) и $T = 293$ К (правая и верхняя оси координат). Сплошные кривые — расчёт по УРС, штриховая кривая — результат из [101]; квадраты — расчёт по теории Томаса–Ферми [100], кружки с погрешностями — сжатие в алмазных наковальнях без поправок (тёмные кружки) и с поправками (светлые кружки) на негидростатичность.

По результатам измерений статической и динамической сжимаемостей молибдена можно сделать вывод, что кривая давления имеет плавный монотонный характер. По этой причине УРС молибдена соответствует исходным параметрам объёмноцентрированной кубической фазы при комнатных условиях. Кривая упругого сжатия молибдена, как видно из рис. 16, хорошо согласуется с результатами расчётов по модели Томаса–Ферми [100] при сжатиях до 100-кратного, а при невысоких степенях сжатия — с более ранней полуэмпирической зависимостью [101]. Результаты измерений изотермической сжимаемости молибдена в алмазных наковальнях также находятся в согласии с теоретическими результатами в пределах ошибки эксперимента и обработки данных. Расчётное значение начального наклона кривой плавления $dT/dp = 3,33$ К кбар $^{-1}$ согласуется с результатами опытов по изобарическому расширению проводников, $dT/dp = 3,4 \pm 0,6$ К кбар $^{-1}$ [102], и оптимизационной обработки данных для твёрдого и жидкого молибдена $dT/dp = 3,5 \pm 0,2$ К кбар $^{-1}$ [103].

Область пониженных относительно плотности в случае ударной адиабаты кристаллического вещества плотностей изучена в опытах по ударному сжатию пористых образцов молибдена, а также жидкого нагретого до температуры 1673 К металла. В опытах по измерению скорости звука в ударно-сжатом молибдене [104] обнаружено исчезновение поперечной компоненты при $p = 3,9$ Мбар, что связывается с началом плавления в ударной волне. Фазовая диаграмма молибдена при высоких давлениях показана на рис. 17. Из анализа рис. 17 следует надёжность описания термодинамических свойств ударно-сжатого молибдена в исследован-

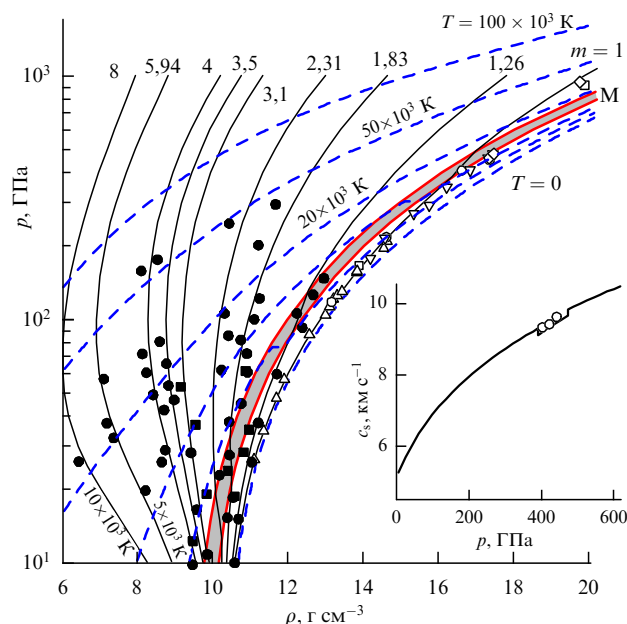


Рис. 17. Фазовая диаграмма молибдена при высоких давлениях. Расчёт по УРС: штриховые кривые — изотермы при разных температурах, сплошные кривые — ударные адиабаты пористых образцов при различных значениях пористости, указанных около кривых, М — область плавления. Символами показаны экспериментальные данные. На вставке — скорость звука $c_s(p)$ в ударно-сжатом алюминии: расчёт по УРС (кривая) и экспериментальные точки (символы).

ном диапазоне характеристик, а расчётная величина давления начала плавления $p = 3,85$ Мбар совпадает с результатом эксперимента [104]. Сравнение расчётной ударной адиабаты нагретого жидкого металла с данными [105] также показывает их хорошее согласие.

Измерения свойств молибдена в волнах изотропической разгрузки проведено в работах [74, 106]. Результаты расчёта показывают, что в случае максимального реализованного давления ударного сжатия 2,3 Мбар кристаллического молибдена [74] изотропа S_3 из области состояния горячего кристалла расширяется в двухфазную область жидкость–кристалл, а остальные две изотропы (S_1 и S_2) целиком находятся в области твёрдой фазы. Как видно из рис. 18, результаты [74] с высокой точностью описываются построенным УРС молибдена. В опытах [106] благодаря использованию пористых образцов реализованы состояния жидкого металла с большей, чем в работе [74], энтропией. В расчёте изотропы S_4 и S_5 при их входе в двухфазную область жидкость–пар испытывают изломы при давлениях 5,48 и 1,67 кбар, что в пределах экспериментальной погрешности хорошо согласуется с p – u -зависимостью [106].

В области пониженных плотностей и умеренных давлений для молибдена в серии работ [107–111] выполнены измерения термодинамических свойств в опытах по изобарическому расширению. Эти данные, как видно из рис. 19, отличаются друг от друга в пределах 20 % по температуре и 10 % по плотности, причём существенные различия результатов работ [107] и [111] видны даже в области твёрдой фазы. Разброс оценок критических точек также велик — находится в диапазоне плотностей и температур от 1 г см $^{-3}$ и 8000 К [112] до $3,1$ г см $^{-3}$ и 19720 К [106]. По-видимому, можно предположить нестационарность режима измерений в экспериментах

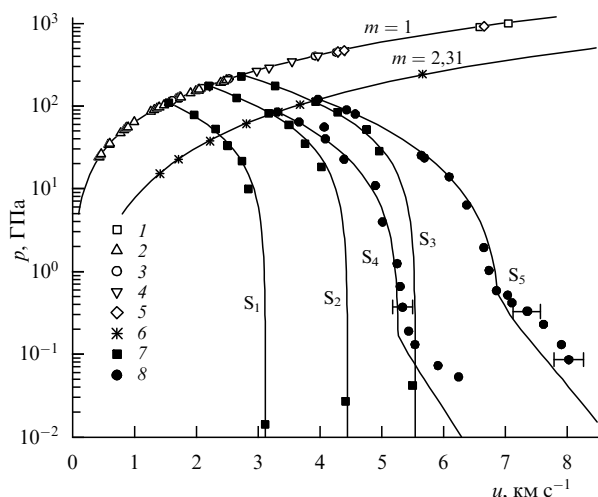


Рис. 18. Ударные адиабаты при $m = 1$ и $m = 2,31$ и изэнтропы разгрузки (S_i) молибдена. Символы 1–6 соответствуют ударному сжатию, 7 — результатам [74], 8 — изэнтропическому расширению [106].

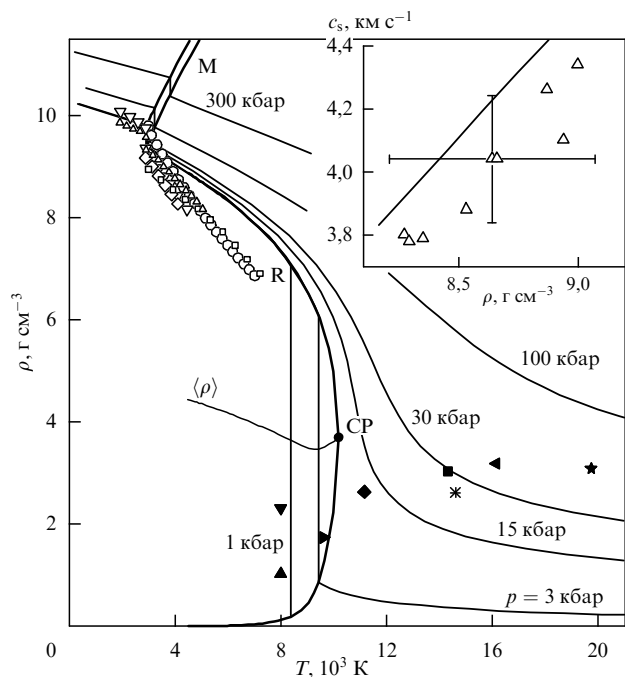


Рис. 19. Фазовая диаграмма молибдена в области пониженных плотностей. Тонкие сплошные кривые — изобары. М — плавление, R — испарение с критической точкой СР. Светлые символы — данные экспериментов по электровзрыву проводников, темные — оценки критической точки. На вставке — скорость звука в жидком молибдене при $p = 2$ кбар, треугольниками показаны экспериментальные точки.

[107–111], приводящую к завышению значения теплоёмкости и наклона экспериментальных изобар в переменных плотность–температура. Расчётное положение критической точки $p_c = 7,59$ кбар, $T_c = 10180$ К, $V_c = 0,271$ см³ г⁻¹, $s_c = 1,520$ Дж г⁻¹ К⁻¹ разумно согласуется с оценками [109, 113], а температура испарения $T_v = 4459$ К соответствует приведённому в справочнике [114] значению температуры 4973 К, известному с погрешностью 10 %.

Построенное в рамках такого подхода УРС молибдена эффективно используется при численном моделиро-

вании широкого круга задач физики экстремальных состояний.

7. Заключение

В одной публикации невозможно отразить всю широту таланта и обаяние личности Я.Б. Зельдовича и его вклад в современную физику. Мы постарались показать влияние ЯБ и его идей на сравнительно узкую область — физику экстремальных состояний вещества. Видно, что фундаментальные идеи, предложенные ЯБ более 50 лет назад, развиваются и находятся в основе самых современных экспериментальных и теоретических исследований. Эта особенность творчества Я.Б. Зельдовича — доводить фундаментальные научные идеи до реального воплощения в экспериментах или практических приложениях — продолжается в работах его школы, его учеников и их учеников.

Нашей стране повезло с Яковом Борисовичем. "Отец" американской водородной бомбы Э. Теллер неоднократно говорил при встречах (и даже написал об этом в предисловии к книге по физике мегагауссных магнитных полей [12]), что для СССР удачей было то, что к моменту начала работ по ядерной бомбе в СССР были такие выдающиеся учёные, как Я.Б. Зельдович и Л.В. Альтшулер. А вот американскому ядерному проекту таких людей очень не хватало. Там имелись первоклассные специалисты по ядерной физике, но не было сильных "газодинамиков", в особенности таких, которые знали бы одновременно и ядерные, и газодинамические проблемы. Ту же мысль в беседе с В.Е.Ф. высказал Х. Бете, считавший самой серьёзной проблемой в создании американской ядерной бомбы именно газодинамическую часть и отсутствие на Западе соответствующих специалистов-газодинамиков.

Однажды на одной из Гордоновских конференций по высоким давлениям, развязав дискуссию на тему нецитирования одной из работ ЯБ по пористым адиабатам, В.Е.Ф. получил в ответ вполне откровенное признание

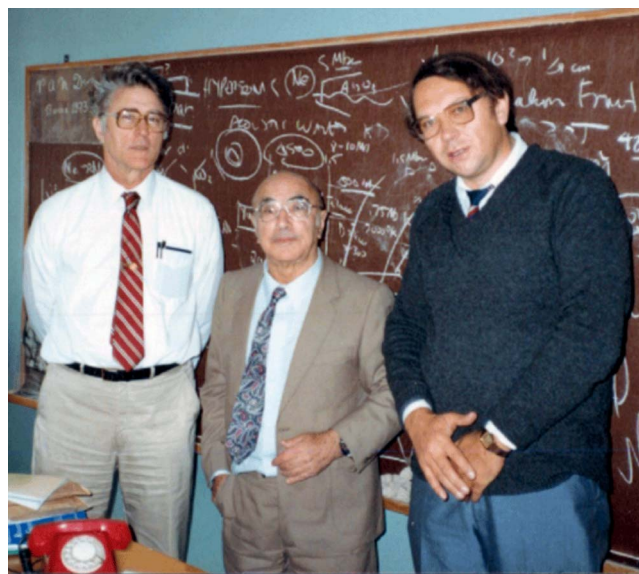


Фото 2. В Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау АН СССР в июне 1986 г. (слева направо): Норрис Ки́нлер, Яков Борисович Зельдович и Владимир Евгеньевич Фортгов.

одного американца: "Что же делать? Придумаешь что-то стоящее, а оказывается, это уже сделал и опубликовал Зельдович!"

Так или иначе, но вот уже третье поколение открывает для себя обширное творчество ЯБ, к сожалению, не везде и не всем известное за рубежом (хотя во многих лабораториях книга Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера [4] и юбилейный двухтомник работ ЯБ [115, 116] лежат на самом видном месте). Тем не менее влияние ЯБ на ударно-волновую науку на Западе исключительно велико и плодотворно. Об этом прекрасно написал профессор Р.Н. Киилер (слева на фото 2) в статье "Размышления американского учёного о работе академика Я.Б. Зельдовича в области динамической физики высоких давлений" [38], отмечая, в частности, что "в богатом наследии академика Я.Б. Зельдовича — сильная и продуктивная исследовательская программа высоких динамических давлений в России".

Список литературы

1. Зельдович Я Б *Теория ударных волн и введение в газодинамику* (М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1946)
2. Зельдович Я Б, Компанец А С *Теория детонации* (М.: Гостехиздат, 1955) [Zeldovich Ia B, Kompaneets A S *Theory of Detonation* (New York: Academic Press, 1960)]
3. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* 32 1577 (1957) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* 5 1287 (1957)]
4. Зельдович Я Б, Райзер Ю П *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (М.: Физматлит, 2008) [Zel'dovich Ya B, Raizer Yu P *Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena* (Mineola, N.Y.: Dover Publ., 2002)]
5. Фортвов В Е *Экстремальные состояния вещества* (М.: Физматлит, 2009)
6. Альтшулер Л В *УФН* 85 199 (1965) [Al'tshuler L V *Sov. Phys. Usp.* 8 52 (1965)]
7. Fortov V E *Extreme States of Matter on Earth and in the Cosmos* (Berlin: Springer, 2011)
8. Альтшулер Л В, Баканова А А *УФН* 96 193 (1968) [Al'tshuler L V, Bakanova A A *Sov. Phys. Usp.* 11 678 (1969)]
9. Фортвов В Е *УФН* 177 347 (2007) [Fortov V E *Phys. Usp.* 50 333 (2007)]
10. Фортвов В Е *УФН* 179 653 (2009) [Fortov V E *Phys. Usp.* 52 615 (2009)]
11. Фортвов В Е *Физика высоких плотностей энергии* (М.: Физматлит, 2013)
12. Caldirola P, Knoepfel H (Eds) *Physics of High Energy Density* (New York: Academic Press, 1971)
13. Анисимов С И, Прохоров А М, Фортвов В Е *УФН* 142 395 (1984) [Anisimov S I, Prokhorov A M, Fortov V E *Sov. Phys. Usp.* 27 181 (1984)]
14. Фортвов В Е, Хоффманн Д, Шарков Б Ю *УФН* 178 113 (2008) [Fortov V E, Hoffmann D N H, Sharkov B Yu *Phys. Usp.* 51 109 (2008)]
15. Дудин С В и др. *ТВТ* 48 3 (2010) [Dudin S V et al. *High Temp.* 48 1 (2010)]
16. Landau L D, Zeldovich Ya B *Acta Physicochim. USSR* 18 194 (1943); Ландау Л Д, Зельдович Я Б *ЖЭТФ* 14 32 (1944)
17. Фортвов В Е, Красников Ю Г *ЖЭТФ* 59 1645 (1970) [Fortov V E, Krasnikov Yu G *Sov. Phys. JETP* 32 897 (1971)]
18. Зельдович Я Б, Тодес О М *ЖЭТФ* 10 1441 (1940); Zeldovich Ya B, Todes O M *Acta Physicochim. USSR* 16 (1/2) 26 (1942)
19. Dzyabura V, Zaghou M, Silvera I F *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 110 8040 (2013)
20. Фортвов В Е и др. *ЖЭТФ* 124 288 (2003) [Fortov V E et al. *JETP* 97 259 (2003)]
21. Fortov V E, Mintsev V B *Phys. Rev. Lett.* 111 125004 (2013)
22. Рубаков В А *УФН* 182 1017 (2012) [Rubakov V A *Phys. Usp.* 55 949 (2012)]
23. Фортвов В Е, Храпак А Г, Якубов И Т *Физика неидеальной плазмы* (М.: Физматлит, 2004)
24. Henderson D (Ed.) *Frontiers in High Energy Density Physics* (Washington, D.C.: National Academies Press, 2003)
25. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Физматлит, 2001) [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
26. Fortov V E, Iakubov I T, Khrapak A G *Physics of Strongly Coupled Plasma* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2006)
27. Гинзбург В Л *УФН* 174 1240 (2004) [Ginzburg V L *Phys. Usp.* 47 1155 (2004)]
28. Hemley R J, Ashcroft N W *Phys. Today* 51 (8) 26 (1998)
29. Засов А В, Постнов К А *Общая астрофизика* (Фрязино: Век 2, 2006)
30. Drake R P *High-Energy-Density Physics: Fundamentals, Inertial Fusion, and Experimental Astrophysics* (Berlin: Springer, 2006)
31. Шацкий А А, Новиков И Д, Кардашев Н С *УФН* 178 481 (2008) [Shatskii A A, Novikov I D, Kardashev N S *Phys. Usp.* 51 457 (2008)]
32. Потехин А Ю *УФН* 180 1279 (2010) [Potekhin A Yu *Phys. Usp.* 53 1235 (2010)]
33. Шакура Н И и др. *УФН* 183 337 (2013) [Shakura N I et al. *Phys. Usp.* 56 321 (2013)]
34. Бескин В С, Истомин Я Н, Филиппов А А *УФН* 183 179 (2013) [Beskin V S, Istomin Ya N, Philippov A A *Phys. Usp.* 56 164 (2013)]
35. Бабичев Е О, Докучаев В И, Ерошенко Ю Н *УФН* 183 1257 (2013) [Babichev E O, Dokuchaev V I, Eroshenko Yu N *Phys. Usp.* 56 1155 (2013)]
36. Bridgman P W *Rev. Mod. Phys.* 18 1 (1946) [Бриджмен П *УФН* 31 53 (1947); *УФН* 31 210 (1947); *УФН* 31 346 (1947)]
37. Раковский А В *УФН* 1 39 (1918); *УФН* 1 108 (1918); *УФН* 1 182 (1918)
38. Киилер Р Н *УФН* 165 595 (1995) [Keeler R N *Phys. Usp.* 38 559 (1995)]
39. Bridgman P W, in *Solids under Pressure* (Eds W Paul, D M Warschauer) (New York: McGraw-Hill, 1963) [Бриджмен П, в сб. *Твердые тела под высоким давлением* (Под ред. В Пола, Д Варшауэра) (М.: Мир, 1966) с. 11]
40. Альтшулер Л В, Зельдович Я Б, Стыжкин Ю М *УФН* 167 107 (1997) [Al'tshuler L V, Zel'dovich Ya B, Styazhkin Yu M *Phys. Usp.* 40 101 (1997)]
41. Забабахин Е И *УФН* 85 721 (1965) [Zababakhin E I *Sov. Phys. Usp.* 8 295 (1965)]
42. Трунин Р Ф *УФН* 164 1215 (1994) [Trunin R F *Phys. Usp.* 37 1123 (1994)]
43. Альтшулер Л В и др. *УФН* 166 575 (1996) [Al'tshuler L V et al. *Phys. Usp.* 39 539 (1996)]
44. Фунтиков А И *УФН* 167 1119 (1997) [Funtikov A I *Phys. Usp.* 40 1067 (1997)]
45. Альтшулер Л В и др. *УФН* 169 323 (1999) [Al'tshuler L V et al. *Phys. Usp.* 42 261 (1999)]
46. Трунин Р Ф *УФН* 171 387 (2001) [Trunin R F *Phys. Usp.* 44 371 (2001)]
47. Ильяев Р И *УФН* 181 405 (2011) [Ilkaev R I *Phys. Usp.* 54 387 (2011)]
48. Трунин Р Ф *УФН* 181 416 (2011) [Trunin R F *Phys. Usp.* 54 397 (2011)]
49. Подурец А М *УФН* 181 427 (2011) [Podurets A M *Phys. Usp.* 54 408 (2011)]
50. Fermi E *Rend. Accad. Naz. Lincei* 6 602 (1927)
51. Фортвов В Е *Журн. прикл. мех. физ.* (6) 156 (1972) [Fortov V E *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 12 257 (1971)]
52. Крупников К К, Бражник М И, Крупникова В П *ЖЭТФ* 42 675 (1962) [Krupnikov K K, Brazhnik M I, Krupnikova V P *Sov. Phys. JETP* 15 470 (1962)]
53. Кормер С Б и др. *ЖЭТФ* 42 686 (1962) [Kormer S B et al. *Sov. Phys. JETP* 15 477 (1962)]
54. Алексеев Ю П, Ратников В П, Рыбаков А П *Журн. прикл. мех. тех. физ.* (2) 101 (1971) [Aleksseev Yu L, Ratnikov V P, Rybakov A P *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 12 257 (1971)]
55. Баканова А А, Дудолодов И П, Сутулов Ю Н *Журн. прикл. мех. тех. физ.* (2) 117 (1974) [Bakanova A A, Dudoladov I P, Sutulov Yu N *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 15 241 (1974)]
56. Зубарев В Н и др., в сб. *Детонация* (Отв. ред. А Н Дремин) (Черноголовка: ОИХФ АН СССР, 1978) с. 61
57. Альтшулер Л В и др. *ЖЭТФ* 78 741 (1980) [Al'tshuler L V et al. *Sov. Phys. JETP* 51 373 (1980)]
58. Жерноклетов М В, Зубарев В Н, Сутулов Ю Н *Журн. прикл. мех. тех. физ.* (1) 119 (1984) [Zhernokletov M V, Zubarev V N, Sutulov Yu N *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 25 107 (1984)]
59. Глушак Б Л и др. *ЖЭТФ* 96 1301 (1989) [Glushak B L et al. *Sov. Phys. JETP* 69 739 (1989)]

60. Трунин Р Ф и др. *ЖЭТФ* **96** 1024 (1989) [Trunin R F et al. *Sov. Phys. JETP* **69** 580 (1989)]
61. Трунин Р Ф и др. *ЖЭТФ* **95** 631 (1989) [Trunin R F et al. *Sov. Phys. JETP* **68** 356 (1989)]
62. Трунин Р Ф, Симаков Г В *ЖЭТФ* **103** 2180 (1993) [Trunin R F, Simakov G V *JETP* **76** 1090 (1993)]
63. Грязнов В К и др. *ЖЭТФ* **114** 1242 (1998) [Gryaznov V K et al. *JETP* **87** 678 (1998)]
64. Бушман А В и др. *Письма в ЖЭТФ* **58** 640 (1993) [Bushman et al. *JETP Lett.* **58** 620 (1993)]
65. Фунтиков А И *ТВТ* **36** 406 (1998) [Funtikov A I *High Temp.* **36** 384 (1998)]
66. Трунин Р Ф, Панов Н В *ТВТ* **38** 754 (2000) [Trunin R F, Panov N V *High Temp.* **38** 728 (2000)]
67. Гударенко Л Ф и др. *ТВТ* **38** 437 (2000) [Gudarenko L F et al. *High Temp.* **38** 413 (2000)]
68. Трунин Р Ф, Симаков Г В, Панов Н В *ТВТ* **39** 430 (2001) [Trunin R F, Simakov G V, Panov N V *High Temp.* **39** 401 (2001)]
69. Ломоносов И В *Laser Part. Beams* **25** 567 (2007)
70. Волков К В, Сибилев В А *Журн. прикл. мех. тех. физ.* (4) 125 (1981) [Volkov K V, Sibilev V A *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **22** 551 (1981)]
71. Трунин Р Ф и др. *ТВТ* **33** 222 (1995)
72. Альтшулер Л В и др. *ЖЭТФ* **73** 1866 (1977) [Al'tshuler L V et al. *Sov. Phys. JETP* **46** 980 (1977)]
73. Баканова А А и др. *Журн. прикл. мех. тех. физ.* (2) 76 (1983) [Bakanova A A et al. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **24** 204 (1983)]
74. Жерноклетов М В и др. *ТВТ* **33** 40 (1995)
75. Трунин Р Ф и др. *Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению конденсированных веществ* (Под ред. Р Ф Трунина) (Саров: РФЯЦ — ВНИИЭФ, 2001)
76. Knudson M D, Asay J R, Deeney C J. *Appl. Phys.* **97** 073514 (2005)
77. Квитов С В и др. *Письма в ЖЭТФ* **53** 338 (1991) [Kvitov S V et al. *JETP Lett.* **53** 353 (1991)]
78. Грязнов В К и др. *ЖЭТФ* **78** 573 (1980) [Gryaznov V K et al. *Sov. Phys. JETP* **51** 288 (1980)]
79. Грязнов В К, Иосилевский И Л, Фортвов В Е *Письма в ЖЭТФ* **22** 1376 (1982)
80. Грязнов В К, Фортвов В Е *ТВТ* **25** 1208 (1987)
81. Агеев В Г и др. *Письма в ЖЭТФ* **48** 608 (1988) [Ageev V G et al. *JETP Lett.* **48** 659 (1988)]
82. Жерноклетов М В *ТВТ* **36** 231 (1998) [Zhernokletov M V *High Temp.* **36** 214 (1998)]
83. Кулиш М И и др. *Письма в ЖЭТФ* **94** 105 (2011) [Kulish et al. *JETP Lett.* **94** 101 (2011)]
84. Ternovoi V Ya et al. *AIP Conf. Proc.* **505** 189 (2000)
85. Khishchenko K V et al. *High Temp. High Press.* **37** 291 (2008)
86. Бушман А В и др. *Докл. РАН* **329** 581 (1993) [Bushman A V et al. *Phys. Dokl.* **38** 165 (1993)]
87. Бушман А В и др. *ЖЭТФ* **109** 1662 (1996) [Bushman A V et al. *JETP* **82** 895 (1996)]
88. Хищенко К В, Жерноклетов М В, Ломоносов И В, Сутулов Ю Н *ЖТФ* **75** (2) 57 (2005) [Khishchenko K V, Zhernokletov M V, Lomonosov I V, Sutulov Yu N *Tech. Phys.* **50** 197 (2005)]
89. Hoffmann D H H et al. *Phys. Plasmas* **9** 3651 (2002)
90. Фортвов В Е, Шарков Б Ю, Штокер Х УФН **182** 621 (2012) [Fortov V E, Sharkov B Yu, Stöcker H *Phys. Usp.* **55** 582 (2012)]
91. Фортвов В Е *Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы* (М.: Физматлит, 2012)
92. Kerley G I *Int. J. Impact Eng.* **5** 441 (1987)
93. More R M et al. *Phys. Fluids* **31** 3059 (1988)
94. Young D A, Corey E M J. *Appl. Phys.* **78** 3748 (1995)
95. Bushman A V, Kanel G I, Ni A L, Fortov V E *Thermophysics and Dynamics of Intense Pulse Loadings* (London: Taylor & Francis, 1993)
96. Бушман А В, Ломоносов И В, Фортвов В Е *Уравнения состояния металлов при высоких плотностях энергии* (Черноголовка: ИХФЧ РАН, 1992)
97. Fortov V E, Lomonosov I V *Pure Appl. Chem.* **69** 893 (1997)
98. Валько В В и др., в кн. *Физика ядерного взрыва Т. 2 Действие взрыва* (М.: Физматлит, 2010) с. 140
99. Fortov V E, Lomonosov I V *Open Plasma Phys. J.* **3** 122 (2010)
100. Калиткин Н Н, Кузьмина Л В, Препринт № 35 (М.: ИПМ АН СССР, 1975)
101. Кормер С Б, Урлин В Д, Попова Л Т *ФТТ* **3** 2131 (1961) [Kormer S B, Urlin V D, Popova L T *Sov. Phys. Solid State* **3** 1547 (1962)]
102. Gathers G R, Shaner J W, Hodson W M *High Temp. High Press.* **11** 529 (1979)
103. Guillermet F A *Int. J. Thermophys.* **6** 367 (1985)
104. Hixson R S et al. *Phys. Rev. Lett.* **62** 637 (1989)
105. Duffy T S, Ahrens T J J. *Appl. Phys.* **76** 835 (1994)
106. Жерноклетов М В, Медведев А Б, Симаков Г В *Хим. физика* **14** (2–3) 49 (1995)
107. Shaner J W, Gathers R G, Minichino C *High Temp. High Press.* **9** 331 (1977)
108. Seydel U, Kitzel W J. *Phys. F Met. Phys.* **9** L153 (1979)
109. Gathers G R *Int. J. Thermophys.* **4** 209 (1983)
110. Pottlacher G, Kaschnitz E, Jager H J. *Phys. Condens. Matter* **3** 5783 (1991)
111. Hixson R S, Winkler M A *Int. J. Thermophys.* **13** 477 (1992)
112. Young D, Report UCRL-52352 (Livermore: Lawrence Livermore Lab., 1977)
113. Seydel U, Fucke W J. *Phys. F Met. Phys.* **8** L157 (1978)
114. Кикоин И К (Ред.) *Таблицы физических величин* Справочник (М.: Атомиздат, 1976)
115. Зельдович Я Б *Химическая физика и гидродинамика: Избранные труды* (Под ред. Ю Б Харитона) (М.: Наука, 1984) [Zeldovich Ya B *Chemical Physics and Hydrodynamics: Selected Works of Yakov Borisovich Zeldovich* (Eds J P Ostriker, G I Barenblatt, R A Sunyaev) (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1993)]
116. Зельдович Я Б *Частицы, ядра, Вселенная: Избранные труды* (Под ред. Ю Б Харитона) (М.: Наука, 1985) [Zeldovich Ya B *Particles, Nuclei, and the Universe: Selected Works of Yakov Borisovich Zeldovich* (Eds J P Ostriker, G I Barenblatt, R A Sunyaev) (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1993)]

Ya.B. Zeldovich and equation of state problems for matter under extreme conditions

V.E. Fortov

Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 14, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: fortov@ras.ru

I.V. Lomonosov

Institute of Problems of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Akademika Semenova 1, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
E-mail: ivl143@icp.ac.ru
Tomsk State University, prosp. Lenina 36, 634050 Tomsk, Russian Federation

In the amazing range of Yakov Borisovich Zeldovich's research interests — from general of chemical physics, kinetics, combustion, and detonation to shock waves to elementary particles and cosmology — the physics of matter under extreme conditions occupies a special position. This paper reviews some of Ya. B.'s work on shock waves and equations of state of matter. Among Ya.B.'s basic ideas are the use of shock data to develop thermodynamically complete equations of state; shock compression of porous matter; and the adiabatic expansion of shock-compressed materials. The widespread use and development of these ideas as tools for extreme conditions studies are illustrated with examples.

PACS numbers: **01.60. + q**, **62.50. – p**, **64.10. + h**, **64.30. – t**, **65.40. – b**

Bibliography — 116 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 231–245 (2014)

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403b.0231

Received 22 November 2013, revised 23 December 2013

Physica – Uspekhi **57** (3) (2014)



Российская Академия Наук

ПРЕЗИДИУМ

ПОСТАНОВЛЕНИЕ

11 февраля 2014 г.

Москва

№ 20

О проведении юбилейных мероприятий, посвящённых 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича

В связи с исполняющимся в марте 2014 г. 100-летием со дня рождения великого русского физика-теоретика, лауреата Ленинской премии и четырёх Государственных премий СССР, трижды Героя Социалистического Труда, академика Якова Борисовича Зельдовича Президиум Российской академии наук ПОСТАНОВЛЯЕТ:

1. Утвердить состав организационного комитета по подготовке и проведению юбилейных мероприятий, посвящённых 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича (приложение 1).

2. Утвердить перечень юбилейных мероприятий, посвящённых 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича (приложение 2).

3. Поручить Отделению физических наук РАН, Отделению химии и наук о материалах РАН, Отделению математических наук РАН и Отделению энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН организацию и проведение юбилейных мероприятий, посвящённых 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича.

4. Возложить на Отделение физических наук РАН подготовку и проведение в г. Москве Международной конференции "Космология и релятивистская астрофизика", посвящённой 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича.

5. Возложить на Отделение химии и наук о материалах РАН подготовку и проведение в г. Москве в октябре – ноябре 2014 г. Третьей международной конференции по горению и детонации "Мемориал Я.Б. Зельдовича", посвящённой 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича.

6. Возложить на Отделение химии и наук о материалах РАН и Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН подготовку и проведение в п. Эльбрус Кабардино-Балкарской Республики в марте 2014 г. 29-й Международной конференции "Уравнения состояния вещества", посвящённой 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича.

7. Учредить золотую медаль имени Я.Б. Зельдовича, присуждаемую Российской академией наук за выдающиеся работы в области физики и астрофизики.

8. Установить 2015 год первым годом присуждения золотой медали имени Я.Б. Зельдовича.

Определить датой присуждения золотой медали имени Я.Б. Зельдовича — 8 марта (дата рождения Я.Б. Зельдовича).

9. Поручить Отделению физических наук РАН в двухмесячный срок подготовить необходимые материалы по золотой медали имени Я.Б. Зельдовича для утверждения в установленном порядке.

10. Отделению математических наук РАН оказать помощь Федеральному государственному бюджетному учреждению науки Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша

Российской академии наук в организации установки на здании Института, расположенного по адресу: г. Москва, Миусская пл., д. 4, мемориальной доски в память об академике Я.Б. Зельдовиче.

11. Отделению физических наук РАН:

11.1. оказать помощь Федеральному государственному бюджетному учреждению науки Институту космических исследований Российской академии наук в организации установки на здании Института, расположенного по адресу: г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32, мемориальной доски в память об академике Я.Б. Зельдовиче;

11.2. провести в г. Москве 26 марта 2014 г. сессию, посвящённую 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича, на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

12. Отделению химии и наук о материалах РАН оказать помощь Федеральному государственному бюджетному учреждению науки Институту химической физики им. Н.Н. Семёнова Российской академии наук в организации установки на здании Института, расположенного по адресу: г. Москва, ул. Косыгина, д. 4, мемориальной доски в память об академике Я.Б. Зельдовиче.

13. Научно-издательскому совету РАН организовать переиздание сборника избранных трудов академика Я.Б. Зельдовича (два тома) и книги воспоминаний о Я.Б. Зельдовиче.

14. Пресс-службе РАН Научно-организационного управления РАН организовать освещение юбилейных мероприятий, посвящённых 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича в средствах массовой информации.

15. В соответствии с просьбой Бюро Отделения физических наук РАН обратиться к мэру Москвы о присвоении имени академика Я.Б. Зельдовича одной из улиц г. Москвы (предпочтительно в районе Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова).

16. Внести соответствующее изменение в приложение к Положению о золотых медалях и премиях имени выдающихся учёных, присуждаемых Российской академией наук (утверждено постановлением Президиума РАН от 8 июня 1993 г. 119).

17. Контроль за выполнением настоящего постановления возложить на вице-президента РАН академика Зелёного Л.М.

Президент Российской академии наук
академик *В.Е. Фортков*

Главный учёный секретарь
Президиума Российской академии наук
академик *И.А. Соколов*

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

От горения и детонации к окислам азота

М.Ф. Иванов, А.Д. Киверин, Б.А. Клумов, В.Е. Фортов

Прослеживается развитие идей Я.Б. Зельдовича в современных исследованиях физики горения и детонации газовых смесей. Показана фундаментальная роль сформулированной Я.Б. Зельдовичем концепции спонтанной волны горения в задачах исследования нестационарных процессов инициирования различных режимов горения и определения энергетических и концентрационных пределов воспламенения горючих газообразных смесей. Показано, как вывод Я.Б. Зельдовича о ведущем влиянии растяжения фронта горения на ускорение пламени в каналах позволил по-новому объяснить переход от дозвукового горения к детонации в высокоактивных газовых смесях. Большинство представленных результатов получено методами математического моделирования, что дало возможность распространить теоретические представления Я.Б. Зельдовича на процессы горения в реальных газовых смесях, характеризующихся чрезвычайно сложным описанием происходящих в них химических реакций и газодинамических течений. В заключение на примере молниевых разрядов рассмотрен модифицированный механизм Зельдовича, с помощью которого оценивается количество окиси азота, образовавшейся при разряде молнии.

PACS numbers: 52.80.Mg, 82.33.Vx, 88.20.jj

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403c.0247

Содержание

1. Введение (247).
 2. Нестационарные процессы горения газовых смесей (247).
 - 2.1. Процессы воспламенения и установление различных режимов горения.
 - 2.2. Иницирование волн горения локализованными тепловыми источниками энергии.
 - 2.3. Воспламенение вблизи концентрационных пределов.
 3. Ускорение пламени и формирование детонации в каналах (255).
 4. Образование окислов азота в нагретом воздухе (258).
 5. Заключение (263).
- Список литературы (263).

1. Введение

Из большого количества научных трудов Якова Борисовича Зельдовича, ставших классическими в самых разных областях физики — от газовой динамики до космологии, выделяется цикл работ, посвящённых горению и детонации. Яков Борисович на протяжении своей столь яркой и поразительно продуктивной творческой жизни живо интересовался судьбой науки о горении и детонации, шутливо называя её вечно зелёной темой. Обращаясь к этой тематике на протяжении почти 40 лет начиная с 1930-х годов, Я.Б. Зельдович фактически создал фундамент современной науки о горении газовых и конденса-

рованных сред, причём результаты, полученные в его работах начиная с самых ранних, сразу же становились классическими и не требовали пересмотра. Сложные нелинейные взаимосвязи, определяющие экзотермические процессы как в дозвуковом дефлаграционном, так и в сверхзвуковом детонационном режимах горения, нашли у Я.Б. Зельдовича предельно ясное и наглядное описание. На качественном уровне это позволило ответить на принципиальные вопросы, на протяжении многих лет возникавшие в прикладных задачах. Количественный и более детальный теоретический анализ проблемы стал возможен только с появлением высокопроизводительной вычислительной техники.

Попытаемся в настоящем обзоре проследить, какую роль играют результаты и концепции, сформулированные Я.Б. Зельдовичем, на современном этапе исследований в решении ряда задач горения и детонации газообразных горючих смесей.

2. Нестационарные процессы горения газовых смесей

Имеющее более чем столетнюю историю активное исследование процессов горения газовых смесей объясняется определяющей ролью этих процессов в задачах повышения эффективности работы широкого класса энергетических устройств и задачах снижения рисков и степени ущерба от тяжёлых промышленных аварий. К настоящему времени сформировались достаточно устойчивые теоретические представления о процессах, определяющих стационарные режимы горения и детонации. Однако в реальной ситуации ограниченных объёмов (будь то камера сгорания двигателя, хранилище газообразного горючего, угольная шахта или реакторный

М.Ф. Иванов, А.Д. Киверин, Б.А. Клумов, В.Е. Фортов.
Объединённый институт высоких температур РАН,
ул. Ижорская 13, 125412 Москва, Российская Федерация
E-mail: ivanov_mf@mail.ru, alexeykiverin@gmail.com,
klumov@mpe.mpg.de, fortov@ras.ru

Статья поступила 13 декабря 2013 г.,
после доработки 14 января 2014 г.

зал атомной электростанции (АЭС) и т.п.) распространение волн горения представляет собой последовательность нестационарных, в том числе переходных, режимов, обусловленных большим разнообразием нелинейно взаимодействующих между собой физико-химических факторов. Ниже мы рассмотрим развитие горения газобразных смесей на протяжении всего процесса — от воспламенения до перехода от медленного горения к детонации. Наш анализ будет основываться главным образом на результатах математического моделирования горения водородно-кислородных и водородно-воздушных смесей.

В современной теории стационарных режимов горения основополагающими являются работы Я.Б. Зельдовича по теории распространения стационарных волн горения [1–5] и детонации [6]. Для объяснения физики нестационарных процессов воспламенения, горения и детонации важными являются решённые Я.Б. Зельдовичем задачи об условиях распространения экзотермической реакции по смеси в виде волны и о режимах горения в неравномерно нагретом газе [7].

2.1. Процессы воспламенения и установление различных режимов горения

Отталкиваясь от результатов работы А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова [8] о предельных решениях уравнения диффузии с источником членом, Я.Б. Зельдович ввёл понятие скорости распространения волны горения как промежуточной асимптотики, верной в течение ограниченного промежутка времени в ограниченной области пространства с ограниченной точностью. Выбранный подход позволил ему сформулировать концепцию спонтанной волны горения [7], заключающуюся в том, что в средах с неоднородным распределением скорости реакции порождающая волну горения реакция начинается неодновременно и независимо в каждой из точек пространства. Начало экзотермической реакции соответствует точке с минимальным временем индукции τ_{ind} (временем начала стадии интенсивной экзотермической реакции, обусловленной рекомбинацией накопленных на стадии индукции радикалов). Таким образом, воспламенение в каждой точке пространства происходит с некоторой задержкой по отношению к соседней точке, в которой скорость реакции выше. В случае, когда характеристики среды таковы, что имеет место отрицательный градиент скорости реакции (например, вследствие падения температуры или отклонения концентрации горючей компоненты от стехиометрического значения), скорость распространения спонтанной волны реакции выражается как

$$U_{\text{sp}} = \left| \frac{d\tau_{\text{ind}}}{dx} \right|^{-1}. \quad (1)$$

Для заданной химически активной смеси скорость спонтанной волны реакции не зависит от теплопроводности, диффузии или скорости звука и определяется только величиной начальной неоднородности температуры. Рассматривая движение спонтанной волны по градиенту температуры, можно получить энергетические критерии воспламенения, задавая градиент концентрации; аналогичным образом выводятся концентрационные критерии. В случае ненулевого градиента температуры [7] скорость спонтанной волны определяется исключи-

тельно его величиной и особенностями протекания экзотермической реакции в зависимости от температуры ($d\tau_{\text{ind}}/dx = (\partial\tau_{\text{ind}}/\partial T) \partial T/\partial x$).

Естественно выделить два крайних случая: с $\partial T/\partial x = 0$ и $\partial T/\partial x \rightarrow \infty$. Нулевой градиент температуры соответствует случаю объёмного взрыва, при котором реакция во всех точках пространства инициируется синхронно, малое отклонение градиента от нуля даёт существенно сверхзвуковую волну экзотермической реакции, создающую за своим фронтом волну давления. Образующаяся в результате волновая структура асимптотически формируется в детонационную волну [9]. Бесконечный градиент соответствует инициированию волны горения точечным источником в смеси, не реагирующей при начальной температуре. В последнем случае спонтанной волны не возникает, а формируется волна нормального горения, распространяющаяся благодаря теплопроводности и диффузии, и задача сводится к задаче о тепловом распространении пламени [1–5].

Таким образом, скорости волн горения, инициируемых пространственной неоднородностью температуры, ограничены снизу скоростью нормального горения, а сверху, соответственно — скоростью детонации Чепмена–Жуге. Вопрос об инициировании других возможных режимов горения, от медленного до детонационного, в зависимости от начальных неоднородных условий в горючей смеси впервые был поставлен в работе [7].

Для модели одноступенчатой экзотермической реакции Я.Б. Зельдович предложил следующую классификацию режимов горения в зависимости от начальных условий, определяющих соотношения между скоростью спонтанной волны горения U_{sp} и характерными скоростями задачи: нормальной скоростью ламинарного пламени U_f , скоростью звука в невозмущённой среде a_f и скоростью детонации Чепмена–Жуге U_{CJ} .

I. При $U_{\text{sp}} > U_{\text{CJ}}$, т.е. при приближении к пределу нулевого градиента температуры, образуется так называемая недосжатая волна детонации с давлением за фронтом волны, меньшим p_{CJ} , но большим, чем давление при адиабатическом взрыве.

II. При $a_f \leq U_{\text{sp}} \leq U_{\text{CJ}}$ волна экзотермической реакции распространяется со сверхзвуковой скоростью, что определяет близость характерных химического и газодинамического временных масштабов ($t_{\text{chem}} = L/U_{\text{sp}}$ и $t_{\text{gas}} \sim L/a_f$). Волна давления, образующаяся в результате энергосвободного выделения в зоне реакции, может усиливаться синхронно с выделением энергии и после переходного периода может сформировать волну детонации Чепмена–Жуге. Этот режим, который впервые был продемонстрирован численно в [9], позднее неоднократно привлекал внимание исследователей в области прямого инициирования детонации.

III. При $U_f < U_{\text{sp}} \leq a_f$ волна реакции распространяется с дозвуковой скоростью, звуковые волны на характерных химических масштабах успевают выравнивать давление и влияние газодинамических эффектов оказывается несущественным. Давление в зоне реакции остаётся почти постоянным, но, поскольку скорость реакции имеет отличное от нуля конечное значение перед фронтом волны, реализуется режим "быстрого горения" со скоростью $U_{\text{sp}} > U_f$, являющийся, согласно [7], промежуточной асимптотикой.

IV. При $U_{\text{sp}} < U_f \leq a_f$, как отмечалось выше, спонтанной волны не возникает, распространение волны

реакции определяется исключительно процессами теплопроводности и диффузии и инициируется волна горения с нормальной скоростью U_f .

После появления работ Я.Б. Зельдовича [7, 9] задача об инициировании волн горения и детонации с применением концепции спонтанной волны горения неоднократно решалась аналитически и численно (см., например, [10–12]). В большинстве работ ставилась задача об определении условий формирования детонации с целью их применения для интерпретации механизмов прямого инициирования детонации, перехода от медленного горения к детонации или возникновения "стука" в камерах двигателей внутреннего сгорания (ДВС). В расчётах, как правило, использовались одноступенчатые модели экзотермической реакции, при этом отличие расчётных значений энергии воспламенения от измеренных в эксперименте достигало двух порядков. Большие ошибки при использовании одноступенчатых моделей экзотермических реакций вполне ожидаемы, так как столь упрощённые модели не отражают многих принципиальных особенностей механизмов реальных реакций. В работе [13] исследовалось инициирование детонации в смесях, горение которых описывается двухступенчатой реакцией, что позволило на качественном уровне обосновать необходимость учёта механизма воспламенения для воспроизведения особенностей формирования детонации в горючих смесях.

Далее мы более подробно остановимся на описании механизмов формирования различных режимов горения водорода и углеводородных горючих смесей, детальная химическая кинетика воспламенения которых не может быть корректно описана одноступенчатой реакцией Аррениуса. Решению задачи спонтанного горения при наличии градиента температуры с учётом детального механизма протекания реакции на примере водородно-воздушной и водородно-кислородной смесей посвящены работы [14, 15].

В этом разделе изложение далее будет основываться на результатах работы [15]. Рассмотрим воспламенение водородно-кислородной смеси, для которой химическая кинетика является относительно простой, наиболее надёжной и хорошо изученной. В отличие от химической кинетики углеводородных топлив, включающей в себя до нескольких тысяч реакций для нескольких сотен промежуточных компонентов, кинетика водорода обычно описывается двумя десятками реакций для восьми базовых реагентов: H_2 , O_2 , H_2O , H , O , OH , HO_2 , H_2O_2 (см., например, [16–19]).

При нормальных условиях реакция водорода с кислородом проходит в две глобальные стадии: 1) распад реагентов смеси с образованием и накоплением радикалов, протекающий практически без выделения энергии, и 2) следующая за распадом стадия экзотермических реакций рекомбинации радикалов и обрыва цепей. Экзотермическая реакция при заданных температуре и давлении начинается по истечении определённого периода — времени индукции τ_{ind} , которое изменяется вдоль градиента температуры, что и определяет формирование спонтанной волны горения. Зависимость времени индукции от температуры при фиксированном составе смеси и давлении имеет особенность, определяемую температурой T_1 , при которой время индукции становится порядка времени экзотермической реакции. Иногда эту характеристику называют "продлённый второй предел воспла-

менения". Для стехиометрической смеси водорода с кислородом или воздухом T_1 порядка 1100–1200 К. При $T > T_1$ времена индукции малы и их зависимость от температуры является довольно пологой, ввиду этого на участке градиента температуры с $T > T_1$ следует ожидать довольно высоких скоростей спонтанной волны горения (величина $\partial \tau_{ind} / \partial T$ мала), уменьшающихся по мере продвижения вдоль градиента температуры в область меньших температур и, как следствие, больших времён индукции. При переходе в низкотемпературную область ($T < T_1$) скорость спонтанной волны будет падать скачком. Таким образом, следует ожидать качественных различий в динамике процесса при задании в максимуме температуры на градиенте $T^* < T_1$ и $T^* > T_1$.

С учётом реальных механизмов химической кинетики для более детального теоретического анализа возникновения тех или иных режимов распространения волн горения необходимо привлекать методы математического моделирования. Будем рассматривать классическую одномерную постановку задачи об инициировании волны горения в горючей газовой смеси при заданном начальном линейном градиенте температуры [7, 9]. Начальные условия при $t = 0$ определяют градиент температуры в покоящейся горючей смеси при постоянном давлении:

$$T(x, 0) = T^* - \frac{(T^* - T_0)x}{L}, \quad 0 < x < L, \quad (2)$$

$$p(x, 0) = p_0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0. \quad (4)$$

Левая граница, $x = 0$, полагается твёрдой адиабатической стенкой, на которой начальная температура максимальна, $T(0, 0) = T^*$. Неоднородность (градиент) температуры характеризуется максимальной температурой T^* , фоновой температурой T_0 и линейным масштабом неоднородности L ("протяжённостью" градиента). Математическая модель включает в себя полную систему уравнений Навье–Стокса вязкой сжимаемой среды с учётом теплопроводности, многокомпонентной диффузии, реальных уравнений состояния и кинетики химической реакции окисления. Система уравнений решалась численно с помощью лагранжево-эйлерова метода. Корректность результатов обеспечивалась выбором достаточно мелкой пространственной сетки и контролировалась сравнением результатов тестовых расчётов с данными физических экспериментов.

Рассмотрим вначале случай $T^* > T_1$, наиболее приближенный к условиям воспламенения в природе и эксперименте ($T^* > 1200$ К). При достаточно пологих градиентах температуры (высоких, сверхзвуковых, скоростях U_{sp}) спонтанная волна горения генерирует за своим фронтом волну давления, которая по мере торможения спонтанной волны горения нагоняет её и при пересечении фронта спонтанной волны в области $T = T_1$ формирует ударную волну (рис. 1). При этом спонтанный механизм распространения волны горения сменяется газодинамическим в потоке за фронтом отходящей ударной волны. В зависимости от величины скорости спонтанной волны реакции, определяемой градиентом температуры, в точке её максимального торможения в области с $T \sim T_1$ могут реализоваться различные режимы распространения образующихся волн горения.

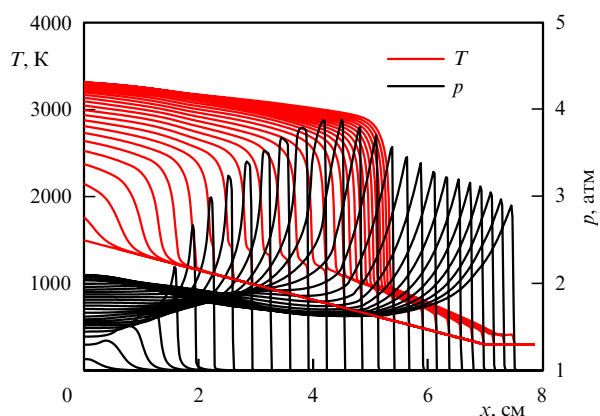


Рис. 1. (В цвете онлайн.) Спонтанная волна горения, распространяясь вдоль градиента температуры, генерирует за своим фронтом волну давления, которая по мере торможения спонтанной волны горения нагоняет её и при пересечении её фронта формирует ударную волну. При этом спонтанный механизм распространения волны горения сменяется газодинамическим в потоке за фронтом отходящей ударной волны. Эволюция профилей температуры (красные кривые) и давления (чёрные кривые) представлена для случая инициирования волны горения в водородно-кислородной смеси при $a_f < \min U_{sp} < a^*$ на температурном градиенте с $L = 7$ см, $T_0 = 300$ К, $T^* = 1500$ К. Профили приведены с временным шагом 2 мкс.

При этом выделяют следующие характерные масштабы скорости, определяющие критерии формирования того или иного режима горения: скорость звука a_{CJ} в точке Чепмена – Жуге стационарной детонации, скорость звука a_N в точке Неймана, скорость звука a_b в продуктах горения, скорости звука в невозмущённой среде в нижней ($a_f = a(T_0)$) и верхней ($a^* = a(T^*)$) точках градиента температуры и нормальная скорость горения U_f (скорость ламинарного пламени). Число рассматриваемых характерных масштабов здесь больше, чем в классификации режимов по Я.Б. Зельдовичу, основанной на одноступенчатой модели реакции, что позволяет теперь получить уточнённую для случая детального механизма реакции классификацию реализующихся режимов горения:

1. При $\min U_{sp} > a_{CJ}$ образующаяся волна горения при пересечении её ударной волной распространяется со скоростью, превышающей скорость звука в точке Чепмена – Жуге, что определяет условия для синхронизации этих двух волн и формирования детонационного комплекса согласно условиям стационарной детонации Чепмена – Жуге [6]. Таким образом, мы имеем режим прямого инициирования детонации.

2. При $a^* < \min U_{sp} < a_{CJ}$ формирующаяся волна горения ускоряется в потоке за отходящей ударной волной, что обуславливает переход горения в детонацию. При этом возможны два сценария:

а) при $a^* < \min U_{sp} < a_N$ волна реакции ускоряется в потоке за отходящей ударной волной начиная со скорости, близкой к локальной скорости звука a_b (при характерных температурах воспламенения $1200 < T < 1500$ К $a^* \leq a_b$). При достижении скоростью фронта реакции величины локальной скорости звука возмущения, генерируемые ускоряющимся в потоке пламенем, "запираются" в зоне реакции сверхзвуковым потоком впереди фронта, что приводит к сверхэкспоненциальному возрастанию давления в зоне реакции и формированию ударной волны, преодолевающей звуковой барьер и за-

пускающей детонацию в свежей смеси (этот механизм впервые был сформулирован при решении задачи об ускорении пламени в каналах [20], которая более подробно будет рассмотрена ниже). Отметим, что при температурах $T^* > 1500$ К скорость звука в верхней точке градиента становится больше скорости звука в продуктах горения, $a^* > a_b$, что приводит к необходимости замены в критерии $a^* < \min U_{sp} < a_N$, соответственно, нижней границы a^* скоростью звука в продуктах горения a_b ;

б) при $a_N < \min U_{sp} < a_{CJ}$ образуется состоящая из ударной волны и зоны реакции квазистационарная структура, которая при распространении вниз по градиенту температуры перестраивается в детонационную волну. Такой режим является естественным проявлением соотношения для скорости волны горения $U_w > a_N$, где a_N определяет положение фронта детонации, за которым начинается экзотермическая реакция.

3. При $a_f < \min U_{sp} < a^*$ (см. рис. 1) ускорения фронта пламени до локальной скорости звука и формирования пика давления в зоне реакции не происходит. Сформировавшаяся ударная волна уходит вперёд, сжимая и прогревая газ, по которому движется "быстрая" волна горения, являющаяся промежуточной асимптотикой.

4. При $U_f < \min U_{sp} < a_f$ волна давления обгоняет дозвуковую волну реакции и движется вперёд в виде волны сжатия без перехода в ударную волну на масштабе градиента температуры. В этом случае реакция распространяется при практически постоянном давлении в режиме "быстрой" волны горения, являющейся промежуточной асимптотикой со скоростью $U_w > U_f$.

5. При $\min U_{sp} < U_f$ скорость переноса тепла за счёт теплопроводности больше скорости спонтанной волны горения, формируется волна дефлаграции, распространяющаяся благодаря теплопроводности с нормальной скоростью $U_w = U_f$. Зажигание волны горения ограничено снизу минимальным размером области нагрева, при котором скорость отвода тепла становится больше скорости распространения реакции за счёт теплопроводности.

В более ранних работах [7, 9–12], выполненных в приближении одноступенчатой кинетики, тепловыделение происходит с самого начала в каждой точке области температурного градиента и, соответственно, газодинамика "запускается" сразу вдоль всего градиента. Волна давления в случае одноступенчатой модели зарождается не позади спонтанной волны, как в детальной химической модели, а сразу во всей области градиента, в том числе и впереди фронта спонтанной волны, следовательно, уже с самого начала газодинамика играет определяющую роль. В результате изменяется динамика режимов генерации ударных и детонационных волн (режимы 1–3 в соответствии с приведённой выше классификацией) и, как следствие, меняется протяжённость температурного градиента, необходимая для инициирования детонации. Одноступенчатая модель даёт меньшее значение этой величины по сравнению с протяжённостью температурного градиента, вычисленной по модели с детальной химической кинетикой [14, 15].

Перейдём теперь к рассмотрению случая с температурой в вершине градиента $T^* \lesssim T_1$. Как показывают результаты численного решения [15], при низких температурах в области воспламенения для инициирования режимов с формированием ударных и детонационных

волн требуется значительно более пологий и протяжённый температурный градиент. При этом само формирование режимов отличается от такового в случае градиента с высокой температурой T^* . При низкой температуре в верхней точке градиента длительность стадии индукции может быть на несколько порядков больше, чем при более высокой температуре. Однако более важным качественным отличием является то, что при понижении температуры и переходе через "продлённый второй предел воспламенения" стадия индукции становится более длительной по сравнению со стадией рекомбинации радикалов с выделением тепла. До формирования устойчивого фронта экзотермической реакции уже на стадии индукции имеет место выделение небольшой энергии вдоль всей области градиента, что формирует волну давления с максимумом в начальной точке этой области $x = 0$. Таким образом, непосредственно после начала распространения волны экзотермической реакции вдоль области градиента температуры волна давления обгоняет её (при низких температурах $U_{sp} < a^*$), формируя ударную волну впереди фронта реакции. При этом интенсивность ударной волны определяется скоростью реакции в точке $x = 0$. Описанный режим формирования горения аналогичен реализуемому в случае одноступенчатой экзотермической реакции режиму, в котором определяющую роль играет газодинамика, а не механизм Я.Б. Зельдовича.

При воспламенении газовой смеси локализованными источниками энергии немаловажным фактором является изменение характера теплового взрыва с повышением давления в области подвода энергии. При низких давлениях высокотемпературный диапазон определяет условия инициирования так называемого невырожденного теплового взрыва, при котором время индукции значительно меньше времени воспламенения, включающего в себя время индукции и время экзотермической реакции. При переходе к температурам ниже "продлённого второго предела" время индукции становится меньше времени протекания экзотермических реакций и условия воспламенения соответствуют вырожденному тепловому взрыву, более близкому, как было показано выше, по механизму реализации к одноступенчатому взрыву, при котором время индукции не выделяется на фоне всего процесса воспламенения. При повышении давления преобладают тройные столкновения, определяющие в первую очередь экзотермические реакции рекомбинации радикалов. С возрастанием давления времена индукции и воспламенения уменьшаются несогласованно и "продлённый второй предел" смещается в область более высоких температур. Тепловой взрыв переходит в вырожденный.

Таким образом, качественная картина развития процесса воспламенения в случае низких давлений аналогична наблюдаемой при нормальном давлении и высокой температуре T^* . При этом протяжённость температурного градиента, требующаяся для реализации режимов с ударными и детонационными волнами, сильно возрастает, а "скоростные" пределы, разделяющие области разных режимов, определяются скоростями звука a_0 , a^* и a_{CJ} .

Напротив, в случае высоких давлений картина развития процесса воспламенения становится похожей на реализующуюся в одноступенчатой модели или при низких значениях T^* , что приводит к уменьшению вре-

делов существования промежуточных режимов 2 и 3. При этом, поскольку для высоких давлений времена индукции значительно меньше, существенно уменьшаются и протяжённости областей градиента температуры, необходимые для реализации того или иного режима, в частности для прямого инициирования детонации. Так, при достаточно больших давлениях, ≥ 50 атм, становится возможным прямое инициирование детонации температурным градиентом в горячих точках размером 3–5 мм, что в работе [21] рассматривается как возможный механизм явления стука в ДВС.

2.2. Иницирование волн горения

локализованными тепловыми источниками энергии

В разделе 2.1 на основе представления о спонтанной волне горения показано, как формируются различные режимы горения на неравномерном температурном фоне. В то же время само инициирование того или иного режима горения зависит от пространственно-временных характеристик источника энерговыделения. Анализ этой зависимости позволяет провести корректную оценку величины подводимой энергии и масштабов её локализации в пространстве и далее использовать концепцию Я.Б. Зельдовича применительно к описанию воспламенения от нестационарных источников энергии.

Временной ход подводимой энергии и её локализация в пространстве определяются физической природой источника (электрическая искра, лазерная искра, нагретая поверхность, ударная волна и т.д.). При этом по характеру воздействия на среду всё многообразие источников можно разделить на три класса: 1) короткие энергоёмкие импульсы; 2) короткие импульсы с малой энергией; 3) длительные импульсы. Если из всего разнообразия физико-химических процессов, имеющих место при интенсивных энерговыделениях, выделить наиболее значимые для расширения зоны горения на начальной стадии, то процесс инициирования горения можно свести только к приращению внутренней энергии (температуры) горючей смеси по заданному временному закону в заданной малой области пространства. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением только источников тепловой энергии, как было принято в работах [22, 23]. В этом случае можно выделить четыре основных временных масштаба задачи, соотношением между которыми будет определяться формирование того или иного режима при заданных параметрах энергоподвода: 1) время подвода энергии Δt_Q ; 2) время задержки воспламенения t_{ign} , характеризующее длительность стадии индукции (τ_{ind}) с учётом темпа энерговыделения; 3) характерное акустическое время $t_a = L/a_f$, определяемое отношением размера области подвода энергии к локальной скорости звука; 4) характерное время распространения тепловой волны $\tau_T \sim L^2/\chi$, зависящее от температуропроводности χ .

Стоит отметить, что в зависимости от темпа энерговыделения воспламенение может возникнуть как после вложения всей энергии ($t_{ign} \geq \Delta t_Q$), так и в процессе энерговыделения ($t_{ign} \leq \Delta t_Q$). В последнем случае вложение энергии после воспламенения производится в горячих продуктах, что практически не сказывается на развитии сформированного в результате воспламенения режима горения. Таким образом, наиболее интересным является рассмотрение режимов энерговыделения с $\Delta t_Q \leq t_{ign}$. При высоком темпе энерговыделения ($\Delta t_Q \leq t_a$) и большой величине вкладываемой энергии

воспламенение будет определяться условиями теплового взрыва при полученных в результате энерговложения температуре и давлении. В случае малых темпов энерговложения ($\Delta t_Q \gg t_a$) давление будет успевать выравниваться и процесс воспламенения будет протекать в условиях постоянного давления. При умеренных темпах энерговложения и вкладываемых энергиях режим воспламенения будет определяться соотношениями между всеми указанными временными масштабами.

Быстрое вложение энергии за времена, много меньшие характерного акустического времени ($\Delta t_Q \leq t_{\text{ign}} \ll t_a$), даёт равномерное возрастание температуры и давления в области энерговложения, что приводит к реализации воспламенения по механизму объёмного взрыва внутри "горячего пятна". Температуры и давления в этом случае полностью определяются величиной вложенной энергии. После вложения энергии и следующей за этим фазы индукции происходит инициирование волны горения или детонации. В случае энерговложения, по времени приближающегося к акустическому ($\Delta t_Q \leq t_{\text{ign}} < t_a$), на границе горячего пятна и невозмущённой среды происходит распад разрыва, в результате образуется волна сжатия, распространяющаяся в невозмущённую среду, и волна разрежения, уносящая энергию из объёма горячего пятна. Такой сценарий, схожий со сценарием развития сильного взрыва, в случае формирования достаточно сильной ударной волны на границе горячего пятна может инициировать детонацию непосредственно за её фронтом. При меньшей интенсивности ударной волны возникает более интересный сценарий, представленный на рис. 2. Временная эволюция профилей температуры и давления в области горячего пятна ($L = 1$ см, $t_a \sim 20$ мкс) во время энерговложения показана на рис. 2а. Волна разрежения формирует пологие градиенты температуры и давления на масштабе порядка размера горячего пятна. При атмосферном давлении, $p_0 = 1$ атм, температурный градиент с полученным перепадом температуры и характерным размером $L = 1$ см не может привести к детонации [15], однако, ввиду того что давление нагретой смеси повышается до ~ 4 атм, такой градиент обуславливает формирование детонации согласно механизму Зельдовича, как видно из рис. 2б.

В случае ультракоротких импульсов энерговложения ($t_{\text{ign}} \ll t_a$) ударная волна совместно с возникающей за её фронтом зоной реакции образуют детонационный комплекс, если скорость ударной волны на момент её выхода из области подвода энергии сравнима со скоростью звука в точке Чепмена–Жуге стационарной детонации или превышает её ($U_{\text{sw}} \geq a_{\text{CJ}}$). В случае более длительных ($t_{\text{ign}} < t_a$) и менее мощных импульсов в зоне поджига на сформированном достаточно пологом нисходящем градиенте, согласно механизму Я.Б. Зельдовича, образуется сверхзвуковая спонтанная волна горения, при этом формирование детонации проходит по тому же, представленному на рис. 2б, сценарию. В случае достаточно пологого градиента скорость спонтанной волны в точке её максимального торможения превышает скорость звука в точке Чепмена–Жуге, $\min U_{\text{sp}} > a_{\text{CJ}}$, что определяет скорости образующихся в этой точке ударной волны и волны горения, переходящей в детонацию. В окрестности детонационного предела экспериментально можно наблюдать формирование детонации, распространяющейся в "пересжатом" режиме, определяемом повышенными значениями парамет-

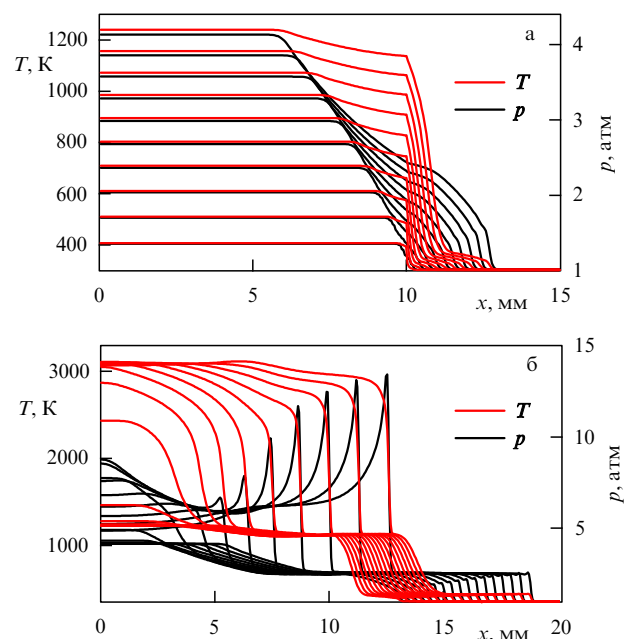


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Иницирование детонации коротким энергоёмким импульсом происходит в две стадии: (а) на границе горячего пятна и невозмущённой среды происходит распад разрыва, формирующий волну сжатия, распространяющуюся в невозмущённую среду, и волну разрежения, при этом волна разрежения формирует пологий градиент температуры и давления на масштабе порядка размера горячего пятна; (б) детонация формируется на образовавшемся градиенте по механизму Я.Б. Зельдовича. Профили температуры (красные кривые) и давления (чёрные кривые) при инициировании волны детонации в водородно-кислородной смеси локализованным источником энергии, $L = 1$ см, $\Delta t_Q = 5$ мкс, приведены с шагом по времени 0,5 мкс.

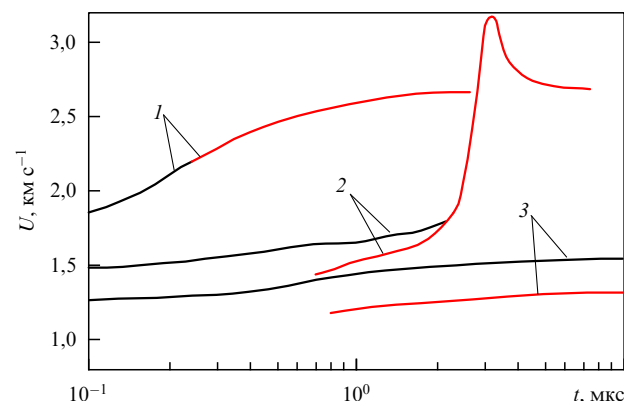


Рис. 3. (В цвете онлайн.) В случае ультракоротких импульсов энергии инициирование того или иного режима горения определяется интенсивностью образующейся в области энергоподвода ударной волны: при $U_{\text{sw}} \geq a_{\text{CJ}}$ формируется детонация (1); при меньшей интенсивности ударной волны в потоке за её фронтом распространяется волна горения, переходящая в детонацию (2) или распространяющаяся в быстром дефлаграционном режиме (3). Хронограммы скоростей волн реакции (красные линии) и давления (чёрные линии) показаны для случая воспламенения субмикросекундным ($\Delta t_Q = 0,1$ мкс) импульсом энергии, локализованным в области с $L = 1$ мм.

ров ($U_D > U_{\text{CJ}}$, $p_{\text{CJ}} > p_{\text{CJ},0}$, $a_{\text{CJ}} > a_{\text{CJ},0}$) [26]. На рисунке 3 приведены хронограммы скоростей ударной волны (УВ) и волны реакции (ВР) для трёх случаев: прямого инициирования стационарной детонации (1), формиро-

вания пересжатой детонации (2) и формирования медленного горения (3).

В случае вложения при тех же условиях меньшей энергии время воспламенения может оказаться больше акустического времени ($\Delta t_Q < t_a < t_{ign}$) и волна разгрузки будет формировать градиент после энергирования на стадии индукции. В течение более длительной стадии индукции акустические возмущения выравнивают давление в области энергирования, и воспламенение происходит на стационарном температурном градиенте при постоянном давлении. При длительностях энергирования, несколько превышающих характерное акустическое время ($t_a < \Delta t_Q < t_{ign}$), волна разгрузки успевает дойти до эпицентра горячего пятна и отразиться от него. В результате формируется неравномерное распределение температуры с двумя противоположенными градиентами: пологим градиентом, направленным внутрь горячего пятна, и противоположно ему направленным крутым градиентом. При этом крутой градиент, направленный в невозмущенную область, способен вызвать только волну горения, тогда как пологий градиент, направленный в центр горячего пятна, способен инициировать детонацию.

Рассмотренные выше режимы инициирования горения короткими высокомоментными импульсами энергирования существенно отличаются от режимов инициирования горения длительными импульсами ($t_a \ll \Delta t_Q < t_{ign}$) энергирования низкой мощности. За время энергирования акустические возмущения успевают выровнять давление в области энергирования, тогда не возникает сильных ударных волн, а инициируемый режим горения определяется только степенью пологости температурного градиента, формирующегося вследствие газодинамического расширения горячего пятна и распространения тепловой волны. Протяженность области температурного градиента оказывается больше масштаба области распространения тепловой волны, что во многом объясняется расширением горячего пятна вследствие уменьшения плотности во время энергирования. Согласно [15], полученный градиент является недостаточно пологим для инициирования детонации по механизму Я.Б. Зельдовича. Процессы распространения тепла в среде и расширения нагретого газа оказываются слишком медленными для образования градиента температуры, достаточного для инициирования детонации, на масштабах времени энергирования. Задолго до того как тепловая волна распространится на достаточно большое расстояние, температура в эпицентре горячего пятна достигает значения, необходимого для воспламенения, что приводит к образованию волны горения на сформированном к этому моменту температурном градиенте. Заметим, что согласно критериям, полученным в работе [15], для инициирования детонации при повышенном давлении требуется значительно более крутой (менее протяженный) температурный градиент, чем при атмосферном (или меньшем) давлении. Таким образом, с повышением давления при инициировании горения длительными маломощными импульсами энергирования становится возможным формирование детонации.

Хотя представленные результаты носят главным образом качественный характер, они могут быть использованы для оценки энергии, необходимой для инициирования того или иного режима горения. При этом размерный фактор играет тем меньшую роль, чем

меньше время энергирования по сравнению с характерным акустическим временем ($\Delta t_Q < t_a$). В этом случае роль волны разгрузки в формировании режима горения становится менее значительной, как показано в работе [23], результаты которой хорошо согласуются с экспериментально установленным нижним пределом инициирования детонации в водороде.

Проведенный краткий анализ нестационарных процессов воспламенения показывает, что в зависимости от параметров энергирования (величины вкладываемой энергии, времени и размера области энергирования) существуют два основных механизма инициирования волн реакции: градиентный механизм Я.Б. Зельдовича и объемный тепловой взрыв, представляющий собой одну из асимптотик этого механизма для градиента с нулевой крутизной. Таким образом, механизм Я.Б. Зельдовича является наиболее общим для описания физической картины воспламенения горючих газов.

2.3. Воспламенение вблизи концентрационных пределов

Еще одним важным приложением теории Я.Б. Зельдовича формирования и распространения волн экзотермической реакции в средах с неоднородным распределением времени реакции является нахождение концентрационных пределов воспламенения и устойчивого горения. Эта проблема стала особенно актуальной в связи с разрушительными взрывами водорода при тяжелых авариях на АЭС.

Рассмотрим наиболее принципиальный при решении задач взрывобезопасности критерий — нижний концентрационный предел воспламенения. Закономерности горения бедной водородно-воздушной смеси были установлены в основном экспериментально, причем значение нижнего концентрационного предела воспламенения было получено еще в 1952 г. в работе [24], согласно которой этот предел при нормальных условиях (температура свежей смеси $T_0 = 300$ К, давление $p_0 = 0,1$ МПа) составляет $[H_2]_{min} = 4,1\%$ объема (молярной доли) водорода. В настоящее время указанное значение нижнего концентрационного предела является общепринятым и приводится в фундаментальных монографиях и обзорах (см., например, [25]). Фактически оно является результатом общей договоренности, в то время как в реальных физических экспериментах этот нижний предел непосредственно зависит от условий проведения измерений и отличается от принятых 4 %.

В большинстве экспериментальных работ для интерпретации результатов, как правило, дополнительно проводились расчеты адиабатического равновесного давления при постоянном объеме. Совпадение измеренных и расчетных значений давления позволяло определить концентрационный предел, при котором горение захватывало весь объем камеры. Такой режим наблюдался при объемной концентрации водорода 10 % и выше. При меньшем содержании водорода в смеси рассчитанные и измеренные значения давления значительно расходились, что неудивительно, так как при содержании водорода, меньшем 10%-ного, процесс, как показали эксперименты, не являлся равновесным. Для получения более детальной картины воспламенения водородно-воздушных смесей были проведены расчеты горения бедных смесей на основе полной системы уравнений газовой динамики горения.

Главными факторами, определяющими порог воспламенения, являются характерные временные масштабы индукционной и экзотермической стадий воспламенения горючей смеси. В то же время поджиг смеси требует дополнительного стороннего энергозвложения. Относительный вклад этого энергозвложения в энергетические характеристики и динамику среды для бедных смесей может быть достаточно велик, что способно изменить значение порога воспламенения.

Для исключения сторонних влияний задачу о воспламенении водородно-воздушной смеси рассмотрим в постановке, аналогичной постановке классической задачи Я.Б. Зельдовича о развитии спонтанной волны воспламенения на градиенте концентрации водорода (в нашем случае на градиенте концентрации водорода). Заметим, что рассматриваемый подход может быть применён и к любым другим горючим газовым смесям, концентрационные пределы воспламенения которых часто значительно менее изучены, чем в случае смесей с водородом. В зависимости от объёмной доли горючего компонента в смеси, инициирование горения, т.е. накопление необходимого количества радикалов с их дальнейшей рекомбинацией и выделением энергии, происходит на разных временных масштабах. Таким образом, при заданной постоянной температуре, при которой ожидается воспламенение стехиометрической смеси, можно задать пространственно неоднородное распределение (градиент) концентрации водорода (что в данном случае эквивалентно градиенту времени индукции), на котором, согласно механизму Я.Б. Зельдовича, может сформироваться спонтанная волна горения, распространяющаяся из точки с минимальным временем индукции в сторону точки с максимальным временем индукции. В точке градиента, где время индукции перестаёт быть различимым на фоне времени воспламенения, преобладающей становится роль диффузионного механизма, спонтанная волна перестаёт существовать, а распространение температурной волны происходит за счёт теплопроводности и диффузии. Эту точку и можно считать концентрационным пределом воспламенения. В классической постановке задачи о воспламенении на температурном градиенте предел существования спонтанной волны определялся условием $U_{sp} < U_f$. Если $U_{sp} < U_f$, то спонтанная волна движется медленнее волны горения, распространяющейся с нормальной скоростью U_f , так что диффузионные процессы протекают быстрее, а следовательно, воспламенение по спонтанному механизму не реализуется.

Расчёты развития спонтанной волны горения на градиенте концентрации водорода проводились при следующих начальных условиях: состав водородно-воздушной смеси изменялся вдоль области концентрационного градиента от стехиометрического до чистого воздуха, в котором концентрация водорода равнялась нулю. Начальная температура составляла 1200 К, протяжённость области градиента — 0,5 м. Результаты расчётов представлены на рис. 4. Естественно, полученная картина значительно отличается от соответствующей температурному градиенту, и она требует дополнительного пояснения. В каждой точке области градиента независимо начинается реакция воспламенения, при этом в водородно-воздушной смеси при выбранной температуре стадия индукции протекает достаточно медленно (для стехиометрического состава смеси $\tau_{ind} \sim 40 - 60$ мкс),

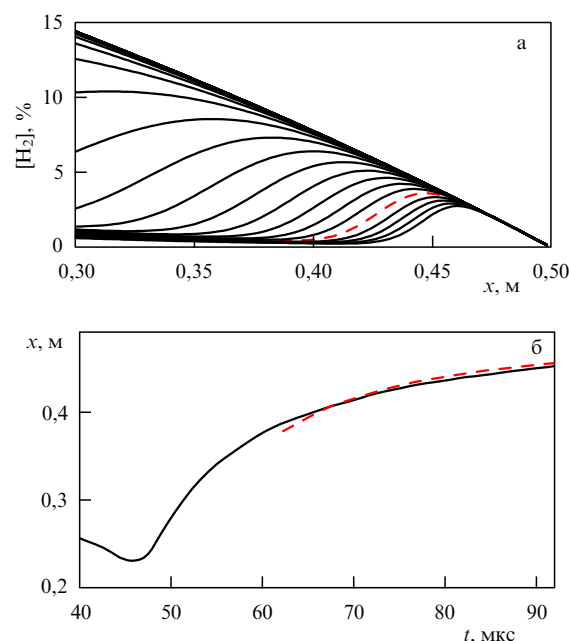


Рис. 4. Существование спонтанной волны горения на градиенте концентрации ограничено концентрационными пределами воспламенения, по мере приближения к которым волна тормозится, генерируя опережающую фронт волны реакции волну сжатия, определяющую динамику процесса на более поздней стадии. (а) Эволюция профилей концентрации $[H_2]$ в ходе процесса воспламенения. Профили приведены с шагом по времени 2,5 мкс. Штриховой кривой выделен профиль, определяющий предел воспламенения. (б) Траектории фронта волны экзотермической реакции (сплошная кривая) и волны сжатия, порождаемой спонтанной волной на стадии, предшествующей её вырождению.

сопровождаясь незначительной конверсией горючего компонента в продукты горения, экзотермическая стадия начинается с выделения большей энергии в результате практически полного сгорания горючей смеси. В результате этого профиль концентрации водорода в выбранной постановке задачи принимает со временем куполообразную форму; на правом скате этого купола (по направлению движения слева направо) распространяется волна эндотермической реакции, вслед за которой бежит волна экзотермической реакции, определяющая левый скат купола. В определённый момент спонтанный механизм распространения волны реакции сменяется диффузионным и порождённый экзотермической волной тепловой фронт, распространяющийся за счёт теплопроводности и расширения горячих продуктов, опережает фронт спонтанной волны. В области с ещё большим падением концентрации водорода волна горения затухает, и дальнейшая эволюция профиля концентрации водорода, теперь уже не связанная с экзотермической реакцией, определяется в основном диффузией и газодинамическим воздействием со стороны расширяющихся продуктов горения.

Описанный процесс смены режимов хорошо прослеживается на рис. 4, где из рис. 4б легко определить время, на котором волна сжатия опережает спонтанную волну реакции, а на рис. 4а можно выделить кривую распределения концентрации на данный момент времени и определить соответствующее ей значение на градиенте концентрации. В рассматриваемой задаче это значение равно 4,2 % водорода в начальном составе горючей смеси.

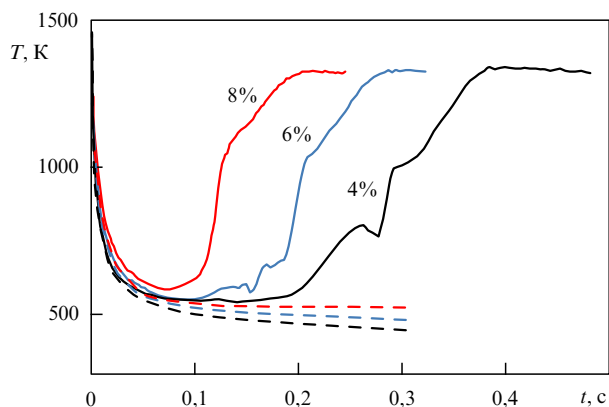


Рис. 5. Результаты численного моделирования распространения тепловой волны от области локального горения. Иницирование горения происходило в равномерно прогретом до температуры 1500 К слое шириной 2 см. Концентрация водорода в этой области, считавшаяся однородной, задавалась в интервале от 4 % до 8 %. За границей области энерговложения сохранялась та же концентрация либо на границе области задавалось линейное возрастание концентрации водорода до 15 % на пространственном масштабе в 1 см. Представлены температуры за фронтом волны диффузии в случае равномерного распределения концентрации (штриховые кривые) и за фронтом волны реакции при наличии градиента концентрации (сплошные кривые) при различных значениях концентрации (%) водорода в области энерговложения смеси.

Полученный порог концентрации водорода определяет границу, ниже которой химический состав смеси не поддерживает развитие экзотермической реакции. При этом постепенное увеличение концентрации горючего компонента не приводит сразу к выходу на стабильный режим горения, который устанавливается только тогда, когда концентрация водорода преодолевает некоторый интервал нестабильного горения. Как показывают результаты экспериментов и компьютерного моделирования, это происходит при достижении концентрацией примерно 10%-ного порога, который можно считать пределом, обеспечивающим устойчивое горение равномерно перемешанной смеси. (В ряде директивных документов по пожарной безопасности именно этот предел принимается за нижний концентрационный предел воспламенения водородно-воздушной смеси при техногенных авариях.) Заметим, что достаточно обоснованное установление пределов воспламенения для хорошо перемешанных смесей становится менее очевидным в случае неперемешанных смесей с неравномерным распределением компонентов смеси в пространстве. На рисунке 5 приведено изменение температуры за фронтом волны, распространяющейся от области энерговложения, для бедных водородно-воздушных смесей.

Полученное в расчётах дополнительное повышение температуры в области энерговложения на начальной стадии процесса не означает, что такое иницирование непосредственно приведёт к формированию самоподдерживающейся волны горения, распространяющейся по смеси заданного состава. Из рисунка 5 видно, что при рассмотренных концентрациях для равномерно перемешанных бедных смесей водорода с воздухом волна устойчивой реакции не формируется, а возникающее на начальной стадии горение постепенно затухает или ведёт себя нестабильно, периодически вспыхивая и затухая. (Последнее наблюдалось для концентрации водорода

выше 8 % на временах, больших, чем на рис. 5.) Для смеси с неоднородной концентрацией водорода во всех рассмотренных вариантах возникает самоподдерживающийся режим распространения пламени. Наблюдается возрастание температуры и выход её на уровень, соответствующий температуре продуктов горения в 15%-ной смеси водорода с воздухом. Таким образом, энерговложение даже в области с концентрацией горючего компонента ниже предела стабильного энерговложения может генерировать тепловую волну, которая при наличии положительного градиента этой концентрации способна возбудить стабильную волну горения на участках с повышенной концентрацией горючего компонента. Учёт этого фактора может быть важен для оценки пожаро-безопасности в средах со средней по объёму концентрацией горючего компонента, меньшей порога стабильного горения или даже нижнего концентрационного предела.

3. Ускорение пламени и формирование детонации в каналах

Одним из наиболее востребованных приложений концепции спонтанной волны Я.Б. Зельдовича на протяжении многих лет являлось её применение к решению задачи о переходе от медленного горения к детонации [10–14]. С использованием полученных Я.Б. Зельдовичем результатов были построены теории формирования детонации в каналах и трубах, основанные на возможном формировании условий самовоспламенения впереди фронта пламени. Наиболее широкое распространение получили теория усиления ударной волны за счёт когерентного энерговыведения (Shock Wave Amplification by Coherent Energy Release — SWACER) [26] и теория самовоспламенения в горячих точках [27, 28]. Ввиду ограничений экспериментальных методик, позволяющих воспроизводить динамику процессов горения в каналах только по данным с боковых поверхностей каналов (с датчиков давления и с сажевых оттисков) и данным по структуре потока, полученным с применением интерференционных методов теневой (шлирен) фотосъёмки, нельзя получить достоверное экспериментальное подтверждение корректности построенных теорий. Практически к настоящему времени подтверждение этих теорий получено только посредством численного моделирования процесса с использованием упрощённой одноступенчатой модели кинетики, которая не учитывает существования эндотермической стадии распада компонентов смеси и накопления радикалов, предшествующей экзотермической стадии их рекомбинации. Очевидно, что при таком упрощении игнорируются особенности воспламенения при относительно низких температурах, имеющих место впереди фронта пламени, в области, которая должна охватываться разработанными теориями. В частности, в последних работах по численному моделированию процесса горения и перехода к детонации смесей на основе водорода с применением детализированных моделей кинетики горения [20, 29] таких режимов иницирования детонации не наблюдалось. При численном моделировании самовоспламенения впереди фронта пламени возникало только в случаях сложной интерференции ударных волн в закрытом объёме [30], что не осуществляется в условиях натурного эксперимента по исследованию процесса ускорения пламени и перехода к

детонации в длинных (полуоткрытых) каналах в отсутствие внешних воздействий.

С другой стороны, процесс перехода к детонации является прямым следствием ускорения пламени в канале, поэтому естественно предположить, что именно динамика нестационарного ускоряющегося пламени должна определять условия формирования детонации. В 1947 г. Я.Б. Зельдовичем [31] был проведён детальный анализ задачи об ускорении пламени в полуоткрытом канале при его инициировании у закрытого торца с учётом результатов экспериментальных работ К.И. Щёлкина. Я.Б. Зельдовичем были получены характерные времена выработки ламинарного и турбулентного профилей скорости, а также характерное время теплообмена со стенками канала. Было показано, что основным из указанных факторов ускорения пламени является его растяжение в существенно неравномерном потоке. При этом турбулентность играет лишь подчинённую роль. Изначально имеющая место турбулентность только способствует более быстрому установлению профиля скорости и, как следствие, более быстрому установлению ускоренного режима распространения пламени. В то же время турбулизация потока, вызванная самим течением впереди фронта пламени, развивается на достаточно больших временных масштабах. Так, для высокоактивных смесей, типа водородно-кислородных, такие времена превосходят длительность процесса ускорения пламени вплоть до перехода в детонацию.

Таким образом, по крайней мере для высокоактивных смесей, турбулизация потока впереди фронта пламени не является ведущим фактором, определяющим ускорение пламени и переход к детонации. Определяющим фактор турбулизации потока становится при распространении пламени в больших и загромождённых объёмах. На больших масштабах ускорение свободно распространяющегося пламени в первую очередь определяется развитием гидродинамических неустойчивостей фронта пламени, приводящих к довольно небольшому ускорению пламени по сравнению с ускорением, обусловленным растяжением пламени при его движении в относительно узких каналах. С другой стороны, развитие такого рода неустойчивостей приводит к существенному искажению фронта и приобретению им фрактальной структуры [32, 33]. Это в свою очередь может приводить к локальной турбулизации потока вблизи фронта пламени с последующим распространением возмущений вниз по потоку, что, по-видимому, может являться дополнительным фактором ускорения пламени за счёт турбулизации среды. В загромождённых объёмах в результате взаимодействия потока и волн сжатия с препятствиями состояние развитой турбулентности может быть достигнуто ещё до прихода пламени в эту область.

Такое воздействие загромождённости пространства на поток в натурном эксперименте можно моделировать введением турбулизаторов (системы препятствий), расположенных вдоль детонационной трубы, что широко использовалось К.И. Щёлкиным в экспериментах по исследованию влияния турбулентности на ускорение перехода горения в детонацию [34, 35], а в наше время используется исследователями и разработчиками в области перспективных детонационных двигателей. Я.Б. Зельдович в работе [31] также проводил оценку взаимодействия фактора внешней турбулентности на развитие перехода горения в детонацию и показал, что наличие

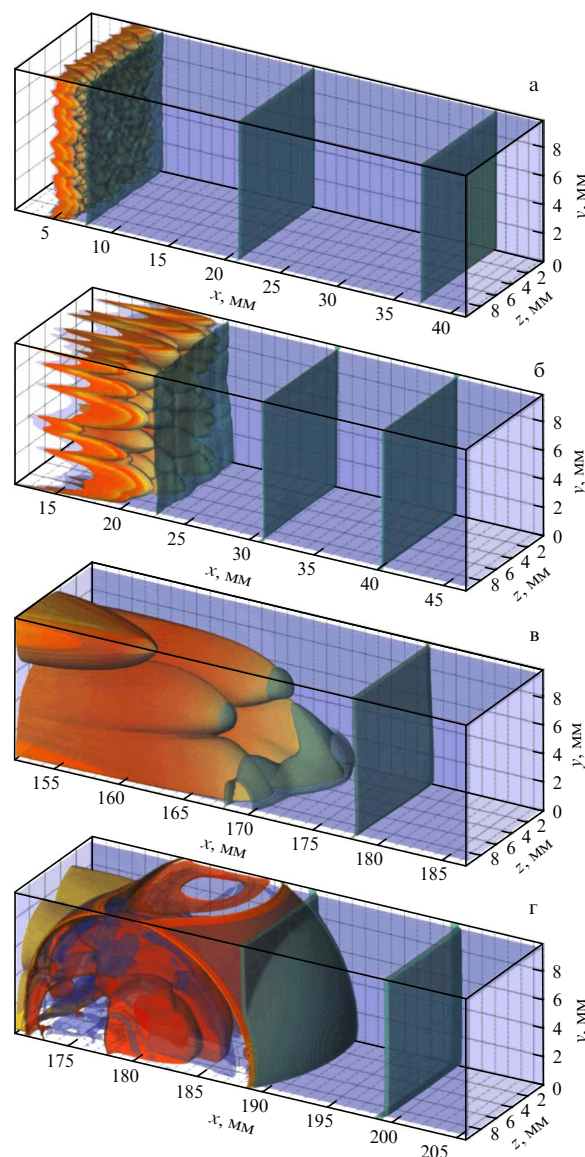


Рис. 6. (В цвете онлайн.) Ускорение пламени в канале, заполненном горючей смесью, проходит через четыре основные стадии, определяемые различными физическими механизмами: (а) расширение продуктов горения из области воспламенения; (б) экспоненциальное ускорение пламени в потоке газа, приведённом в движение самим пламенем; (в) ускорение по степенному закону за счёт растяжения в потоке и генерация ударных волн непосредственно вблизи фронта пламени; (г) формирование детонации и распространение горения в детонационном режиме.

турбулентных пульсаций ускоряет "выработку" неравномерного профиля скорости потока — основного фактора, определяющего ускорение пламени.

В недавних работах по численному моделированию ускорения пламени в каналах и переходу в детонацию водородно-кислородной смеси была подтверждена ламинарная структура потока вблизи фронта пламени вплоть до момента перехода к детонации. На рисунке 6 показана трёхмерная поверхность фронта пламени, ускоренно распространяющегося в канале, заполненном водородно-кислородной смесью, полученная в результате трёхмерного компьютерного моделирования на основе полной системы уравнений Навье–Стокса с учётом теплопроводности, многокомпонентной диффузии и химического превращения в зоне реакции [36]. Как

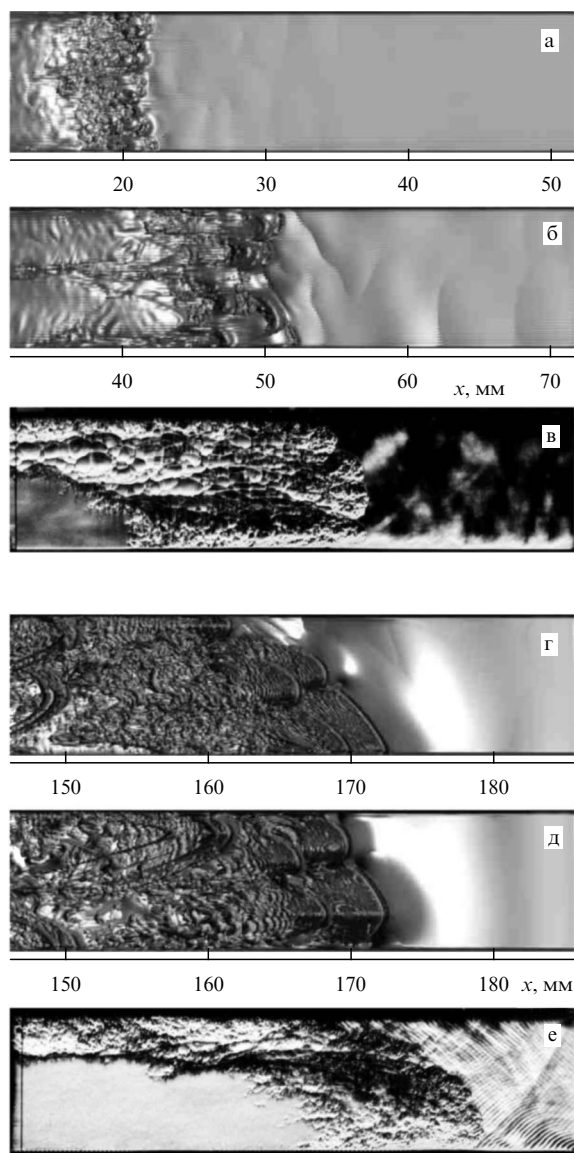


Рис. 7. (В цвете онлайн.) Структура потока при использовании теневой визуализации в численных расчётах (а, б, г, д) и эксперименте (в, е) из-за интерференции отдельных несвязанных участков поверхности фронта пламени представляется в виде довольно сложной, запутанной картины. Теневая визуализация потока вблизи поверхности фронта пламени в канале квадратного сечения показана на стадиях экспоненциального (а–в) и степенного (г–е) ускорения.

видно, изначально невозмущённый поток в процессе эволюции и ускорения пламени вплоть до момента формирования детонации сохраняет ламинарную структуру. При этом теневые фотографии, построенные на основе результатов трёхмерного моделирования (рис. 7а, б, г, д) довольно хорошо воспроизводят все особенности экспериментально полученных изображений [37] (рис. 7в, е). Теневая визуализация потока из-за интерференции отдельных несвязанных участков поверхности фронта пламени демонстрирует довольно сложную структуру течения. В связи с этим можно предположить, что сделанные при анализе экспериментов в ряде работ выводы о турбулентной структуре потока вблизи фронта пламени могут являться артефактом диагностических методик, не позволяющих корректно воспроизвести трёхмерную картину течения.

Рассмотрим теперь особенности ускорения пламени в канале и определяемые ими условия перехода к детонации. С момента воспламенения горючей смеси распространение пламени проходит несколько стадий, наблюдаемых в лабораторных физических экспериментах и воспроизводимых в вычислительных экспериментах [20, 29]. Динамика фронта пламени на первой стадии определяется расширением продуктов горения, вытесняющих фронт пламени из зоны воспламенения. Далее из-за неравномерного распределения массовой скорости по сечению канала поверхность фронта пламени растёт, вытягиваясь в потоке. Это приводит к увеличению суммарного притока свежего горючего к фронту и тем самым к увеличению скорости распространения пламени, наблюдаемому на второй стадии процесса. Возрастание скорости в этом случае можно описать экспоненциальной зависимостью, отражающей обратную связь между ускорением фронта пламени и ускорением потока впереди него [20]. С развитием процесс переходит в третью стадию, на которой поверхность фронта полностью подстраивается под профиль скорости в потоке и её структура стабилизируется, что определяет снижение степени возрастания скорости. Ускорение пламени на этой стадии можно описать степенной функцией с показателем n , причём $0 < n < 1$ [20, 29]. Заметим, что как экспоненциальная, так и степенная стадии ускорения наблюдаются в каналах шириной H , много большей ширины фронта пламени L_f , $H \gg L_f$ [37, 38], в то же время в узких капиллярах с шириной порядка ширины фронта пламени ($H \sim L_f$) переход к детонации происходит на экспоненциальной стадии, минуя стадию степенного возрастания скорости [39].

Излучаемые ускоряющимся фронтом пламени волны сжатия, подобно волнам сжатия, генерируемым ускоряющимся поршнем, формируют ударные волны, согласно решению Римана, на некотором расстоянии от поверхности фронта пламени. На стадии экспоненциального ускорения ударная волна формируется на расстоянии в несколько ширин канала ($X_{sw} - X_f \sim H$, X_{sw} и X_f — соответственно положение ударной волны и положение фронта пламени), а на стадии степенного роста с $0 < n < 1$ — непосредственно вблизи поверхности фронта пламени ($X_{sw} \sim X_f \pm L_f$).

В широких каналах на стадии степенного возрастания скорости ударные волны, образующиеся непосредственно на фронте пламени, доставляют к фронту более сжатую и разогретую горючую смесь, что в свою очередь приводит к повышению давления в зоне реакции (рис. 8). Таким образом, возникает дополнительное ускорение реакции и дополнительное возрастание скорости волны горения. Аналогичный эффект наблюдается и в узких каналах, где уже на стадии экспоненциального возрастания скорости ударные волны формируются в непосредственной близости от фронта ($X_{sw} - X_f \sim H \sim L_f \Leftrightarrow X_{sw} \sim X_f \pm L_f$). Следовательно, дополнительно сжатая и разогретая смесь поступает во фронт пламени уже на этой стадии. Как результат такого взаимодействия пламени и генерируемых им ударных волн, в обоих случаях устанавливается самоподдерживающийся режим ускорения пламени. По мере ускорения пламени поток впереди фронта пламени ускоряется отходящими ударными волнами. По достижении потоком скорости порядка скорости звука во фронте генерируемые ускоряющимся пламенем волны сжатия запираются сверх-

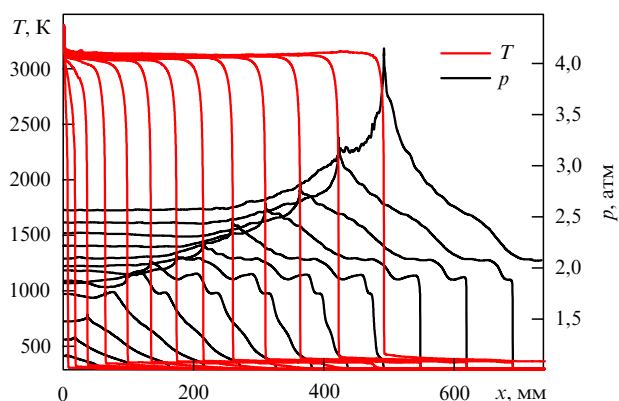


Рис. 8. На стадии степенного роста скорости с показателем $0 < n < 1$ ударные волны генерируются волнами сжатия, излучаемыми фронтом пламени, непосредственно вблизи поверхности фронта пламени, что обеспечивает поступление во фронт более сжатой и разогретой горючей смеси, что в свою очередь приводит к повышению давления в зоне реакции. На профилях давления это можно наблюдать как формирование локального пика, движущегося синхронно с фронтом пламени. Профили температуры и давления приведены с шагом по времени 50 мкс.

звуковым потоком в зоне реакции. В результате наступает интенсивное возрастание скорости пламени и давления в зоне реакции, что приводит к выходу из зоны реакции сильной ударной волны с параметрами, позволяющими преодолеть звуковой барьер ($U_{sw} > a_b \sim a_{cl}$). Эта ударная волна и формирует детонацию. Механизм формирования детонации при этом аналогичен приведённому выше при рассмотрении задачи о инициировании детонации в околокритических условиях, за исключением того что здесь механизм перехода к детонации определяется не характеристиками энергоснабжения, а запускается в результате развития нестационарного трёхмерного процесса.

4. Образование окислов азота в нагретом воздухе

Обсуждая исключительно важный вклад Я.Б. Зельдовича в теорию горения и детонации, нельзя обойти вниманием его фундаментальные работы (в соавторстве с П.Я. Садовниковым и Д.А. Франк-Каменецким) по физике и химии образования окислов азота в горячем воздухе, который эффективно образуется, например, при горении, за фронтом ударной волны при химических взрывах и т.д. [40–42], особенно учитывая, что работы Я.Б. Зельдовича о горении и детонации являются естественным продолжением его более ранних работ об окислах азота (начало которым было положено в 1930-х годах). Именно работы по изучению окисления азота легли в основу докторской диссертации Я.Б. Зельдовича, которую он защитил в 1939 г. в возрасте всего 25 лет. Диссертация так и называлась "Окисление азота при горении" [43]. Предложенная в этих работах (уже давно ставших классическими) кинетика теплового образования окиси азота заслуженно называется механизмом Зельдовича и до сих пор широко используется в самых разных областях физики, включая атмосферную фотохимию, физику ДВС, рассмотренную выше физику взрыва, горения и детонации, а также в плазменной медицине и др. Здесь мы остановимся только на одном из приложений указанного подхода Зельдовича с соавторами — рассмотрим образование окислов азота NO_x

(NO , NO_2 , NO_3 , N_2O_5 и др.) в горячем воздухе молниевых каналов, образовавшегося при разряде молнии (по аналогии с [41], где было подробно рассмотрено образование NO_x при горении).

Окислы азота NO_x играют одну из ключевых ролей в фотохимии нашей атмосферы, в частности являются одним из факторов, определяющих уровень тропосферного и стратосферного озона O_3 в атмосфере. Напомним, что роль стратосферного озона уникальна — он защищает биосферу Земли от жёсткого ультрафиолетового солнечного излучения. Кроме того, удаление окислов азота из атмосферы посредством осадков — один из важных механизмов фиксации азота, необходимого для существования биосферы. По-видимому, одним из первых, кто (ещё в начале XIX в.) обратил внимание на то, что молниевые разряды могут являться глобальным источником окислов азота, был немецкий химик фон Либих [44]. С тех пор эта проблема рассматривалась многократно, и в рамках настоящего обзора нет возможности привести подробную библиографию, посвящённую этой теме; отметим лишь пионерские работы [45–49], в которых ключевую роль играет тепловой механизм образования NO_x (механизм Зельдовича). В рамках подхода Зельдовича тепловая диссоциация молекулярных азота N_2 и кислорода O_2 приводит к образованию атомов N и O ; в последующих каталитических реакциях $\text{N} + \text{O}_2 = \text{NO} + \text{O}$ и $\text{O} + \text{N}_2 = \text{NO} + \text{N}$ образуется окись азота NO . Дальнейшая цепочка химических превращений в горячем воздухе приводит к образованию остальных окислов азота NO_x . Отметим, что в тропосфере окислы азота NO_x , в зависимости от их концентрации, приводят к образованию или уничтожению озона. В стратосфере избыток окиси азота приводит к каталитическому уничтожению молекул озона в реакциях $\text{NO} + \text{O}_3 \rightarrow \text{NO}_2 + \text{O}_2$, $\text{NO}_2 + \text{O} \rightarrow \text{NO} + \text{O}_2$, разрушая озоновый слой [50–53]. На сегодняшний день считается, что молниевые разряды являются важным источником окислов азота в атмосфере — их вклад в глобальное производство NO_x оценивается в диапазоне 3–20 % от полного образования окислов азота (значительная часть которого производится биосферой). Это составляет примерно $10^{12}–10^{13}$ г год^{−1} (см., например, [54]). Согласно длительным спутниковым оптическим наблюдениям, частота молниевых разрядов в атмосфере Земли $\sim 10^9$ год^{−1}. Глобальное распределение молниевых разрядов на нашей планете, усреднённое за несколько лет, показано на рис. 9 (приведена плотность n_{lig} молниевых вспышек — число разрядов на 1 км² в год) [55]. Хорошо видно, что плотность молниевых вспышек максимальна в приэкваториальных тропических областях и незначительна над поверхностью океанов.

Количество NO (как наиболее важного соединения из NO_x), образовавшееся в молниевом разряде, можно по порядку величины оценить из простых соображений: характерное время охлаждения τ_c молниевых каналов при его расширении приравнивается к характерному времени τ_{NO} гибели NO в химических реакциях в горячем воздухе¹:

$$\tau_c \approx \tau_{\text{NO}}. \quad (5)$$

¹ Ниже для простоты мы ограничиваемся рассмотрением кинетики окисления азота в молниевом канале в случае сухого воздуха; различные химические реакции, связанные с наличием водородосодержащих соединений (таких как, например, вода H_2O , атомарный водород H , гидроксил OH , азотная кислота HNO_3 и др.), не рассматриваются.

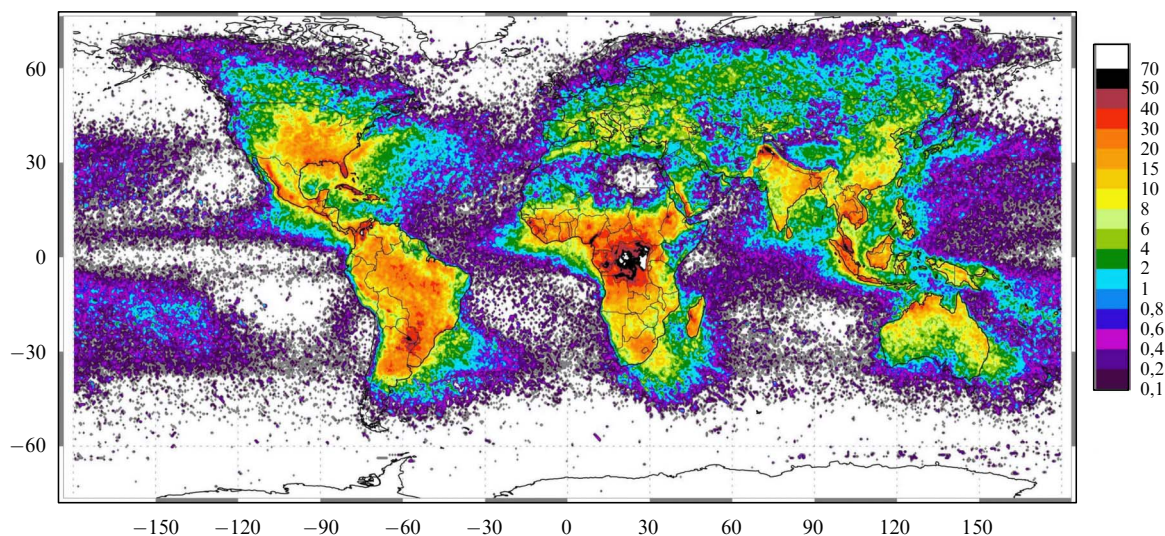


Рис. 9. (В цвете онлайн.) Среднегодовое распределение молниевых разрядов на нашей планете (число разрядов на 1 км^2 в год) [52]. Видно, что плотность n_{lig} молниевых вспышек варьируется в широких пределах: от $n_{\text{lig}} \sim 100$ в приэкваториальных областях до $n_{\text{lig}} \sim 0,1$ над океанической поверхностью, где молниевая активность практически отсутствует.

Очень сильное возрастание $\tau_{\text{NO}}(T)$ при падении температуры T газа ($\tau_{\text{NO}}(T) = L^{-1}(T) \propto \exp(E_D/T)$, где $L(T)$ описывает гибель окиси азота в химических реакциях [56], потенциал диссоциации $E_D \gg T$) даёт возможность оценить температуру, при которой объёмное содержание NO перестаёт изменяться, — так называемую температуру закалки T_q окиси азота. Зная T_q и используя термодинамически равновесное содержание окиси азота в нагретом воздухе (например, из [57]), легко оценить количество закалённого NO в молниевом канале.

На рисунке 10 приведён термодинамически равновесный состав воздуха при разных температурах и давлениях. Представлены температурные зависимости объёмного содержания в горячем воздухе молекулярного азота N_2 , молекулярного кислорода O_2 , окиси азота NO, атомарных азота N и кислорода O. Отметим, что максимальное содержание $n_{\text{NO}} \approx 0,1$ наблюдается при температурах горячего воздуха $T \approx 3000\text{--}4500 \text{ К}$.

Для определения $\tau_{\text{NO}}(T)$ должна быть известна кинетика образования NO; такие результаты, в частности, представлены на рис. 11, на котором показано, как характерное время образования термодинамически равновесной концентрации окиси азота $\tau_{\text{NO}}(T)$ изменяется в зависимости от температуры T горячего воздуха. Видно, что в узком диапазоне температур ($T \approx 2000\text{--}3000 \text{ К}$) величина $\tau_{\text{NO}}(T)$ изменяется на несколько порядков, что и приводит к эффекту закалки NO при охлаждении горячего воздуха. Вставка на рис. 11 показывает кинетику образования NO при разных температурах (отметим, что более наглядно кинетика NO как функция времени и температуры показана на рис. 12). Хорошо виден немонотонный (с формированием максимума концентрации $n_{\text{NO}} \approx 10^{17} \text{ см}^{-3}$ на временах $t \sim \tau_{\text{max}} \approx 10^{-7}\text{--}10^{-3} \text{ с}$) выход зависимости $n_{\text{NO}}(T, t)$ на термодинамически равновесные значения при умеренных температурах ($T \geq 4000 \text{ К}$). Отметим, что такое поведение зависимости n_{NO} от времени даёт возможность получать сверхравновесные концентрации NO при быстром расширении (с характерным временем $\tau_{\text{exp}} \sim \tau_{\text{max}}$) нагретого

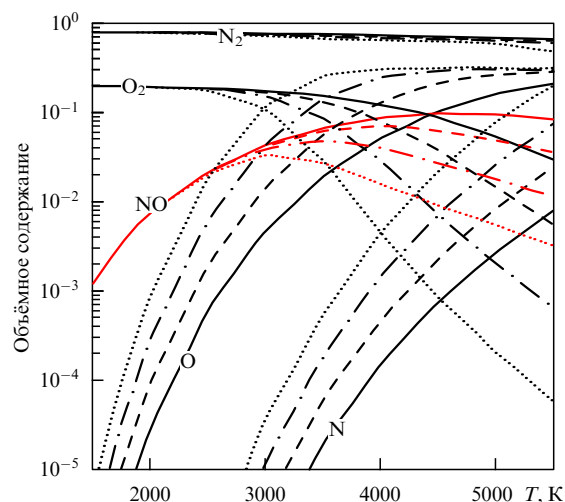


Рис. 10. (В цвете онлайн.) Термодинамически равновесный состав нагретого воздуха в зависимости от его температуры при разных давлениях: 100 бар (сплошные кривые), 10 бар (штриховые кривые), 0,1 бар (пунктирные кривые). Представлены температурные зависимости объёмного содержания в горячем воздухе молекулярного азота N_2 , молекулярного кислорода O_2 , окиси азота NO (кривые выделены красным цветом), атомарных азота и кислорода. Видно, что максимальное содержание $n_{\text{NO}} \approx 0,1$ наблюдается при температурах горячего воздуха $T \approx 3000\text{--}4500 \text{ К}$ (для указанных давлений), которые значительно ниже характерных начальных температур молниевых каналов, образованного при возвратном ударе (return stroke) ($T \approx (1\text{--}3) \times 10^4 \text{ К}$).

воздуха. Этот вывод, возможно, приведёт к переоценке (в сторону увеличения) глобального количества окиси азота, образующегося в молниевых разрядах. Кинетика ряда важных для атмосферной химии соединений представлена на рис. 13 для температур, характерных для молниевых каналов на стадии его охлаждения. Помимо квазиравновесных содержаний этих соединений, данные зависимости показывают и характерные времена перехода к термодинамическому равновесию.

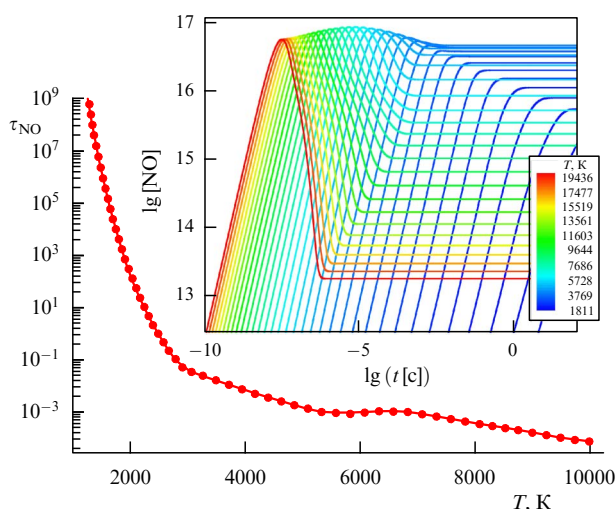


Рис. 11. (В цвете онлайн.) Кинетика образования NO в горячем сухом воздухе. Представлено характерное время образования термодинамически равновесной концентрации окиси азота τ_{NO} в нагретом воздухе в зависимости от его температуры T . Плотность воздуха $\rho_a \approx 10^{-4}$ г см $^{-3}$. Вставка показывает кинетику образования NO при разных температурах (кривые окрашены согласно значению T , которое возрастает от синего цвета к красному, охватывая широкий диапазон температур: $T \approx (0,15-2) \times 10^4$ К). Использовались наиболее полные на сегодняшний день кинетические данные о химических реакциях в горячем воздухе. Хорошо виден немонотонный (с формированием максимума концентрации $n_{NO} \approx 10^{17}$ см $^{-3}$ на временах $t \sim \tau_{max} \approx 10^{-7} - 10^{-3}$ с) выход зависимости $n_{NO}(T, t)$ на термодинамически равновесные значения при умеренных температурах ($T \geq 4000$ К). Такое поведение зависимости n_{NO} от времени даёт возможность получать сверхравновесные концентрации NO при быстром расширении (с характерным временем $\tau_{exp} \sim \tau_{max}$) нагретого воздуха.

Аналитически $\tau_{NO}(T)$ можно оценить, используя ключевые реакции, которые определяют гибель NO в горячем воздухе:



с константами скорости реакции $k_1 \approx 10^{-12} \sqrt{T}$ см 3 с $^{-1}$, $k_2 \approx 2,5 \times 10^{-15} T \exp(-19500 \text{ K}/T)$ см 3 с $^{-1}$ и $k_3 \approx 3 \times 10^{-12} \exp(-23400 \text{ K}/T)$ см 3 с $^{-1}$ соответственно. Следовательно, характерное время жизни τ_{NO} молекулы NO в нагретом воздухе определяется следующим образом: $\tau_{NO} \approx (k_1[\text{N}] + k_2[\text{O}] + k_3[\text{O}_2])^{-1}$, здесь $[\text{N}]$, $[\text{O}]$, $[\text{O}_2]$ — концентрации атомарных азота и кислорода и молекулярного кислорода. Представленные на рис. 10 результаты термодинамических расчётов показывают, что можно пренебречь вкладом $k_1[\text{N}]$ и $k_2[\text{O}]$ ввиду их малости по сравнению с $k_3[\text{O}_2]$ для температур $T_h \leq 2500$ К в широком диапазоне давлений горячего воздуха. В этом случае для τ_{NO} можно получить простую оценку:

$$\tau_{NO} \sim (k_3[\text{O}_2])^{-1} \approx 10^{-7} \exp\left(\frac{23400 \text{ K}}{T}\right) \frac{\rho_0}{\rho_a}.$$

Видно, что уменьшение температуры горячего воздуха приводит к резкому увеличению характерного времени

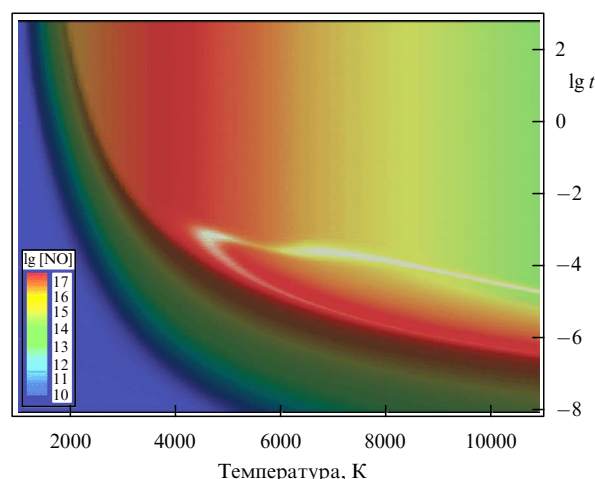


Рис. 12. (В цвете онлайн.) Кинетика образования NO в горячем сухом воздухе. Показана двумерная зависимость концентрации $n_{NO}(t, T)$ от времени и температуры. Цвет определяется значением $n_{NO}(t, T)$, которое увеличивается от синего цвета к красному, как указано на вставке. Хорошо видны переход от немонотонного возрастания n_{NO} со временем к монотонному, который наблюдается при $T \approx 4000$ К, и изменение времени установления термодинамически равновесной концентрации окиси азота $\tau_{NO}(T)$ с возрастанием температуры. Плотность воздуха $\rho_a = 10^{-4}$ г см $^{-3}$.

установления термодинамического равновесия² для NO, что также хорошо видно из рис. 11, который соответствует значительно более подробной схеме химических реакций. В этой кинетической схеме учитывались девять наиболее важных соединений сухого воздуха: N_2 , O_2 , N , O , NO , NO_2 , N_2O , NO_3 , O_3 — и 40 реакций между ними из [56], а верификация указанной схемы проводилась посредством достижения равенства квазистационарных (установившихся) концентраций указанных соединений их равновесным значениям для рассматриваемого диапазона температур (2000–6000 К).

Таким образом, предложенный Я.Б. Зельдовичем механизм окисления горячего воздуха прекрасно объясняет на качественном уровне образование окиси азота и её закалку: при расширении нагретого воздуха характерное время $\tau_{NO}(T)$ резко возрастает с понижением температуры и при $\tau_{NO}(T_q) \approx \tau_c$ наблюдается закалка NO: доля NO в горячем газе практически перестаёт изменяться и примерно соответствует термодинамически равновесной доле NO в момент закалки (и при температуре закалки T_q).

Однако для количественного описания закалки NO должны быть известны не только характерное время охлаждения τ_c , которое определяется газодинамическими процессами разлёта горячего газа и его последующим перемешиванием (и остыванием) с окружающим холодным воздухом, но и пространственно-временное поведение плотности ρ и температуры T разлетающегося газа; это даёт возможность относительно легко вычислить количество образовавшихся окислов азота, используя

² Следует отметить, что в пионерской работе [48] не учитывалась последняя реакция из (6) и тем самым время установления термодинамического равновесия для NO в области низких температур оказалось сильно завышенным и, соответственно, было завышено количество "замороженного" NO, образовавшегося при разлёте горячего облака.

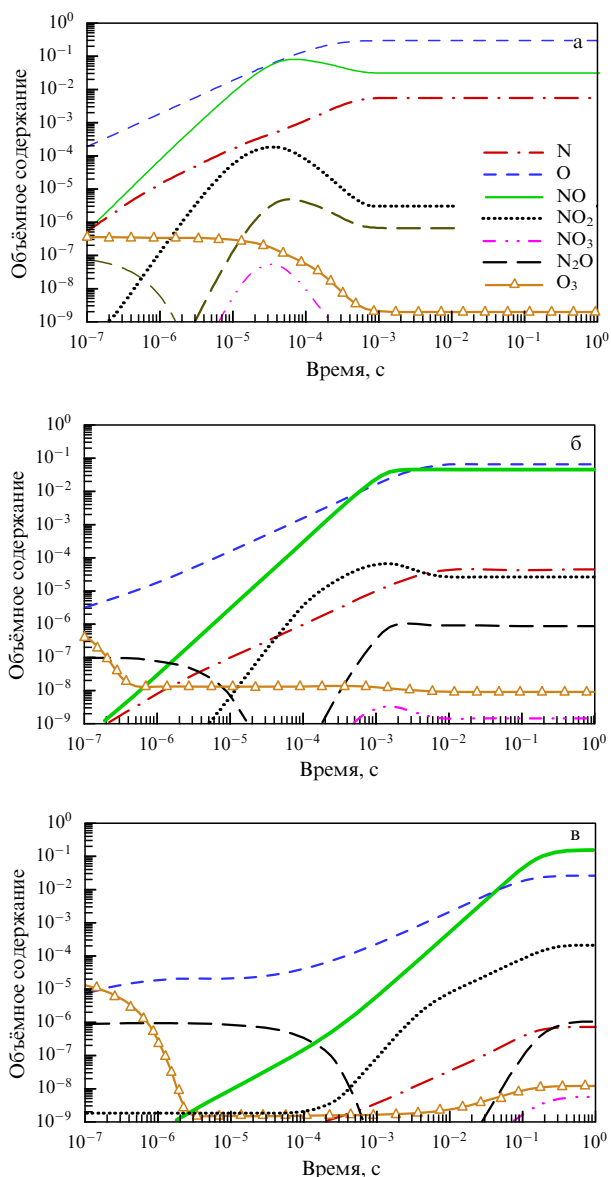


Рис. 13. Кинетика важных для атмосферной фотохимии малых составляющих (соединений) в нагретом сухом воздухе при разных температурах: 5000 К (а), 3500 К (б) и 2500 К (в). Представлены зависимости от времени объёмных концентраций атомарных азота N и кислорода O, озона O₃ и соединений азота NO, NO₂, NO₃ и N₂O. Плотность воздуха $\rho_a = 10^{-4}$ г см⁻³.

детальную схему кинетических реакций. В рассматриваемом здесь случае линейного молниевых разряда дополнительным преимуществом является симметрия разряда — можно рассматривать эту задачу в приближении цилиндрической симметрии.

В процессе такого разряда газ в стволе молниевых канала за времена порядка нескольких микросекунд нагревается до температур $T \approx (2,5-3) \times 10^4$ К [58, 59]. При таких температурах молекулярный азот и кислород являются полностью диссоциированными, а степень ионизации в газе близка к единице. Для описания расширения такого горячего газа можно без ограничения общности принять следующие начальные параметры молниевых канала: температура горячего воздуха $T_h \approx 3 \times 10^4$ К, его плотность ρ_h равна плотности ρ_a окружающего воздуха: $\rho_h \approx 10^{-4}$ г см⁻³, давление окружающего воздуха $p_a \approx 0,1$ бар. Начальный радиус молни-

евого канала $r_0 \approx 3$ см, его длина $L \approx 5$ км. Эти параметры соответствуют энергии разряда $E_0 \sim 10^{15}$ эрг, что является типичным для одиночного возвратного удара (см., например, [58]).

В рассматриваемых условиях начальное давление p_h в молниевом канале $p_h \approx 40$ бар (учтена полная диссоциация молекул воздуха и однократная ионизация атомов N и O). Отношение $p_h/p_a \sim 10^3 \gg (\gamma + 1)/(\gamma - 1) \sim 10$, где γ — показатель адиабаты (для рассматриваемых параметров $\gamma \approx 1,2$), следовательно, при расширении горячего воздуха молниевых канала образуется сильная ударная волна. Начальную скорость ударной волны D_0 можно оценить из соотношения: $D_0 \approx \sqrt{2p_h/(\gamma + 1)\rho_a}$. Первоначально $\gamma \approx 1,2$ и $D \approx 6 \times 10^5$ см с⁻¹.

Отметим, что характерная скорость распространения возвратного удара v_{rs} значительно выше: $v_{rs} \sim 10^9 - 10^{10}$ см с⁻¹ [59–61], поэтому для описания расширения молниевых канала наиболее адекватным является приближение цилиндрического сильного взрыва. В этом случае скорость ударной волны D затухает с увеличением расстояния r от линии взрыва: $D \approx D_0(r_0/r)$. Температуру за фронтом УВ T_f можно оценить из соотношения [42] $T_f \propto p_f/\rho_f \approx p_f/\rho_a(\gamma - 1)/(\gamma + 1) \propto D^2 \propto r^{-2}$. В случае молниевых канала время охлаждения газа оценивается как $\tau_c \sim r_h/c_s \sim 10^{-3}$ с, где r_h — радиус молниевых канала ($r \approx 1$ м), c_s — скорость звука в нагретом воздухе. При этом температура закалики NO, как легко убедиться из рис. 11, равна примерно 2500 К. Тогда количество окиси азота NO, "замороженной" в процессе расширения молниевых канала, составит примерно 1 % от массы воздуха, нагретого до температуры, превышающей температуру закалики T_q ; это количество, как можно показать, слабо зависит от величины T_q , а количество образовавшейся окиси азота на единицу энергии разряда слабо зависит от давления окружающего воздуха p_a .

Однако значительно точнее количество образовавшихся при разряде окислов азота может быть определено при численном моделировании расширения молниевых канала с использованием реального уравнения состояния горячего воздуха [57]. Некоторые результаты такого моделирования приведены на рис. 14, где представлена эволюция молниевых канала: показаны зависимости температуры T и плотности ρ от времени и лагранжовой массовой координаты r . Хорошо видны формирование ударной волны и образование на поздней стадии разлёта тёплого молниевых канала пониженной плотности. Здесь система уравнений газовой динамики решалась с помощью модифицированного двумерного гидродинамического кода, апробированного при решении ряда задач о высокоскоростном взаимодействии ударника с мишенью (которые возникают, например, при описании торможения кометы/астероида в атмосферах планет и др. [62–66]).

Указанные расчёты показывают, что количество закалённого NO в стволе молниевых канала составляет примерно 2–3 % (что близко к оценкам, приведённым выше) от первоначально нагретого в разряде воздуха; отсюда легко определить энергетические затраты на образование одной молекулы NO $P(\text{NO})$ — они могут быть оценены как 70–100 эВ на молекулу. Интересно сравнить этот результат с эффективностью образования NO в плазматроне [67]: в этом случае ($P(\text{NO}) \approx 10$ эВ на молекулу) и химических взрывах в воздухе [42]

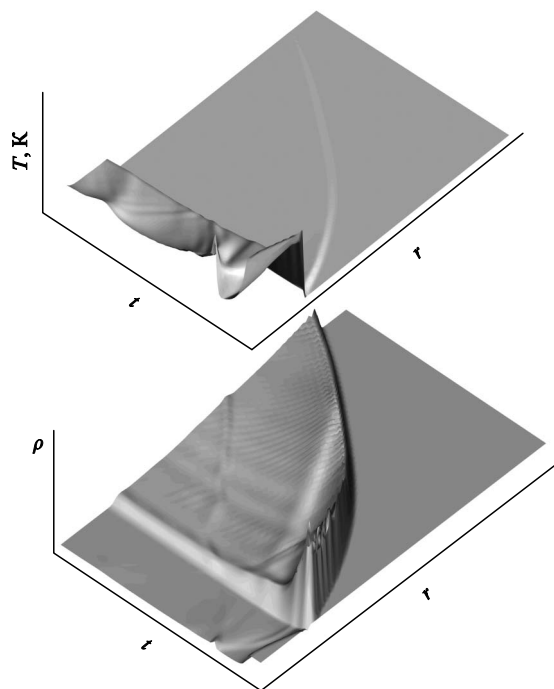


Рис. 14. Пространственно-временная эволюция линейного молниевых канала. Показаны качественные зависимости температуры T (а) и плотности ρ (б) от времени и массовой лагранжевой координаты r . Плотность окружающего воздуха $\rho_a = 10^{-4}$ г см $^{-3}$. Хорошо видны формирование ударной волны и образование горячего молниевых канала с пониженной по сравнению с ρ_a плотностью.

($P(\text{NO}) \approx 150\text{--}200$ эВ на молекулу). Некоторые оценки $P(\text{NO})$ приведены в [68], согласно этим оценкам $P(\text{NO})$ варьируется в пределах 30–200 эВ на молекулу. Относительно большая энергетическая цена образования NO в случае химических взрывов связана с большим пространственным масштабом процесса и, соответственно, с большим характерным временем охлаждения горячего газа — окись азота в таких условиях эффективнее конвертируется в N_2 и O_2 , в соответствии с данными рис. 10.

Некоторые результаты образования NO с учётом газодинамических процессов образования ударной волны и расширения молниевых канала представлены на рис. 15, где показана зависимость концентрации NO от времени для нескольких лагранжевых координат. Хорошо виден процесс закалки окиси азота в расширяющемся газе. Отметим, что если начальная температура в стволе молниевых канала относительно невысока, $T \approx 2 \times 10^4$ К, то окись азота образуется главным образом в области разряда, в горячем стволе, а вклад УВ незначителен, величина $P(\text{NO})$ при этом слабо зависит от давления окружающего воздуха и является примерно одной и той же ($P(\text{NO}) \approx 100$ эВ на молекулу) на высотах тропосферы и нижней стратосферы. Для мощных разрядов и высоких начальных температур ($T \approx 3 \times 10^4$ К) ситуация противоположная: ударная волна играет ключевую роль в образовании окиси азота.

Итак, при разряде молнии образуется большое количество NO, причём в стволе молниевых канала уровень NO значительно выше, чем в невозмущённом окружающем воздухе. Например, начальная концентрация закалённой окиси азота в тёплом ($T \leq 2500$ К) молниевом канале порядка $n_{\text{NO}}^{\text{lig}} \sim 10^{15}\text{--}10^{17}$ см $^{-3}$ для типичного возвратного разряда на высотах, где $p_a = 0,1$ бар (что

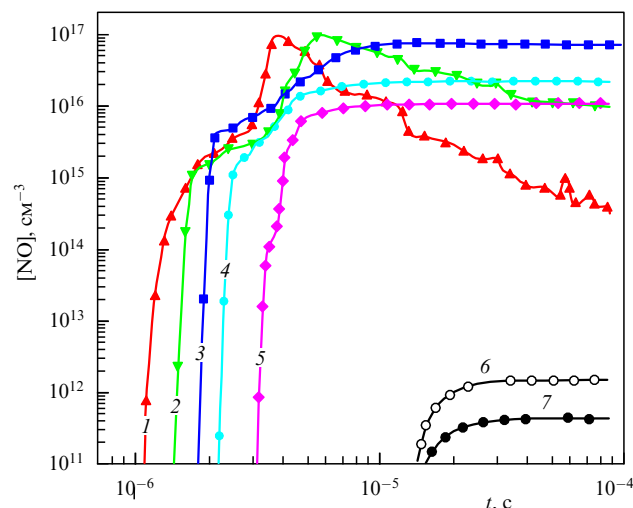


Рис. 15. (В цвете онлайн.) Образование окиси азота NO за фронтом ударной волны при расширении линейного молниевых разряда. Представлены зависимости концентрации NO от времени для нескольких массовых лагранжевых координат на разных расстояниях от оси симметрии. Изменение цвета кривых от красного к лиловому соответствует увеличению расстояния от центральной области разряда. Чёрные кривые соответствуют граничным областям разряда, в которых производство NO менее эффективно. Хорошо видна закалка NO на большинстве из представленных зависимостей. Плотность окружающего воздуха 10^{-4} г см $^{-3}$.

соответствует высоте примерно 15 км), в то время как в окружающем воздухе на высотах стратосферы "квазиравновесная" (определяемая уровнем солнечной активности и фотохимическими процессами) концентрация NO обычно не превышает $n_{\text{NO}}^n \leq 10^9$ см $^{-3}$, т.е. значительно ниже. Процессы турбулентного перемешивания и диффузии уменьшают уровень NO в стволе молниевых канала, формируя в нём колонку воздуха с сильнонеравновесным содержанием NO. Пространственно-временные параметры такой колонки могут быть оценены из решения уравнения диффузии без учёта фотохимических процессов; это решение имеет вид

$$n_{\text{NO}}(r, t) \propto \frac{\exp(-r^2/K_D t)}{t},$$

где K_D — коэффициент турбулентной диффузии, который в стратосфере и верхней тропосфере может быть оценён из соотношения $K_D \approx 8t^{1,6}$ см 2 с $^{-1}$ [69]. Тогда легко получить оценку радиального размера r_d колонки с неравновесным содержанием NO: $r_d \sim (n_{\text{NO}}^{\text{lig}}/n_{\text{NO}}^n)^{1/2} \approx 100$ м. Характерное время жизни τ_d такой колонки по отношению к перемешиванию и диффузионному распылению можно оценить из соотношения $r_d \approx \sqrt{K_D \tau_d} \approx 3\tau_d^{1,3}$, отсюда $\tau_d \sim 300$ с.

Избыток окиси азота в такой колонке воздуха создаёт на стратосферных высотах локальную депрессию озона, обусловленную каталитической реакцией $\text{NO} + \text{O}_3 \rightarrow \text{NO}_2 + \text{O}_2$ с константой

$$k_4 \approx 4 \times 10^{-12} \exp\left(-\frac{1560 \text{ К}}{T}\right) \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}.$$

Отметим, что время жизни τ_{NO_2} двуокиси азота NO_2 , образующейся в этой реакции, по отношению к фото-

лизу ($\text{NO}_2 + h\nu \rightarrow \text{NO} + \text{O}$), в котором образующийся атом кислорода идёт главным образом на восстановление озона ($\text{O}_2 + \text{O} + \text{M} \rightarrow \text{O}_3 + \text{M}$), составляет около 100 с, т.е. порядка τ_d . Следовательно, радиальный размер колонки r_{oz} , в которой озон практически полностью разрушен, можно определить из соотношения $[k_3 n_{\text{NO}}(r_{\text{oz}}, t)]^{-1} \approx \tau_{\text{NO}_2}$. При рассматриваемых параметрах молниевых ударов это даёт $r_{\text{oz}} \approx 100$ м.

Таким образом, молниевый разряд в нижней стратосфере создаёт локальную (с масштабом порядка 100 м) транзиентную (с характерным временем жизни порядка 100 с) депрессию озона. При этом разряд в нижней стратосфере ($h \geq 15$ км) уничтожает $\sim \pi r_{\text{oz}}^2 \delta_{\text{oz}} L \rho_s \approx 3$ кг озона, где δ_{oz} — массовая доля озона на рассматриваемых высотах. Здесь мы не оцениваем дополнительное образование окиси азота при пробое воздуха на убегающих электронах [59, 70, 71]. Такой пробой часто наблюдается в молниевых разрядах, но эффективность образования NO в результате действия этого механизма в тропосфере и стратосфере, как легко можно показать, незначительна по сравнению с эффективностью образования NO по тепловому механизму Зельдовича.

Суммарный вклад ($\sim 10^9$ разрядов в год) молниевых разрядов в образование окислов азота может составлять $\sim 20\%$ от их общего произведённого количества, однако доля стратосферных разрядов, которые могут влиять на уровень озона, относительно мала, поэтому вклад NO в разрушение озона незначителен. Отметим, что образование окиси азота в горячем следе метеороида и последующее разрушение озона [65] совсем недавно были подтверждены спутниковыми наблюдениями (Meteosat) Челябинского метеорита в феврале 2013 г. [72].

5. Заключение

В настоящем обзоре представлено развитие идей Я.Б. Зельдовича, ряд из которых он предложил ещё в середине 30-х годов XX века, будучи совсем молодым, двадцатилетним, человеком. Практически все его работы, рассмотренные выше, начиная с описания волн горения и теории детонации до выявления механизма окисления азота, выросли в крупные направления и отрасли фундаментальной и прикладной науки и зачастую определили их развитие. А ведь это только небольшая часть его гигантского вклада в фундаментальную науку. Если к этому ещё добавить популяризаторскую деятельность, то становится понятно, какой уникальной личностью был Я.Б. Зельдович.

Список литературы

1. Зельдович Я Б, Франк-Каменецкий Д А *ДАН СССР* **19** 693 (1938)
2. Зельдович Я Б, Франк-Каменецкий Д А *Журн. физ. хим.* **12** (1) 100 (1938)
3. Зельдович Я Б *Журн. физ. хим.* **22** (1) 27 (1948) [Translated into English: Zeldovich Y B *Theory of Flame Propagation* (Technical Memorandum 1282) (Washington: National Advisory Committee for Aeronautics, 1951)]
4. Zeldovich Ya B, Barenblatt G I *Combust. Flame* **3** (1) 61 (1959)
5. Зельдович Я Б *Кинетика и катализ* **2** 305 (1961)
6. Зельдович Я Б, Компанец А С *Теория детонации* (М.: Гос. изд-во. технико-теорет. лит-ры, 1955) [Zeldovich Ia B, Kompantsevs A S *Theory of Detonation* (New York: Academic Press, 1960)]
7. Zeldovich Ya B *Combust. Flame* **39** 211 (1980)
8. Колмогоров А Н, Петровский И Г, Пискунов Н С *Бюлл. МГУ. Матем. и мех.* **1** (6) 1 (1937); Колмогоров А Н *Избранные труды. Математика и механика* (Отв. ред. С М Никольский) (М.: Наука, 1985) с. 221 [Kolmogorov A N *Selected Works* Vol. 1 (Ed. V M Tikhomirov) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991) p. 242]
9. Zeldovich Ya B et al. *Astron. Acta* **15** 313 (1970)
10. Гельфанд Б Е и др. *Физика горения и взрыва* (4) 118 (1985)
11. He L *Combust. Flame* **104** 401 (1996)
12. Kapila A K et al. *Combust. Theory Model.* **6** 553 (2002)
13. Sharpe G J, Short M J. *Fluid Mech.* **476** 267 (2003)
14. Mechik K A et al. *Nonequilibrium Processes* Vol. 1 (Eds G D Roy, S M Frolov, A M Starik) (Moscow: Torus Press, 2005) p. 324
15. Liberman M A, Kiverin A D, Ivanov M F *Phys. Rev. E* **85** 056312 (2012)
16. Konnov A A *Хим. физика* **23** (8) 5 (2004)
17. Kusharin A Y et al. *Combust. Sci. Technol.* **135** 85 (1998)
18. Ó Conaire M et al. *Int. J. Chem. Kinet.* **36** 603 (2004)
19. Warnatz J, Maas U, Dibble R W *Combustion: Physical and Chemical Fundamentals, Modeling and Simulation, Experiments, Pollutant Formation* (Berlin: Springer, 2006)
20. Иванов М Ф и др. *Докл. РАН* **434** 756 (2010) [Ivanov M F et al. *Dokl. Phys.* **55** 480 (2010)]
21. Gu X J, Emerson D R, Bradley D *Combust. Flame* **133** 63 (2003)
22. Maas U, Warnatz J *Combust. Flame* **74** 53 (1988)
23. Kiverin A D et al. *Phys. Rev. E* **87** 033015 (2013)
24. Coward H F, Jones G W "Limits of flammability of gases and vapors", Bulletin 503 (Washington: U.S. Bureau of Mines, 1952); <http://digicoll.manoa.hawaii.edu/techreports/PDF/USBM-503.pdf>
25. "Mitigation of Hydrogen Hazards in Severe Accidents in Nuclear Power Plants", IAEA-TECDOC-1661 (Vienna: IAEA, 2011); http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/TE_1661_Web.pdf
26. Bach G G, Knystautas R, Lee J H *Symp. (Int.) Combust.* **12** 853 (1969)
27. Urtiew P A, Oppenheim A K *Proc. R. Soc. Lond. A* **295** 13 (1966)
28. Oran E S, Gamezo V N *Combust. Flame* **148** 4 (2007)
29. Ivanov M F, Kiverin A D, Liberman M A *Phys. Rev. E* **83** 056313 (2011)
30. Ivanov M F, Kiverin A D, Galburt V A *Combust. Sci. Technol.* **182** 1683 (2010)
31. Зельдович Я Б *ЖТФ* **17** (1) 3 (1947)
32. Гостинцев Ю А, Истратов А Г, Фортвов В Е *Докл. РАН* **353** 55 (1997) [Gostintsev Yu A, Istratov A G, Fortov V E *Dokl. Phys. Chem.* **353** 83 (1997)]
33. Liberman M A et al. *Phys. Fluids* **16** 2476 (2004)
34. Щелкин К И *ДАН СССР* **23** 636 (1939)
35. Щелкин К И *УФН* **87** 273 (1965) [Shchelkin K I *Sov. Phys. Usp.* **8** 780 (1966)]
36. Ivanov M F, Kiverin A D, Liberman M *Int. J. Hydrogen Energy* **38** 16427 (2013)
37. Kuznetsov M et al. *Shock Waves* **14** 205 (2005)
38. Salamandra G D, Bazhenova T V, Naboko I M *Symp. (Int.) Combust.* **7** 851 (1959)
39. Wu M et al. *Proc. Combust. Inst.* **31** 2429 (2007)
40. Zeldovich Ya B *Acta Physicochim. USSR* **21** 577 (1946)
41. Зельдович Я Б, Садовников П Я, Франк-Каменецкий Д А *Окисление азота при горении* (М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1947)
42. Зельдович Я Б, Райзер Ю П *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (М.: Наука, 1966) [Zeldovich Ya B, Raizer Yu P *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Mineola, N.Y.: Dover Publ., 2002)]
43. Зельдович Я Б "Окисление азота при горении" Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (Л.: Ин-т хим. физики, 1939)
44. von Liebig J *Ann. Chim. Phys.* **35** 329 (1827)
45. Goldsmith P et al. *Nature* **244** 545 (1973)
46. Noxon J F *Geophys. Res. Lett.* **3** 463 (1976)
47. Chameides W L et al. *J. Atmos. Sci.* **34** 143 (1977)
48. Chameides W L *Nature* **277** 123 (1979)
49. Goldenbaum G C, Dickerson R R *J. Geophys. Res.* **98** (D10) 18333 (1993)
50. Crutzen P J *Quart. J. R. Meteorol. Soc.* **96** 320 (1970)

51. Rowland F S, Molina M J *Rev. Geophys. Space Phys.* **13** (1) 1 (1975)
52. Crutzen P J *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **7** 443 (1979)
53. Solomon S *Rev. Geophys.* **37** 275 (1999)
54. Schumann U, Huntrieser H *Atmos. Chem. Phys.* **7** 3823 (2007)
55. Christian H J et al. *J. Geophys. Res.* **108** (D1) 4005 (2003)
56. DeMore W B et al. *Chemical Kinetics and Photochemical Data for Use in Stratospheric Modeling Evaluation* (Pasadena, Calif.: Jet Propulsion Lab., 2011) p. 17
57. Кузнецов Н М *Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах* (М.: Машиностроение, 1965)
58. Ogawa T, in *Handbook of Atmospheric Electrodynamics* Vol. 1 (Ed. H Volland) (Boca Raton, FL: CRC Press, 1995) p. 93
59. Dwyer J R, Uman M A *Phys. Rep.* **534** 147 (2014)
60. Базелян Э М, Райзер Ю П *УФН* **170** 753 (2000) [Bazelyan E M, Raizer Yu P *Phys. Usp.* **43** 701 (2000)]
61. Rakov V A, Uman M A *Lightning: Physics and Effects* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
62. Stone J M, Norman M L *Astrophys. J. Suppl.* **80** 753 (1992)
63. Клумов Б А и др. *УФН* **164** 617 (1994) [Klumov B A et al. *Phys. Usp.* **37** 577 (1994)]
64. Фортвов В Е и др. *УФН* **166** 391 (1996) [Fortov V E et al. *Phys. Usp.* **39** 363 (1996)]
65. Клумов Б А *Письма в ЖЭТФ* **70** 360 (1999) [Klumov B A *JETP Lett.* **70** 363 (1999)]
66. Клумов Б А и др. *УФН* **175** 767 (2005) [Klumov B A et al. *Phys. Usp.* **48** 733 (2005)]
67. Русанов В Д, Фридман А А *Физика химически активной плазмы* (М.: Наука, 1984)
68. Lawrence M G et al., in *Handbook of Atmospheric Electrodynamics* Vol. 1 (Ed. H Volland) (Boca Raton, FL: CRC Press, 1995) p. 189
69. *The Natural Stratosphere of 1974* (CIAP Monograph) (Springfield, VA: US Dept. Commerce, 1975)
70. Гуревич А В и др. *УФН* **179** 779 (2009) [Gurevich A V et al. *Phys. Usp.* **52** 735 (2009)]
71. Гуревич А В, Зыбин К П *УФН* **171** 1177 (2001) [Gurevich A V, Zybin K P *Phys. Usp.* **44** 1119 (2001)]
72. Borovička J, частное сообщение (2013)

From combustion and detonation to nitrogen oxides

M.F. Ivanov, A.D. Kiverin, B.A. Klumov, V.E. Fortov

Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences,

ul. Izhorskaya 13/2, 125412 Moscow, Russian Federation

E-mail: ivanov_mf@mail.ru, alexeykiverin@gmail.com, klumov@mpe.mpg.de, fortov@ras.ru

This paper looks at Ya.B. Zeldovich's ideas on the combustion and detonation physics of gas mixtures and how they evolved as work in this field progressed. The paper demonstrates the fundamental role of Zeldovich's concept of spontaneous combustion wave in studying transient initiation processes for various combustion regimes and in determining the energy and concentration inflammation limits for combustible gas mixtures. It shows how his notion that flame front stretching crucially influences flame acceleration in channels explains in a new way the deflagration-to-detonation transition in highly reactive gaseous mixtures. Most of the presented results were obtained by simulation, allowing Zeldovich's ideas to be extended to the combustion of real gaseous mixtures, where chemical reactions and gasdynamical flows add hugely to the complexity of the problem. The paper concludes by using Zeldovich's mechanism to assess the amount of nitrogen oxide produced by a lightning discharge.

PACS numbers: 52.80.Mg, 82.33.Vx, 88.20.jj

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403c.0247

Bibliography — 72 references

Received 13 December 2013, revised 14 January 2014

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 247–264 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (3) (2014)

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса:
уроки новых исследований

Г.И. Баренблатт, А.Дж. Корин, В.М. Простокишин

Универсальный (не зависящий от числа Рейнольдса) логарифмический закон Кармана–Прандтля для распределения скорости в основной промежуточной области турбулентного сдвигового потока считается одним из фундаментальных законов инженерной науки и повсеместно преподаётся в курсах гидродинамики и гидравлики. В обзоре показано, что этот закон основан на предположении, которое не может быть признано правильным и не соответствует эксперименту. Вывод этого закона, предложенный Л.Д. Ландау, не является вполне корректным. Обсуждается альтернативный скейлинговый (степенной) закон, явно отражающий влияние числа Рейнольдса, и соответствующий закон сопротивления. Исследование основано на идеях промежуточной асимптотики и неполной автомодельности по параметру подобия, в формировании которых Яков Борисович Зельдович сыграл выдающуюся роль. Работа посвящается его памяти.

PACS numbers: 47.10. – g, 47.27. – i, 47.27.Ak, 47.27.Gs

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403d.0265

Содержание

1. Введение: проблема турбулентности (265).
2. Развитая турбулентность. Основное предположение Кармана. Универсальный логарифмический закон (266).
3. Универсальный логарифмический закон не соответствует экспериментальным данным (266).
4. Причина несоответствия: анализ и альтернативные предположения (267).
5. Альтернативный неуниверсальный закон (267).
6. Сравнение универсального логарифмического закона и альтернативного степенного закона (268).
7. Огибающая семейства степенных законов и промежуточные не-универсальные логарифмические законы (269).
8. Анализ турбулентных течений в пограничном слое (269).

9. Локальная структура развитых турбулентных потоков. Степенные законы Колмогорова – Обухова (270).
 10. Заключение (271).
- Список литературы (271).

1. Введение: проблема турбулентности

Турбулентность — состояние вихревого течения вязкой жидкости, в котором скорость, давление и другие свойства поля течения меняются во времени и пространстве резко и нерегулярно, можно считать, случайно. Основным безразмерным параметром, управляющим турбулентным потоком, является число Рейнольдса $Re = UL/\nu$. Здесь U — характерная скорость течения, L — характерный линейный масштаб, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Впервые осознанная Леонардо да Винчи, турбулентность в последние полтора столетия интенсивно изучалась инженерами, математиками и физиками. Однако следует признать, что даже в простейшем случае несжимаемой жидкости в том, что касается создания замкнутой в себе теории турбулентных течений, почти ничего не было получено исходя из первых принципов: уравнений Навье – Стокса и неразрывности.

Турбулентность при очень больших числах Рейнольдса ($\ln Re \gg 1$) традиционно рассматривается как одна из благополучных провинций королевства турбулентности. Считалось, и многими считается до сих пор, что два основных результата, полученных в этой области, надёжно установлены, и войдут, в основном в нетронутом виде, в будущую полную, замкнутую в себе теорию турбулентности. Эти результаты суть следующие: универсальный логарифмический закон Кармана – Прандтля для поля скоростей в пристеночной (промежуточной) области турбулентного сдвигового течения и "закон 2/3"

Г.И. Баренблатт. Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп. 36, 119997 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 380-41-52

E-mail: gibar@math.berkeley.edu, gibarenblatt@gmail.com

University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;

Lawrence Berkeley National Laboratory,

Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

А.Дж. Корин. University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;

Lawrence Berkeley National Laboratory,

Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

E-mail: chorin@math.berkeley.edu

В.М. Простокишин. Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Нахимовский просп. 36, 119997 Москва, Российская Федерация;

Lawrence Berkeley National Laboratory,

Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ",

Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация

E-mail: VMProstokishin@mephi.ru, v.m.prost@gmail.com

Статья поступила 5 ноября 2013 г.

Колмогорова – Обухова для локальной структуры "развитых" ($\ln Re \gg 1$) турбулентных течений. Указанные законы, в основном первый из них, обсуждаются в предлагаемой работе.

2. Развитая турбулентность.

Основное предположение Кармана.

Универсальный логарифмический закон

Начало фундаментальных исследований развитых турбулентных течений ($\ln Re \gg 1$) может быть датировано точно: это был пленарный доклад фон Кармана "Механическое подобие и турбулентность" на Третьем международном съезде по прикладной механике 25 августа 1930 г. Фон Карман рассматривал сдвиговые (по его терминологии — гидравлические) стационарные течения, однородные в направлении средней скорости, ограниченные твердой стенкой. Скорость в таких течениях зависит только от расстояния до стенки. К таким течениям относятся практически важные течения в длинных цилиндрических трубах, в пограничных слоях вдоль обтекаемой однородным потоком пластины вдали от входа, в каналах.

Основная гипотеза, принятая фон Карманом, была сформулирована им в следующей форме:

"На основе этих хорошо установленных экспериментальных фактов мы делаем предположение, что вне близкой окрестности стенки распределение скорости не зависит от вязкости".

Для точности приведём это предположение на языке оригинала [1]:

"Wir gründen auf diese experimentell festgestellten Tatsachen die Annahme, dass, abgesehen von der Wandnähe, die Geschwindigkeitsverteilung der mittleren Strömung von der Zähigkeit unabhängig ist."

Опираясь на это предположение, Л.Д. Ландау дал вывод универсального логарифмического закона в 1944 г. в книге *Механика сплошных сред* [2], впоследствии разделённой на две книги: *Гидродинамика* [3] и *Теория упругости*. Для течения в гладкой трубе (рис. 1) этот вывод может быть представлен следующим образом. Градиент

продольной скорости $\partial_y u$ на расстоянии y от стенки зависит от следующих управляющих параметров: диаметр трубы d , расстояние до стенки y , напряжение трения на стенке τ и свойства жидкости — её плотность ρ и кинематическая вязкость ν :

$$\partial_y u = f(y, \tau, d, \rho, \nu). \quad (1)$$

Введём "динамическую скорость" — величину $u_* = (\tau/\rho)^{1/2}$, которая будет в дальнейшем играть роль масштаба скорости. Анализ размерностей [4, 5] показывает, что параметр $u_* d/\nu$ представляет собой функцию одного безразмерного параметра — традиционного "глобального" числа Рейнольдса $Re = Ud/\nu$. Здесь U — средняя скорость потока — отношение объёмного потока (расхода) жидкости к площади поперечного сечения трубы. Далее, анализ размерностей приводит к соотношению

$$\partial_y u = \frac{u_*}{y} \Phi \left(Re, \frac{u_* y}{\nu} \right), \quad (2)$$

или в безразмерной форме

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{\eta} \Phi(Re, \eta). \quad (3)$$

Здесь $\varphi = u/u_*$ и $\eta = u_* y/\nu$ — локальное число Рейнольдса. Соотношения (2), (3) — бесспорны. Независимость от вязкости, предположенная фон Карманом, буквально означает, что, поскольку вязкость входит в оба числа Рейнольдса, глобальное и локальное, функция Φ представляет собой универсальную константу, обычно обозначаемую как $1/\kappa$; в свою очередь, κ получила название константы Кармана. Соотношение (3) предстаёт в форме

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{\kappa \eta}. \quad (4)$$

Интегрирование (4) даёт

$$\varphi = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + B, \quad (5)$$

где B также полагается универсальной постоянной. Для констант κ и B Ландау выбрал значения $\kappa = 0,4$, $B = 5,1$, так что в размерном виде закон (5) представляется в форме

$$u = u_* \left(2,5 \ln \frac{u_* y}{\nu} + 5,1 \right). \quad (6)$$

Соотношение (6) в литературе называется универсальным логарифмическим законом Кармана – Прандтля [6]. Закон Кармана – Прандтля традиционно рассматривается как одно из фундаментальных соотношений инженерной науки: фон Карман и Прандтль сумели убедить инженерный, а также научный мир, что этот закон фундаментален, а применявшиеся ранее инженерами-практиками степенные законы с коэффициентами, зависящими от числа Рейнольдса, суть не более чем эмпирические соотношения. Ниже будет показано, что на самом деле имеет место обратная ситуация.

3. Универсальный логарифмический закон не соответствует экспериментальным данным

Обратимся к экспериментальным фактам. Согласно универсальному логарифмическому закону, входящие в

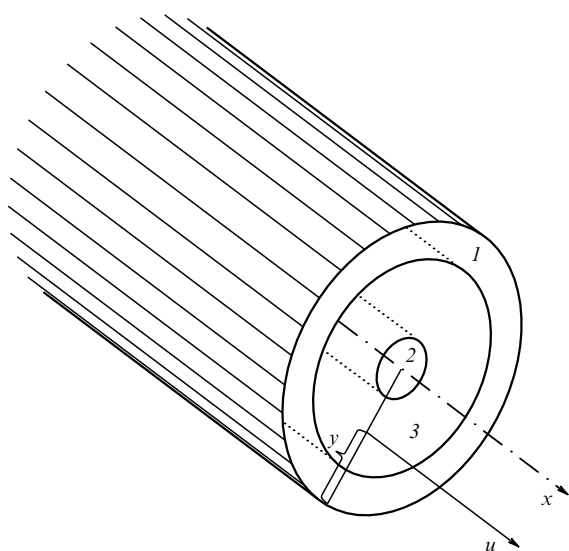


Рис. 1. Структура потока в длинной цилиндрической трубе при очень больших числах Рейнольдса.

него константы κ и B должны быть одинаковыми для всех экспериментов, проведённых на гладких трубах. Однако анализ имеющихся экспериментальных данных, полученных в авторитетных лабораториях, этого не подтверждает. Действительно, обнаружено, что логарифмическая зависимость безразмерной скорости от локального числа Рейнольдса на определённых интервалах наблюдалась во многих сериях опытов. Тем не менее при самом либеральном отношении найденные из опытов значения констант κ и B не могут быть признаны универсальными. Так, константа κ , принятая Ландау равной 0,4, в различных опытах получалась равной от 0,3 до 0,45; значение константы B , принятое Ландау равным 5,1, в различных опытах получалось равным от 3,5 до 6,3. Иными словами, можно утверждать, что универсальный логарифмический закон (6) не имеет места.

4. Причина несоответствия: анализ и альтернативные предположения

Возникает вопрос: в чём состоит дефект приведённого выше вывода? На самом деле здесь имеется математическая тонкость, которая не была принята во внимание. Действительно, функция Φ (см. формулу (3)) зависит от двух безразмерных аргументов: глобального и локального чисел Рейнольдса. Однако между ними имеется существенное различие: в каждом данном эксперименте глобальное число Рейнольдса ($Re = Ud/\nu$) постоянно и фиксированно, в то время как локальное число Рейнольдса ($\eta = u_*y/\nu$) меняется в широких пределах — от единиц до многих тысяч — поскольку оно соответствует локальному значению осреднённой скорости, которая измеряется экспериментатором по всему сечению. В приведённом выводе влиянием глобального числа Рейнольдса пренебрегалось и неявно предполагалось, что существует конечный предел функции Φ при $\eta \rightarrow +\infty$, так что при больших значениях локального числа Рейнольдса η функция Φ может быть заменена на константу. По существующей терминологии это называется *полной автомодельностью по локальному числу Рейнольдса*.

В наших работах мы отказались от гипотезы независимости градиента скорости от глобального числа Рейнольдса. Была принята гипотеза *неполной автомодельности по локальному числу Рейнольдса*, так что функция Φ при больших значениях η представляется в виде

$$\Phi = A(Re) \eta^{\alpha(Re)}. \quad (7)$$

Здесь A и α — некоторые функции Re , которые предстояло определить. В частном случае полной автомодельности, который привёл к несогласию с экспериментом, $A = \text{const}$, $\alpha = 0$. Очевидно, что существуют два возможных типа поведения функции Φ при больших η : существование или несуществование конечного предела при $\eta \rightarrow +\infty$. Частным случаем поведения второго типа является неполная автомодельность, существование которой связано с инвариантностью относительно дополнительной ренормализационной группы (см. [7, 8]).

Далее была принята гипотеза, названная "принципом исчезающей вязкости": *при $\nu \rightarrow 0$ градиент скорости стремится к конечному пределу*. Гипотеза неполной автомодельности по локальному числу Рейнольдса

$\eta = u_*y/\nu$ и гипотеза исчезающей вязкости дают возможность определить функцию Φ с точностью до трёх констант, универсальность которых была проверена на большом (порядка тысячи) числе экспериментов, выполненных в различных лабораториях, на различных установках, и подтверждена.

5. Альтернативный неуниверсальный закон

Согласно принятым предположениям, функция Φ при очень больших Re может быть представлена в виде

$$\Phi = (A_0 + A_1\alpha) \exp(\alpha \ln \eta), \quad \eta = \frac{u_*y}{\nu}, \quad (8)$$

и $\alpha = \alpha(Re)$ стремится к нулю при $Re \rightarrow \infty$. Здесь A_0 и A_1 — универсальные постоянные. Далее, возможны три случая. В первом случае $\alpha(Re)$ стремится к нулю быстрее, чем $1/\ln Re$, тогда функция Φ стремится к постоянной при $Re \rightarrow \infty$, так что имеет место полная автомодельность по обоим параметрам, Re и η , стремящимся к бесконечности. Как было показано выше, это приводит к противоречию с экспериментом. Если $\alpha(Re)$ стремится к нулю медленнее, чем $1/\ln Re$, то при $\nu \rightarrow 0$ функция Φ стремится к бесконечности, что противоречит принципу исчезающей вязкости. Остаётся принять, что при $Re \rightarrow \infty$ имеет место исключительный случай,

$$\alpha = \frac{A_2}{\ln \eta}, \quad (9)$$

где A_2 — также универсальная постоянная. В сделанных предположениях асимптотическое соотношение для безразмерного градиента скорости принимает вид

$$\partial_\eta \varphi = \frac{1}{\eta} \left(A_0 + \frac{A_1 A_2}{\ln Re} \right) \eta^{A_2/\ln Re}. \quad (10)$$

Интегрируя (10) и принимая дополнительное предположение,

$$\varphi(0) = 0, \quad (11)$$

которое обосновано экспериментально, мы приходим к степенному (нелогарифмическому) закону, включающему в себя зависимость от глобального числа Рейнольдса, т.е. не являющемуся универсальным:

$$\varphi = \left(\frac{A_0}{A_2} \ln Re + A_1 \right) \eta^{A_2/\ln Re}, \quad (12)$$

или в размерном виде

$$u = u_* \left(\frac{A_0}{A_2} \ln Re + A_1 \right) \left(\frac{u_*y}{\nu} \right)^{A_2/\ln Re}. \quad (13)$$

Проведённая обработка экспериментальных данных (см. [9] и указанные там ссылки на другие работы авторов) подтвердила универсальность констант A_0 , A_1 , A_2 и привела к следующим значениям:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A_1 = \frac{5}{2}, \quad A_2 = \frac{3}{2}, \quad (14)$$

так что предлагаемый нами неуниверсальный степенной закон для распределения скорости по сечению трубы (вне

малых окрестностей стенки и оси) имеет вид

$$u = u_* \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \text{Re} + \frac{5}{2} \right) \left(\frac{u_* y}{v} \right)^{3/(2 \ln \text{Re})}, \quad (15)$$

или в безразмерной форме

$$\varphi = \left(\frac{\sqrt{3} + 5\alpha}{2\alpha} \right) \eta^\alpha, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln \text{Re}}. \quad (16)$$

Подчеркнём, что скейлинговый (степенной) закон (15) не может быть получен только из анализа размерностей: существование этого закона связано с инвариантностью относительно дополнительной ренормализационной группы.

6. Сравнение универсального логарифмического закона и альтернативного степенного закона

Подведём промежуточные итоги.

Универсальный логарифмический закон представляется в виде

$$u = u_* (2,5 \ln \eta + 5,1), \quad \varphi = \frac{u}{u_*}, \quad \eta = \frac{u_* y}{v} \quad (17)$$

(Ландау и Лифшиц [2, 3], Монин и Яглом [6] и многие другие).

Неуниверсальный степенной закон представляется в виде

$$\varphi = \left(\frac{\sqrt{3} + 5\alpha}{2\alpha} \right) \eta^\alpha, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln \text{Re}}. \quad (18)$$

Константы (14) степенного закона (15), (18) были определены нами в результате обработки опытов Никурадзе [10], выполненных в лаборатории Л. Прандтля в Геттингенском университете (Германия); данные этих опытов представлены автором экспериментов в цифровой форме. Подчеркнём, что значения констант (14) считаются фиксированными и никакому подбору для различных экспериментов не подлежат. Степенной закон (18) может быть, очевидно, записан в виде

$$\psi = \ln \eta, \quad \text{где} \quad \psi = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{2\alpha\varphi}{\sqrt{3} + 5\alpha}, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln \text{Re}}. \quad (19)$$

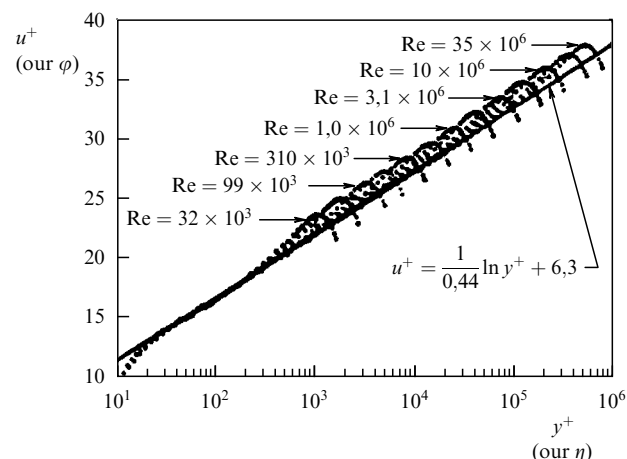


Рис. 2. Универсальный логарифмический закон не подтверждается данными экспериментов Загаролы.

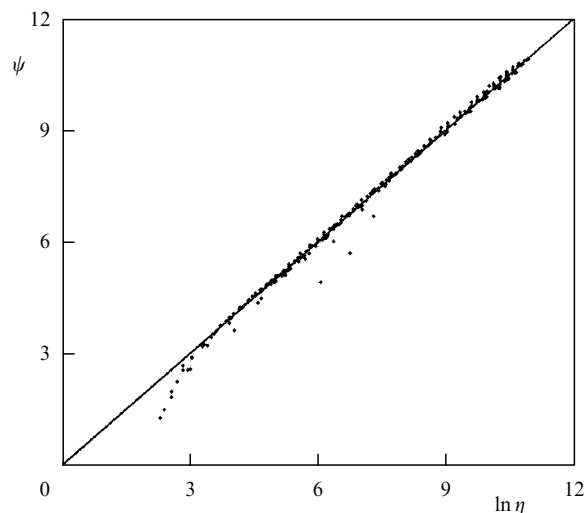


Рис. 3. Данные Никурадзе подтверждают новый степенной закон.

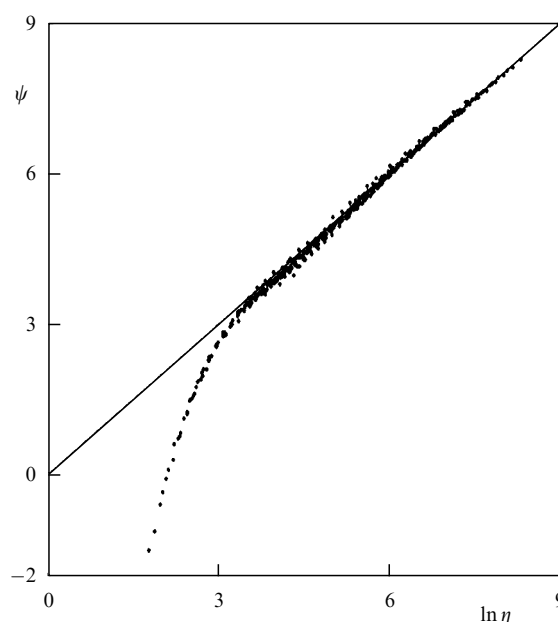


Рис. 4. Данные Загаролы подтверждают новый степенной закон.

В 1996 г., более чем через 60 лет после Никурадзе, в Принстонском университете (США) Загарола [11] выполнил на принципиально новой установке Supergipe большую серию экспериментов по турбулентному течению в трубах, по качеству сравнимых с экспериментами Никурадзе 1932 г. Идея этой установки была предложена выдающимся экспериментатором Г. Брауном. В отличие от Никурадзе, работавшего с течением воды, Загарола использовал течение газа высокого давления. Результаты экспериментов Загаролы на Supergipe воспроизведены на рис. 2 [11]. Видно, что они не подтверждают универсальный логарифмический закон: чётко обнаруживается расщепление экспериментальных кривых по числу Рейнольдса, экспериментальные точки не ложатся на прямую $\varphi = (1/0,44) \ln \eta + 6,3$, соответствующую, по мнению автора, универсальному логарифмическому закону; константы выбранной прямой существенно отличаются от повсеместно принятых в литературе (см. выше).

В то же время обработка экспериментальных данных по степенному закону (19) в обоих случаях (как в экспериментах Никурадзе, так и в экспериментах Загаролы) обнаруживает показательное совпадение: начиная с $\ln \eta \sim 3$ опытные точки (кроме четырёх из более чем 250 в опытах Никурадзе) ложатся на единую кривую $\psi = \ln \eta$ степенного закона — биссектрису (рис. 3) первого квадранта. Заметим (см. [9]), что при больших числах Рейнольдса нами на установке Supergipe была выявлена роль шероховатости.

Подчеркнём ещё одно принципиальное различие универсального и степенного законов: в координатах $\ln \eta$, φ экспериментальные точки, согласно универсальному логарифмическому закону, должны ложиться на единую прямую линию $\varphi = (1/0,4) \ln \eta + 5,1$. Это не подтверждается опытными данными (см. рис. 2 [11]). В то же время в координатах $\ln \eta$, ψ опытные точки должны, согласно степенному закону, ложиться на единую прямую, что подтверждается как опытами Никурадзе, так и опытами Загаролы (рис. 3, 4). В координатах $\ln \eta$, φ опытные точки должны занимать некоторую область, что подтверждается данными рис. 2.

7. Огибающая семейства степенных законов и промежуточные неуниверсальные логарифмические законы

Семейство кривых степенного закона (15) имеет, как показывает анализ (см., например, [12] и ссылки там на предыдущие работы авторов), огибающую. В диапазоне чисел Рейнольдса, исследованном Никурадзе, эта кривая в координатах $\ln \eta$, φ близка к прямой $\varphi = 2,5 \ln \eta + 5,1$. По-видимому, в работе Никурадзе были проведены измерения (или представлены данные), только близкие к огибающей, что и привело автора и его последователей к выводу о справедливости универсального логарифмического закона. В действительности дело обстоит следующим образом (рис. 5, участок II): в плоскости $\ln \eta$, φ кривые семейства степенных законов имеют промежуточно асимптотические прямолинейные участки, описываемые формулой

$$\varphi = \exp\left(\frac{3}{2}\right) \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{15}{4 \ln \text{Re}} \right) \ln \eta - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \text{Re} - \frac{5}{4} \right], \quad (20)$$

т.е. соотношениями, имеющими вид логарифмического закона (12),

$$\varphi = \frac{1}{\kappa_{\text{eff}}(\text{Re})} \ln \text{Re} + B_{\text{eff}}(\text{Re}), \quad (21)$$

но с константами

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{eff}}(\text{Re}) &= \frac{\exp(-3/2)}{(\sqrt{3}/2 + 15/(4 \ln \text{Re}))}, \\ B_{\text{eff}}(\text{Re}) &= -\exp\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\ln \text{Re}}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{4} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

зависящими от глобального числа Рейнольдса.

При $\text{Re} \rightarrow \infty$ значение константы $\kappa(\text{Re})$ стремится очень медленно к пределу $\kappa_{\infty} = 2/(\sqrt{3} \exp(3/2)) \approx 0,2776$, а аддитивная постоянная $B(\text{Re})$ стремится к $-\infty$. Таким

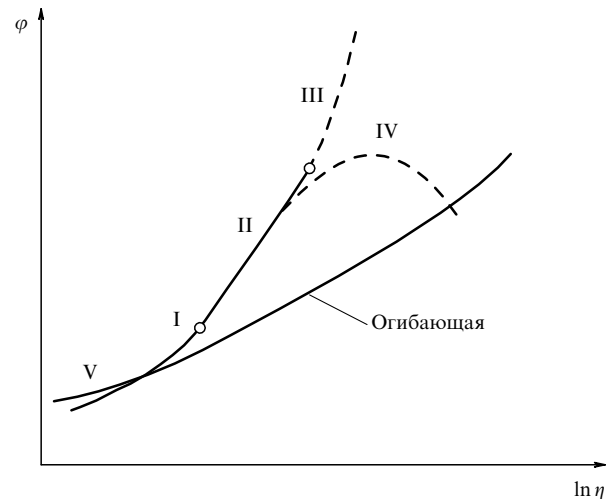


Рис. 5. Огибающая степенных законов и неуниверсальные логарифмические законы.

образом, если проводить измерения в точках, далёких от огибающей, то на графиках в координатах $\ln \eta$, φ должны появляться прямолинейные участки с наклоном, существенно отличающимся от наклона огибающей, положение которых зависит от числа Рейнольдса. Это на самом деле и было выявлено Загаролой в опытах на установке Supergipe (см. рис. 2). Однако Загарола по не вполне понятной причине счёл свои результаты подтверждением логарифмического закона Кармана–Прандтля, хотя и с другими значениями констант: $\kappa = 0,44$, $B = 6,3$; мы же видим здесь чёткое подтверждение неуниверсальности.

8. Анализ турбулентных течений в пограничном слое

Проведённый анализ распределения осреднённой продольной скорости в промежуточной области гладких труб должен, по идее его вывода, быть справедливым для любых сдвиговых потоков, ограниченных твёрдой гладкой стенкой, при очень больших числах Рейнольдса. Точнее, наше предсказание формулируется следующим образом: в промежуточной области любого сдвигового потока, примыкающей к вязкому подслою, должен выполняться неуниверсальный (зависящий от числа Рейнольдса) степенной закон (18). Наиболее подходящим для проверки этого утверждения в важном частном случае представляется течение в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой свободным потоком с постоянной скоростью U . Подчеркнём, что константы, заданные соотношениями (14), остаются фиксированными. Здесь возникает, однако, следующий вопрос: что такое Re для течения в пограничном слое¹?

Традиционно в экспериментальных исследованиях течений в турбулентном пограничном слое в качестве масштаба длины берётся "толщина потери импульса"

$$\theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\infty u(U - u) dy, \quad (23)$$

¹ Как говорил ЯБ: "Если вы просите бармена налить вам воду без сиропа, то он не спрашивает, без какого сиропа вам налить. Если — с сиропом, то вопрос: "с каким?" — естествен".

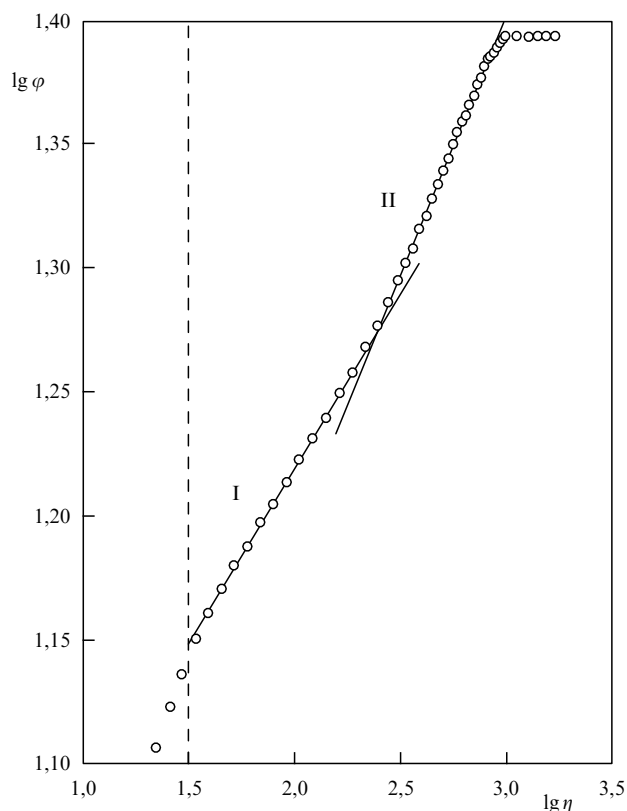


Рис. 6. Структура течения в пограничном турбулентном слое: два степенных закона, резко переходящих один в другой.

и соответствующее число Рейнольдса $Re_\theta = U\theta/\nu$. Однако при сравнении с не универсальным законом мы не можем взять за основу это определение, так как оно содержит в себе элемент произвола. Поэтому был избран следующий путь [13]: полученное экспериментально распределение скорости было представлено в билигарифмической системе координат $\lg \eta$, $\lg \varphi$. Во всех случаях получилось, что это распределение вне вязкого подслоя имеет форму ломаной линии (рис. 6). Таким образом, течение в промежуточном слое, примыкающем к вязкому подслою (I на рис. 6), описывается автомодельным законом $\varphi = A\eta^\alpha$, где коэффициенты A и α могут быть вычислены независимо статистической обработкой опытных данных; при этом разброс оказывается достаточно малым. Выберем выражение для числа Рейнольдса в форме $Re = UA/\nu$, где A — некоторый линейный масштаб. Далее вычисляются два значения числа $\ln Re$ — $\ln Re_1$ и $\ln Re_2$ — путём решения двух уравнений, соответствующих закону (18):

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln Re_1 + \frac{5}{2} = A, \quad \frac{3}{2 \ln Re_2} = \alpha. \quad (24)$$

Если предлагаемый степенной закон для сдвиговых течений (18), (19) справедлив, то значения $\ln Re_1$ и $\ln Re_2$ должны быть близкими.

Действительно [9, 13], во всех случаях значения $\ln Re_1$ и $\ln Re_2$ оказались близкими, так что естественно было выбрать значение эффективного числа Re в виде

$$\ln Re = \frac{\ln Re_1 + \ln Re_2}{2}, \quad Re = \sqrt{Re_1 Re_2}. \quad (25)$$

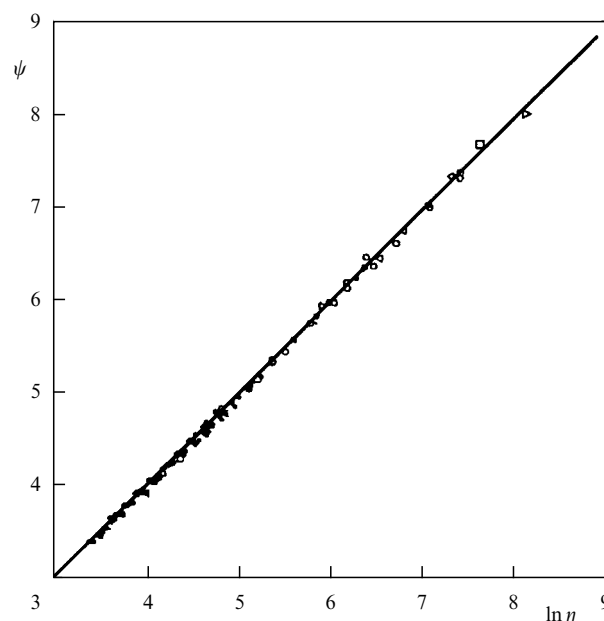


Рис. 7. Течение в нижней промежуточной области пограничного слоя удовлетворяет новому степенному закону.

В плоскости $\ln \eta$, ψ (см. [13]) получилось (рис. 7), что, в соответствии со степенным законом (19), экспериментальные точки с удовлетворительной точностью ложатся на биссектрису первого квадранта.

Полученные результаты являются достаточным подтверждением того, что универсальный логарифмический закон Кармана – Прандтля не может быть признан правильным и не может служить основой для преподавания и инженерных расчётов.

Мы рекомендуем для использования в расчётах течений в гладких трубах степенной закон (18)

$$\varphi = \frac{u}{u_*} = \left(\frac{\sqrt{3} + 5\alpha}{2} \right) \eta^\alpha, \quad \eta = \frac{u_* y}{\nu}, \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{3}{2 \ln Re}, \quad Re = \frac{\bar{u} d}{\nu},$$

и соответствующий закон сопротивления (см. его вывод в [9]):

$$\lambda = 8 \frac{u_*^2}{\bar{u}^2} = \frac{8}{\psi^{2/(1+\alpha)}}, \quad \psi = \frac{\exp(3/2)(\sqrt{3} + 5\alpha)}{2^\alpha \alpha (1 + \alpha)(2 + \alpha)}. \quad (27)$$

9. Локальная структура развитых турбулентных потоков. Степенные законы Колмогорова – Обухова

Основным законом локальной структуры турбулентных течений при очень больших числах Рейнольдса Re считается "закон двух третей" Колмогорова – Обухова [14–17],

$$D_{LL} = C\varepsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad (28)$$

и его спектральный аналог — "закон пяти третей". Здесь

$$D_{LL}(r) = \overline{[u_L(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_L(\mathbf{x})]^2}$$

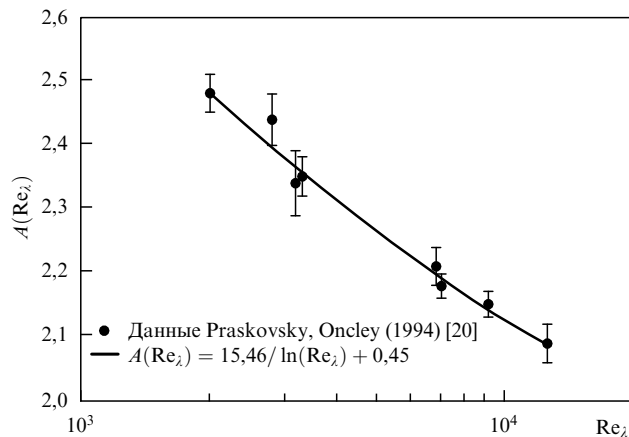


Рис. 8. Экспериментальные данные демонстрируют зависимость константы в законе Колмогорова – Обухова от числа Рейнольдса.

— продольная структурная функция, через которую для несжимаемой жидкости выражаются все компоненты тензора вторых моментов разностей скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ и $\mathbf{x}$, u_L — компонента скорости в направлении вектора $\mathbf{r}$, ε — средняя скорость диссипации энергии на единицу массы. Аналогия законов локальной структуры и сдвиговых течений при очень больших числах Re отмечалась ранее [18].

Естественно возникает вопрос об универсальности "закона двух третей", т.е. о независимости константы C и показателя степени от числа Рейнольдса. Соображения, аналогичные изложенным выше для сдвиговых течений, подсказывают форму зависимости от Re :

$$D_{LL} = A(Re) (\varepsilon r)^{2/3} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^\alpha, \quad (29)$$

где $\lambda = \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4}$ — колмогоровский масштаб,

$$A(Re) = A_0 + \frac{A_1}{\ln Re}, \quad \alpha = \frac{A_2}{\ln Re} \quad (30)$$

(см. также [19]). В отличие от сдвиговых потоков, количество надёжных экспериментальных данных для локальной структуры очень мало. Однако в экспериментах уже давно была отмечена (см. [17]) неуниверсальность константы C (зависимость от числа Рейнольдса!).

Показательный пример. На графике рис. 8 построена зависимость C от числа Рейнольдса, полученная по экспериментальным данным [20] на трубе ЦАГИ (Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского). В отличие от сдвиговых течений, поправка α в этом случае может остаться незамеченной по сравнению с $2/3$, поскольку $\alpha \sim 1/\ln Re$, $\ln Re \gg 1$.

Историческое замечание. В примечании к своей статье [16], переизданной в его собрании трудов [21], А.М. Обухов упоминает доклад А.Н. Колмогорова, состоявшийся уже в конце 1939 г., вскоре после начала их занятий турбулентностью. В этом докладе, согласно Обухову, было высказано утверждение, эквивалентное на самом деле гипотезе неполной автомодельности (29). Однако,

как пишет Обухов, Колмогорову в 1939 г. не удалось определить показатель степени — константу α : это было сделано Колмогоровым "на основании соображений подобия" после независимо (специально подчеркнуто Колмогоровым) полученного Обуховым подсчёта баланса распределения энергии пульсаций по спектру. Очевидно, что "соображения подобия" потребовали пренебречь влиянием вязкости.

10. Заключение

Наряду с лордом Рэлеем, Яков Борисович Зельдович был уникален в классической физике XX в. Турбулентность была областью его непреходящих активных интересов. Авторы глубоко сожалеют, что судьба не дала им возможности доложить ЯБ эту работу, во многом созвучную его идеям.

Список литературы

1. von Kármán Th "Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz", in *Proc. of the 3rd Intern. Congress Applied Mechanics, Stockholm, 24–29 August 1930* Vol. 1 (Eds C W Oseen, W Weibull) (Stockholm: Aktiebolaget Sveriges Litografiska Tryckerier, 1931) pp. 85–93
2. Ландау Л, Лифшиц Е *Механика сплошных сред: Гидродинамика и теория упругости* (Теоретическая физика, Т. 3, Под общ. ред. Л Д Ландау) (М. – Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1944)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (Теоретическая физика, Т. 6) Учеб. пособие для физ. спец. ун-тов: В 10 т., 3-е изд., перераб. (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Course of Theoretical Physics, Vol. 6) 2nd ed., rev. (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
4. Bridgman P W *Dimensional Analysis* (New Haven: Yale Univ. Press, 1931) [Бриджмен П У *Анализ размерностей* (М. – Ижевск: РХД, 2001)]
5. Баренблатт Г И *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (Л.: Гидрометеиздат, 1982) [Barenblatt G I *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996)]
6. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности Ч. 1* (М.: Наука, 1965) [Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics; Mechanics of Turbulence* Vol. 1 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971)]
7. Goldenfeld N *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1992)
8. Barenblatt G I *Scaling* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003) [Баренблатт Г И *Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг* (Долгопрудный: Интеллект, 2009)]
9. Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *Appl. Mech. Rev.* **50** 413 (1997)
10. Nikuradse J "Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren", VDI (Verein Deutscher Ingenieure)-Forschungsheft 356, Supplement to "Engineering Research" ("Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens") Edition B, Vol. 3 (Berlin: VDI-Verlag, 1932) [Translated into English: "Laws of turbulent flow in smooth pipes", NASA TT F-10,359 (Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1966)]
11. Zagarola M V "Mean flow scaling of turbulent pipe flow", Ph.D. Thesis (Princeton: Princeton Univ., 1996)
12. Barenblatt G I *Flow, Deformation and Fracture* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014)
13. Barenblatt G I, Chorin A J, Prostokishin V M *J. Fluid Mech.* **410** 263 (2000)
14. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941) [Translated into English: Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 9 (1991)]

15. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **31** 19 (1941)
16. Обухов А М *Изв. АН СССР Сер. геогр. и геофиз.* **5** 4 (1941)
17. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности Ч. 2* (М.: Наука, 1967) [Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics; Mechanics of Turbulence* Vol. 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1975)]
18. Chorin A "Theories of turbulence" *Lecture Notes Math.* **615** 36 (1977)
19. Barenblatt G I, Goldenfeld N *Phys. Fluids* **7** 3078 (1995)
20. Praskovsky A S, Oncley S *Phys. Fluids* **6** 2886 (1994)
21. Обухов А М *Турбулентность и динамика атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1988)

Turbulent flows at very large Reynolds numbers: new lessons learned

G.I. Barenblatt

*P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,
Nakhimovskii prosp. 36, 119997 Moscow, Russian Federation;
University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA
Tel. +7 (499) 380 41 52
E-mail: gibar@math.berkeley.edu, gibarenblatt@gmail.com*

A.J. Chorin

*University of California, 94720 Berkeley, CA, USA;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA
E-mail: chorin@math.berkeley.edu*

V.M. Prostokishin

*P.P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,
Nakhimovskii prosp. 36, 119997 Moscow, Russian Federation;
Lawrence Berkeley National Laboratory, Cyclotron Road 1, 94720 Berkeley, CA, USA;
National Research Nuclear University "MEPhI",
Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation
E-mail: VMProstokishin@mephi.ru, v.m.prost@gmail.com*

The universal (Reynolds number independent) von Kármán–Prandtl logarithmic law for the velocity distribution in the basic intermediate region of turbulent shear flow is generally considered to be one of the fundamental laws of engineering science and is taught universally in fluid mechanics and hydraulics courses. In the present review it is shown that this law is based on an assumption which cannot be considered as a correct one and which does not correspond to experiment. Nor is L.D. Landau's derivation of this law quite correct. In this paper, an alternative scaling law explicitly incorporating the influence of the Reynolds number is discussed, as well as the corresponding drag law. The study uses the concept of intermediate asymptotics and that of incomplete similarity in the similarity parameter. In the formation of these ideas Yakov Borisovich Zeldovich played an outstanding role. This work is a tribute to his glowing memory.

PACS numbers: **47.10. – g**, **47.27. – i**, 47.27.Ak, 47.27.Gs

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403d.0265

Bibliography — 21 references

Received 5 November 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 265–272 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (3) (2014)

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Атом водорода в сильном магнитном поле

В.С. Попов, Б.М. Карнаков

Рассмотрены свойства спектра энергий атома водорода, находящегося в сильном ($B > B_a \sim 10^9$ Гс) или сверхсильном ($B \gtrsim B_{cr} \sim 10^{14}$ Гс) магнитном поле, когда движение электрона становится релятивистским и существенны эффекты квантовой электродинамики. С использованием адиабатического приближения получены аналитические формулы для энергии уровней, обладающие высокой точностью в полях $B > 10^{10}$ Гс. Проведено сравнение этих формул с известными из литературы асимптотиками и с результатами численных расчётов. Отмечается характерная особенность движения электрона в сильных магнитных полях: при $B \gtrsim B_{cr}$ поперечное движение электрона становится релятивистским, а продольное (вдоль $\mathbf{B}$) движение описывается формулами нерелятивистской теории и к нему применимо адиабатическое приближение. Обсуждаются следующие вопросы: качественное различие в поведении чётных и нечётных уровней в полях $B \gg B_a$; снятие вырождения между чётными и нечётными состояниями атома водорода; соотношения скейлинга в спектре атома водорода при различных значениях квантовых чисел (n, n_p, m) и напряжённости магнитного поля; размеры, форма и квадрупольный момент атома водорода при $B \gg B_a$; радиационные переходы $pr \rightarrow 1s$ в сильном магнитном поле; релятивистские эффекты и эффекты квантовой электродинамики: влияние поляризации вакуума и аномального магнитного момента электрона на положение атомных уровней; экранировка кулоновского потенциала и "замерзание" энергий атомного спектра при $B \rightarrow \infty$; проявление эффекта Зельдовича в спектре уровней атома водорода в сильном магнитном поле. Кратко обсуждается проблема критического заряда ядра; предложены простые асимптотические формулы для Z_{cr} , справедливые для нижних уровней электронного спектра. Приведены некоторые сведения об экстремальных магнитных полях, полученных в лабораторных экспериментах и встречающихся в космосе. Рассмотрена кулоновская перенормировка длины рассеяния в резонансной ситуации, когда в энергетическом спектре системы имеется мелкий уровень.

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 32.30.-r

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403e.0273

Содержание

1. Введение (273).
2. Постановка задачи и основные уравнения (274).
3. Асимптотические формулы для спектра чётных уровней атома водорода в сильном магнитном поле (276).
4. Сравнение уравнения (3.7) с другими приближениями и с численными расчётами (279).
 - 4.1. Основной уровень $1s$.
 - 4.2. Возбуждённые уровни.
5. Нечётные уровни (281).
6. Размеры, квадрупольный момент атома и вероятности радиационных переходов при $B \gg B_a$ (282).
7. Релятивистские эффекты (283).
8. Эффекты квантовой электродинамики (284).
9. Об эффекте Зельдовича в атомных спектрах (286).

В.С. Попов. Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Аlikhanova, ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация
E-mail: markina@itep.ru

Б.М. Карнаков. Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация
E-mail: karnak@theor.mephi.ru

Статья поступила 6 июля 2013 г.

10. Заключительные замечания (289).

11. Приложения (290).

А. О критическом заряде ядра. Б. Экстремальные магнитные поля. В. О кулоновских поправках к длине рассеяния.

Список литературы (295).

1. Введение

Квантово-механическая задача о спектре атома водорода в сильном магнитном поле $B \gg B_a \sim 10^9$ Гс представляет значительный интерес для астрофизики¹ [1–4], физики твёрдого тела и атомной физики, она рассматривалась многими авторами (начиная с пионерской работы Шиффа и Снайdera [5], в которой было введено адиабатическое приближение, использованное всеми последующими авторами). Этой задаче посвящены десятки работ (см., например, [6–26] и приведённые там ссылки). Поскольку переменные в уравнении Шрёдингера не разделяются, применялись различные численные

¹ Магнитные белые карлики (поля до 350 МГс на поверхности звезды) и в особенности нейтронные звёзды: пульсары с $B \gtrsim 10^{12}$ Гс и магнитары — специальный класс нейтронных звёзд, в которых магнитные поля могут достигать рекордных значений вплоть до 10^{15} Гс.

методы решения уравнений Шрёдингера и Дирака [13–16], имеются также аналитические аппроксимации. Мы рассмотрим приближённые асимптотические формулы (как известные из литературы, так и полученные авторами статьи) для энергии уровней атома водорода в сильном магнитном поле. Обсуждаются следующие вопросы: точность этих формул в зависимости от поля B ; существенное различие в поведении чётных и нечётных уровней при $B \gg B_a$; сжатие и деформация атома в сильном магнитном поле; влияние поляризации вакуума в сверхсильном магнитном поле и аномального магнитного момента электрона на положение атомных уровней; "замерзание" энергии уровней в полях $B \gg 10^{16}$ Гс; проявление эффекта Зельдовича (или "перестройки атомного спектра") в спектре атома водорода. В приложениях А, Б, В обсуждаются проблемы критического заряда ядра, $Z > 137$, и приводятся краткие сведения о максимальных магнитных полях, полученных в лаборатории и известных из астрофизики.

Приведём формулы и численные значения основных величин в рассматриваемой задаче (ниже $e = 4,80 \times 10^{-10}$ ед. CGSE — заряд электрона, $m_e = 9,11 \times 10^{-28}$ г — его масса, $a_B = \hbar^2/m_e e^2 = 0,529 \times 10^{-8}$ см — радиус Бора). Атомная единица напряжённости магнитного поля $B_a = m_e^2 e^3 c / \hbar^3 = 2,349 \times 10^9$ Гс; $\mathcal{H} = B/B_a$ — безразмерное приведённое поле; $B_{cr} = m_e^2 c^3 / e \hbar = 4,414 \times 10^{13}$ Гс — "критическое" (или характерное) [27–29] поле в квантовой электродинамике (КЭД) [30], при этом $B_a/B_{cr} = \alpha^2 = 5,325 \times 10^{-5}$ ($\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$); $a_H = \sqrt{\hbar/eB}$ — магнитная длина, или радиус Ландау,

$$a_H = \frac{a_B}{\sqrt{\mathcal{H}}} = \begin{cases} a_B & \text{при } B = B_a, \\ \alpha a_B = l_C & \text{при } B = B_{cr}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $l_C = \hbar/m_e c = 3,861 \times 10^{-11}$ см — комптоновская длина волны электрона; $\omega_H = eB/m_e c$ — круговая частота вращения классического нерелятивистского электрона в магнитном поле B . Расстояние между соседними уровнями Ландау составляет

$$\hbar\omega_H = \frac{e\hbar}{m_e c} B = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \mathcal{H} = \begin{cases} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = 2 \text{ Ry} = 27,21 \text{ эВ}, & B = B_a, \\ m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}, & B = B_{cr}, \end{cases} \quad (1.2)$$

а энергии атомных уровней равны

$$E_n = -\lambda_n^2 \text{ Ry}, \quad (1.3)$$

где $\text{Ry} = m_e e^4 / 2\hbar^2 = 13,61$ эВ (ридберг), λ_n — безразмерный импульс связанного состояния.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Отметим следующие закономерности задачи о движении электрона в центральном поле притяжения $U(r)$ при наличии однородного магнитного поля B , направленного вдоль оси z , и её особенности в случае кулоновского потенциала $U_C = -e^2/r$. Гамильтониан системы в нер-

елятивистском приближении, гамильтониан Паули

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{\sigma} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right)^2 + U(r), \quad (2.1)$$

в цилиндрических координатах имеет вид (в атомных единицах $e = \hbar = m_e = 1$)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \Delta_{\perp} + \frac{1}{8} \mathcal{H}^2 \rho^2 + \frac{1}{2} \mathcal{H}(\hat{l}_z + \hat{\sigma}_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U(\sqrt{\rho^2 + z^2}), \quad (2.2)$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{A} = [\mathbf{Br}]/2$. Этот гамильтониан аксиально симметричен, что позволяет записать его собственные функции в виде

$$\Psi_E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi) \varphi_{\sigma_z}(\sigma) \psi(\rho, z), \quad (2.3)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \sigma_z = \pm 1,$$

где $\varphi_{\sigma_z}(\sigma)$ — спиновая функция. Функции $\psi(\rho, z)$ имеют определённую чётность при отражении в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{B}$, т.е. при преобразовании $z \rightarrow -z$, однако переменные ρ и z не разделяются.

В том случае, когда на фоне магнитного поля потенциал $U(r)$ может рассматриваться как возмущение, для решения уравнения Шрёдингера может быть использовано адиабатическое приближение [2, 5, 6]. При этом волновые функции $\psi(\rho, z)$ в (2.3) записываются в виде (как для чётных, так и для нечётных состояний)

$$\psi(\rho, z) = R_{n\rho m}(\rho) \chi_{nn\rho m}(z), \quad n_{\rho} = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

где $R_{n\rho m}(\rho)$ — известные функции для радиального поперечного движения электрона в чисто магнитном поле [6], а спектр связанных состояний гамильтониана имеет вид

$$E_{nn\rho m \sigma_z} = N\mathcal{H} - \frac{1}{2} \lambda_{nn\rho m}^2, \quad (2.5)$$

$$N = n_{\rho} + \frac{1}{2} (|m| + m + \sigma_z + 1).$$

Здесь $N = 0, 1, 2, \dots$ — номер зоны Ландау, $\sigma_z = \pm 1$ — удвоенная проекция спина электрона на направление магнитного поля, $n = 0, 1, 2, \dots$ — квантовое число для продольного движения, а $\lambda_n^2/2$ определяет энергии соответствующих уровней, обусловленные действием потенциала $U(r)$. Их значения находятся из уравнения Шрёдингера для продольной части волновой функции электрона:

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U_{\text{eff}}(|z|) + \frac{\lambda_n^2}{2} \right\} \chi_n(z) = 0, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (2.6)$$

в котором эффективная потенциальная энергия (потенциал $U(r)$, усреднённый по быстрому поперечному движению электрона в магнитном поле) даётся выражением [2, 5, 6]

$$U_{\text{eff}}(|z|) = \int_0^{\infty} U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) |R_{n\rho m}(\rho)|^2 \rho d\rho. \quad (2.7)$$

Конкретный вид энергии U_{eff} зависит от квантовых чисел n_{ρ} и $|m|$ поперечного движения.

² Энергия взаимодействия магнитного момента $\mu = e\hbar/m_e c$ с таким полем совпадает с энергией кулоновского взаимодействия $e^2/a_B = m_e e^4/\hbar^2 = 27,21$ эВ. Характерные значения напряжённости магнитного поля в атоме водорода $B \sim B_{at} \sim \alpha^2 B_a \sim 10^5$ Гс.

Таким образом, в адиабатическом приближении происходит разделение переменных ρ и z . При этом область локализации электрона в поперечном направлении, определяемая $|R_{n\rho m}(\rho)|^2$, по порядку величины равна $\rho \sim a_H \sim a_B/\sqrt{\mathcal{H}}$ (для нижних уровней Ландау). Поэтому если радиус действия потенциала $r_0 \gg a_H$, то магнитное поле сильно сжимает электрон в поперечном направлении и распределение электронной плотности $|\psi(\mathbf{r})|^2$ принимает спичеобразную форму (вдоль оси z) с центром в точке $r = 0$. Соответственно, если центральный потенциал $U(r)$ не слишком сингулярен в нуле, так что $r|U(r)| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то в интеграле в формуле (2.7) можно заменить $U(\sqrt{\rho^2 + z^2})$ на $U(|z|)$. Таким образом, в этом случае одномерный эффективный потенциал совпадает с исходным центральным потенциалом и уже не зависит от напряжённости магнитного поля. Поэтому распределение электронной плотности вдоль оси z и спектр продольного движения перестают зависеть от напряжённости поля.

Сравним энергетический спектр одномерного движения в симметричном потенциале $U(|z|)$ на всей оси $-\infty < z < +\infty$ со спектром ns -состояний в таком же центральном потенциале $U(r)$, $r \geq 0$. Как известно, если записать волновую функцию ns -состояния в виде $\psi_{ns} = \chi_{nr}(r)/(\sqrt{4\pi}r)$, то уравнение Шрёдингера для $\chi_{nr}(r)$ принимает вид, аналогичный уравнению (2.6). Однако теперь $r \geq 0$ и функция $\chi_{nr}(r)$ удовлетворяет граничному условию $\chi_{nr}(0) = 0$. Поскольку в случае нечётных состояний функции $\chi(z)$ в уравнении (2.6) также удовлетворяют условию $\chi_n^{(-)}(0) = 0$, отсюда следует совпадение спектров:

$$E_n^{(-)} = E_{ns}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

В случае чётных состояний подобная аналогия неприменима, поскольку теперь $\tilde{\psi}_{ns}(r) = \chi_n^{(+)}(r)/r \propto 1/r \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, а такие сингулярные решения уравнения Шрёдингера обычно исключаются из рассмотрения (поскольку для них $\Delta\tilde{\psi}_{ns}(r) \propto \delta(r)$ при $r \rightarrow 0$), кроме случая трёхмерного потенциала нулевого радиуса. Такой потенциал, локализованный в точке $r = 0$, определяется наложением на волновую функцию граничного условия вида [31, 32]

$$\frac{d \ln \chi(r)}{dr} = -\frac{1}{a_s}, \quad \text{или} \quad \tilde{\psi}_{ns}(r) \approx \text{const} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_s} \right) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Здесь a_s является длиной s -рассеяния на короткодействующем потенциале $U_s(r)$ с радиусом действия r_0 , который моделируется таким потенциалом нулевого радиуса. При этом параметр $\kappa_0 = 1/a_s$ определяет энергию мелкого реального (при $a_s > 0$) или виртуального (при $a_s < 0$) s -уровня, $E_0 = -\hbar^2 \kappa_0^2 / 2m$, существующего в рассматриваемой системе в случае $|E_0| \ll \hbar^2 / m r_0^2$ ($|a_s| \gg r_0$).

Поэтому легко заметить, что с чётными решениями $\chi_n^{(+)}(|z|)$ уравнения Шрёдингера (2.6) на всей оси z для одномерного потенциала $U(|z|)$, для которых $\chi_n^{(+)}(0) = \text{const} \neq 0$ и $\chi_n^{(+)}(0) = 0$, однозначно связаны решения $\tilde{\psi}_{ns}(r) = \chi^{(+)}(r)/(\sqrt{2\pi}r)$ трёхмерного уравнения Шрёдингера для s -состояний с тем же потенциалом $U(r)$, которые удовлетворяют граничному условию (2.9) с $a_s = \infty$, т.е. $\kappa_0 = 0$. Это означает, что сферически-симметричный потенциал является суперпозицией потенциала $U(r)$ (в рассматриваемой задаче это — эффективный потенциал

$U_{\text{eff}}(r)$) и потенциала нулевого радиуса (в точке $r = 0$), для которого $\kappa_0 = 0$, т.е. в момент появления связанного состояния в таком потенциале.

Существенно, что случай $\kappa_0 = 0$ означает, что такой потенциал нулевого радиуса моделирует "сильный" короткодействующий потенциал с радиусом r_0 в момент возникновения в нём связанного состояния (с нулевой энергией связи). При этом рассеяние медленных частиц, $\kappa r_0 \ll 1$, на таком потенциале носит резонансный характер³, сечение рассеяния $\sigma \approx 2\pi\hbar^2/mE$ (E — энергия электрона) [6].

Под влиянием такого потенциала происходит перестройка спектра s -уровней в дальнедействующем потенциале $U_L(r)$ с радиусом действия $r_L \gg r_0$, что видно из квазиклассического правила квантования⁴ в этом случае:

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^b \sqrt{2m_e[E_{n,0} - U(r)]} dr = \pi \left(n_r + \frac{3}{4} + \tilde{\gamma} \right), \quad (2.10)$$

где b — точка остановки. Уровням в изолированном потенциале $U(r)$ отвечает $\tilde{\gamma} = 0$, а их сдвигам под влиянием потенциала нулевого радиуса с $\kappa_0 = 0$ — значение $\tilde{\gamma} = -1/2$ (уровни сильно сдвинуты вниз: для них $n_r \rightarrow n_r - 1/2$).

Однако в случае атома водорода замена в (2.7) кулоновского потенциала $U_C = -e^2/\sqrt{\rho^2 + z^2}$ на одномерный кулоновский потенциал $U_{\text{eff}}(|z|) = -e^2/|z|$ не оправдана. Дело в том, что в двумерном и трёхмерном случаях кулоновский потенциал на малых расстояниях выступает как малая поправка. Это проявляется, в частности, в том, что структура ядра с зарядом $Z \lesssim 10$ слабо влияет на сдвиги атомных уровней. В одномерном случае, когда $U = -e^2/|z|$ на всей оси z , ситуация совершенно иная. Два независимых решения уравнения Шрёдингера при $z \rightarrow \pm 0$ имеют вид⁵ (справа и слева от точки $z = 0$):

$$\begin{aligned} \psi_E^\pm(z) \approx & C_{E,1}^\pm \left[1 - \frac{2|z|}{a_B} \ln \frac{|z|}{a_B} + O\left(\frac{z^2}{a_B^2} \ln \frac{|z|}{a_B}\right) \right] + \\ & + C_{E,2}^\pm \left[|z| + O\left(\frac{z^2}{a_B}\right) \right], \quad z \rightarrow \pm 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

и обычные для регулярных потенциалов условия непрерывности волновой функции и её производной не могут быть выполнены в точке $z = 0$, поскольку в этом случае $|d\psi_E(z)/dz| \rightarrow \infty$ (исключая случай нечётных состояний). Поэтому энергетический спектр чётных состояний существенным образом зависит от характера "обрезания" потенциала на расстояниях $\sim a_H$, т.е. от вида $U_{\text{eff}}(|z|)$ при $|z| \ll a_B$.

Отметим важные для дальнейшего рассмотрения свойства эффективного кулоновского потенциала. На расстояниях $|z| \lesssim L$, где

$$a_H \ll L \ll \sqrt{a_H a_B} = \mathcal{H}^{1/4} a_H = \mathcal{H}^{-1/4} a_B, \quad (2.12)$$

³ Как отмечено в разделе 9, аналогичный характер искажения кулоновского потенциала $U(r)$ на малых расстояниях приводит к возникновению эффекта Зельдовича.

⁴ Оно является простым обобщением правила квантования Бора — Зоммерфельда. Отметим, что в случае сферического осциллятора из уравнения (2.10) следует точное выражение для спектра.

⁵ Обратим внимание на выбор аргумента в логарифмическом слагаемом и независимость его от энергии; от последней зависят лишь поправочные члены в асимптотике (2.11).

для него $|U_{\text{eff}}| \lesssim e^2/a_H$ и поэтому выполняется соотношение

$$|U_{\text{eff}}| \ll \frac{\hbar^2}{m_e L^2}, \quad (2.13)$$

т.е. на таких расстояниях $U_{\text{eff}}(|z|)$ представляет собой мелкую одномерную потенциальную яму и решение уравнения (2.6) может быть получено с помощью теории возмущений. При этом для логарифмической производной χ'/χ при $|z| \sim L$ получается простое замкнутое выражение с использованием явного вида эффективного потенциала, см. ниже (3.3). С другой стороны, на расстояниях $|z| \gtrsim L \gg a_H$ эффективный потенциал уже имеет кулоновский вид, $U_{\text{eff}} \approx -e^2/|z|$, и экспоненциально убывающим решением уравнения Шрёдингера является функция Уиттекера. Сшивание логарифмических производных в области их перекрытия (2.12) приводит к уравнению, определяющему энергетический спектр чётных уровней.

Отметим, что в других работах, использующих адиабатическое приближение, при решении уравнения Шрёдингера (2.6) делаются дополнительные предположения о свойствах эффективного потенциала, что приводит к потере точности результата. Так, в работе [6] применяется конкретный выбор обрезания кулоновского потенциала $U_{\text{eff}}(|z|) = -e^2/(|z| + a_H)$. Поэтому корректное использование адиабатического приближения на расстояниях $|z| \lesssim L$ позволяет получить простые аналитические выражения для спектра чётных уровней, имеющие высокую точность при сравнении их с результатами численных решений.

Что же касается нечётных уровней, то в нулевом приближении для их вычисления в (2.6) можно воспользоваться неискажённым кулоновским потенциалом, т.е. положить $U_{\text{eff}} = -1/r$, так что их спектр для состояний с различными значениями квантовых чисел n_ρ и m совпадает со спектром невозмущённых кулоновских ns -уровней в центральном потенциале $U(r) = -1/r$:

$$E_n^{(-)} \approx -\frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Учитывая отличие эффективного потенциала от чисто кулоновского по теории возмущений, можно уточнить этот результат:

$$\begin{aligned} E_{nm_\rho}^{(-)} &\equiv -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} (\lambda_{nm_\rho}^{(-)})^2 = \\ &= -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2} + \int \left(U_{\text{eff}}(r) + \frac{e^2}{r} \right) \psi_{ns}^2(r) d^3r, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\psi_{ns}(r)$ — невозмущённые волновые функции ns -состояний в кулоновском потенциале. При этом уровни слегка сдвинуты вверх относительно невозмущённых кулоновских уровней, поскольку подынтегральное выражение в (2.15) положительно.

В заключение этого раздела приведём радиальные функции поперечного движения [6]:

$$\begin{aligned} R_{n_\rho m}(\rho) &= \frac{1}{a_H^{1+|m|}} \left[\frac{(|m| + n_\rho)!}{2^{|m|} n_\rho! (|m|)!} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a_H^2}\right) \times \\ &\times \rho^{|m|} F\left(-n_\rho, |m| + 1, \frac{\rho^2}{2a_H^2}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

($F(\dots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция), нормированные условием $\int_0^\infty R_{n_\rho m}^2(\rho) \rho d\rho = 1$, а также явный вид эффективного кулоновского потенциала для состояний с $m = n_\rho = 0$:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(|z|) &= -\frac{\sqrt{2}}{a_H} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|z|x}{a_H} - x^2\right) dx = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{|z|}{\sqrt{2}a_H}\right) \exp\left(\frac{z^2}{2a_H^2}\right) \frac{1}{a_H}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и его предельные выражения

$$U_{\text{eff}}(|z|) = \begin{cases} -\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{|z|}{a_H} + \dots\right) \frac{1}{a_H}, & |z| \ll a_H, \\ -\left(1 - \frac{a_H^2}{z^2} + \dots\right) \frac{1}{|z|}, & |z| \gg a_H. \end{cases} \quad (2.18)$$

Здесь $\operatorname{erfc}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^\infty \exp(-t^2) dt = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

Приведём также значение потенциала в нуле для состояний с $n_\rho = 0$:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}; n_\rho=0, m}(0) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2|m| - 1)!!}{2^{|m|} |m|!} \frac{1}{a_H} = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a_H} \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 1/2, & m = 1, \\ 3/8, & m = 2, \\ 63/256, & m = 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

С ростом $|m|$ глубина ямы уменьшается⁶, поэтому наиболее глубокие уровни отвечают значению $m = 0$.

3. Асимптотические формулы для спектра чётных уровней атома водорода в сильном магнитном поле

Как было отмечено в разделе 2, эффективный одномерный кулоновский потенциал в области расстояний $|z| \lesssim L$ имеет вид мелкой одномерной потенциальной ямы и решение уравнения (2.6) может быть получено по теории возмущений. Волновые функции чётных уровней на таких расстояниях почти не изменяются: $\chi(z) \approx \text{const}$. Поэтому, пренебрегая в уравнении (2.6) слагаемым с энергией, полагая $\chi(z) = \text{const}$ в члене с U_{eff} и интегрируя по z , для логарифмической производной волновой функции получаем

$$\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \approx 2 \int_0^z U_{\text{eff}}(z') dz', \quad z > 0, \quad \chi'(0) = 0. \quad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) выражение (2.7) для $U_{\text{eff}}(z')$ с $U = -(p^2 + z'^2)^{-1/2}$, меняя порядок интегрирования по ρ и z' и используя формулы (при $z \gg \rho \sim a_H$)

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + \rho^2}} = \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + \rho^2}}{\rho} = \ln \frac{2z}{\rho} + O\left(\frac{\rho^2}{z^2}\right), \quad (3.2)$$

$$\int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x) \ln x dx = \Gamma'(s) = \Gamma(s) \psi(s), \quad (3.2')$$

⁶ Это связано с тем, что с ростом $|m|$ из-за центробежной энергии $\hbar^2 m^2 / 2m_e \rho^2$, носящей отталкивательный характер, растёт область локализации электрона в поперечном направлении, а это приводит к уменьшению величины U_{eff} . По этой же причине с ростом $|m|$ (а также и с увеличением n_ρ) применимость адиабатического приближения предполагает увеличение магнитного поля.

$\psi(s)$ — логарифмическая производная гамма-функции, получаем

$$\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \approx -2 \ln \frac{z}{a_H} + A_{n_\rho|m|}, \quad (3.3)$$

где

$$A_{n_\rho|m|} = 2 \int_0^\infty \rho \ln \frac{\rho}{2a_H} R_{n_\rho|m|}^2(\rho) d\rho; \quad (3.4)$$

подчеркнём, что $A_{n_\rho|m|}$ не зависит от магнитного поля и знака m .

С другой стороны, на расстояниях $z \gtrsim L$, где эффективный потенциал уже совпадает с кулоновским, экспоненциально убывающее на бесконечности решение уравнения (2.6) выражается через функцию Уиттекера:

$$\chi_v(z) = \text{const } W_{v,1/2}(x), \quad x = 2\lambda z, \quad v = \frac{1}{\lambda}, \quad z > 0, \quad (3.5)$$

для которой справедливо разложение

$$W_{v,1/2}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-v)} \times \\ \times \{1 - c_1 x \ln x - c_2 x + c_3 x^2 \ln x + O(x^2)\}, \quad x \rightarrow 0, \\ c_1 = v, \quad c_2 = \frac{1}{2} + v[\psi(1-v) + 2\gamma - 1], \quad c_3 = \frac{1}{2} v^2, \dots \quad (3.5')$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} = -\left\{\lambda + 2[\ln(\lambda|z|) + \psi(1-\lambda^{-1}) + 2\gamma + \ln 2]\right\} + \\ + O(z \ln^2(\lambda z)), \quad (3.6)$$

где $z \ll 1$, $\lambda = \sqrt{-2E}$, E — энергия уровня, $\gamma = -\psi(1) = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера.

При сшивании логарифмических производных (3.3) и (3.6) в области (2.12) их совместной применимости ($z \sim L$) пропадает зависимость от координаты z и мы приходим к уравнению для спектра чётных уровней продольного движения электрона:

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \ln(2\lambda) + 2\psi\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + 4\gamma + A_{n_\rho|m|}. \quad (3.7)$$

Сделаем несколько замечаний о свойствах спектра чётных уровней $E = -\lambda^2/2$, следующих из этого уравнения в случае сильного магнитного поля (формально при $\ln \mathcal{H} \gg 1$).

1. Для каждой пары квантовых чисел поперечного движения электрона, n_ρ и m (независимо от знака m), имеется один уровень, для которого $\lambda \sim \ln \mathcal{H} \gg 1$, глубокий в атомном масштабе (с увеличением $|m|$ глубина его уменьшается). Подчеркнём, что при $m \neq 0$ их энергия связи не зависит от знака m , но они залегают ниже различных уровней Ландау (см. (2.5)).

2. Кроме этого глубокого уровня имеется бесконечное число уровней, расположенных между соседними несмещёнными кулоновскими n' -s-уровнями, $E_{n'} = -1/(2(n')^2)$, с главными квантовыми числами n' , равными⁷ n и $n+1$ при $n \geq 1$. В пределе $\ln \mathcal{H} \rightarrow \infty$ для

⁷ Наличие таких сдвинутых кулоновских уровней легко понять, если заметить следующее свойство функции $\psi(z)$ в (3.7): на интервале $(-n-1, -n)$ значений z с $n = 0, 1, 2, \dots$ функция $\psi(z)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$; значения $z = -n$ являются её полюсами.

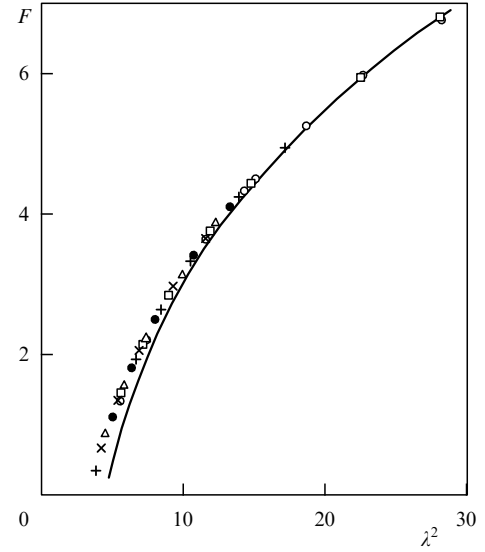


Рис. 1. Проверка соотношений скейлинга: сплошная кривая — функция $F(\lambda)$ из (3.8); точки ($\circ$, $+$, $\square$, $\bullet$, $\times$) представляют результаты численных расчётов [13–16] для состояний с квантовыми числами $n_\rho = 0$ и $m = 0, -1, -2, -3, -4, -5$.

них $n' \rightarrow n$, однако переход в асимптотический режим происходит крайне медленно (см. ниже раздел 4).

3. При известном значении $\lambda_{m\rho|m|}$ формула (3.7) непосредственно определяет величину соответствующего магнитного поля.

4. Записав (3.7) в виде $F(\lambda) = F_{n_\rho m}(\mathcal{H})$, где

$$F(\lambda) \equiv \lambda + 2 \ln \lambda + 2\psi\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), \quad (3.8)$$

$$F_{n_\rho m}(\mathcal{H}) = \ln \mathcal{H} - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{n_\rho m},$$

отметим следующее следствие этого уравнения.

Как видно из (3.7) и (3.8), зависимость от энергии уровня в этом уравнении определяется универсальной функцией $F(\lambda)$, которая не зависит ни от магнитного поля, ни от квантовых чисел n_ρ , m , n (даётся функцией $F_{n_\rho m}(\mathcal{H})$ в правой части уравнения). Это означает, что в адиабатическом приближении весь чётный спектр $E_{m\rho|m|}(\mathcal{H}) = -\lambda^2/2$ при различных значениях квантовых чисел и магнитного поля лежит на этой универсальной кривой.

Рисунок 1 иллюстрирует выполнение скейлинга [24] для основного 1s-уровня с квантовым числом $n_\rho = 0$ при различных значениях m и магнитного поля. На рисунке 1 построен график функции $F(\lambda)$ и указаны значения $F_{0m}(\mathcal{H})$ для соответствующих уровней при численном решении уравнения Шрёдингера. Как видно из рисунка, такой скейлинг выполняется с высокой точностью для состояний с различными m при $\lambda^2 > 12$. При $\lambda^2 < 10$ наблюдается отклонение⁸ от кривой $F(\lambda)$, однако и в этой области положения уровней по-прежнему группируются вдоль плавной кривой, близкой к $F(\lambda)$.

⁸ Это неудивительно, поскольку при увеличении m условие применимости адиабатического приближения из-за увеличения центробежной энергии сдвигается в область больших значений магнитного поля.

5. Для чётных состояний вблизи основной зоны Ландау $N = 0$ ($n_p = 0$, $m = -|m| = 0, -1, -2, \dots$, $\sigma_z = -1$)

$$A_{0|m|} = -\ln 2 + \psi(1 + |m|), \quad A_{00} = -(\ln 2 + \gamma), \quad (3.9)$$

$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n k^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$; для таких, наиболее глубоких, состояний мы будем использовать обозначения LLL (the Lowest Landau Levels) [33–35].

6. Полученное значение логарифмической производной (3.3) для чётных решений уравнения (2.6) на расстояниях $r_0 \ll z \ll a_B$, где потенциал имеет кулоновский вид, можно экстраполировать к точке $z = +0$, заменяя при этом эффективный потенциал $U_{\text{eff}}(|z|)$ на одномерный кулоновский потенциал $U_C(|z|) = -e^2/|z|$. Такой приём соответствует моделированию короткодействующего искажения этого потенциала точечным взаимодействием⁹ (в точке $z = 0$). Использование в этом случае значения логарифмической производной (3.3) при $z \rightarrow 0$ для чётных решений (2.11) уравнения Шрёдингера с кулоновским потенциалом приводит к следующим соотношениям:

$$C_1^- = C_1^+, \quad \frac{C_2^+}{C_1^+} = \beta, \quad (3.10)$$

где β — не зависящий от энергии параметр с размерностью обратной длины, равный в рассматриваемой задаче

$$\beta = \frac{1}{a_B} \left(2 \ln \frac{a_H}{a_B} + 2 + A_{n_p|m|} \right). \quad (3.11)$$

Зависимость параметра β от квантовых чисел n_p и m связана с соответствующей зависимостью характера искажения кулоновского потенциала на малых расстояниях (см. $U_{\text{eff}}(|z|)$ в (2.7)), которая сохраняется и при предельном переходе $r_0 \rightarrow 0$.

Условия (3.10) сшивания решения в точке $z = 0$ в случае сингулярного кулоновского потенциала $U_C(|z|)$ заменяют обычные условия непрерывности волновой функции и её производной для регулярных потенциалов. С математической точки зрения эти условия задают самосопряжённое расширение эрмитова гамильтониана с одномерным кулоновским потенциалом (более подробное обсуждение этого вопроса см. в задаче¹⁰ 8.61 в [36]). Необходимость введения в случае сингулярных потенциалов дополнительных условий, обеспечивающих взаимную ортогональность собственных функций гамильтониана и их полноту, была впервые отмечена в работе [37] в связи с так называемым "падением на центр" в квантовой механике [6, 38].

Отметим, что в предельном случае выключения кулоновского потенциала, т.е. при $a_B \rightarrow \infty$, условия сшивания решения (3.10) в точке $z = 0$ принимают вид

$$\psi(+0) = \psi(-0), \quad \psi'(+0) - \psi'(-0) = 2\beta\psi(0)$$

и моделируются точечным взаимодействием в виде дельта-потенциала $U(z) = \alpha\delta(z)$ при $\alpha = \hbar^2\beta/m$.

7. Как отмечено в разделе 2, с чётными решениями уравнения Шрёдингера с ограниченным при $|z| \rightarrow 0$ потенциалом $U(|z|)$ на всей оси z непосредственно связаны решения этого уравнения для s-состояний в таком же центральном потенциале $U(r)$, но с наложением граничного условия (2.9), моделирующего потенциал нулевого радиуса действия. Однако в случае кулоновского потенциала притяжения $U_C = -e^2/r$ (на малых расстояниях) такое граничное условие согласно (3.10) должно быть записано в виде

$$\frac{\chi'(r)}{\chi(r)} \approx -\frac{2}{a_B} \left(\ln \frac{r}{a_B} + 1 \right) + \beta, \quad r \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Параметр β имеет наглядный физический смысл в случае, когда кулоновский потенциал сохраняет свой вид при всех значениях $r > 0$. В этом случае решение уравнения Шрёдингера записывается как

$$\chi(r) = \text{const} (F_0(kr) \cot \delta_0(k) + G_0(kr)), \quad (3.13)$$

где $F_0(z)$ и $G_0(z)$ — регулярная и иррегулярная кулоновские волновые функции [6], а δ_0 — искажение кулоновской фазы рассеяния, обязанное короткодействующему потенциалу, который моделируется граничным условием (3.12). Переходя в (3.13) к пределу $r \rightarrow 0$ и используя приближение эффективного радиуса действия в случае кулоновского потенциала, искажённого на малых расстояниях, $r_0 \ll a_B$, получаем при $k \rightarrow 0$:

$$\beta = -\frac{2}{a_B} (\ln 2 + 2\gamma - 1) - \frac{1}{a_{cs}}. \quad (3.14)$$

Здесь a_{cs} — длина s-рассеяния на короткодействующем потенциале, перенормированная из-за кулоновского взаимодействия на малых расстояниях. В рассматриваемой задаче значение β даётся формулой (3.11). Граничное условие (3.12) принимает вид

$$\frac{\chi'(r)}{\chi(r)} \approx -\frac{2}{a_B} \left(\ln \frac{2r}{a_B} + 2\gamma \right) - \frac{1}{a_{cs}}, \quad r \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

При выключении кулоновского взаимодействия, т.е. в пределе $a_B \rightarrow \infty$, формула (3.12) переходит в (2.9); при этом $\beta = -1/a_s$ и согласно (3.14) $a_{cs} = a_s$, как и следовало ожидать.

Изложенные выше результаты для спектра гамильтониана (2.1) с кулоновским потенциалом являются асимптотически точными при $B \rightarrow \infty$. Однако при этом скорость поперечного движения электрона неограниченно возрастает¹¹, уравнение Шрёдингера становится неприменимым и следует использовать уравнение Дирака. Как показано в разделе 7, адиабатический подход допускает непосредственное обобщение на случай уравнения Дирака. Более того, формула (3.7) для спектра оказывается применимой и в релятивистской области, вплоть до значений магнитного поля $B \sim 10^{16}$ Гс, при которых становятся существенными эффекты квантовой электродинамики (см. ниже раздел 8).

⁹ То обстоятельство, что на расстояниях $|z| \lesssim r_0$ решения с искажённым и неискажённым кулоновскими потенциалами имеют совершенно разный вид, не играет существенной роли ввиду малости вклада в нормировочный интеграл этой области расстояний.

¹⁰ Пользуясь случаем, отметим опечатку в формуле (14) из этой задачи (аналогичной (3.10)): в ней следует заменить $\beta \rightarrow 2\beta$. Формула (18) определяет спектр атома водорода в сильном магнитном поле.

¹¹ Так, при $B = B_{\text{cr}}$ кинетическая энергия поперечного движения электрона $T = m_e c^2/2$ (см. (1.2)).

Естественно, возникает вопрос об области применимости и точности уравнения (3.7), при получении которого использовалось условие $\ln \mathcal{H} \gg 1$.

4. Сравнение уравнения (3.7) с другими приближениями и с численными расчётами

В литературе предложено несколько приближённых аналитических формул для энергии уровней атома водорода в зависимости от сильного магнитного поля, связанных с использованием адиабатического приближения. Перечислим их и сравним с уравнением (3.7) и результатами численных расчётов.

4.1. Основной уровень 1s

В книге Ландау и Лифшица [6] (§ 112, задача 3) для энергии связи основного уровня приведено значение¹²

$$\varepsilon_0 = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \ln^2 \frac{\hbar^3 B}{m_e^2 e^3 c} = \lambda_0^2 \text{Ry}, \quad \text{или} \quad \lambda_0 = \ln \mathcal{H}. \quad (4.1)$$

Эта формула определяет энергию связи лишь по порядку величины. Так, при $B = B_{\text{cr}}$ (т.е. при $\mathcal{H} = \alpha^{-2}$) согласно (4.1) $\lambda_0 = 2 \ln(1/\alpha) = 9,840$ и $\varepsilon_0 \approx 1320$ эВ, в то время как численный расчёт [13] даёт значения $\lambda_0 = 5,735$ и $\varepsilon_0 = 448$ эВ.

Уравнение (4.1) является упрощённой формулой из статьи Лоудона [17] (см. также [18, 19]), согласно которой

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \ln(2\lambda). \quad (4.2)$$

Эта формула была уточнена в работе [20]:

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \ln(2\lambda) + \gamma - \ln 2 \quad (4.3)$$

(отличие в слагаемом $\gamma - \ln 2 = -0,116$ в правой части уравнения).

В статье [21] приведено уравнение (см. формулу (6) в работе [21] с $v = 1/\lambda$)

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2\psi(1 - \lambda^{-1}), \quad (4.4)$$

которое для глубокого, $\lambda \gg 1$, уровня принимает вид

$$\ln \mathcal{H} = \lambda - 2\gamma \quad (4.5)$$

и отличается от (4.1) фактически только сдвигом.

Наконец, согласно формуле (3.7) раздела 3 имеем [22–24]

$$\ln \mathcal{H} = \lambda + 2 \left[\ln \lambda + \psi \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] + 3\gamma + \ln 2. \quad (4.6)$$

Сравним теперь эти приближения с результатами точных (вплоть до 10 значащих цифр в работе [13]) численных расчётов [13–16]. На рисунке 2 представлены зависимости $\lambda_0(\mathcal{H})$ для значений $\mathcal{H}$ от ~ 10 до 10^6 . Видно, что формула Лоудона (4.2), хотя и не является прецизионной, всё же качественно описывает зависимость $\lambda_0(\mathcal{H})$ для значений $\mathcal{H}$ от $\sim 10^3$ до 10^6 . С другой стороны, выражения (4.1) и (4.5) фактически не имеют области применимости.

Наиболее высокую точность имеет уравнение (4.6): при $B \gtrsim 5 \times 10^{11}$ Гс кривые 1 и 2 уже неразличимы в

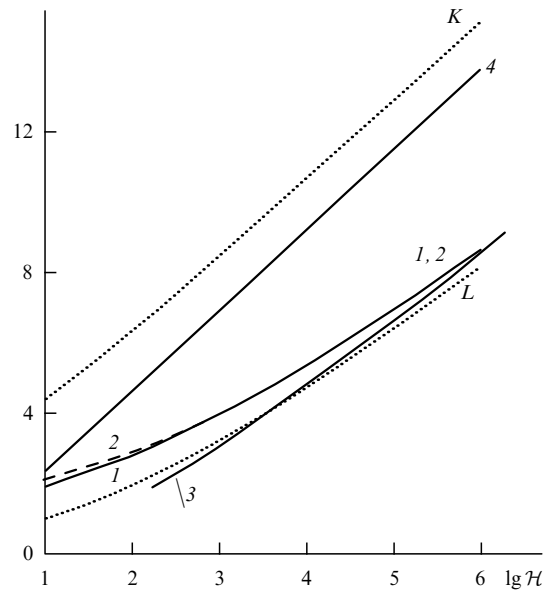


Рис. 2. Зависимость импульса $\lambda(\mathcal{H})$ для основного состояния. Кривая 1 — результаты численных расчётов [13, 15, 16], штриховая кривая 2 — расчётов по уравнению (4.6), кривая 3 — асимптотика (4.7). Формулам (4.1), (4.5) и (4.2) соответствуют кривая 4 и пунктирные кривые K и L. Здесь и далее на рисунках $\lg \mathcal{H} \equiv \log_{10} \mathcal{H}$.

пределах точности рис. 2, причём с ростом $\mathcal{H}$ точность этого уравнения только увеличивается. Что касается асимптотики (4.3), то она приближается к точному решению, хотя и довольно медленно. Следует подчеркнуть, что приведённые выше уравнения, за исключением (4.4) и (4.6), относятся только к основному уровню 1s и неприменимы для возбуждённых состояний атома водорода.

Отметим свойства формальной асимптотики уравнения (4.6):

$$\tilde{\lambda}_0 \approx \ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}}, \quad \tilde{\varepsilon}_0 = \frac{\tilde{\lambda}_0^2}{2} \quad \text{при} \quad \mathcal{H} \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

которая отличается от (4.1) функционально, причём

$$\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} = 1 - 4 \frac{\ln \ln \mathcal{H}}{\ln \mathcal{H}} + O\left(\frac{1}{\ln \mathcal{H}}\right), \quad \varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_0 \approx 4 \ln \ln \mathcal{H}. \quad (4.8)$$

Формально $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 \rightarrow 1$ при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$, однако переход к этому пределу происходит чрезвычайно медленно, в полях, не имеющих реального физического смысла (так, например, различие между ε_0 и $\tilde{\varepsilon}_0$ порядка 30 % даже при $B = 10^8 B_{\text{cr}} \sim 10^{22}$ Гс).

В недавней работе [35] приведены значения $\lambda_0(\mathcal{H})$ для основного состояния, $n_p = m = 0$, полученные при численном решении уравнений Шрёдингера и Дирака. Сравнение их с асимптотической формулой (4.6) показывает (табл. 1), что эта формула сохраняет высокую точность и в области сверхсильных полей $B \gtrsim B_{\text{cr}}$, вплоть до $B \sim m_e^2/e^5 \sim 10^{18}$ Гс. Так, при $B = 10^5 B_{\text{cr}} \approx 4 \times 10^{18}$ Гс её погрешность составляет $\delta \approx 0,2\%$, и даже при $B = 10^{10} B_{\text{cr}}$ погрешность $\delta \approx 0,5\%$. Отметим, что в полях $B \lesssim 10^{15}$ Гс экранировкой кулоновского потенциала [35] можно пренебречь, но при $B > 10^{17}$ Гс она становится существенной и приводит к "замерзанию" энергии основного уровня при $\lambda_\infty = 11,3$, или $E_0(\infty) = -1,71$ кэВ. Этим определяется область применимости уравнения (4.6).

¹² Как отмечено в книге [6], с "логарифмической точностью".

Таблица 1. Безразмерный импульс $\lambda_0(B)$ для основного уровня атома водорода [35]

B/B_{cr}	KP	S	D	$\bar{D}$
10^{-2}	3,108	3,032	3,032	—
10^{-1}	4,289	4,272	4,272	—
10^0	5,737	5,735	5,734	5,7
10^1	7,374	7,374	7,371	7,4
10^2	9,141	9,141	9,135	9,1
10^3	11,00	11,00	10,99	10,6
10^4	12,93	12,93	12,91	11,2
10^5	14,91	14,91	14,88	11,3
10^6	16,93	16,93	16,89	11,3
10^8	21,06	21,05	20,98	11,3

Примечание. Приведены значения [35] λ_0 без учёта эффекта экранировки: KP — согласно уравнению (4.6), S — по уравнению Шрёдингера (8.9), D — численный расчёт по уравнению Дирака. Столбец $\bar{D}$ рассчитан по уравнению Дирака с учётом экранировки (8.1) кулоновского потенциала, $B/B_{\text{cr}} = \alpha^2 \mathcal{H}$.

Таблица 2. Вычисление магнитного поля по энергии связи основного уровня LLL (1s)

λ_0^2	$H = B/B_a$			$ E_0 $, эВ
	a	b	c	
3,4956	10	3,50	6,49	47,5
7,5796	100	79,6	15,7	103
11,875	425,5*	388	36,6	161
15,325	1000	962	50,1	208
28,282	1,0(4)	0,9991(4)	204	385
32,92	1,878(4)**	1,880(4)	310	448
47,783	1,0(5)	1,003(5)	1,005(3)	650
65,84	5,0(5)***	5,017(5)	3,334(3)	896
74,84	1,0(6)	1,0014(6)	5,69(3)	1017

Примечание. а — результаты численных расчётов [13–15], б — по уравнению (4.6), с — по уравнению (4.1). Используется обозначение $x(y) \equiv x \times 10^y$.

* $B = 10^{12}$ Гс.

** $B = B_{\text{cr}} = 4,414 \times 10^{13}$ Гс.

*** $B = 2,35 \times 10^{15}$ Гс.

Особый интерес для астрофизики нейтронных звёзд может представлять не $\lambda(\mathcal{H})$, а обратная зависимость $\mathcal{H}(\lambda)$, определяющая магнитное поле на поверхности звезды по измеренному сдвигу атомного уровня (т.е. $\lambda_0^2/2$). Соответствующие данные приведены в табл. 2. В полях $B \gtrsim 10^{13}$ Гс погрешность уравнения (4.6) при определении $\mathcal{H}$ не превышает 0,3 %, и даже при $B \sim 10^{12}$ Гс (характерное значение для нейтронных звёзд) ошибка порядка 10 %, что, по-видимому, достаточно для многих астрофизических приложений. В то же время уравнения (4.1) и (4.5) приводят здесь к значительным ошибкам (на 2–3 порядка величины), которые возрастают с увеличением магнитного поля, и не могут конкурировать с уравнением (4.6).

В предыдущих уравнениях считалось, что $n_p = m = 0$ (основное, безузельное состояние). К числу уровней типа LLL относятся также состояния с $n_p = 0$ и $m = -|m|$. Энергии связи таких уровней даются уравнением (3.7), в котором константа $A_{0|m|}$ определена в (3.9). В таблице 3 приводится сравнение результатов численных расчётов [13–16] с решением уравнения (3.7) для состояний с квантовыми числами $n_p = 0$ и $m = 0, -1, -2, -3, -4$ и -5 . С ростом $|m|$ энергии связи этих состояний умень-

Таблица 3. Энергии связи для нижних LLL-уровней, $n_p = 0$ и $m = -|m|$

$\mathcal{H}$	$m = 0$		$m = -1$		$m = -2$	
	a	b	a	b	a	b
10^2	7,580	8,082	5,270	6,132	4,376	5,374
10^3	15,32	15,49	11,28	11,70	9,610	10,15
10^4	28,28	28,29	21,83	21,97	19,05	19,26
10^5	47,78	47,76	38,41	38,42	34,22	34,26
∞	—	125,7	—	108	—	99,7

$\mathcal{H}$	$m = -3$		$m = -4$		$m = -5$	
	a	b	a	b	a	b
10^2	3,860	4,938	3,510	4,643	3,251	4,425
10^3	8,617	9,230	7,929	8,598	7,412	8,125
10^4	17,35	17,61	16,16	16,45	15,25	15,57
10^5	31,60	31,68	29,74	29,84	28,32	28,42
∞	—	94,4	—	90,6	—	87,6

Примечание. Приведены значения λ_m^2 : а — согласно численным расчётам [13, 16], б — по уравнению (4.6), предел при $\mathcal{H} = \infty$ рассчитан по уравнению (8.8).

шаются, что понятно: из-за увеличения центробежной энергии $\hbar^2 m^2 / 2m_e \rho^2$ электрон удаляется от ядра в поперечном к $\mathbf{B}$ направлении, что приводит к уменьшению эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(z)$ (при данном $\mathcal{H}$).

4.2. Возбуждённые уровни

Как было отмечено выше, уравнение (3.7) описывает весь дискретный спектр чётных состояний. При этом возбуждённые уровни (как чётные, так и нечётные) лежат в области энергий невозмущённого атома водорода $\lambda = \lambda_n(\mathcal{H}) < 1$, причём $\lambda_n \rightarrow 1/n$ при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ (здесь $n = 1, 2, \dots$ — полюсы функции $\psi(1 - 1/\lambda) = \psi(1 - n)$). Сделаем следующее замечание. В отсутствие магнитного поля кулоновские состояния характеризуются квантовыми числами n, l, m . При включении магнитного поля l уже не является "хорошим" квантовым числом, за исключением его чётности $(-1)^l$. Тем не менее, в статье [13] для классификации состояний и в этом случае используется обозначение (nl) вместо $n^\pm$, удобного при адиабатическом приближении. Таким образом уровню приписывается значение l в порядке его расположения по значению энергии при изменении магнитного поля. Не входя в детали [22–25], укажем соответствие между обозначениями для нижних уровней: $1s \rightarrow 0^+(\text{LLL})$, $2s \rightarrow 1^+$, $3d$ (а не $3s(!)$) $\rightarrow 2^+$, $2p \rightarrow 1^-$ и т.д. (см., в частности, рис. 8 в работе [24]).

Сравнение с численными расчётами для 2s- и 3d-состояний показывает (см. рис. 3 и подробности в табл. 4), что энергии связи этих уровней $\lambda_n^2/2$ при $\mathcal{H} \gtrsim 100$ определяются уравнением (3.7) с процентной или даже с ещё более высокой точностью. На рисунке 3 видно также существенное различие в поведении $\lambda_{nl}(\mathcal{H})$ и $\varepsilon_{nl}(\mathcal{H})$ для чётных и нечётных уровней (см. также раздел 5).

В литературе имеется несколько асимптотических формул для энергии чётных возбуждённых уровней атома водорода. Согласно уравнению (3.24) из [19],

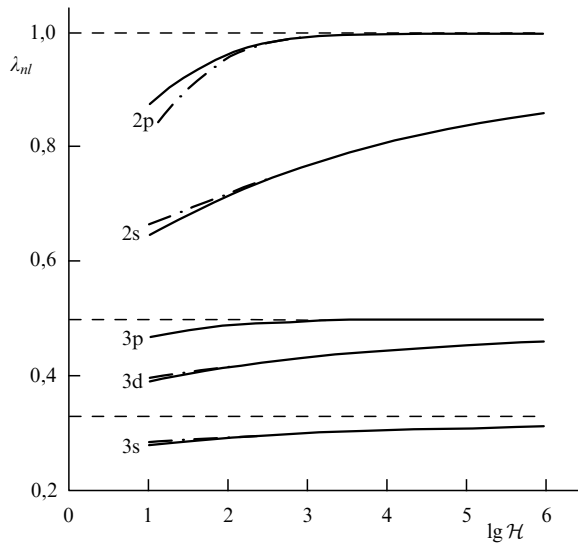
$$\ln \mathcal{H} = 2[\ln(2\lambda) + \psi(1 - \lambda^{-1})], \quad 0 < \lambda < 1, \quad (4.9)$$

при $\mathcal{H} \lesssim 10^3$ эта формула применима только качественно.

Таблица 4. Значения λ_{nl}^2 для возбуждённых уровней

$\mathcal{H}$	2s		3d		2p		3p	
	a	b	a	b	a	b	a	b
0	0,2500	—	0,1111	—	0,2500	—	0,111	—
10	0,4179	0,4429	0,1543	0,1594	0,7653	0,6708	0,2197	0,2122
10^2	0,5124	0,5176	0,1738	0,1747	0,9272	0,9162	0,2419	0,2400
10^3	0,5917	0,5921	0,18870	0,18876	0,9850	0,9843	0,2482	0,2481
10^4	0,6554	0,6552	0,19986	0,19983	0,9976	0,9976	0,2497	0,2497
10^5	0,7054	0,7053	0,20814	0,20812	0,9996	0,9997	0,2499	0,2500
10^6	0,7444	0,7443	—	0,21433	0,9999	1,0000	0,2500	0,2500

Примечание. Приведены результаты: а — численных расчётов [13, 14, 16], б — по уравнениям (4.6) и (5.6) соответственно для чётных и нечётных состояний. Относительно взаимного расположения 3s- и 3d-уровней см. рис. 8 в [24].

**Рис. 3.** Безразмерный импульс $\lambda_{nl}(\mathcal{H})$ для возбуждённых s-, p- и d-уровней: сплошные кривые — численные расчёты [13, 16], штрихпунктирные — по уравнениям (3.7) и (5.6) для чётных и нечётных уровней. Штриховыми линиями показаны предельные ($\mathcal{H} \rightarrow \infty$) значения λ_{nl} .

Недавно [25, 34] была получена асимптотика

$$\lambda_n = \frac{1}{n} - \frac{2/n^2}{\ln \mathcal{H} - \ln 2 - \gamma + 1/n + 2[\ln n - \sum_{k=1}^{n-1} (1/k)]}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (4.10)$$

применимая при условии $\ln \mathcal{H} \gg 1$. Для первого возбуждённого уровня сумму по k в (4.10) следует опустить:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{2}{\ln \mathcal{H} - 0,2704} + O\left(\frac{1}{(\ln \mathcal{H})^2}\right), \quad n = 1. \quad (4.11)$$

Точность этих асимптотических формул в области $\mathcal{H} = 10^2 - 10^4$, типичной для нейтронных звёзд, ещё недостаточна, однако они могут быть использованы в области сверхсильных полей $\mathcal{H} > 10^5$, или $B \gtrsim 10^{14}$ Гс.

В заключение этого раздела укажем характерные значения радиуса Ландау $a_H = \sqrt{\hbar c / eB}$: 4×10^{-11} см и 1×10^{-12} см для полей $B_{cr} \approx 4 \times 10^{13}$ Гс и $B = 6 \times 10^{16}$ Гс соответственно. Эти значения a_H велики по сравнению с радиусом протона, $r_p \approx 10^{-13}$ см, и поэтому приближение точечного заряда ядра оправданно. Однако, как будет отмечено в разделе 8, в полях напряжённостью $B \gtrsim$

$\gtrsim \alpha^{-1} B_{cr} \sim 5 \times 10^{15}$ Гс возникает искажение (экранировка) кулоновского потенциала точечного заряда на малых расстояниях из-за поляризации вакуума магнитным полем, что существенно изменяет зависимость спектра чётных уровней от величины поля B по сравнению со случаем точечного заряда.

5. Нечётные уровни

Как отмечено в конце раздела 2, спектр нечётных уровней (2p, 3p, 4f и т.д. по классификации работы [13]) описывается формулой (2.15), в которой $\psi_{ns}(r)$ — невозмущённые волновые функции в кулоновском потенциале [6]:

$$\begin{aligned} \psi_{ns}(r) &= \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} \exp\left(-\frac{r}{n}\right) F\left(1-n, 2; \frac{2r}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} \left(1 - r + \frac{2n^2 + 1}{6n^2} r^2 + \dots\right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$F(\dots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. При этом уровни слегка сдвинуты вверх относительно невозмущённых кулоновских уровней $E_n^{(0)} = -(1/n^2) \text{ Ry}$. Качественное различие спектров чётных и нечётных уровней в сильном магнитном поле $\mathcal{H} \gg 1$ иллюстрирует рис. 3.

Из уравнения (2.15) следует асимптотическое разложение для энергии связи [24]:

$$(\lambda_{nmnp}^-)^2 = \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3} \left\{ a_{nmnp} \frac{\ln \mathcal{H}}{\mathcal{H}} + \frac{a_{nmnp}^{(1)}}{\mathcal{H}} + \frac{a_{nmnp}^{(3/2)}}{\mathcal{H}^{3/2}} + \dots \right\}, \quad \mathcal{H} \rightarrow \infty, \quad (5.2)$$

Логарифмически главное слагаемое в выражении для сдвига уровня определяется областью интегрирования $a_H \lesssim r \lesssim a_B$ в формуле (5.1), при этом можно положить

$$U_{\text{eff}}(r) \approx -\frac{e^2}{r} + \frac{e^2 \bar{\rho}_{mnp}^2}{2r^3}, \quad \psi_{ns}^2(r) \approx \psi_{ns}^2(0) = \frac{1}{\pi n^3 a_B^3} \quad (5.3)$$

и получить с логарифмической точностью оценку для сдвига нечётного уровня:

$$\begin{aligned} \delta E_{nmnp}^- &\approx \int \left(U_{\text{eff}} + \frac{e^2}{r} \right) \psi_{ns}^2(r) d^3r \approx \frac{2e^2 \bar{\rho}_{mnp}^2}{a_B^3 n^3} \int_{a_H}^{a_B} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{e^2 \bar{\rho}_{mnp}^2}{a_B^3 n^3} (\ln \mathcal{H} + O(1)). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таблица 5. Поправки Ридберга $\Delta_{nl}^{\pm}$ для чётных и нечётных уровней

$\mathcal{H}$	$\Delta_{nl}^{+}(\mathcal{H})$				$\Delta_{nl}^{-}(\mathcal{H})$		
	1s	2s	3s	3d	2p	3p	4f
1	0,7756	0,7652	0,7407	0,7476	0,3867	0,3541	0,3435
10	0,5349	0,5469	0,5452	0,5456	0,1431	0,1335	0,1312
10 ²	0,3632	0,3970	0,3994	0,3989	0,0385	0,0368	0,036
10 ³	0,255	0,300	0,303	0,302	0,0076	0,0074	—
10 ⁴	0,188	0,235	0,237	0,237	0,0012	0,0012	—
10 ⁵	0,145	0,191	0,192	0,192	0,0002	0,0002	0
10 ⁶	0,116	0,159	0,160	0,160	0	0	0

Примечание. Значения $\Delta_{nl}^{\pm}$ [13, 14, 16] относятся к основному уровню Ландау 1s и к башне примыкающих к нему состояний: 2s, 3s и т.д.

Поскольку

$$\overline{\rho_{mm}^2} = \iint \rho^2 |R_{nm}(\rho)|^2 d^2\rho = 2(2n_{\rho} + |m| + 1)a_H^2,$$

для коэффициента a_{mm} (не зависящего от n) получаем

$$a_{mm} = 2n_{\rho} + |m| + 1. \quad (5.5)$$

Определение следующих коэффициентов разложения в (5.2) связано с более громоздкими вычислениями, которые можно найти в работе [25]. В простейшем случае $m = n_{\rho} = 0$ имеем

$$(\lambda_{n0}^{-})^2 = \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3} \left[\frac{\ln \mathcal{H}}{\mathcal{H}} - \frac{k_n}{\mathcal{H}} + \frac{4\sqrt{2\pi}}{\mathcal{H}^{3/2}} + \dots \right], \quad (5.6)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — квантовое число для продольного движения электрона, а значения k_n равны:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 + \ln 2 + \gamma = 3,270, \quad k_2 = 3,384, \\ k_3 &= 3,407, \quad k_4 = 3,417, \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подчеркнём существенное различие между энергиями чётных и нечётных уровней, $E_n^{\pm} = -(\lambda_n^{\pm})^2/2$, в сверхсильном магнитном поле (см. табл. 4). Это различие наглядно проявляется, если перейти от энергий $E_{nl}^{\pm}$ к поправкам Ридберга $\Delta_{nl}^{\pm}$, используемым в атомной физике (см. табл. 5 и более подробное её обсуждение в разделе 9).

Для чётных уровней 2s, 3s и 3d при $\mathcal{H} \gtrsim 100$ значения $\Delta_{nl}^{+}(\mathcal{H})$, полученные из численных расчётов [13, 14, 16] и вычисленные по формуле (3.7), практически совпадают между собой и медленно убывают с ростом $\mathcal{H}$: $\Delta_{nl}^{+} \propto 1/\ln \mathcal{H}$, поэтому даже при $\mathcal{H} = 10^5$ (т.е. в полях $B \gtrsim 10^{14}$ Гс) они ещё достаточно далеки от своего предела при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$, так что спектр чётных уровней сильно возмущён по сравнению с кулоновским спектром $E_n^{(0)} = -1/2n^2$. В то же время для нечётных уровней 2p, 3p, 4f и т.д. поправки Ридберга $\Delta_{nl}^{-}(\mathcal{H})$ численно весьма малы при $\mathcal{H} \gtrsim 100$, где $\Delta_{nl}^{-} \propto (\ln \mathcal{H})/\mathcal{H} \ll \Delta_n^{+}$ и $E_n^{-} \approx E_{n-1}^{(0)}$. Поэтому утверждение в работах [6, 19] о двукратном вырождении чётных и нечётных уровней атома водорода в сильном магнитном поле нуждается в уточнении.

В случае возбуждённых чётных состояний асимптотическая формула (3.7) обеспечивает более высокую точность, чем для основного уровня. Это имеет простое физическое объяснение: для возбуждённых состояний

возрастает размер области локализации волновых функций в продольном направлении пропорционально n^2 , что приводит к уменьшению кулоновского взаимодействия и расширению области применимости адиабатического приближения для меньших значений магнитного поля.

6. Размеры, квадрупольный момент атома и вероятности радиационных переходов при $B \gg B_a$

Как отмечено в разделах 2 и 3, волновая функция продольного движения электрона $\chi(z)$ в уравнении (2.4) в основной области его локализации $|z| \gtrsim a_H$ описывается функцией Уиттекера (3.5). Поскольку вклад в нормировочный интеграл расстояний $|z| \lesssim a_H$ мал, при вычислении пространственных характеристик электронного облака можно воспользоваться формулой (3.5) на всей оси z . Нормировочный интеграл для $\psi_v(z)$ и средний радиус этого состояния можно вычислить, используя результаты, полученные ранее [39, 40] в теории рр-атома. В итоге для атома водорода в сильном магнитном поле имеем

$$\frac{a_{\parallel}}{a_B} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}(\lambda - 1/2)(\lambda - 1/3)} \times \left\{ \frac{{}_3F_2(-\lambda^{-1}, -\lambda^{-1}, 3; 4 - \lambda^{-1}, 4 - \lambda^{-1}; 1)}{{}_3F_2(-\lambda^{-1}, -\lambda^{-1}, 1; 2 - \lambda^{-1}, 2 - \lambda^{-1}; 1)} \right\}^{1/2}, \quad (6.1)$$

где ${}_3F_2$ — обобщённый гипергеометрический ряд [41]. В случае глубокого уровня $v \rightarrow 0$ имеем $\psi_0(z) \approx \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda|z|)$ и

$$\frac{a_{\parallel}}{a_B} = (2\lambda)^{-1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}} \right)^{-1}, \quad (6.2)$$

где мы воспользовались асимптотикой (4.7). С ростом $\mathcal{H}$ продольный размер атома $a_{\parallel}$ уменьшается значительно медленнее, чем $a_{\perp}$:

$$\frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}} = \frac{\sqrt{\mathcal{H}}}{2\lambda} \sim \frac{\sqrt{\mathcal{H}}}{\ln \mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} \gg 1 \quad (6.3)$$

(поэтому атом водорода принимает спицеобразную, или игольчатую, форму (табл. 6)).

Отмеченное выше сокращение продольного размера атома $a_{\parallel} \propto 1/\ln \mathcal{H}$ имеет наглядное физическое объяснение. Оно связано с тем обстоятельством, что рассматриваемое 1s-состояние является, как это подчёркивалось в разделе 2, состоянием с малой энергией связи, $\lambda^2 \sim (\ln \mathcal{H})^2$ ("мелкий" уровень в потенциальной яме (описывающей искажение кулоновского потенциала) радиусом $r_0 \sim a_H = 1/\sqrt{\mathcal{H}} \ll 1/\lambda$. В этом случае экспоненци-

Таблица 6. Характерные размеры атома водорода в сильном магнитном поле

$\mathcal{H}$	$a_{\perp}/a_B$	$a_{\parallel}/a_{\perp}$	
		1s	2s
10 ²	0,100	3,52	32,5
10 ³	0,032	7,12	89,6
10 ⁴	0,010	15,7	257
10 ⁵	3,16 (−3)	36,7	759

альное убывание волновой функции вне ямы, $\psi \propto \exp(-\lambda|x|)$, происходит на расстояниях $|x| \sim 1/\lambda \gg r_0$, существенно превышающих ширину ямы. Поэтому здесь проявляется "антиклассическое" квантово-механическое свойство связанных состояний частицы с малой энергией связи в короткодействующем потенциале: хотя частица связана ямой, но в области ямы находится с малой вероятностью $w \sim \lambda r_0 \ll 1$ (т.е. большую часть времени частица проводит вне ямы). Системами с такими свойствами являются дейтрон¹³ и отрицательный ион водорода H^- . Энергия связи внешнего электрона в этом ионе $\varepsilon = 0,75$ эВ (он движется в электростатическом поле протона, полностью экранируемого на расстояниях $r \gtrsim a_B$ внутренним атомным электроном).

Деформация электронного облака $|\psi(\mathbf{r}, z)|^2$ магнитным полем приводит к появлению квадрупольного момента атома. В сильно замагниченной водородной плазме, помимо обычного ван-дер-ваальсова притяжения, возникает также квадруполь-квадрупольное взаимодействие между атомами. Квадрупольный момент Q основного состояния атома водорода был рассчитан численно [26] с помощью вариационного метода. Мы дадим простую асимптотическую формулу для Q , справедливую при $\mathcal{H} \gtrsim 100$.

Ввиду аксиальной симметрии только диагональные компоненты тензора квадрупольного момента отличны от нуля:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2} Q, \quad Q_{zz} = -Q, \quad Q = 2\langle z^2 \rangle - \langle \rho^2 \rangle \quad (6.4)$$

(ось z выбрана вдоль магнитного поля; $Q_{zz} < 0$, поскольку заряд электрона отрицателен). Отсюда

$$Q(\mathcal{H}) = 2\{a_{\parallel}^2(\mathcal{H}) - \mathcal{H}^{-1}\}, \quad m = n_p = 0, \quad (6.5)$$

или асимптотически

$$Q = A^{-2} + \left[2(\gamma + \ln 2) + \frac{5}{3}\right] A^{-3} + \dots, \quad (6.6)$$

$$A = \ln \frac{\mathcal{H}}{\ln^2 \mathcal{H}} \gg 1$$

(здесь мы положили $a_B = 1$). Как видно из рис. 4, аналитические формулы (6.1)–(6.4) практически не отличаются от результатов численного расчёта [26], если $\mathcal{H} \gtrsim 10$. Что же касается разложения (6.6), то при $\mathcal{H} < 1000$ оно передаёт зависимость $Q(\mathcal{H})$ только качественно, однако с ростом $\mathcal{H}$ его точность увеличивается. Уменьшение квадрупольного момента с ростом $\mathcal{H} \gg 1$ объясняется тем, что сверхсильное магнитное поле сжимает атом как в поперечном направлении, так и в продольном.

Кратко рассмотрим вопрос о радиационных переходах $n\text{p} \rightarrow 1\text{s}$ вблизи основной зоны Ландау при $\mathcal{H} \gg 1$, когда $a_H \ll a_{\parallel} \ll a_B$. В этом пределе можно пренебречь сдвигом нечётного $n\text{p}$ -уровня:

$$E_n^- = -\frac{1}{2n^2}, \quad \psi_n^-(z) = \sqrt{\frac{2}{n^3}} \exp\left(-\frac{z}{n}\right) F\left(1-n, 2; \frac{2z}{n}\right),$$

¹³ Дейтрон (ядро тяжёлого изотопа водорода) — слабосвязанная ядерным взаимодействием система из протона и нейтрона. Его энергия связи $\varepsilon_d = 2,23$ МэВ, характерная величина потенциала взаимодействия $U_0 \approx 50$ МэВ, радиус $R \sim 2 \times 10^{-13}$ см.

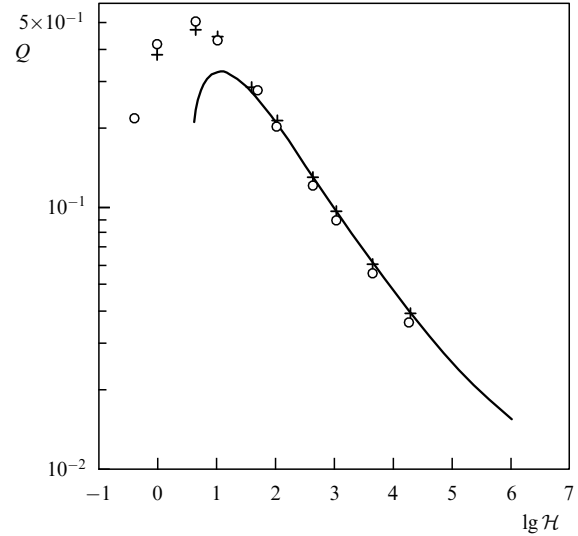


Рис. 4. Квадрупольный момент Q для основного состояния атома водорода. Сплошная кривая построена по формулам (6.4) и (6.1); точки (O и +) обозначают результаты численных расчётов [22].

а для волновой функции глубокого основного состояния использовать аппроксимацию $\chi_\lambda(z) \approx \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda|z|)$, соответствующую одномерному δ -потенциалу. В итоге для вероятности перехода получаем оценку

$$w(n\text{p} \rightarrow 1\text{s}) = \frac{16\alpha^3}{9n^3\lambda} \left[1 - \frac{2}{3\lambda} + O(\lambda^{-2})\right] \omega_0, \quad (6.7)$$

где $\omega_0 = m_e e^4 / \hbar^3 = 4,13 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, а $\lambda = \lambda(\mathcal{H})$ определяется из уравнения (3.7). При $B \sim 10^{13}$ Гс имеем $|E_{1s}| \approx 300$ эВ, $\lambda \approx 5$ и $w(2\text{p} \rightarrow 1\text{s}) \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, что на несколько порядков превышает вероятность аналогичного перехода в свободном ($\mathcal{H} = 0$) атоме водорода: $w_0 = 6,27 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$.

В дипольном приближении угловое распределение вылетающих фотонов имеет вид

$$w(\theta) \propto [\mathbf{n} \times \mathbf{d}_{fi}]^2 \sim \sin^2 \theta, \quad (6.8)$$

где θ — угол между магнитным полем и импульсом фотона $\mathbf{k}$ (в частности, фотоны не испускаются вдоль магнитного поля $\mathbf{B}$). Можно показать (замечание М.И. Высоцкого), что эти фотоны имеют 100%-ную линейную поляризацию в плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{B})$.

Подробное численное исследование вероятностей радиационных переходов можно найти в [16] и цитированных там работах.

7. Релятивистские эффекты¹⁴

Как отмечено в разделе 3, в полях $B \gtrsim 10^{13}$ Гс поперечное движение электрона становится релятивистским и для решения задачи следует использовать уравнение Дирака.

Прежде всего обратим внимание на следующее свойство связанных состояний в этом случае. Имеется широкая область сильных магнитных полей, $B \gtrsim B_{\text{cr}} \sim 10^{14}$ Гс, в которой по-прежнему применимо адиабати-

¹⁴ В разделах 7, 8 используются релятивистские единицы $\hbar = 1, c = 1$; при этом $e^2 = \alpha = 1/137$.

ческое приближение и переменные поперечного и продольного движений разделяются. При этом поперечное движение электрона является релятивистским (и может быть даже ультрарелятивистским), в то время как продольное движение сохраняет нерелятивистский характер и может быть исследовано в рамках подхода, изложенного в разделах 2 и 3. Это наглядно видно на примере связанных LLL-состояний, возникающих из основного уровня Ландау поперечного движения электрона под действием кулоновского потенциала.

Гамильтониан Дирака для электрона в рассматриваемой задаче имеет вид [30]

$$\hat{H}_D = \alpha \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) + \beta m_e + U(r), \quad (7.1)$$

где $U(r) = -e\varphi(r)$ — центральный электростатический потенциал. Из уравнения Дирака $\hat{H}_D \Psi_\varepsilon = \varepsilon \Psi_\varepsilon$ для биспинора

$$\Psi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varphi_D(\mathbf{r}) \\ \chi_D(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

имеем уравнения для двухкомпонентных спиноров:

$$\sigma \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \chi_D = (\varepsilon - m_e - U(r)) \varphi_D, \quad (7.2')$$

$$\sigma \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \varphi_D = (\varepsilon + m_e - U(r)) \chi_D, \quad (7.2'')$$

ε — собственное значение энергии для уравнения Дирака (ε включает энергию покоя m_e).

Характерные значения магнитного поля равны

$$B_a = m_e^2 e^3, \quad B_{cr} = \frac{m_e^2}{e}, \quad B_\infty = 3\pi\alpha^{-1} B_{cr} = 5,70 \times 10^{16} \text{ Гс}. \quad (7.3)$$

В пренебрежении потенциалом $U(r)$ из уравнений (7.2) следует уравнение

$$\frac{1}{2m_e} \left(\hat{\sigma} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \right)^2 \varphi_D = \frac{1}{2m_e} [\varepsilon^2 - m_e^2] \varphi_D \quad (7.4)$$

и аналогичное уравнение для спинора χ_D (уравнения одинакового вида, но для разных спиноров; связь между спинорами даётся уравнениями (7.2)). Уравнение (7.4) совпадает с уравнением Паули для нерелятивистского электрона при замене нерелятивистской энергии E на $(\varepsilon^2 - m_e^2)/2m_e$. Отсюда сразу следует известный спектр релятивистского электрона в однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n_p m \sigma_z p_z} &= \sqrt{m_e^2 + 2m_e \left(\hbar \omega_H N + \frac{1}{2m_e} p_z^2 \right)} = \\ &= \sqrt{m_e^2 \left(1 + \frac{2NB}{B_{cr}} \right) + p_z^2} \end{aligned} \quad (7.5)$$

(см. формулы (2.5) и (2.6) с $U \equiv 0$ и с кинетической энергией $p_z^2/2m_e$ свободного продольного движения), где значения N даются формулой (2.5) и поперечная часть φ_D совпадает с нерелятивистским спинором в формулах (2.3) и (2.4).

Согласно (7.5) нижняя граница спектра ($N = 0$, $p_z = 0$) совпадает с энергией покоя электрона (при этом $n_p = 0$, $m = 0, -1, -2, \dots$, $\sigma_z = -1$; LLL-состояния). Отсюда в первом порядке теории возмущений по потенциалу

$U(r) = -e^2/r$ следует формула для спектра LLL-состояний, совпадающая с нерелятивистской формулой (3.7). Действительно, как видно из (7.2'), в этом случае спинор χ_D мал по сравнению с φ_D и, опуская в (7.2'') потенциал $U(r)$, получаем

$$\chi_D \approx \frac{1}{2m_e} \sigma \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \right) \varphi_D. \quad (7.6)$$

Подставляя это выражение в (7.2'), приходим к уравнению Паули с энергией $E = \varepsilon - m_e$ и к прежнему уравнению (3.7) для спектра нерелятивистских LLL-состояний:

$$\varepsilon_{n_p=0, m, \sigma_z=-1} = m_e - \frac{1}{2} m_e e^4 \lambda^2 = m_e \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 \right). \quad (7.7)$$

Отсюда видно, что релятивистские поправки к формуле (3.7) чрезвычайно малы вплоть до значений поля B , намного превышающих B_{cr} (см. табл. 1). Это объясняется тем, что

$$\frac{|U_{\text{eff}}(0)|}{m_e c^2} = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{B}{B_{cr}}}, \quad (7.8)$$

поэтому при $B < 5 \times 10^{17}$ глубина потенциальной ямы в U_{eff} меньше, чем $m_e c^2$. При этом поперечные размеры атома водорода a_H сокращаются до комптоновской длины λ_c при $\mathcal{H} = \alpha^{-2}$ (или $B = B_{cr}$) и до радиуса протона $r_p \approx 10^{-13}$ см при $\mathcal{H} \sim (a_B/r_p)^2 \sim 10^{10}$, т.е. $B \sim 10^{19}$ Гс.

Таким образом, в полях $B \lesssim 10^{18}$ Гс ещё можно не учитывать конечные размеры ядра.

8. Эффекты квантовой электродинамики

Рассмотрим теперь, как влияют сверхсильные магнитные поля $B \gtrsim B_\infty = 5,7 \times 10^{16}$ Гс на положения атомных уровней.

Недавно был замечен интересный эффект действия таких полей на атомные спектры: в них возникает искажение (экранировка) кулоновского потенциала точечного заряда из-за поляризации вакуума сильным магнитным полем, приводящее к замедлению углубления уровня с увеличением магнитного поля и к "замерзанию" положений уровней при $B \rightarrow \infty$ на конечных предельных значениях $E_\infty = -\lambda_\infty^2/2$.

Этот неожиданный эффект впервые заметили Шабат и Усов [42, 43], затем он был рассмотрен Высоцким, Маше и Годуновым [33–35, 44]. Результаты этих авторов качественно близки, однако различаются деталями и численными оценками. Так, например, в случае основного уровня атома водорода согласно [42, 43] имеем $E_\infty = -4,0$ кэВ, а в [34] получено значение $E_\infty = -1,7$ кэВ. Причины этого расхождения разъясняются в разделе 4.2 работы [34]. В дальнейшем мы следуем работам [34, 35].

С учётом экранировки эффективный кулоновский потенциал (2.7) для состояний с $n_p = 0$ принимает вид (см. [34], ур. (52))

$$\tilde{U}_{\text{eff}}(z) = U_{\text{eff}} + \delta U_{\text{eff}}, \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{eff}}(z) &= e^2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} R_{0m}^2(\rho) \times \\ &\times \left[\exp(-\mu|z|) - \exp(-\sqrt{1+b}\mu|z|) \right] \rho d\rho, \end{aligned}$$

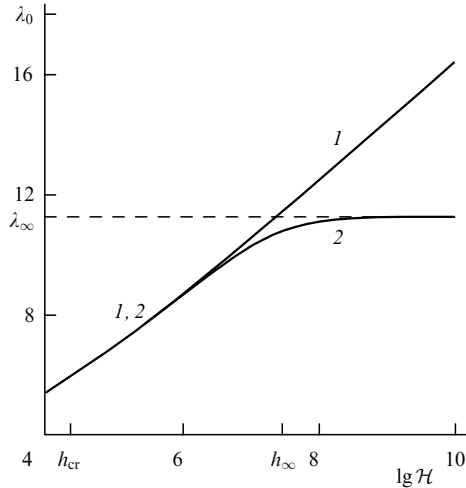


Рис. 5. Зависимость $\lambda_0(\mathcal{H})$ для основного уровня в области сверх- сильных магнитных полей без учёта (1) и с учётом (2) поляризации вакуума; предельное значение $\lambda_\infty = 11,2$ ($E_\infty = -1,71$ кэВ). На оси абсцисс отмечены значения $h_{cr} = \lg(B_{cr}/B_a)$ и $h_\infty = \lg \mathcal{H}_\infty$.

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $U_{eff}(z)$ описывается прежним выраже- нием (2.7),

$$\mu = \sqrt{6} m_e, \quad b = \frac{\alpha^3}{3\pi} \mathcal{H} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_\infty}, \quad \mathcal{H}_\infty = 2,423 \times 10^7 \quad (8.2)$$

(или $b = B/B_\infty$, где $B_\infty = 3\pi\alpha^{-1}B_{cr} \sim 10^{17}$ Гс). Согласно (8.1), $\delta U_{eff}(z) > 0$, поэтому при учёте экранировки уровни сдвигаются вверх.

Отметим следующие свойства потенциала $\delta U_{eff}(z)$. Благодаря разности экспонент в (8.1) экранировка потен- циала наиболее существенна при $|z| \sim 1/\mu$ (на больших расстояниях она экспоненциально мала). С другой сто- роны, в интеграле по ρ существенно расстояние $\rho \sim a_H$. Поэтому в случае $1/\mu \gg a_H$, т.е. при $\mathcal{H} \gg \alpha^{-2} \sim 10^4$, в (8.1) под радикалом можно опустить ρ^2 и получить¹⁵

$$\delta U_{eff}(z) \approx \frac{e^2}{|z|} \left[\exp(-\mu|z|) - \exp(-\sqrt{1+b}\mu|z|) \right]. \quad (8.3)$$

Экранировка потенциала приводит к изменению логарифмической производной в формуле (3.3), рав- ному согласно (3.1) (в атомных единицах)

$$\delta \left(\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \right) \approx 2 \int_0^z \delta U_{eff}(z) dz \quad (z \lesssim L) \\ = 2 \int_0^\infty \frac{e^2}{z} \left[\exp(-\mu z) - \exp(-\sqrt{1+b}\mu z) \right] dz, \quad (8.4)$$

которое в области сшивания логарифмических производ- ных, выполненного в разделе 3, не зависит от z . Отсюда имеем

$$\delta \left(\frac{\chi'(z)}{\chi(z)} \right) = -2 \ln \mu + 2 \ln(\mu\sqrt{1+b}) = \\ = \ln \left(1 + \frac{\alpha^3}{3\pi} \mathcal{H} \right), \quad z \sim L. \quad (8.5)$$

¹⁵ В полях $\mathcal{H} \lesssim 10^4$ это выражение не выполняется. Однако экрани- ровка потенциала существенна лишь в полях $\mathcal{H} \gtrsim 10^7$.

Таблица 7. "Замерзание" атомных уровней при учёте поляризации вакуума

LLL-состояния, $n_\rho = 0, m \leq 0$			Возбуждённые уровни, $n_\rho = m = 0, n = 1, 2, \dots$		
m	λ_∞	ε_∞ , кэВ	n	λ_∞	$\varepsilon_\infty^{(n)}$, эВ
0	11,21	1,71	1	0,877	10,7
-1	10,39	1,47	2	0,470	3,00
-2	9,986	1,36	3	0,320	1,39
-3	9,718	1,28	4	0,242	0,798
-4	9,518	1,23	5	0,195	0,517
-5	9,359	1,19	10	0,0985	0,132

Примечание. Приведены предельные (при $B \rightarrow \infty$) значения λ_∞ и энергии связи ε_∞ для уровней атома водорода с учётом экрани- ровки потенциала; расчёты для LLL-состояний выполнены по формуле (8.8) (без учёта релятивистских поправок).

Поэтому экранировка потенциала сводится к добавле- нию к логарифмической производной (3.3) этого слагае- мого, т.е. к замене в ней

$$\mathcal{H} \rightarrow \frac{\mathcal{H}}{1 + (\alpha^3/3\pi)\mathcal{H}}. \quad (8.6)$$

В результате уравнение для спектра чётных уровней принимает вид [34, 35] (ср. с (3.7))

$$\ln \left(\frac{\mathcal{H}}{1 + \mathcal{H}/\mathcal{H}_\infty} \right) = \lambda + 2 \left[\ln(2\lambda) + \psi \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] + 4\gamma + A_{0m}, \quad (8.7)$$

где $\alpha = 1/137$, $n_\rho = 0$ и $A_{0m} = -\ln 2 + \psi(1 + |m|)$.

Из (8.7) следует, что в полях $\mathcal{H} \ll \mathcal{H}_\infty$ влияние поляризации вакуума пренебрежимо мало. С увеличе- нием поля, при $\mathcal{H} \gtrsim \mathcal{H}_\infty$, поляризация приводит к замед- лению углубления уровней и к их "замерзанию" в полях $\mathcal{H} \gg \mathcal{H}_\infty$ [35] (см. рис. 5 для основного уровня, на котором хорошо виден эффект "замерзания" энергии уровня при $B \rightarrow \infty$).

Предельные значения $\lambda = \lambda_\infty$ при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ следуют из уравнения (8.7):

$$\lambda_\infty + 2 \left[\ln(2\lambda_\infty) + \psi \left(1 - \frac{1}{\lambda_\infty} \right) \right] = \ln \mathcal{H}_\infty - 4\gamma - A_{0m}. \quad (8.8)$$

Значения λ_∞ и предельные энергии связи ε_∞ для ряда глубоких (в атомных масштабах) LLL-уровней и примы- кающих к ним возбуждённых уровней, входящих в "башню" [33–35] состояний с $n = 1, 2, 3, \dots$ и данным магнитным квантовым числом $m \leq 0$, приведены в табл. 7.

В работе [35] был выполнен численный расчёт спектра на основе уравнения Дирака, усреднённого по попереч- ному движению электрона. Кроме того, был использо- ван приём, предложенный в теории критического заряда ядра [45–50] (относительно Z_{cr} см. приложение А), с помощью которого уравнения Дирака для двухкомпо- нентных спиноров сводятся к уравнению второго по- рядка типа уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \chi}{dz^2} + 2m_e [E - V(z)] \chi = 0, \quad E = \frac{\varepsilon^2 - m_e^2}{2m_e} = -\frac{1}{2} m_e e^4 \lambda^2. \quad (8.9)$$

В этом уравнении потенциал $V(z)$ выражается через $\bar{U}$ (или $\bar{U}$) в явном, хотя и в несколько громоздком, виде

[45–47]:

$$V = \frac{\varepsilon}{m_e} U - \frac{1}{2m_e} U^2 + \frac{U_{zz}}{4m_e(\varepsilon + m_e - U)} + \frac{3}{8} \frac{U_z^2}{m_e(\varepsilon + m_e - U)^2}, \quad (8.10)$$

где $U_z = dU/dz$ и т.д.

Сравним точность асимптотических формул (3.7) и (8.7) с результатами численных расчётов [35], основанных, в частности, на решении уравнения Дирака с учётом экранировки кулоновского потенциала в сильном магнитном поле (см. табл. 1). Как видно, уже в полях $B/B_{cr} \approx 10^{-2}$ (при этом $a_H \approx 0,1a_B$) погрешность формулы (3.7) порядка одного процента и быстро убывает с увеличением B вплоть до значений $B \approx 10^2 B_{cr} \approx 4 \times 10^{15}$ Гс, которые превышают максимальные магнитные поля, известные из астрофизики (см. приложение Б). В этой области магнитных полей влиянием экранировки кулоновского потенциала на положение атомных уровней можно пренебречь. Однако она становится существенной при дальнейшем увеличении магнитного поля. В этом случае вместо (3.7) следует использовать формулу (8.7), которая при $B \gtrsim 10^5 B_{cr}$ приводит к "замерзанию" атомного спектра в согласии с уравнением Дирака $\bar{D}$ (см. табл. 1). При этом $\lambda_0 = 11,2$ согласно (8.7) и $\lambda_0 = 11,3$ из уравнения Дирака $\bar{D}$.

До сих пор мы пренебрегали аномальным магнитным моментом электрона $\Delta\mu$, возникающим вследствие радиационных поправок в КЭД [30], однако при $B \gtrsim B_{cr}$ его вклад становится существенным. В столь сильных полях магнитный момент сам зависит от поля; так, в первом порядке по α [51, 52]

$$\Delta\mu(B) = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_B \begin{cases} 1 + \frac{8}{3} L \ln L, & L \ll 1, \\ -L^{-1} \ln^2 L, & L \gg 1, \end{cases} \quad (8.11)$$

где $L = B/B_{cr} = \alpha^2 \mathcal{H}$ и $\mu_B = |e|\hbar/2m_e c$ — магнетон Бора. Значение $\Delta\mu/\mu_B = \alpha/2\pi$ при $B \rightarrow 0$ было получено Швингером [30], с ростом B аномальный магнитный момент электрона меняет знак [51, 52].

Энергия основного уровня Ландау при $B \gg B_{cr}$ равна

$$\begin{aligned} E_0 &= m_e + \frac{1}{2} \omega_H + (\mu_B + \Delta\mu)B - \frac{1}{2} m_e e^4 \lambda^2 = \\ &= m_e + \left(\frac{1}{2\pi\alpha} \ln^2 L - \lambda^2 \right) \frac{m_e e^4}{2}, \quad L \gg 1. \end{aligned} \quad (8.12)$$

В случае "дираковского" электрона, т.е. при $\Delta\mu \equiv 0$, для LLL-состояний ($N = 0$, $\sigma_z = -1$) энергия нулевых колебаний в плоскости (x, y) полностью сокращается с магнитной энергией спина,

$$\frac{\omega_H}{2} = \mu_B B = \frac{1}{2} \frac{m_e L}{2}, \quad (8.13)$$

но аномальный магнитный момент приводит к сдвигу энергии $\Delta E_0 = -\Delta\mu B$, универсальному для всех атомных уровней. При $L \gg 1$ вклад в (8.12) от аномального момента $\Delta\mu$ растёт пропорционально $\ln^2 L$ и сравнивается с энергией связи уровня при $\ln L = \sqrt{2\pi\alpha} \lambda$ или ¹⁶

$$L = L_*,$$

$$L_* = \exp \frac{2 \ln(1/\alpha)}{(2\pi\alpha)^{-1/2} - 1} \approx 15. \quad (8.14)$$

При $L > L_*$, т.е. $B \gtrsim 10^{15}$ Гс, сдвиг уровня превышает его энергию связи λ^2 . Однако этот сдвиг определяется КЭД, а не атомной физикой, он одинаков для всех уровней атомного спектра и не входит в разности энергий. Поэтому энергии радиационных переходов $n\rho \rightarrow 1s$ в атоме водорода, которые могли бы наблюдаться экспериментально, при учёте $\Delta\mu$ практически не меняются.

9. Об эффекте Зельдовича в атомных спектрах

В статье Зельдовича "Уровни энергии в искажённом кулоновском поле" [53] (см. также [54]) был рассмотрен вопрос об уровнях энергии валентного электрона в примесном полупроводнике с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \gg 1$ и указан своеобразный физический эффект, который может наблюдаться в тех случаях, когда потенциал взаимодействия разделяется на две части с сильно несоизмеримыми радиусами: $V(r) = V_{sh} + U_L$. При тех значениях константы связи ($g = g_0$), при которых в короткодействующем ("сильном") потенциале $V_{sh}(r) = -g(\hbar^2/2mr_0^2)v(r/r_0)$ возникает связанный s-уровень (или имеется резонанс в рассеянии частиц малой энергии, т.е. реальный или виртуальный уровень с угловым моментом $l = 0$ и энергией, близкой к нулю), при небольшом изменении g происходит резкое изменение атомного спектра: кулоновские уровни E_{ns} с $n = 1, 2, \dots$ опускаются на место $E_{(n-1),s}$, а основной уровень E_{1s} "проваливается" глубоко вниз (в атомном масштабе). При этом относительная ширина области перестройки (по константе g сильного потенциала) составляет $\Delta g/g_0 \sim r_0/a_B \ll 1$, где r_0 — радиус действия сил для потенциала $V_{sh}(r)$, $r_0 \ll a_B$.

В дальнейшем этот эффект был переоткрыт в релятивистской кулоновской задаче с зарядом $Z > 137$ [55], в теории легчайших адронных атомов ("перестройка" атомного спектра [39, 40, 56, 57]) и получил название эффекта Зельдовича [58–60]. В этих работах использовались конкретные модели "сильного" потенциала $V_{sh}(r)$: прямоугольная яма [53], параболический потенциал, соответствующий постоянной плотности заряда протонов внутри ядра [55] и сепарабельные потенциалы конечного ранга [56].

В работе [57] получено безмодельное уравнение, описывающее эффект Зельдовича для s-состояний:

$$F(\lambda) \equiv \lambda + 2[\ln \lambda + \psi(1 - \lambda^{-1})] = \frac{a_B}{a_{cs}}. \quad (9.1)$$

Здесь $l = 0$, $a_B = \hbar^2/m_e e^2$, a_{cs} — перенормированная кулоновским взаимодействием длина s-рассеяния для короткодействующего потенциала. Параметр a_B/a_{cs} определяет не только спектр связанных состояний в искажённом кулоновском потенциале, но и изменение кулоновской фазы s-рассеяния в радиальной функции

$$\begin{aligned} \chi_0(r) &\approx \sin \left[kr + \frac{1}{ka_B} \ln(2kr) + \delta_0^{\text{Coul}}(k) + \delta_0(k) \right], \\ \delta_0^{\text{Coul}}(k) &= \arg \Gamma \left(1 - \frac{i}{ka_B} \right), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (9.2)$$

¹⁶ Здесь мы положили для оценки $\lambda \approx \ln \mathcal{H} = \ln L - 2 \ln \alpha$.

в случае медленных частиц, $kr_0 \ll 1$. В частности,

$$\delta_0(k) \approx -\operatorname{arccot} \frac{a_B}{2\pi a_{cs}}, \quad k \rightarrow 0. \quad (9.3)$$

Уравнение (3.7) совпадает с уравнением (9.1) при длине рассеяния

$$a_{cs}(\mathcal{H}) = (\ln \mathcal{H} - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{n_{\rho m}})^{-1} a_B, \quad (9.4)$$

или

$$\frac{1}{a_{cs}(\mathcal{H})} = (\ln \mathcal{H} - 4\gamma - 2 \ln 2 - A_{n_{\rho m}}) a_B^{-1}. \quad (9.5)$$

Заметим, что аналогия между расположением уровней для этих двух задач (атом водорода при $B \gg B_a$, $a_H \ll a_B$ и кулоновская задача с короткодействием при $r_0 \ll a_B$) впервые была отмечена, по-видимому, в [22–24]. Для состояний с $n_{\rho} = 0$

$$a_{cs}(\mathcal{H}) = [\ln \mathcal{H} - 4\gamma - \ln 2 - \psi(1 + |m|)]^{-1} a_B, \quad (9.6)$$

при этом роль радиуса обрезания r_0 кулоновского потенциала на малых расстояниях играет величина $a_H = a_B/\sqrt{\mathcal{H}}$.

В работе [57] показано, что подходящими переменными для описания сдвигов кулоновских ns -уровней в эффекте Зельдовича для атома водорода являются эффективное главное квантовое число n^* и связанная с ним поправка Ридберга Δ_n , известные из атомной физики [6] ($\hbar = m_e = e = 1$):

$$E_{ns} = -\frac{1}{2} \lambda_n^2 \equiv -\frac{1}{2(n^*)^2} = -\frac{1}{2(n + \Delta_n)^2}, \quad (9.7)$$

или $n^* = \frac{1}{\lambda_n} = n + \Delta_n$.

При этом, независимо от характера искажения кулоновского потенциала на малых расстояниях, для возбужденных уровней $\Delta_n \approx \text{const}$ слабо зависит от n . Условиями применимости уравнения (9.1) являются следующие: $r_0 \ll a_B$ и $\lambda r_0 \ll 1$ при любом значении длины рассеяния a_{cs} . В задаче, рассмотренной Зельдовичем [53], это условие обеспечивается тем, что радиус Бора $a_B = \varepsilon(m_e/m_{\text{eff}}) \gg r_0$, где m_e — масса электрона, $m_{\text{eff}} \ll m_e$ — его эффективная масса в решётке, а r_0 (радиус иона) порядка a_B .

Обсудим основные закономерности сдвигов уровней, следующие из уравнения (9.1), когда длина рассеяния $a_{cs}(\mathcal{H})$ даётся формулой (9.6) с $m = 0$, и отметим особенности влияния искажения кулоновского потенциала по сравнению со случаем произвольного сильного короткодействующего потенциала. Приведём таблицу, в которой представлена связь численных значений магнитного поля и длины рассеяния:

$\mathcal{H}$	10	11,25	$\mathcal{H}^* \approx$ $\approx 11,30$	11,33	20	100	10^4	10^6
a_{cs}/a_B	-8,1773	-224	∞	339	1,7514	0,4587	0,1474	0,0878

(9.8)

$a_{cs}(\mathcal{H}^*) = \infty$, $\ln \mathcal{H}^* = 3\gamma + \ln 2 = 2,4248$. При этом длина рассеяния (9.6) может быть записана в виде

$$a_{cs}(\mathcal{H}) = \frac{1}{\ln(\mathcal{H}/\mathcal{H}^*)} a_B. \quad (9.9)$$

Отсюда видна её резкая зависимость от $\mathcal{H}$ вблизи $\mathcal{H}^*$: $a_{cs}(\mathcal{H}) \approx [\mathcal{H}^*/(\mathcal{H} - \mathcal{H}^*)] a_B$, а также и медленное убывание при $\mathcal{H} \rightarrow \infty$: $a_{cs}(\mathcal{H}) \propto 1/\ln \mathcal{H}$.

Начнём с наиболее яркого проявления эффекта Зельдовича, когда длина рассеяния $a_{cs} = \infty$. В представленной ниже таблице приведены значения поправок Ридберга в этом (резонансном) случае:

Уровень	1s	2s	3s	4s	5s	∞s
Δ_n	0,4696	0,4964	0,4987	0,4993	0,4996	0,5

(9.10)

Как видно, в области невозмущённого кулоновского спектра, $E_n^{(0)} = -1/2n^2$, в терминах n^* происходит максимальный сдвиг уровней: они расположены посередине между соседними уровнями с квантовыми числами n и $n + 1$, для них $\Delta_n \approx 0,5$. Интересно, что в этом случае для сдвига основного ("глубокого") 1s-уровня также $\Delta_{1s} \approx 0,5$, для него $\lambda_{1s}^2 = 4,535$, т.е. он тоже находится вблизи невозмущённого кулоновского спектра, как это подчёркивалось Зельдовичем. Наконец, именно в этом случае согласно (9.3) происходит наиболее сильное искажение кулоновской фазы s -рассеяния: $\delta_0(0) = \pm\pi/2$.

С уменьшением значения a_{cs} (при увеличении поля $\mathcal{H}$) уровни понижаются. При этом в случае $\ln \mathcal{H} \gg 1$ основной уровень "проваливается" глубоко вниз (для него $\lambda_{1s} \approx \ln \mathcal{H}$), а атомные уровни $\lambda_n(\mathcal{H})$ с $n \geq 2$ приближаются к нижним соседним кулоновским уровням $(n - 1)$ с одинаковыми значениями $\Delta_n \rightarrow 0$.

Это наглядно видно в случае малых длин рассеяния, $a_{cs} \ll a_B$, и, соответственно, больших значений правой части уравнения (9.1). Как уже отмечалось, функция $\psi(1 - 1/\lambda)$ в области кулоновского спектра, $\lambda \leq 1$, имеет полюсы в точках $\lambda_n = n$ с $n = 1, 2, \dots$ (невозмущённый спектр при $a_{cs} = 0$). Используя в (9.1) формулу

$$\psi\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \psi\left(\frac{1}{z}\right) + \pi \cot \frac{\pi}{z} \quad (9.11)$$

и полагая в ней $z = 1/\lambda_n = n^* = n + \Delta_n$, получаем

$$\Delta_n \approx 2a_{cs} = \text{const}, \quad |a_{cs}| \ll 1. \quad (9.12)$$

Согласно формулам (9.7) и (9.12), для сдвинутых кулоновских ns -уровней имеем

$$E_{ns} = -\frac{1}{2(n + \Delta)^2} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{\Delta}{n^3} + \dots, \quad (9.13)$$

и если учесть, что для невозмущённых кулоновских функций ns -состояний [6] $\psi_{ns}(0) = 1/\sqrt{\pi n^3}$, то для сдвига уровней получаем

$$E_{ns} - E_n^{(0)} \approx \frac{\Delta}{n^3} = 2\pi\psi_{ns}^2(0)a_{cs}. \quad (9.14)$$

Как отметил Зельдович [53], хотя в этом случае теория возмущений по искажающему сильному короткодействующему потенциалу в области $r \sim r_0 \ll a_B$ неприменима, тем не менее сдвиг уровня пропорционален плотности вероятности нахождения электрона в этой области в невозмущённом состоянии $\psi_{ns}^2(0)$. В связи с этим напомним, что сдвиг ns -уровней под действием слабого короткодействующего потенциала $V_{sh}(r)$ в первом

порядке теории возмущений равен [6]

$$\begin{aligned}\Delta E_{ns} &= \int V_{sh}(r) \psi_{ns}^2(r) d^3r \approx \psi_{ns}^2(0) \int V_{sh}(r) d^3r = \\ &= \frac{2\pi\hbar^2}{m} \psi_{ns}^2(0) \tilde{a}_B,\end{aligned}\quad (9.15)$$

где

$$\tilde{a}_B = -f_B(E=0) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V_{sh}(r) d^3r. \quad (9.16)$$

Здесь $\tilde{a}_B$ и $f_B(E=0)$ — длина рассеяния и амплитуда рассеяния с энергией $E=0$ в борновском приближении [6].

В работе Зельдовича дано обоснование обобщения формулы теории возмущений (9.15) на нерезонансный случай (9.14) короткодействующего искажения кулоновского потенциала, состоящего в замене борновской длины s-рассеяния $\tilde{a}_B$ на точное значение a_{cs} (не использующее её вычисление по теории возмущений) (см. также [61–63]).

Формулу (9.14) называют *теорией возмущения по длине рассеяния*. Она применима и в тех случаях, когда с короткодействующим искажением потенциала связана возможность протекания неупругих процессов: например, аннигиляция в рр-адронном атоме в пионы или аннигиляция позитрония e^-e^+ в два или три γ -кванта. В этих случаях длина рассеяния a_{cs} и сдвиг уровня ΔE являются комплексными величинами, а соответствующие состояния являются квазистационарными с временем жизни, равным $\tau = \hbar/\Gamma$, $\Gamma = -2\text{Im}(\Delta E)$. При этом формула (9.14) позволяет связать время жизни состояния с поведением соответствующего неупругого сечения (аннигиляции) в пределе малых энергий, $kr_0 \ll 1$ (см. её применения в [36]).

В таблице 5 приведены поправки Ридберга $\Delta_{nl} \equiv \Delta_n^\pm$ для спектра атома водорода в сверхсильном магнитном поле, полученные из численных расчётов энергий связи уровней [13–16]. Здесь надо сделать уточнение, связанное с используемой в [13] классификацией состояний атома в магнитном поле в терминах состояний nl (2s, 3d, 2p и т.д.) невозмущённого атома водорода вместо соответствующих обозначений их как $n^\pm$ с $n=1, 2, \dots$ для чётных и нечётных состояний в присутствии магнитного поля ($1^+ \equiv 1s$ — глубокий уровень) (см. замечание по этому вопросу в разделе 4). Поэтому для энергии уровня вместо (9.7) имеем¹⁷

$$n^* = \frac{1}{\lambda_{nl}} = n - 1 + \Delta_n, \quad (9.17)$$

т.е. значение n сдвинуто на 1.

Как видно из табл. 5 и (9.8), даже в полях $\mathcal{H} \approx 10$ формула (9.1) с длиной рассеяния (9.5) (для чётных состояний) правильно отражает проявление эффекта Зельдовича в рассматриваемой задаче (хотя в этом случае радиус обрезания кулоновского потенциала, $r_0 \approx 0,3 a_B$, не так уж мал).

¹⁷ На рисунке 6 представлено графическое решение уравнения (9.1), на котором отмечены положения основного 1s и серии кулоновских уровней 2s, 3s, 4s, ..., сдвинутых из-за искажения кулоновского потенциала. Из рисунка видно, что при наличии эффекта Зельдовича спектр атомных уровней обладает, с хорошей точностью, периодичностью по переменной n^* .

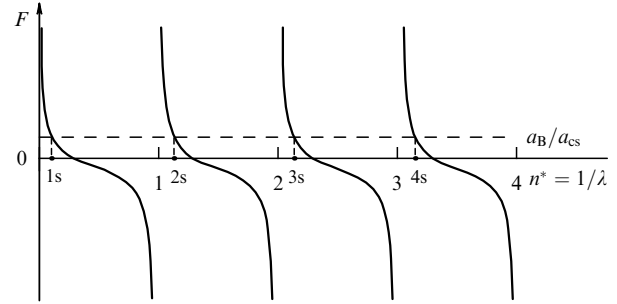


Рис. 6. Эффект Зельдовича. Возмущение атомного спектра близким к нему резонансным ("квазидерным" [46–48]) уровнем. Использован рис. 1 из работы [57].

С другой стороны, может показаться странным, что при значительном увеличении поля, до значений $\mathcal{H} \sim 10^6$, когда радиус обрезания кулоновского потенциала $r_0 \sim \sim a_B/\sqrt{\mathcal{H}} \sim 10^{-3}a_B$, длина рассеяния a_{cs} и поправки Ридберга Δ_n для возбуждённых чётных состояний (слабо зависящие от n) уменьшаются очень медленно, вплоть до значений $\Delta_n \approx 0,16$. В то же время поправка Ридберга для основного 1s-уровня отличается от них уже существенно, в полтора раза (ср. с резонансным случаем $\mathcal{H}^*$, рассмотренным выше). В этом случае формула теории возмущений по длине рассеяния (9.14) описывает сдвиги уровней лишь качественно. Так, при $\mathcal{H} = 10^6$ согласно табл. 5 $\Delta_n = 0,160$, а согласно (9.8) и формуле (9.12) $\Delta_n = 0,176$ (конечно, при дальнейшем увеличении поля эти значения сближаются и обращаются в нуль).

Отмеченное поведение a_{cs} и Δ_n имеет простое объяснение. Дело в том, что с ростом $\mathcal{H}$ искажение кулоновского потенциала на малых расстояниях приводит не только к увеличению глубины ямы, но и к уменьшению её ширины. В результате резонансный 1s-уровень также понижается, однако его глубина, пропорциональная $\ln^2(1/a_H)$, много меньше глубины ямы $\propto 1/a_H$, т.е. уровень по-прежнему остаётся слабосвязанным состоянием в короткодействующем потенциале¹⁸; для него

$$|E_{1s}| \ll \frac{\hbar^2}{m_e r_0^2} \quad (9.18)$$

и длина рассеяния a_{cs} много больше радиуса r_0 этого потенциала.

Существенно, что этот уровень отвечает слабосвязанному состоянию не только в искажённом потенциале $U(r) = V_{sh}(r) + U_C(r)$, но также и в изолированном короткодействующем потенциале $V_{sh}(r)$, с "выключенным" U_C . Обозначив как a_s длину s-рассеяния в потенциале V_{sh} , для a_{cs} и a_s в резонансном случае имеем

$$\frac{1}{a_{cs}(\mathcal{H})} - \frac{1}{a_s} = -\frac{2}{a_B} \left[\ln \frac{r_0(\mathcal{H})}{a_B} + O(1) \right]. \quad (9.19)$$

Это — формула Швингера [64] для перенормировки длины s-рассеяния a_s в короткодействующем потенциале $V_{sh}(r)$ кулоновским потенциалом притяжения. Отметим, что её вывод с логарифмической точностью

¹⁸ Поэтому естественная оценка $a_{cs} \sim r_0$ для нерезонансного случая сильного искажения кулоновского потенциала в рассматриваемой задаче в полях $\mathcal{H} \sim 10^6$ ещё не реализуется.

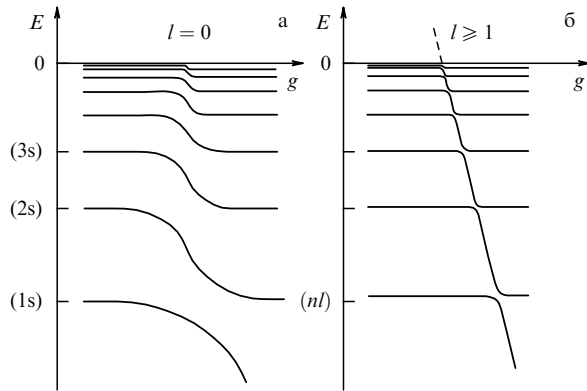


Рис. 7. Перестройка атомного спектра: (а) для s-уровней, (б) при $l \neq 0$.

основан на учёте кулоновского потенциала в области действия короткодействующего потенциала $V_{sh}(r)$ по теории возмущений (см. приложение В о длинах рассеяния a_s и a_{cs} в резонансном случае ($E_l \rightarrow 0$, $g \approx g_l$)).

Применение формулы (9.19) в рассматриваемой задаче особенно эффективно по той причине, что известна зависимость $r_0(\mathcal{H}) \propto 1/\sqrt{\mathcal{H}}$. Поэтому, применив (9.19) к значениям поля $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}^*$, можно исключить невычисляемые константы в этой формуле и получить результат (9.9) для длины рассеяния a_{cs} . В частности, при $\ln \mathcal{H} \gg \ln \mathcal{H}^*$ из (9.19) следует $a_{cs} \approx a_B / \ln \mathcal{H}$ — результат (9.14) теории возмущений по длине рассеяния.

Уравнение (9.1) можно обобщить на состояния с произвольным угловым моментом $l \neq 0$ [65, 66]. В этом случае влияние короткодействующего потенциала $V_{sh}(r)$ на состояния в дальнедействующем потенциале U_L не может быть учтено наложением на волновую функцию граничного условия при $r \rightarrow 0$, как это было в случае s-состояний согласно (2.9) и (3.1) (когда дальнедействующий потенциал имел кулоновскую особенность в нуле). Это связано с тем, что общее решение радиального уравнения Шрёдингера при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$R_l(r) = c_1 r^l + c_2 r^{-l-1}$$

и при $l \geq 1$ сингулярное решение должно быть опущено ввиду его квадратичной неинтегрируемости. Обобщение метода потенциалов нулевого радиуса действия [31, 32] на случай $l \neq 0$ дано в работах [67, 68].

Приведём рис. 7, который иллюстрирует различие в проявлении эффекта Зельдовича в случаях s-состояний ($l = 0$) и при орбитальном моменте $l \geq 1$. На оси абсцисс указаны значения константы связи g в короткодействующем потенциале $V_{sh}(r) = -(g/2r_0^2) v(r/r_0)$, определяющей положение резонансного уровня, когда он находится в атомной области; на оси ординат отмечены положения невозмущённых кулоновских уровней $E_{nl}^{(0)} = -1/2n^2$ с соответствующими значениями момента l (для нижнего $n = l + 1$). В резонансном случае все возбуждённые ns -уровни¹⁹ сдвинуты вниз с одинаковым значением поправки Ридберга Δ (см. табл. 5).

В случае $l \neq 0$ проявление эффекта Зельдовича носит совершенно иной характер [65, 66]. Теперь спектр состоит из слабо смещённых атомных nl -уровней и резонансного уровня в потенциале $V_{sh}(r)$. Перестройка такого спектра возникает только в том случае, когда при увеличении

константы связи g резонансный уровень сближается²⁰ с одним из атомных уровней. При этом в узкой области значений g взаимодействие уровней носит характер *кватересечения термов*.

Такое различие в проявлении эффекта Зельдовича в случаях $l = 0$ и $l \neq 0$ объясняется наличием при $l \neq 0$ малопроницаемого центробежного барьера $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$, разделяющего две области с потенциалами притяжения. В первой из них — короткодействующий потенциал $V_{sh}(r)$ с мелким резонансным уровнем, во второй — кулоновский потенциал с nl -уровнями. Пока энергии резонансного и nl -уровней не близки друг к другу, их взаимное влияние несущественно из-за малой проницаемости барьера.

10. Заключительные замечания

Рассмотрены различные подходы к исследованию энергетического спектра атома водорода в сильном магнитном поле $B \gg B_a$. Показано, что использование явного вида эффективного потенциала в адиабатическом приближении при решении уравнения Шрёдингера (или уравнения Дирака в случае $B \gtrsim B_{cr} \sim 10^{14}$ Гс) приводит к простым аналитическим выражениям для спектра уровней. Подробно исследованы атомные уровни, примыкающие к нижней зоне Ландау с $n_p = 0$ и магнитными квантовыми числами $m = 0, -1, -2, \dots$. Сравнение с результатами имеющихся численных расчётов показывает, что уравнение (3.7) при $\mathcal{H} = B/B_a \gtrsim 100$ имеет процентную или ещё более высокую точность.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1. Имеется существенное различие между энергиями возбуждённых чётных и нечётных уровней, $E_n^\pm = -(\lambda_n^\pm)^2/2$, что качественно видно уже из асимптотических формул (без учёта поляризации вакуума):

$$\begin{aligned} \lambda_n^+ &\approx \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2}{n \ln \mathcal{H}} + \dots \right), \\ \lambda_n^- &\approx \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2 \ln \mathcal{H}}{n \mathcal{H}} + \dots \right), \quad \mathcal{H} \gg 1, \end{aligned} \quad (10.1)$$

$n = 1, 2, \dots$. Как видно, возбуждённые чётные уровни расположены значительно выше нечётных, для них соответствующие поправки Ридберга равны

$$\Delta^+ \approx \frac{2}{\ln \mathcal{H}}, \quad \Delta^- \approx \frac{2 \ln \mathcal{H}}{\mathcal{H}}. \quad (10.2)$$

2. При значениях $\mathcal{H} \sim 10^3 - 10^4$ нечётные уровни уже близки к невозмущённым кулоновским значениям $E_n = -1/2n^2$, в то время как чётные ещё далеки от этого предела. Поэтому утверждение о приближённом двукратном вырождении возбуждённых чётных и нечётных уровней (см. [6] и [19]) нуждается в уточнении.

3. В разделе 3 отмечен своеобразный скейлинг в энергетическом спектре, согласно которому в адиабатическом приближении для любого уровня, $E = -\lambda^2/2$, зависимость $F(\lambda)$ (см. (3.8)) является универсальной функцией (т.е. её значение не зависит от величины магнитного поля и квантовых чисел уровня).

Как видно из рис. 1, такой скейлинг хорошо выполняется при $\lambda^2 > 12$. Интересно, что при уменьшении λ^2 , когда применимость адиабатического приближения на-

¹⁹ Уровень 1s сдвигается более резко.

²⁰ Его траектория обозначена штриховой линией.

рушается, уровни по-прежнему группируются вдоль плавной кривой, близкой к $F(\lambda)$.

4. Уравнение (3.7) для спектра уровней было получено из решения уравнения Шрёдингера. Однако в полях $B \gtrsim 10^{13}$ Гс поперечное движение электрона становится релятивистским. Решение уравнения Дирака с точечным зарядом ядра показало, что уравнение (3.7) для энергии связи электрона остаётся применимым и в сверхсильных полях вплоть до $B > 10^{17}$ Гс (см. табл. 1).

5. В работах [33–35, 42, 43] был замечен интересный эффект влияния сильного магнитного поля $B > 10^{16}$ Гс на спектр атома водорода, связанный с поляризацией вакуума и экранировкой кулоновского потенциала протона в таких полях.

С учётом поляризации вакуума при $B \rightarrow \infty$ энергии нижних чётных LLL-уровней с различными m не уменьшаются до $-\infty$, а стремятся к конечным предельным значениям ("замораживание" уровней), величина которых $E_{\infty}^+ = -\lambda_{\infty}^2/2$ зависит от магнитного квантового числа m и велика по сравнению с уровнями дискретного спектра невозмущённого атома водорода. Однако их энергия связи остаётся нерелятивистской и (в пренебрежении релятивистскими поправками) определяется уравнением (8.7), учитывающим экранировку эффективного кулоновского потенциала. Так, согласно [34] $\epsilon_{\infty} = \lambda_{\infty}^2 \text{ Ry} = 1,71 \text{ кэВ}$.

Аналогичным образом в случае возбуждённых чётных уровней асимптотика энергий E_n^+ при $B \rightarrow \infty$ отличается от $E_n^0 = -1/2n^2$ (см. табл. 7).

6. Обычно учёт поляризации вакуума в КЭД даёт малые поправки (например, вклад в лэмбовский сдвиг $\Delta_{LS} = 1058 \text{ МГц}$ уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода [30]). В случае сверхсильного магнитного поля $\mathcal{H} \gtrsim \mathcal{H}_{\infty}$ поляризация вакуума приводит к качественному изменению спектра чётных уровней.

7. До сих пор мы полагали, что атом водорода находится в покое в статическом магнитном поле. Однако в астрофизике при движении нейтронных звёзд (обладающих магнитными полями $B \sim 10^{11} - 10^{13}$ Гс и более) сквозь облако межзвёздного газа встречаются случаи, когда надо учитывать движение атома. Вопросы о влиянии этого движения (при наличии сильного магнитного поля) на характеристики атомных спектров: энергию уровней, вероятности радиационных переходов, сечения фотоионизации и т.д. — рассматривались в литературе. Однако они лежат в стороне от основной темы нашей статьи, поэтому ограничимся указанием на работы [69–72] и содержащиеся в них дальнейшие ссылки.

8. В работе "Взаимодействие и аннигиляция антикулонов с нуклонами", выполненной в 1957 г., но неопубликованной, Л.Д. Ландау, И.Я. Померанчук и К.А. Тер-Мартirosян исследовали вопрос о спектре протон-антипротонного атома. Учитывая искажение кулоновского поля из-за сильного взаимодействия между $\bar{p}$ и p на малых расстояниях и сшивая внутренние и внешние волновые функции в области, где уже можно пренебречь сильным взаимодействием, эти авторы получили результаты, аналогичные результатам [39, 40, 57]. Один из авторов настоящей статьи (В.П.) вспоминает с благодарностью обсуждение этих вопросов с К.А. Тер-Мартirosяном (который рассказал о работе трёх авторов и ознакомил с соответствующим манускриптом) и с Е.М. Лифшицем, сделавшими ряд полезных замечаний.

Следует, однако, иметь в виду, что во время выполнения работ [39, 40, 57] работа Ландау, Померанчука и Тер-Мартirosяна была нам неизвестна, чем и объясняется отсутствие ссылок на неё.

Авторы искренне благодарны М.И. Высоцкому и С.И. Годунову за информацию о статьях [33–35] до их опубликования и полезные замечания, Б.О. Кербику, А.Е. Кудрявцеву, В.Д. Муру, С.В. Попруженко, Ю.А. Симонову за обсуждение результатов работы. Один из авторов (В.П.) хотел бы поблагодарить также Л.С. Минкину и Д.В. Попова за поддержку и помощь во время работы над этой статьёй.

11. Приложения

А. О критическом заряде ядра

Уравнение Дирака с точечным кулоновским потенциалом притяжения

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}, \quad 0 < r < \infty, \quad (\text{A.1})$$

решается аналитически [30] и приводит к известной формуле Зоммерфельда:

$$\epsilon_{nj} = m_e \left\{ 1 + \frac{\zeta^2}{\left[n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \zeta^2} \right]^2} \right\}^{-1/2}, \quad 0 < \zeta < j + \frac{1}{2}, \quad (\text{A.2})$$

где $0 \leq \epsilon_{nj} < m_e$, $n = n_r + l + 1 = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число, а $j = l \pm 1/2 = 1/2, 3/2, \dots, n - 1/2$ — полный угловой момент уровня.

В частности, энергия ϵ_0 (включающая массу покоя m_e) основного состояния $1s_{1/2}$ равна²¹

$$\epsilon_0(Z) = m_e \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \zeta = Z\alpha = \frac{Z}{137}, \quad (\text{A.3})$$

а для $j = 1/2$ при $\zeta \rightarrow 1$

$$\epsilon_{n,1/2} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{N^2}} + \frac{1}{N^3} \sqrt{1 - \zeta^2} + O(1 - \zeta^2),$$

где

$$N = \sqrt{n^2 - 2n + n}.$$

При $Z > 137$ значения энергии ϵ_0 становятся мнимыми, что указывает на то, что дираковский гамильтониан с точечным зарядом (А.1) уже не является самосопряжённым оператором и потому физически неприемлем. Это связано с тем, что при $Z > 137$ в кулоновской задаче для уравнения Дирака возникает известное из квантовой механики "падение на центр" (см. [6, 36–38]). Как указали Померанчук и Смородинский [73, 74], возникающая трудность устраняется при учёте конечных размеров ядра.

Критическим зарядом ядра Z_{cr} в КЭД называется [45–50, 75–78] то значение Z , при котором дискретный уровень атомного спектра опускается до границы ниж-

²¹ При $\zeta \rightarrow 1$ у функции $\epsilon_0(\zeta)$ возникает особенность, причём кривая уровня (А.3) обрывается, не дойдя до границы нижнего континуума. Подобные особенности имеются для всех возбуждённых состояний.

него континуума ("море Дирака"):

$$\varepsilon_0(Z_{\text{cr}}) = -m_e c^2. \quad (\text{A.4})$$

Величина Z_{cr} зависит от радиуса ядра r_N , квантовых чисел уровня (njl), формы распределения электрического заряда протонов по объёму ядра, степени ионизации внешних электронных оболочек атома (см. [48, 50, 77, 78]).

Приведём простые асимптотические оценки для Z_{cr} , позволяющие избежать громоздких численных расчётов. При учёте радиуса ядра $r_N > 0$ корневая особенность в формуле (A.3) исчезает и мы получаем [48, 79]:

$$\varepsilon_0(\zeta) = m_e \sqrt{1 - \zeta^2} \coth \left(A \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad (\text{A.5})$$

где $A = \ln(1/m_e r_N) \gg 1$. В отличие от (A.3), формула (A.5) допускает аналитическое продолжение в область $\zeta > 1$:

$$\varepsilon_0(\zeta) = m_e g \cot(Ag), \quad g = \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad \zeta > 1, \quad (\text{A.6})$$

так что, например, при $Z = 137$ имеем $\varepsilon_0(\zeta = 1) = m_e/A > 0$.

Согласно (A.6), нижний уровень $\varepsilon_0(\zeta)$ находится посередине между границами верхнего и нижнего континуумов при $Ag_0 = \pi/2$, или

$$\zeta = \zeta_0 = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4A^2}} = 1 + \frac{\pi^2}{8A^2} + \dots, \quad A \gg 1, \quad (\text{A.7})$$

(при $r_N \rightarrow 0$ отсюда получаем $\zeta_0 = 1$, в соответствии с (A.3)). Замечая, что функция (A.6) имеет полюс при $g = g_1 = \pi/A$, приходим к оценке²²

$$\zeta_{\text{cr}} = Z_{\text{cr}} \alpha = \sqrt{1 + g_1^2} \approx 1 + \frac{\pi^2}{2A^2} + \dots \quad (\text{A.8})$$

Эту формулу можно уточнить, вычислив следующий член ($\propto A^{-3}$) асимптотического разложения ζ_{cr} по степеням $1/A$. Для этого подставим (A.6) в граничное условие (A.4), что даёт $\tan(Ag)/Ag = -1/A$, откуда следует $g = \pi/(A+1) + O(A^{-3})$,

$$\zeta_{\text{cr}}(1s_{1/2}) = 1 + \frac{\pi^2}{2A(A+2)} + O(A^{-4}), \quad n = 1, \quad (\text{A.9})$$

и для возбуждённых ns -уровней [79]:

$$\zeta_{\text{cr}}(ns_{1/2}) = 1 + \frac{n^2 \pi^2}{2A(A+2n)} + \dots \quad (\text{A.10})$$

Аналогичным образом в случае $2p_{1/2}$ -уровня имеем

$$\varepsilon_{2p} = m_e \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}}{2}} \xrightarrow{(\zeta > 1)} \frac{m_e}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} g \cot(Ag) + \dots \right), \quad (\text{A.11})$$

откуда $g \cot(Ag) = -2(1 + \sqrt{2})$, или

$$\zeta_{\text{cr}}(2p_{1/2}) = 1 + \frac{\pi^2}{2A(A + \sqrt{2} - 1)} + O(A^{-4}) \quad (\text{A.12})$$

²² Хотя эта формула качественно передаёт зависимость Z_{cr} от радиуса обрезания кулоновского поля, точность её невысока. Так, при $r_N = 10$ Фм ($A = 3,653$) из (A.8) получаем $Z_{\text{cr}} \approx 190$, в то время как уточнённая асимптотика (A.9) даёт $\zeta_{\text{cr}} = 1,24$ и $Z_{\text{cr}} = 170$, что уже близко к точному численному значению (для основного уровня).

Таблица 8. Критический заряд сверхтяжёлого ядра для нижних уровней

Уровень	r_N , Фм	A	$Z_{\text{cr}}^{(0)}$	Z_{cr}	$Z_{\text{cr}}^{(\text{as})}$	$\zeta_{\text{cr}}/(j+1/2)$
$1s_{1/2}$	9,14	3,743	168,8	172	169	1,23
$2p_{1/2}$	9,38	3,717	181,3	184	181	1,32
$2s_{1/2}$	10,1	3,643	232	239	234	1,69
$3p_{1/2}$	10,5	3,604	254	263	—	1,85

Примечание. Радиус ядра $r_N = 1,2A^{1/3}$ Фм, $A = 2,6Z$, $A = \ln(1/m_e r_N)$, $1/m_e = 386$ Фм; $Z_{\text{cr}}^{(0)}$ — критический заряд для "голого" (полностью ободранного) ядра, Z_{cr} — с учётом экранировки кулоновского потенциала внешними электронными оболочками атома, $Z_{\text{cr}}^{(\text{as})}$ — полученный по асимптотическим формулам (A.8), (A.11). Значения $Z_{\text{cr}}^{(0)}$ и Z_{cr} взяты из численных расчётов [46, 75, 80].

(здесь считается, что $A \gg n$, поэтому асимптотики применимы только для нижних уровней; при этом они имеют неплохую точность (табл. 8), хотя параметр разложения $1/A \approx 0,25$ не так уж мал). Следующие члены этих разложений зависят не только от радиуса r_N , но и от формы обрезания кулоновского потенциала внутри ядра.

Отметим, что значения Z_{cr} слабо зависят от деталей обрезания кулоновского потенциала. Так, например, если все оболочки сверхтяжёлого атома, кроме $1s_{1/2}$, заполнены электронами, то расчёт экранировки по методу Томаса–Ферми даёт значение [80] $Z_{\text{cr}} \approx 171,5$ вместо $Z_{\text{cr}} = 170$ (см. также [77]).

Согласно (A.2) для возбуждённых состояний с $j = n - 1/2$ (максимально возможное значение j при данном n) имеем

$$\varepsilon_{n,n-1/2} = m_e \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{n^2}}, \quad 0 < \zeta < n. \quad (\text{A.13})$$

С учётом обрезания кулоновского потенциала при $r < r_N$ энергии уровней плавно продолжаются в область $\varepsilon < 0$, достигая границы нижнего континуума при $\zeta = \zeta_{\text{cr}}(njl)$ и входя в нижний континуум с конечным наклоном:

$$\frac{d\varepsilon_0}{d\zeta} = m_e \zeta_{\text{cr}} \left[\frac{1}{g} \cot(Ag) - \frac{A}{\sin^2(Ag)} \right] \approx -\frac{m_e}{\pi^2} A(A+1)(A+2) \quad (\text{A.14})$$

(здесь $g = \sqrt{\zeta_{\text{cr}}^2 - 1} = \pi/\sqrt{A(A+2)} \ll 1$; см. (A.6) и (A.9)).

Аналогичная задача о критическом расстоянии R_{cr} между сталкивающимися ядрами с $Z_1 + Z_2 > Z_{\text{cr}} \approx 170$ была рассмотрена в работах [81–87]. Отсылая за подробностями к этим работам, приведём здесь несколько характерных чисел²³. Для двух ядер урана $R_{\text{cr}} = 35$ Фм, для системы (См+U) имеем $R_{\text{cr}} \approx 43$ Фм, для (См+См) расстояние $R_{\text{cr}} \approx 51$ Фм и, наконец, $R_{\text{cr}} \approx 70$ Фм для (Fm+Fm). Значения R_{cr} превышают сумму радиусов ядер системы, что позволяет, в принципе, надеяться на постановку экспериментов по спонтанному рождению позитронов при медленных (адиабатических) столкновениях тяжёлых ядер [48, 50, 77]. Заметим ещё, что в работе [81] приведена приближённая аналитическая формула

²³ Поскольку $Z_{1,2} < 137$, в кулоновском поле каждого из ядер нет "падения на центр" и ядра можно рассматривать как точечные (релятивистская задача двух центров), вводя поправку на конечные размеры ядер по теории возмущений.

для $R_{\text{cr}}(Z)$, полученная методом сшивания асимптотик волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ на малых и больших расстояниях от ядер и достаточно точная при $Z_{1,2} < 100$. Так, для $Z_1 = Z_2 = 92$ эта формула даёт $R_{\text{cr}}^{\text{cs}} = 35,5$ Фм, а согласно точным численным расчётам по уравнению Дирака [83, 86] $R_{\text{cr}} = 34,3$ Фм (соответственно $R_{\text{cr}}^{\text{cs}} = 42,8$ и $42,6$ Фм при $Z_1 = Z_2 = 94$, а также близкие значения для системы $U + Cf$, $Z_1 + Z_2 = 188$).

Проблема критического заряда ядра и другие вопросы КЭД сильных полей подробно обсуждаются в работах [48–50, 75–77]. Физически наглядное описание сверхзаряженных электронов в нижнем континууме ($Z > Z_{\text{cr}}$, $\varepsilon < -m$) дано в работах [48, 50, 77, 87]. Приведём также значение $Z_{\text{cr}}^{\text{H}} \approx 2300$ для мюонного иона [88].

Заметим, что спонтанное рождение позитронов при $Z > Z_{\text{cr}}$ возможно только в том случае, когда уровень с энергией $E_0 < -m_e c^2$, опустившийся в нижний континуум, не заполнен электронами. Ионизация этого уровня может быть, в принципе, достигнута при столкновении двух тяжёлых ионов с суммарным зарядом $Z_1 + Z_2 > Z_{\text{cr}} \approx 170$ благодаря конечной скорости сближения ядер (процесс, известный в атомной физике). В поле "голового"²⁴ ядра с $Z > Z_{\text{cr}}(1s_{1/2}) \approx 170$ возможно спонтанное рождение e^+e^- -пар из вакуума, после чего электроны попадают на вакантный уровень $1s_{1/2}$, заполняя его ($s_z = \pm 1/2$), а два позитрона, просачиваясь сквозь кулоновский барьер, вылетают в бесконечность, где могут быть зарегистрированы. При этом заряд ядра уменьшается на две единицы: $Z \rightarrow Z - 2$ (для внешнего наблюдателя). С ростом Z новые позитроны возникают только при $Z > Z_{\text{cr}}(njl)$, когда в нижний континуум опускается очередной уровень (njl) дискретного спектра (см. табл. 8).

В работах [34, 44, 78, 89] поставлен вопрос о влиянии сверхсильного магнитного поля на критический заряд ядра $Z_{\text{cr}}(B)$. Было отмечено, что с увеличением магнитного поля значение $Z_{\text{cr}}(B)$ понижается: $Z_{\text{cr}} = 92$ (уран) при $B \approx 5,5 \times 10^{15}$ Гс [89], $Z_{\text{cr}} = 80$ при $B \approx 10^{16}$ Гс [78], $Z_{\text{cr}} = 41$ при $B = 10^{18}$ Гс [34, 35] и т.д. Этот вывод был основан на свойстве энергетического спектра дираковской частицы в однородном магнитном поле. Как было отмечено в разделе 8, нижняя граница верхнего континуума в случае уравнения Дирака остаётся равной $m_e c^2$, как и для свободной частицы, что связано с компенсацией для "дираковского" электрона (а соответственно, и для позитрона) энергии нулевых колебаний в плоскости (x, y) с магнитной энергией спина.

Этот эффект был рассмотрен в работах [78, 89] без учёта экранирования кулоновского потенциала за счёт поляризации вакуума. С другой стороны, поляризация вакуума приводит к экранированию кулоновского потенциала и к "заморозанию" энергии уровня, не позволяя ему дойти до границы нижнего континуума, пока предельная энергия $E_{\infty}^Z(B \rightarrow \infty) > -m_e$, что выполняется [35] для $Z < 52$. Для таких ядер основной уровень остаётся докритическим в сколь угодно сильном магнитном поле, и спонтанное рождение позитронов в поле заряда Z отсутствует. Если же $Z > 52$, то "критическое" состояние электрона на краю нижнего континуума может быть достигнуто с ростом B , но для этого требуются более сильные магнитные поля, чем без учёта экранирования.

²⁴ То есть ядра с ободранной (полностью ионизованной) К-оболочкой.

Б. Экстремальные магнитные поля

Приведём краткие сведения о максимальных полях, полученных в земной лаборатории или встречающихся в космосе.

1. Атомная единица магнитного поля B_a определяется из условия $\mu_B B_a = m_e c^4 / 2\hbar^2 = 1 \text{ Ry}$, откуда²⁵ $B_a = m_e^2 c e^3 / \hbar^3 = 2,349 \times 10^9$ Гс. Постоянное магнитное поле не приводит к рождению e^+e^- -пар из вакуума [29], поэтому (в отличие от электрического поля) получение сколь угодно сильных, $B \gtrsim B_{\text{cr}}$, магнитных полей не противоречит КЭД и, в принципе, возможно.

2. Постоянные магнитные поля, полученные в лаборатории, не превышают сотен килогауссов.

А.Д. Сахаров в 1951 г. предложил [90–92] метод магнитной кумуляции: обжатие магнитного поля, заключённого в хорошо проводящую оболочку (цилиндрическую трубку из металла с высокой проводимостью, например, меди), с помощью ударной волны, возникающей при взрыве взрывчатого вещества, окружающего оболочку. Из условия сохранения магнитного потока $\Phi = \pi R^2 B$ следует, что $B/B_0 \approx (R_0/R)^2 \gg 1$, где $R(t)$ — радиус оболочки, B_0 — начальное значение магнитного поля (которое создаётся обычными методами). Экспериментально было достигнуто [90] рекордное (в земных условиях) поле $B \approx 25$ МГс ($\mathcal{H} = B/B_a \approx 0,01$), и возможен дальнейший прогресс в этой области [93].

Уравнения, описывающие динамику процесса магнитной кумуляции, рассмотрены в работе [94]. Используя закон сохранения энергии и уравнения Максвелла для квазистационарного поля в хорошо проводящей среде, приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} = \frac{1}{K\xi^3} \left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{-\xi\dot{\xi}}} \right)^2, \quad 0 < \tau < \tau_m, \quad (\text{Б.1})$$

с начальными условиями

$$\xi(0) = -\dot{\xi}(0) = 1, \quad (\text{Б.2})$$

$$\xi(\tau) = 1 - \tau + \frac{(1 + \mu)^2}{2K} \tau^2 + \dots, \quad \tau \rightarrow 0,$$

где $\xi = R/R_0$, $R_0 = R(t=0)$, $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$, K — отношение кинетической энергии оболочки к заключённой в ней (в начальный момент взрыва $t=0$) магнитной энергии, $\mu = c/\sqrt{2\pi\sigma R_0 v_0}$ — коэффициент (безразмерный) омических потерь в веществе оболочки, σ — её проводимость, точка означает производную по безразмерному времени $\tau = v_0 t / R_0$, значения ξ_m и τ_m относятся к моменту наибольшего сжатия²⁶. В идеальном случае, т.е. без омических потерь, при $\sigma = \infty$ (сверхпроводник) и $\mu = 0$ уравнение (Б.1) имеет интеграл энергии

²⁵ Для сравнения: в случае электрического поля $\mathcal{E}_a = m_e^2 c^5 / \hbar^4 = 5,142 \times 10^9$ В см⁻¹, что совпадает с напряжённостью электрического поля на К-орбите (1s) атома водорода: $\mathcal{E}_a = e/a_B^2 = \alpha B_a$.

²⁶ Уравнение (Б.1) относится к цилиндрической геометрии и справедливо только на стадии сжатия, когда $\dot{\xi} < 0$. При $\tau > \tau_m$ оболочка разлетается из-за давления магнитного поля, $\dot{\xi} > 0$ и это уравнение уже неприменимо. В этом случае при расчёте магнитного поля требуется решение уравнения теплопроводности (или диффузии магнитного поля), которое не сводится к простому уравнению типа (Б.1). В таком рассмотрении, однако, нет особой необходимости, если интересоваться максимально достижимым магнитным полем B_m , а не (специально) движением оболочки в стадии разлёта.

$$\xi^2 = 1 + K^{-1} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \quad (\text{Б.3})$$

и решается аналитически:

$$\xi^{(0)}(t) = \sqrt{\xi_m^2 + (1 + K^{-1})(\tau - \tau_m)^2}.$$

В этом приближении в момент наибольшего сжатия оболочки и максимума магнитного поля имеем $\tau = \tau_m^{(0)}$,

$$\begin{aligned} \xi_m^{(0)} &= (K + 1)^{-1/2} \approx K^{-1/2}, \\ \tau_m^{(0)} &= \frac{K}{K + 1} \approx 1 - \frac{1}{K}, \\ B_m^{(0)} &= (K + 1)B_0, \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

где $B_m^{(0)}$ — максимальное поле (реально на эксперименте $K \gg 1$). С учётом омических потерь последнее из этих уравнений принимает вид

$$\frac{B_m}{B_0} = (K + 1) \left[1 + 2\mu \int_0^{\tau_m} \left(1 + \frac{2}{K\xi^2} \right) \sqrt{-\frac{\xi}{\xi^3}} d\tau \right]^{-1}. \quad (\text{Б.5})$$

Численные расчёты по этим уравнениям были выполнены в работе [95]. Отсылая за подробностями к этой работе, приведём некоторые оценки. При начальном радиусе оболочки $R_0 = 3$ см, начальной скорости сжатия $v_0 = 10$ км с⁻¹ и $K = 1000$ имеем $\mu = 0,01$ и $\mu = 0,037$ соответственно для $\sigma = 6 \times 10^5$ Ом⁻¹ см⁻¹ (проводимость меди при комнатной температуре) и $\sigma = 4 \times 10^4$ Ом⁻¹ см⁻¹ при $T = 1500$ °С (металл находится уже в жидком состоянии). Считая, что исходное поле $B_0 \sim 10^5$ Гс (что может быть создано обычными методами), при $K = 100, 10^4, 10^8$ находим соответственно

$$B_{\max} \sim 10^7 \text{ Гс}, \quad 10^9 \text{ Гс} \sim B_a, \quad 10^{13} \text{ Гс} \sim B_{\text{cr}} \quad (\text{Б.6})$$

(последнее значение коэффициента K отвечает использованию для сжатия магнитного поля уже не заряда взрывчатого вещества, а подземного ядерного взрыва сравнительно небольшой мощности — см. замечание на с. 85 в [92]). Заметим, что в уравнении (Б.5) учтены омические потери (на токи Фуко) в процессе сжатия оболочки, в результате чего, например, для $K \sim 1000$ и $\mu \approx 0,05$ магнитный поток Φ в процессе сжатия уменьшается в 1,5–2 раза, а максимально достижимое поле $B_{\max}$ — в 2–3 раза по сравнению с идеальным случаем $\Phi(t) = \text{const}$, $\mu = 0$; эти оценки соответствуют кратким замечаниям, приведённым в работах [90, 91].

Таким образом, получение полей $B > B_a$ методом магнитной кумуляции в принципе возможно, однако требует чрезвычайно большой начальной энергии ударной волны, сжимающей оболочку; к тому же этот метод является импульсным: поле порядка $B_{\max}$ создаётся на короткое время $\Delta t < 2R_0/v \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ с, что усложняет постановку физических экспериментов. Заметим, однако, что время существования магнитного поля в этом эксперименте на много порядков превышает характерное атомное время $t_a = a_B/v_a = \hbar^3/m_e e^4 = 2 \times 10^{-17}$ с. Поэтому с точки зрения атомной физики (в частности, для процессов лоренцевой ионизации атомов и ионов [95]) такое поле может рассматриваться как постоянное (в адиабатическом приближении).

3. Максимальными магнитными полями, которые в настоящее время могут быть получены в лаборатории, являются, по-видимому, поля, возникающие при стол-

кновениях релятивистских тяжёлых ионов на коллайдерах RHIC и LHC [96]: $B_{\text{st}} \sim m_\pi^2 c^3 / e\hbar \sim 10^{18}$ Гс. Излишне говорить, что время существования таких полей чрезвычайно мало, $\tau \lesssim \hbar/m_e c^2 \sim 10^{-21}$ с.

Сильные магнитные поля могут быть получены также с помощью мощных лазеров, чему посвящены в последние годы многочисленные исследования. Ограничимся двумя примерами. В работе [97] сообщается о достижении значений $B \sim 50$ МГс у поверхности плазменных сгустков в вакууме (время существования поля $\tau \sim 10^{-10}$ с), а в [98] — о генерации квазистатических, $\tau \sim 10^{-10} - 10^{-9}$ с (что сравнимо с длительностью лазерного импульса), полей $B \lesssim 700$ МГс в лазерной плазме. Авторы выражают благодарность С.В. Попруженко за указание на работы [97, 98].

4. Сверхсильные магнитные поля встречаются в астрофизике. Здесь можно упомянуть о магнитных белых карликах, на поверхности которых существуют поля вплоть до ~ 1000 МГс ($\mathcal{H} \sim 1$).

Нейтронные звёзды, наблюдаемые как радиопульсары, обладают значительно более сильными полями $B \sim 10^{12} - 10^{13}$ Гс [2, 3] и более, а в так называемых магнитарах²⁷ поля, по-видимому, ещё больше, вплоть до $10^{14} - 10^{15}$ Гс на поверхности. Такие поля недостижимы в земных экспериментах, что делает нейтронные звёзды уникальными природными лабораториями для проверки теоретических представлений о свойствах вещества в экстремальных условиях.

В моделях некоторых космологических объектов (gamma-ray bursters) предсказывается существование полей $B \sim 10^{16} - 10^{17}$ Гс. При этих значениях B обсуждавшиеся нами асимптотические формулы для спектра уровней атома водорода имеют высокую точность.

Другой возможной областью применимости указанных выше формул является физика твёрдого тела — теория экситонов и мелких уровней в полупроводниках (см., например, [19, 20]). В этом случае эффективная масса электрона в решётке $m_{\text{eff}} \ll m_e$ и диэлектрическая проницаемость $\epsilon \gg 1$, поэтому характерные магнитные поля значительно меньше B_a и вполне достижимы в эксперименте. Именно для таких систем и был предсказан эффект Зельдовича [53].

5. Критическое (или характерное) поле [27–29] в КЭД равно

$$F_{\text{cr}} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = \begin{cases} 1,32 \times 10^{16} \text{ В см}^{-1} \equiv \mathcal{E}_{\text{cr}}, \\ 4,41 \times 10^{13} \text{ Гс} \equiv B_{\text{cr}} \end{cases}$$

соответственно в случае электрического или магнитного поля. При этом $eF_{\text{cr}}l_C = m_e c^2$ и $\mathcal{E}_a = \alpha B_a$. Полезно иметь в виду, что $\mathcal{E} [\text{В см}^{-1}] = 300B [\text{Гс}]$.

Характерное для КЭД поле $\mathcal{E}_{\text{cr}}$ впервые, по-видимому, ввёл Заутер [27], который нашёл (в связи с "парадоксом Клейна", см. [30]) решение уравнения Дирака в присутствии постоянного и однородного электрического поля и показал²⁸, что вероятность для числа рождения e^+e^- -пар, образованных в единице объёма в единицу времени, $w \propto \exp(-\pi\mathcal{E}_{\text{cr}}/\mathcal{E})$.

²⁷ Особый класс нейтронных звёзд. В настоящее время из обнаруженных в астрофизике объектов самым сильным магнитным полем обладает, по-видимому, магнитар SGR 1806-20 (Soft Gamma Repeater), на поверхности которого магнитное поле составляет 2×10^{15} Гс.
²⁸ С экспоненциальной точностью, в квазиклассическом приближении.

6. Наконец, оценим энергию W , заключённую в сверхсильном магнитном поле. Учитывая, что $B_a^2 a_B^3 = m_e c^2$, и переходя к безразмерным величинам $\mathcal{H} = B/B_a$ и $l = L/a_B$ (где L^3 — объём, занимаемый магнитным полем), находим

$$W \sim B^2 L^3 = \mathcal{H}^2 l^3 m_e c^2, \quad \mathcal{H} \gg 1, \quad (\text{Б.7})$$

где $m_e c^2 = 511 \text{ кэВ} \equiv 9,11 \times 10^{-28} \text{ г}$. Отсюда при $B = B_a$ и $L = a_B$ имеем $W \sim m_e c^2 \approx 10^4 \text{ Ру}$ (напомним, что характерные энергии атомных уровней меньше 1 Ру), а при $B = B_{\text{кр}} = \alpha^{-2} B_a$ магнитная энергия составляет $W \approx 137 m_e c^2$ для $L = 1/m_e = \alpha a_B$ и $W \approx 3 \times 10^8 m_e c^2$ для $L = a_B$. Наконец, для замагниченной нейтронной звезды с параметрами $B \sim B_{\text{кр}}$, $L \sim 10 \text{ км}$ ($l \sim 10^{14}$) получаем оценку $W \approx 10^{50} m_e c^2$, что соответствует метеориту массой $M \sim 10^{23} \text{ г}$ (для сравнения — масса Земли $M \approx 6 \times 10^{27} \text{ г}$), и даже при более скромном значении $B \sim B_a$, но при том же радиусе порядка 10 км, имеем $W \approx 10^{42} m_e c^2 \sim 10^{15} \text{ г}$.

7. Отметим в заключение, что в работе [99] получено решение задачи о системе двух взаимодействующих между собой релятивистских частиц ($q\bar{q}$) в сверхсильных магнитных полях.

В. О кулоновских поправках к длине рассеяния

Кулоновское взаимодействие $U_C(r) = -\zeta e^2/r$ приводит к перенормировке параметров a_l и r_l низкоэнергетического рассеяния на "сильном" (короткодействующем) потенциале

$$V_{\text{sh}}(r) = -\frac{g}{2r_0^2} v\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad \hbar = m = 1, \quad (\text{В.1})$$

с радиусом действия $r_0 \ll a_B = \hbar^2/m_e^2$. Проблема кулоновской перенормировки, $a_s^{(l)} \rightarrow a_{\text{cs}}^{(l)}$, требует решения уравнения Шрёдингера с потенциалом $U(r) = V_{\text{sh}}(r) + U_C$ и орбитальным моментом l , что может быть выполнено только численно. Однако в интересующем нас случае, когда в потенциале $V_{\text{sh}}(r)$ имеется мелкий уровень (реальный, виртуальный или квазистационарный с $l \geq 1$), возмущающий кулоновский спектр²⁹, а низкоэнергетическое рассеяние носит резонансный характер [6], общие формулы [29, 100, 101] для перенормировки значительно упрощаются. Так, в случае s-состояний [102]

$$\frac{1}{a_{\text{cs}}} - \frac{1}{a_s} = -\frac{2\zeta}{a_B} \left[\ln \frac{r_s}{a_B} + c_0 + O\left(\frac{r_s}{a_B}, \frac{r_s}{a_s}\right) \right], \quad (\text{В.2})$$

$$c_0 = 2\gamma + \ln \frac{2r_C}{r_s}, \quad \gamma = 0,5772 \dots$$

(предполагается, что эффективный радиус $r_s \ll a_B$, $r_s \ll a_s$). Отметим, что линейные по r_s поправки в уравнении (В.2) были вычислены в [103]. Обобщение (В.2) на случай моментов $l \neq 0$ получено в работе [102]:

$$\frac{1}{a_{\text{cs}}^{(l)}} - \frac{1}{a_s^{(l)}} = -\frac{2\zeta}{a_B} \left[\frac{(2l)!}{2^l l!} \right]^2 \int_0^\infty \chi_l^2(r) \frac{dr}{r} + \dots \quad (\text{В.3})$$

В приведённых формулах³⁰ $\zeta = -\text{sgn}(Z_1 Z_2)$, а r_s и r_C — эффективный [6] и кулоновский [40, 103] радиусы системы

в момент возникновения связанного s-состояния ($l = 0$, $g = g_0$):

$$r_0 = 2 \int_0^\infty [1 - \chi_0^2(r)] dr, \quad \chi_0(0) = 0, \quad \chi_0(\infty) = 1, \\ r_C = \exp \left\{ \ln R + \int_0^\infty [\Theta(r - R) - \chi_0^2(r)] \frac{dr}{r} \right\} \quad (\text{В.4})$$

(нетрудно убедиться, что от выбора $R > 0$ значение r_C не зависит). В связи с формулами (В.3) и (В.4) отметим, что длина рассеяния имеет размерность длины $[L]$ только в случае s-волны, а в общем случае размерности равны

$$[a_l] = L^{2l+1}, \quad [r_l] = L^{1-2l}, \quad [\chi_l] = L^{-l}. \quad (\text{В.5})$$

Входящие в формулы (В.3) и (В.4) функции $\chi_l(r)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют уравнению Шрёдингера в момент возникновения связанного l -уровня ($E_l = 0$, $g = g_l$):

$$\frac{d^2 \chi_l}{dx^2} + \left[g_l v(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi_l = 0, \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad (\text{В.6})$$

с граничными условиями

$$\chi_l(r) \propto r^{l+1} \text{ при } r \rightarrow 0, \\ \lim(r^l \chi_l(r)) = 1 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (\text{В.7})$$

При значениях константы связи g , существенно отличных от g_l , перенормировка имеет более сложный вид.

В случае s-состояний согласно (В.2) основными параметрами, определяющими перенормировку a_s , являются значения r_C и r_s , а также их отношение $\rho = r_C/r_s$ в формуле для c_0 . Приведём их численные значения для нескольких модельных потенциалов, часто встречающихся в физике.

Для потенциала Юкавы имеем

$$v(x) = \frac{\exp(-x)}{x}, \quad g_0 = 1,680, \quad r_s = 2,12 r_0, \\ \rho = 0,364, \quad c_0 = 0,837.$$

Для потенциала Хюльтена

$$v(x) = (\exp x - 1)^{-1}, \quad g_0 = 1, \quad r_s = 3r_0, \\ \rho = 0,374, \quad c_0 = 0,865.$$

Для гауссова потенциала

$$v(x) = \exp(-x^2), \quad g_0 = 2,684, \\ r_s = 1,44 r_0, \quad \rho = 0,418, \quad c_0 = 0,976.$$

Дальнейшие примеры см. в работах [103, 104].

В случае $l = 0$ кулоновская перенормировка длины рассеяния содержит "большой" логарифм $\ln(r_s/a_B)$, который отсутствует при $l \neq 0$, поэтому она особенно велика для s-состояний. В качестве примера можно указать на нуклон-нуклонное pp- и pp-рассеяние в синглетном 1S_0 -состоянии, где [105]

$$a_s(\text{pn}) = -23,75, \quad a_{\text{cs}} = -7,84, \\ r_s = 2,75, \quad r_{\text{cs}} = 2,77, \quad a_B = 57,8, \quad (\text{В.8})$$

все значения даны в единицах Фм. Большое различие в длинах рассеяния в случаях pp- и pp-рассеяния не

²⁹ То есть имеет место эффект Зельдовича.

³⁰ При этом $\zeta = 1$ для адронного pp-атома, $\zeta = -1$ для системы pp. В случае s-состояний мы всюду опускаем индекс $l = 0$ у длины рассеяния.

означает сильного нарушения изотопической инвариантности ядерного взаимодействия нуклонов и может быть естественно объяснено учётом кулоновского взаимодействия в рр-системе. Процентное различие значений эффективных радиусов взаимодействия для рассматриваемых систем связано с малым нарушением изотопической инвариантности кулоновским взаимодействием протонов.

В заключение заметим, что в случае $l \neq 0$ сингулярный при $r \rightarrow 0$ член, пропорциональный $\ln(r_0/a_B)$, содержится в разности $1/a_{cs}^{(l)} - 1/a_s^{(l)}$ в более высоких порядках разложения. Например, в правую часть формулы (В.3) он входит в виде [106]

$$\frac{1}{(l!)^2} \zeta^{2l+1} \ln(\zeta r_0) \sim \frac{1}{(l!)^2} \left(\frac{r_0}{a_B}\right)^{2l+1} \ln \frac{r_0}{r_B}. \quad (\text{В.9})$$

Перенормировка эффективного радиуса $r_s \rightarrow r_{cs}$ даже в случае s-волны содержит логарифм $\ln(r_0/a_B)$ лишь в поправочном члене (см. (В.8)).

Список литературы

- Garstang R H *Rep. Prog. Phys.* **40** 105 (1977)
- Lai D *Rev. Mod. Phys.* **73** 629 (2001)
- Harding A K, Lai D *Rep. Prog. Phys.* **69** 2631 (2006)
- Lattimer J M, Prakash M *Phys. Rep.* **442** 109 (2007)
- Shiff L I, Snyder H *Phys. Rev.* **55** 59 (1939)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2002) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
- Буреева Л А, Лисица В С *Возмущенный атом* (М.: ИздАТ, 1997)
- Либерман М А, Йоханссон Б У *УФН* **165** 121 (1995) [Lieberman M A, Johansson B *Phys. Usp.* **38** 117 (1995)]
- Lindgren K A U, Virtamo J T *J. Phys. B At. Mol. Phys.* **12** 3465 (1979)
- Virtamo J T, Lindgren K A U *Phys. Lett. A* **71** 329 (1979)
- Goldman S P, Chen Z *Phys. Rev. Lett.* **67** 1403 (1991)
- Chen Z, Goldman S P *Phys. Rev. A* **48** 1107 (1993)
- Wang J-H, Hsue C-S *Phys. Rev. A* **52** 4508 (1995)
- Lai D, Salpeter E E *Phys. Rev. A* **53** 152 (1996)
- Kravchenko Yu P, Liberman M A, Johansson B *Phys. Rev. A* **54** 287 (1996)
- Потехин А Ю, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (СПб.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, 2009)
- Loudon R *Am. J. Phys.* **27** 649 (1959)
- Andrews M *Am. J. Phys.* **34** 1194 (1966)
- Elliott R J, Loudon R *J. Phys. Chem. Solids* **15** 196 (1960)
- Hasegawa H, Howard R E *J. Phys. Chem. Solids* **21** 179 (1961)
- Khriplovich I B, Ruban G Yu *Laser Phys.* **14** 426 (2004)
- Карнаков Б М *Письма в ЖЭТФ* **77** 73 (2003) [Karnakov B M *JETP Lett.* **77** 68 (2003)]
- Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **77** 79 (2003) [Popov V S *JETP Lett.* **77** 74 (2003)]
- Карнаков Б М, Попов В С *ЖЭТФ* **124** 996 (2003) [Karnakov B M, Popov V S *JETP* **97** 890 (2003)]
- Попов В С, Карнаков Б М *ЖЭТФ* **141** 5 (2012) [Popov V S, Karnakov B M *JETP* **114** 1 (2012)]
- Potekhin A Y, Turbiner A V *Phys. Rev. A* **63** 065402 (2001)
- Sauter F Z *Phys.* **69** 742 (1931)
- Heisenberg W, Euler H Z *Phys.* **98** 714 (1936)
- Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
- Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* 4-е изд. (М.: Наука, 1981) [Translated from 2nd Russ. ed.: Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Interscience Publ., 1965)]
- Базь А И, Зельдович Я Б, Переломов А М *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* 2-е изд. (М.: Наука, 1971) [Translated from 1st Russ. ed.: Baz' A I, Zel'dovich Ya B, Perelomov A M *Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1969)]
- Демков Ю Н, Островский В Н *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1975) [Demkov Yu N, Ostrovskii V N *Zero-range Potentials and Their Applications in Atomic Physics* (New York: Plenum Press, 1988)]
- Vysotsky M I *Письма в ЖЭТФ* **92** 22 (2010) [*JETP Lett.* **92** 15 (2010)]
- Machet B, Vysotsky M I *Phys. Rev. D* **83** 025022 (2011)
- Godunov S I, Machet B, Vysotsky M I *Phys. Rev. D* **85** 044058 (2012)
- Галицкий В М, Карнаков Б М, Коган В И *Задачи по квантовой механике* 2-е изд. (М.: Наука, 1992); 3-е изд. (М.: УРСС, 2001); Galitski V, Karnakov B, Kogan V, Galitski V (Jr.) *Exploring Quantum Mechanics: A Collection of 700+ Solved Problems for Students, Lectures, and Researches* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2013)
- Case K M *Phys. Rev.* **80** 797 (1950)
- Переломов А М, Попов В С *ТМФ* **4** (1) 48 (1970) [Perelomov A M, Popov V S *Theor. Math. Phys.* **4** 664 (1970)]
- Попов В С, Кудрявцев А Е, Мур В Д *ЖЭТФ* **77** 1727 (1979) [Popov V S, Kudryavtsev A E, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **50** 865 (1979)]
- Попов В С и др. *ЖЭТФ* **80** 1271 (1981) [Popov V S et al. *Sov. Phys. JETP* **53** 650 (1981)]
- Bateman H *Higher Transcendental Functions* (Director A Erdélyi) Vol. 1 (New York: McGraw-Hill, 1953) [Бейтмен Г, Эрдейи А *Высшие трансцендентные функции* Т. 1 (М.: Наука, 1973)]
- Shabad A E, Usov V V *Phys. Rev. Lett.* **98** 180403 (2007)
- Shabad A E, Usov V V *Phys. Rev. D* **77** 025001 (2008)
- Высоцкий М И, Годунов С И *УФН* **184** 206 (2014) [Vysotsky M I, Godunov S I *Phys. Usp.* (2) (2014), DOI: 10.3367/UFNe.0184.201402j.0206]
- Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **11** 254 (1970) [Popov V S *JETP Lett.* **11** 162 (1970)]
- Попов В С *ЯФ* **12** 429 (1970) [Popov V S *Sov. J. Nucl. Phys.* **12** 235 (1971)]
- Попов В С *ЖЭТФ* **59** 965 (1970) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **32** 526 (1971)]
- Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971) [Zeldovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)]
- Gershtein S S, Popov V S *Lett. Nuovo Cimento* **6** 593 (1973)
- Попов В С *ЯФ* **64** 421 (2001) [Popov V S *Phys. Atom. Nucl.* **64** 367 (2001)]
- Тернов И М и др. *ЖЭТФ* **55** 2273 (1968) [Ternov I M et al. *Sov. Phys. JETP* **28** 1206 (1969)]
- Newton R G *Phys. Rev. D* **3** 626 (1971)
- Зельдович Я Б *ФТТ* **1** 1637 (1959) [Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. Solid State* **1** 1497 (1960)]
- Зельдович Я Б *Частицы, ядра, Вселенная: Избранные труды* (М.: Наука, 1985) [Zeldovich Ya B *Selected Works of Yakov Borisovich Zeldovich* Vol. 2 *Particles, Nuclei, and the Universe* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1993)]
- Попов В С *ЖЭТФ* **60** 1228 (1971) [Popov V S *Sov. Phys. JETP* **33** 665 (1971)]
- Кудрявцев А Е, Маркушин В Е, Шапиро И С *ЖЭТФ* **74** 432 (1978) [Kudryavtsev A E, Markushin V E, Shapiro I S *Sov. Phys. JETP* **47** 225 (1978)]
- Кудрявцев А Е, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **29** 311 (1979) [Kudryavtsev A E, Popov V S *JETP Lett.* **29** 280 (1979)]
- Karnakov B M, Kudryavtsev A E, Mur V D, Popov V S *Nuovo Cimento* **B98** 63 (1987)
- Карнаков Б М, Кудрявцев А Е, Мур В Д, Попов В С *ЖЭТФ* **94** 65 (1988) [Karnakov B M, Kudryavtsev A E, Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. JETP* **67** 1333 (1988)]
- Badalyan A M et al. *Phys. Rep.* **82** 31 (1982)
- Deser S et al. *Phys. Rev.* **96** 744 (1954)
- Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **87** 1150 (1984) [Karnakov B M, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **60** 657 (1984)]
- Karnakov B M, Krainov V P *WKB Approximation in Atomic Physics* (Heidelberg: Springer, 2013)
- Schwinger J *Phys. Rev.* **78** 135 (1950)

65. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ДАН СССР* **279** 345 (1984) [Karnakov B M, Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. Dokl.* **29** 938 (1984)]
66. Карнаков Б М, Мур В Д, Попов В С *ЯФ* **41** 1258 (1985)
67. Андреев С П, Карнаков Б М, Мур В Д *Письма в ЖЭТФ* **37** 155 (1983) [Andreev S P, Karnakov B M, Mur V D *JETP Lett.* **37** 187 (1983)]
68. Андреев С П, Карнаков Б М, Мур В Д, Полунин В А *ЖЭТФ* **86** 866 (1984) [Andreev S P, Karnakov B M, Mur V D, Polunin V A *Sov. Phys. JETP* **59** 506 (1984)]
69. Горьков Л П, Дзялошинский И Е *ЖЭТФ* **53** 717 (1967) [Gor'kov L P, Dzyaloshinskii I E *Sov. Phys. JETP* **26** 449 (1968)]
70. Potekhin A Y *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **27** 1073 (1994)
71. Potekhin A Y *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **31** 49 (1998)
72. Potekhin A Y, Pavlov G G *Astrophys. J.* **483** 414 (1997)
73. Pomeranchuk I, Smorodinsky Ya J. *Phys. USSR* **9** 97 (1945)
74. Померанчук И, Смородинский Я, в кн. Померанчук И Я *Собрание научных трудов* Т. 2 (М.: Наука, 1972) с. 21
75. Pieper W, Greiner W *Z. Phys.* **218** 327 (1969)
76. Brodsky S J *Comm. Atom. Mol. Phys.* **4** 109 (1973)
77. Greiner W, Müller B, Rafelski J *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Berlin: Springer-Verlag, 1985)
78. Schluter P et al. *J. Phys. B At. Mol. Phys.* **18** 1685 (1985)
79. Popov V S *AIP Conf. Proc.* **1205** 132 (2010)
80. Маринов М С, Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **17** 511 (1973) [Marinov M S, Popov V S *JETP Lett.* **17** 368 (1973)]
81. Попов В С *Письма в ЖЭТФ* **16** 355 (1972) [Popov V S *JETP Lett.* **16** 251 (1972)]
82. Müller B, Rafelski J, Greiner W *Phys. Lett. B* **47** 5 (1973)
83. Rafelski J, Müller B *Phys. Lett. B* **65** 205 (1976)
84. Маринов М С, Попов В С, Столин В Л *Письма в ЖЭТФ* **19** 76 (1974) [Marinov M S, Popov V S, Stolin V L *JETP Lett.* **19** 49 (1974)]
85. Lisin V I, Marinov M S, Popov V S *Phys. Lett. B* **69** 141 (1977)
86. Lisin V I, Marinov M S, Popov V S *Phys. Lett. B* **91** 20 (1980)
87. Okun' L B *Comments Nucl. Part. Phys.* **6** 25 (1974)
88. Попов В С, Елецкий В Л, Мур В Д *ЖЭТФ* **71** 856 (1976) [Popov V S, Eletsii V L, Mur V D *Sov. Phys. JETP* **44** 451 (1976)]
89. Ораевский В Н, Рез А И, Семикоз В Б *ЖЭТФ* **72** 820 (1977) [Oraevskii V N, Rex A I, Semikoz V B *Sov. Phys. JETP* **45** 428 (1977)]
90. Сахаров А Д и др. *ДАН СССР* **165** 65 (1965) [Sakharov A D *Sov. Phys. Dokl.* **10** 1045 (1966)]
91. Сахаров А Д *УФН* **88** 725 (1966) [Sakharov A D *Sov. Phys. Usp.* **9** 294 (1966)]
92. Сахаров А Д *Научные труды* (М.: ОТФ ФИАН. Центрком, 1995)
93. *Pulsar Power Conf.* **2** 746 (1999)
94. Павловский А И, в сб. Сахаров А Д *Научные труды* (М.: ОТФ ФИАН. Центрком, 1995) с. 85
95. Попов В С, Карнаков Б М, Мур В Д *ЖЭТФ* **115** 1642 (1999) [Popov V S, Karnakov B M, Mur V D *JETP* **88** 902 (1999)]
96. *Proc. of Intern. Conf. on Physics in Intense Fields, PIF 2010, 24–26 November 2010, KEK, Thukuba, Japan* (KEK Proc. 2010-13, Eds K Itakura, S Iso, T Takahashi) (Tsukuba, Japan: KEK, 2011)
97. Sarri G et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 205002 (2012)
98. Wagner U et al. *Phys. Rev. E* **70** 026401 (2004)
99. Kerbikov B O, Andreichikov M A *Письма в ЖЭТФ* **96** 397 (2012) [*JETP Lett.* **96** 361 (2012)]
100. Ландау Л Д, Смородинский Я А *ЖЭТФ* **14** 269 (1944); Landau L, Smorodinskii Ya J. *Phys. USSR* **8** 154 (1944)
101. Goldberger M L, Watson K M *Collision Theory* (New York: Wiley, 1964) [Гольдбергер М, Ватсон К *Теория столкновений* (М.: Мир, 1967)]
102. Кудрявцев А Е, Мур В Д, Попов В С *ЯФ* **37** 1417 (1983) [Kudryavtsev A E, Mur V D, Popov V S *Sov. J. Nucl. Phys.* **37** 844 (1983)]
103. Мур В Д, Попов В С, Сергеев А В *ЯФ* **59** 68 (1996) [Mur V D, Popov V S, Sergeev A V *Phys. Atom. Nucl.* **59** 62 (1996)]
104. Мур В Д, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (М.: МИФИ, 1991)
105. Dumbrajs O et al. *Nucl. Phys. B* **216** 277 (1983)
106. Мур В Д, Попов В С *ДАН СССР* **284** 586 (1985) [Mur V D, Popov V S *Sov. Phys. Dokl.* **20** 782 (1985)]

Hydrogen atom in a strong magnetic field

V.S. Popov

*Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics,
ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation
E-mail: markina@itep.ru*

B.M. Karnakov

*National Research Nuclear University "MEPhI",
Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation
E-mail: karnak@theor.mephi.ru*

The paper examines the energy spectrum of atomic hydrogen in strong ($B > B_a \sim 10^9$ G) and ultra-strong ($B \gtrsim B_{cr} \sim 10^{14}$ G) magnetic fields, in which the hydrogen electron starts to move relativistically and quantum electrodynamics effects become important. Using the adiabatic approximation, highly accurate energy level values are obtained analytically for $B > 10^{11}$ G, which are then compared with asymptotic and numerical results available in the literature. A characteristic feature noted in electron motion in a strong magnetic field is that for $B \gtrsim B_{cr}$, the transverse motion becomes relativistic while the longitudinal motion (along $\mathbf{B}$) can be described by nonrelativistic theory and is amenable to the adiabatic approximation. Topics discussed include: the qualitative difference in the way odd and even levels change with magnetic field (for $B \gg B_a$); the removal of degeneracy between odd and even atomic states; spectral scaling relations for different quantum numbers (n, n_p, m) and different field strengths; the shape, size, and quadruple moment of the atom at $B \gg B_a$; radiative transitions $n\rho \rightarrow 1s$ in a strong magnetic field; relativistic QED effects, including: the effects of vacuum polarization and of the electron's anomalous magnetic moment on the energy level positions; Coulomb potential screening and energy level freezing at $B \rightarrow \infty$; the possibility of the Zeldovich effect in the hydrogen spectrum in a strong magnetic field. The critical nuclear charge problem is briefly discussed. Simple asymptotic formulas for Z_{cr} , valid for low-lying levels, are proposed. Some of the available information on extreme magnetic field produced in the laboratory and occurring in space is given. The Coulomb renormalization of the scattering length is considered for the resonance situation with a shallow level in the spectrum.

PACS numbers: 03.65.Ge, 03.65.Pm, **32.30.−r**

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403e.0273

Bibliography — 106 references

Received 6 July 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 273–296 (2014)

Physics–Uspekhi **57** (3) (2014)

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Климат как игра случая

А. Рузмайкин

Рассматривается роль случая в хаотических системах, таких как климат Земли, в реакциях на внешние воздействия; при этом используются общие принципы и простые модели. Согласно флуктуационно-диссипативной теореме, реакция простой однородной системы на внешнее воздействие определяется её корреляционной функцией. Структурированная система реагирует более сложным образом. Её среднее состояние (например, глобальная температура Земли) изменяется слабо, но очень сильно возрастает число экстремальных событий (таких как наводнения и засухи). Статистика экстремальных событий выявляет некоторые поразительные их свойства, в частности, способность образовывать кластеры, т.е. приходить группами. Это явление хорошо отражено в народной поговорке: "Беда никогда не приходит одна". В данной статье статистика экстремальных событий иллюстрируется примером процесса, связанного с выпадением осадков. Обсуждается приложение статистики к изучению космического климата.

PACS numbers: 02.50. – r, 05.45. – a, 92.05.Df

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403f.0297

Содержание

1. Введение (297).
 2. Реакция случайной системы на внешние воздействия (298).
 - 2.1. Флуктуационно-диссипативная теорема. 2.2. Внешнее воздействие на динамическую систему с двумя состояниями. 2.3. Климатические структуры. 2.4. Происхождение климатических структур. 2.5. Внешнее воздействие на климатические структуры.
 3. Экстремальные события (303).
 - 3.1. Устойчивые распределения вероятностей. 3.2. Кластеризация экстремальных событий. 3.3. Экстремальные события, связанные с выпадением осадков. 3.4. Экстремальные события, связанные с космическим климатом.
 4. Выводы и воспоминания (309).
- Список литературы (310).

1. Введение

В 1987 году — это был последний год жизни Я.Б. Зельдовича — Яков Борисович, Дмитрий Соколов и я написали книгу *Всемогущий случай* [1]. В тот период физики вновь обратили внимание на роль случая в физических процессах. Шли бурные дискуссии о том, как описывать турбулентность — в виде комбинации большого числа состояний с иррациональными соотношениями частот [2] или в виде динамической системы с конечным числом степеней свободы [3]. Математики

обращали наше внимание на ляпуновские экспоненты в фазовом пространстве и открывали странные аттракторы. Это незабываемое время отразилось в нашей книге: в ней мы рассматривали роль случайностей в происхождении магнитных полей планет, звёзд и галактик, тогда это нас интересовало больше всего. Яков Борисович с удовольствием возвращался к давним классическим работам Эйнштейна и Смолуховского о броуновском движении; используя современные математические методы, мы с талантливым математиком школы Колмогорова Станиславом Молчановым распространили их идеи на процессы переноса скаляров и векторов [4, 5].

Я.Б. Зельдович был во многих отношениях замечательной личностью, одна из главных его черт — способность откликаться на вызовы времени. Он быстро и активно реагировал на новые направления в науке и во многих случаях внёс огромный вклад в их развитие. Его стиль работы всегда вдохновлял меня, и я считал, что будет уместным рассмотреть роль случая на более современном уровне науки и в русле интересов современного общества. В число актуальных проблем нашего времени входят вопросы изменения климата. А в хаотической системе климата Земли самую интересную, по моему мнению, проблему предлагает именно "всемогущий случай".

Сегодня уже никто не отрицает, что климат Земли изменяется. Глобальная температура повышается, а экстремальные погодные явления (такие как наводнения и засухи) становятся интенсивнее и многочисленнее. Новостные ленты полны сообщений о таких явлениях и их разрушительных последствиях. В Интернете без труда можно найти ссылки на недавние природные катастрофы. Аномальная жара в Европе летом 2003 г. унесла почти 40 тыс. жизней. Июльское наводнение 2010 г. в

А. Рузмайкин. Jet Propulsion Laboratory,
California Institute of Technology, Pasadena, California, USA
E-mail: alexander.ruzmaikin@jpl.nasa.gov

Статья поступила 21 октября 2013 г.,
после доработки 9 декабря 2013 г.

Пакистане, вызванное проливными муссонными дождями, затопило почти пятую часть территории этой страны, пострадало около 20 млн человек. От беспрецедентно аномальной жары в России в июле 2010 г., подобной которой на этой территории не было на протяжении тысячи лет, умерли почти 15 тыс. человек. Ущерб от сильнейшего и самого разрушительного урагана "Сэнди", обрушившегося на Соединённые Штаты в сезон атлантических ураганов 2012 г. (второй по величине ущерб после причинённого ураганом "Катрина"), составил более 68 млрд долл. США. Не говоря уже о беспрецедентном, причинившем множество бедствий, наводнении в августе 2013 г. в Амурской области, откуда родом автор статьи.

В настоящее время в центре дискуссий находится вопрос о том, вызвано ли наблюдаемое изменение климата человеческой деятельностью, связанной с выбросами в атмосферу диоксида углерода (CO_2) и других парниковых газов. Некоторые учёные-скептики и люди, не работающие в области естественных наук, полагают, что климат изменяется в основном из-за переменчивости природных процессов, естественным образом присущих земной климатической системе, а антропогенное (вызванное человеком) воздействие незначительно. Для того чтобы понять причины изменения климата, необходимо тщательно исследовать реакции климатической системы Земли на внешние воздействия и ответить на вопрос о том, отличается ли реакция на антропогенные воздействия (такие как увеличение концентрации CO_2) от реакции на естественные воздействия, вызываемые извержением вулканов или вариациями солнечного излучения, и если отличия имеются, то каковы они. Подробный обзор современного состояния теоретических исследований и анализ наблюдений, связанных с этим вопросом, можно найти в недавно вышедшем 5-м выпуске Оценочного доклада об изменениях климата и их последствиях (Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC) [6]. В журнале *УФН* А. Бялко [7] опубликовал интересное введение в проблему изменения климата на протяжении большого периода времени.

Обсуждение статистических задач, близких к тем, о которых будет говориться ниже, можно найти в книгах П.Ф. Демченко и А.А. Кислова [8] и Г.С. Голицына [9]. К сожалению, рассмотрение хорошо развитых численных методов моделирования атмосферной циркуляции и климатических изменений выходит за рамки данной статьи. Этот небольшой обзор, написанный на основе принципов, изложенных в книге *Всемогущий случай* [1], базируется на собственных исследованиях автора, и основное внимание уделяется только одному аспекту проблемы — роли случая в реакциях климата на внешние воздействия.

Обзор организован следующим образом. Раздел 2 начинается с введения в широко известные исследования реакций чисто случайных однородных систем на слабые внешние воздействия. После введения рассматривается роль структур, встроенных в систему, прежде всего на примере динамической системы Лоренца и простой динамической системы с двумя потенциальными ямами, затем рассматриваются реальные климатические структуры Земли (climate patterns). Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что внешнее воздействие слабо влияет на средние состояния системы, но значительно увеличивает вероятность сильных отклонений

(экстремальных событий). Раздел 3 посвящён обсуждению основ статистики экстремальных событий, в нём приводятся примеры применения этой статистики к экстремумам выпадения осадков и экстремумам космической погоды.

2. Реакция случайной системы на внешние воздействия

Линейные и нелинейные системы реагируют на внешние воздействия по-разному. Классический пример реакции линейной системы — закон Гука в теории упругости, гласящий, что величина деформации пружины прямо пропорциональна силе, вызывающей эту деформацию. Подобное линейное приближение до сих пор широко используется в исследованиях климата [6], например, при оценке чувствительности s глобальной температуры Земли T к изменению радиационного (теплого) воздействия F :

$$\Delta T = s \Delta F.$$

Радиационное воздействие представляет собой разность между солнечной энергией, получаемой Землёй, и энергией, излучаемой обратно в космос. Количественно оно обычно выражается величиной изменения теплового потока ΔF на уровне атмосферной тропопавузы и измеряется в единицах $[\text{Вт м}^{-2}]$. Характерное значение $s = 0,8 \text{ К Вт}^{-1} \text{ м}^2$ позволяет дать быструю оценку глобального потепления, вызванного тепловым неравновесием. Например, для оценки глобального потепления за счёт увеличения содержания CO_2 часто используется формула $\Delta F = 5,4 \ln(\text{CO}_2/\text{C}_0)$, где C_0 — эталонная концентрация CO_2 (ср. wikipedia.org/wiki/Radiative_forcing).

Реакция нелинейных случайных систем на внешнее воздействие принципиально отличается от реакции линейных систем. Разница не в численной величине реакции (чувствительности), а в более широком и разнообразном участии разного рода случайностей и в различных способах их проявления. Различны и способы их учёта. Например, использовалось предположение, что атмосфера, за вычетом явно наблюдаемых периодичностей, таких как сезонные циклы, может быть полностью охарактеризована как единая флуктуирующая система, поведение которой различно на протяжении коротких периодов времени (временной период, типичный для погоды, составляет < 10 дней) и более длительных периодов (для климата — годы) [10]. В такой "суповой" трактовке флуктуации представляют собой комбинации внешних воздействий (антропогенных, солнечных, вулканических и т.п.) и внутренних обратных связей, возникающих в результате таких процессов, как динамические процессы в глубине океана или процессы взаимодействия суши и льда. В данном обзоре принята другая, более традиционная точка зрения, разделяющая системные флуктуации и внешние воздействия.

Классический подход к изучению реакций случайной системы на внешние воздействия основан на рассмотрении однородной изотропной среды, полностью определяемой корреляциями её флуктуаций (ковариациями второго порядка). Реакция такого рода системы определяется флуктуационно-диссипативной теоремой (ФДТ), которая может применяться к широкому классу физических систем [11–15].

2.1. Флуктуационно-диссипативная теорема

Согласно флуктуационно-диссипативной теореме, реакция случайной системы на слабое внешнее воздействие определяется корреляционной функцией флуктуаций невозмущённой системы. Авторы работ [16, 17], как и ряд других авторов, применили эту теорему к климатической системе Земли. В работах [18–20] ФДТ применена к баротропной и двухуровневой бароклининой моделям атмосферы в различных условиях для определения чувствительности атмосферной динамики к внешнему воздействию.

Уравнения для возмущённой и невозмущённой системы имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{u}_0}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{u}_0, \lambda), \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{N}(\mathbf{u}, \lambda) + F, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}$ — невозмущённая и возмущённая климатические переменные соответственно, λ включает параметры системы, $\mathbf{N}$ — нелинейный оператор. Из допущения, что функция распределения вероятностей решений уравнений (1) и (2) представляет собой распределение Гаусса $\exp[-C^{-1}(0)(\mathbf{u}\mathbf{u})/2]$, следует, что разность средних значений $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}$ составляет

$$\langle \mathbf{u}_0 \rangle - \langle \mathbf{u} \rangle = \int_0^t C(\tau) C^{-1}(0) F d\tau, \quad (3)$$

где $C(\tau)$ — корреляционная матрица невозмущённой системы.

Это главный результат флуктуационно-диссипативной теоремы. Его легко понять, если мы будем рассматривать хорошо перемешанную случайную систему, аналогичную классической однородной изотропной турбулентной среде. Поскольку в этом приближении система полностью описывается корреляциями второго порядка, её реакция на внешние воздействия определяется корреляционной функцией. По сути, все доказательства ФДТ основаны на допущениях, которые сводят систему к хорошо перемешанной гауссовой стационарной среде.

Классическая ФДТ характеризует реакцию флуктуирующей диссипативной системы на слабые стационарные внешние воздействия. В прекрасном обзоре [21], опубликованном в *УФН* и посвящённом наследию В.Л. Гинзбурга, Л.П. Питаевский рассмотрел общий случай, когда внешняя сила не мала и не стационарна. Он показал, как можно описать эту существенно нелинейную ситуацию, применяя подход, разработанный Г.Н. Бочковым и Ю.Н. Кузовлевым [22] и равенство Яржинского [23]:

$$\langle \exp(-\beta W) \rangle = \exp(\beta \Delta \mathcal{F}),$$

где W — работа над системой, выполненная внешней силой, $1/k\beta$ — температура, $\Delta \mathcal{F}$ — разность между равновесной свободной энергией и её величиной до приложения силы. Равенство Яржинского приоткрывает неочевидный факт: экстремальные значения работы W , когда она принимает редкие, очень малые значения, вносят существенный вклад в $\langle \exp(-\beta W) \rangle$ вследствие экспоненциальной зависимости. Л.П. Питаевский описывает механические и биологические эксперименты, результаты которых подтверждают эту обобщённую ФДТ и подчёркивают преимущества комбинированного

использования отраслей науки, традиционно между собой не связанных. В данном обзоре показано, что существует ещё одна потенциальная область применения этих фундаментальных идей — климат.

ФДТ ориентирована на реакцию на внешние воздействия в форме изменений средних величин случайных переменных в системе. Между тем реальные системы обычно в значительной степени структурированы, поэтому среднестатистическое среднее не обеспечивает достаточной количественной оценки реакции системы.

Математически нелинейные системные структуры характеризуются предпочтительными состояниями, которые определяются их внутренними процессами и называются аттракторами. Соответствующая динамика определяется временами пребывания в этих состояниях и переходами между ними. Вопрос заключается в том, как внешнее воздействие изменяет состояния, времена пребывания в них и другие характеристики системы. Ответ на этот вопрос является ключевым для нашего понимания климатических изменений, так как реальный климат Земли представляет собой хороший пример существенно структурированной системы. В следующих разделах статьи мы рассмотрим возможный подход к пониманию влияния внешних воздействий на структурированные системы. Начав с простейшей динамической системы с двумя аттракторами в фазовом пространстве, мы обсудим, насколько структуры климата Земли соответствуют этой категории.

2.2. Внешнее воздействие на динамическую систему с двумя состояниями

Чтобы понять, какова реакция структурированной системы на слабое внешнее воздействие, рассмотрим воздействие на динамическую систему с известными аттракторами. Простейшая и наиболее известная система — это система Лоренца [24],

$$\dot{x} = -\sigma(x - y) + F_0 \cos \theta, \quad (4)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y + F_0 \sin \theta, \quad (5)$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (6)$$

которая при следующих значениях параметров: $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $F_0 = 0$ имеет два аттрактора (рис. 1а). Авторы работы [25] исследовали вопрос о том, что происходит, когда эта система подвергается возмущению силой постоянной амплитуды F_0 , прилагаемой под углом θ (см. правые части уравнений (4), (5)). Авторы [25] показали, что вероятностные плотности распределения времени пребывания в этих двух аттракторах экспоненциальны и что наиболее сильной реакцией на воздействие является изменение частоты появления экстремальных событий, а не гораздо более слабое изменение среднего времени пребывания, т.е. что хвосты плотности распределения обладают повышенной чувствительностью к воздействию.

Для того чтобы лучше осмыслить этот интересный результат, рассмотрим, используя подход, предложенный Крамерсом [26], более простую, чем система Лоренца, механическую систему

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx}, \quad (7)$$

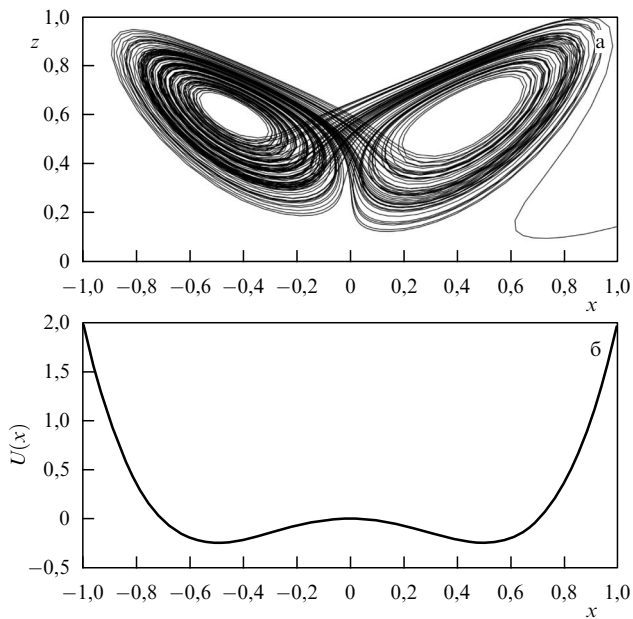


Рис. 1. (а) Два аттрактора системы Лоренца, вид на плоскости x, z . (б) Два состояния в динамической системе с двумя потенциальными ямами.

где U — потенциал с двумя ямами и дополнительной постоянной внешней силой F_0 :

$$U = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - F_0 x. \quad (8)$$

Потенциальные ямы в этой системе аналогичны двум аттракторам системы Лоренца (рис. 1б). Теперь включим случайные переходы из одной потенциальной ямы в другую. Это можно сделать, применив случайное внешнее воздействие к правой части уравнения (7).

В отсутствие внешней силы, т.е. при $F_0 = 0$, средние времена пребывания в положительной (правой) и отрицательной (левой) потенциальных ямах одинаковы: $\tau_p = \tau_n$. Однако при $F_0 \neq 0$ одна из ям становится глубже другой и времена пребывания в ямах оказываются различными.

На рисунке 2 показана разность потенциальных ям, найденная методом численного моделирования для случая $F_0 = -0,05$. В этом случае τ_p становится меньше τ_n , т.е. система дольше пребывает в отрицательной яме. Верно также, что длительность случайных времён пребывания в отрицательной яме возрастает. Этот менее тривиальный факт проявляется в различии между хвостами распределений вероятности времён пребывания (PDF), показанном на рис. 2в.

Эти результаты приводят нас к выводу, что наиболее значительным эффектом внешнего воздействия может быть изменение частоты появления отрицательных событий (или положительных событий, если под действием внешней силы углубляется положительная яма), а не изменение среднего состояния. В разделе 2.3 мы вернёмся к этому вопросу и рассмотрим применение разработанной здесь концепции к реальным структурам климатической системы Земли, которые мы в данной работе называем климатическими структурами (climate patterns).

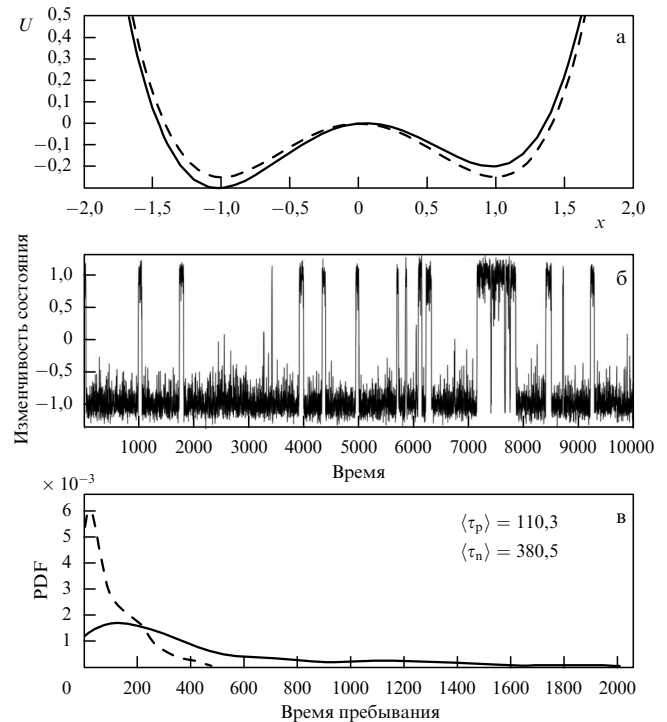


Рис. 2. (а) Потенциал с двумя ямами, возмущённый внешней силой, понижающей отрицательную (левую) яму. (б) Временной ряд переменной состояния x при возмущённом потенциале. (в) Функции распределения времён пребывания в двух потенциальных ямах. Функция распределения для отрицательной ямы имеет большее среднее значение (средние времена показаны на рисунке) из-за гораздо более длинного хвоста. Время дано в произвольных единицах.

2.3. Климатические структуры

Понятие климатических структур было введено выдающимся британским ученым сэром Гилбертом Уокером в его докладе Лондонскому Королевскому обществу и было опубликовано в работе [27]. Уокер исследовал казавшиеся неправдоподобными сообщения о том, что есть какая-то связь между погодой в отдалённых друг от друга регионах Земли. Проанализировав доступные ему данные наблюдений, он обнаружил, что теплогодные корреляции действительно существуют. В связи с этим он предложил рассматривать три крупномасштабные когерентные колебательные структуры изменчивости системы "атмосфера–океан", которые назвал убедительными колебаниями и которые теперь известны как Северо-Атлантическое колебание, Северо-Тихоокеанское колебание и Южное колебание (относящееся к южной части Тихого океана и Индийскому океану). Многочисленные исследования, проведённые впоследствии, показали, что атмосферные и океанские аномалии (т.е. отклонения от среднего) связаны с пространственно-когерентными структурами. Математически эти структуры могут быть эффективно представлены эмпирическими ортогональными функциями (Empirical Orthogonal Functions — EOF), введёнными в обиход исследований по физике атмосферы А.М. Обуховым [28]. Они могут быть рассчитаны по месячным картам аномалий давления на уровне моря (или по геопотенциальным высотам) и аномалий температуры и зонального ветра (см., например, [29]).

Временные зависимости главных компонент (Principal Components — PCs) этих EOF можно использовать

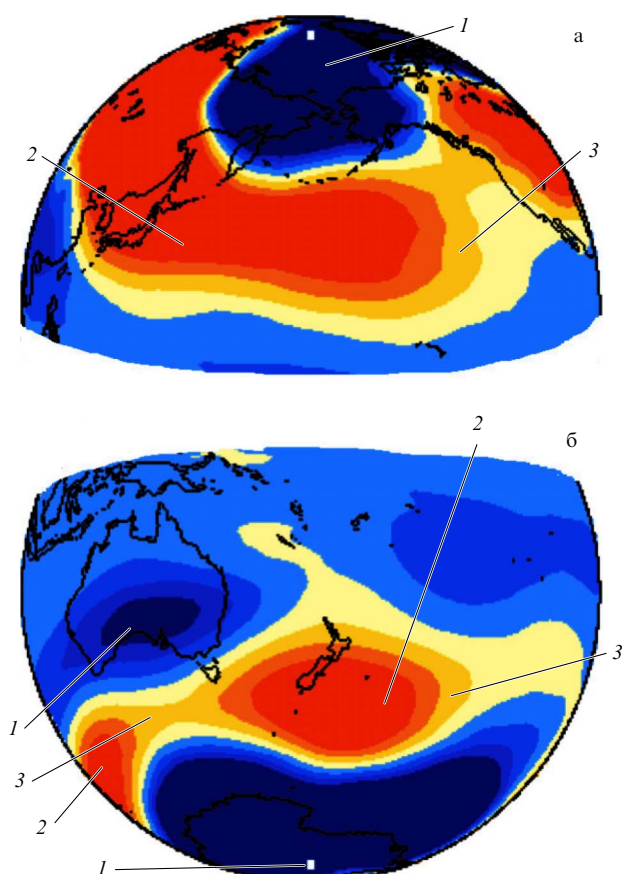


Рис. 3. (В цвете онлайн.) Иллюстрация климатических структур NAM (а) и SAM (б) тропосферной температуры. Холодные температурные аномалии (отклонения от среднего значения на протяжении 50-летнего периода) над полюсами (области 1, синий цвет) окружены тёплой кольцеобразной зоной (области 2 и 3, оранжевый и жёлтый цвет), включающей Евразию и США. Похолодание полярных зон сопровождается похолоданием тропических областей. Более подробно см. www.jisao.washington.edu/wallace/ncar-notes.

в качестве эмпирических индексов климатических структур. Одной из наиболее изученных структур является Северо-Атлантическое колебание (North Atlantic Oscillation — NAO), которое было первоначально определено как разница между давлениями на уровне моря между Исландией и Португалией, усреднённая с декабря по март [30]. Оно тесно связано со структурой, называемой "Северная кольцеобразная мода" (Northern Annular Mode — NAM), которая обладает большей пространственной протяжённостью [31]. "Двойник" NAM в Южном полушарии называется Южной кольцеобразной модой — South Annular Mode, или SAM (рис. 3). Солнечная активность оказывает сильное влияние на эти моды (см., например, [43, 76, 77]). Погодные условия в Северном (Южном) полушарии существенно зависят от состояния NAM (SAM), что иллюстрируется таблицей данных об экстремальных погодных событиях, составленной по результатам работы [32] (табл. 1). Первый столбец определяет вид события. Числа во втором и третьем столбцах показывают события, относящиеся к положительному и отрицательному состояниям NAM, которые превышают по абсолютной величине одно стандартное отклонение. Значительно большее число холодных температурных аномалий и аномалий выпадения твёрдых осадков (экстремальных событий) наступило во время

Таблица 1. Экстремальные погодные события, связанные с состоянием NAM

Экстремальные события и их местоположение	NAM +	NAM–
Минимум суточной температуры		
< –15 °С Чикаго	29	84
< 3 °С Париж	23	97
< –29 °С Новосибирск	21	85
< –19 °С Пекин	21	55
< –1 °С Токио	20	95
Твёрдые осадки		
Малое количество снега, Даллас, штат Техас	1	17
> 5 см снега, Балтимор	11	63
> 0,5 см снега, Париж	11	25
> –0 см снега, Токио	8	25
Ветер		
> 25 узлов, Сиэтл	78	27
> 35 узлов, Астория, штат Орегон	55	20
> 30 узлов, Бостон	22	45
> 50 узлов, Кефлавик, Исландия	81	19
Блокирующие дни		
Аляска (170° в.д. – 150° з.д., 60° – 75° с.ш.)	53	98
Северная Атлантика (50° – 0° з.д., 60° – 75° с.ш.)	1	225
Россия (40° – 70° в.д., 60° – 75° с.ш.)	29	82

отрицательного состояния NAM, когда полярные области были теплее. Понятие "блокирующие дни" относится к датам, когда обычное распространение погодных возмущений в восточном направлении блокируется, что приводит к продлённым периодам экстремальных погодных условий. Данные таблицы основаны на ежесуточных измерениях в зимние периоды 1958–1997 гг., при составлении таблицы использовались результаты работы [32]. Отрицательное состояние NAM соответствует ситуации, когда в Арктике тепло, а в Евразии холодно. Действительно, данные наблюдений показывают, что существенные аномалии в Дальневосточной зоне в начале зимы и зонально протяжённые от Европы до Дальнего Востока холодные аномалии в конце зимы связаны с уменьшением ледяного покрова арктических вод в предшествующие летне-осенние сезоны [33]. Результаты численных экспериментов, проведённых с использованием модели общей циркуляции атмосферы, подтверждают верность этих наблюдений. Аномальные уменьшения скопления льда в Баренцевом и Карском морях в зимнее время были связаны с экстремально холодными событиями, такими как зима 2005/2006 гг. в Европе [34].

Другие примеры климатических структур — Тихоокеанско-Североамериканская структура (Pacific North American Pattern — PNA), структура холодный океан и тёплая суша (Cold Ocean–Warm Land — COWL) [35],

Десятилетнее Тихоокеанское колебание (Pacific Decadal Oscillation — PDO) [36], широко известная структура Южное колебание и Эль-Ниньо (El Niño Southern Oscillation — ENSO) в Тихом океане [37] и Квазидвухлетнее колебание (Quasi-Biennial Oscillation — QBO) в стратосфере [38]. Как показали авторы работы [39], влияние QBO на погоду в Северном полушарии аналогично влиянию NAM, но несколько слабее. Это влияние в рассмотренном ими случае осуществлялось через изменение интенсивности и устойчивости стратосферного полярного вихря. Так, восточная (западная) фаза QBO благоприятствует более частому появлению экстремально холодных (тёплых) погодных событий. Влияние QBO на зимние температуры Северного полушария приблизительно сопоставимо по амплитуде с наблюдаемым влиянием Южного колебания и Эль-Ниньо, которое это явление оказывает на температуру.

2.4. Происхождение климатических структур

Каково происхождение климатических структур? По общему мнению, климатические структуры образуются путём естественного возбуждения динамической системы атмосфера–океан. Однако наше понимание физических механизмов возбуждения находится ещё в начальной стадии; кроме того, они различны для разных структур. Карл Густав Россби [40, с. 656–661] первым обратил особое внимание на важность двух главных составляющих атмосферной динамики: зональный ветер и незонально-симметричные отклонения давления. Он описал незонально-симметричные отклонения как волны — в настоящее время их называют волнами Россби или планетарными волнами.

Волны Россби приводятся в движение силой Кориолиса. Эти крупномасштабные волны наиболее эффективно генерируются ветровым потоком над высокогорной местностью, такой как Скалистые горы в Америке и Гималаи в Азии, и контрастами температуры между морем и сушей. Они распространяются в горизонтальном и вертикальном направлениях [41]. Вертикальное распространение этих волн в стратосферу через атмосферные слои с уменьшающейся плотностью воздуха значительно увеличивает их амплитуду. Это увеличение часто приводит к нелинейному разрушению волны, которое сопровождается выбросом энергии, вызывающим температурные аномалии, и иногда изменяет направление зонального ветра на противоположное. Зональный ветер, в свою очередь, воздействует на распространение волны, изменяя показатель преломления атмосферной среды. Было высказано предположение, правильность которого подтвердилась расчётами с помощью численного моделирования, что возбуждение NAM, характеризующее зонально-симметричные аномалии атмосферной циркуляции, включает взаимодействие планетарных волн и зонально-усреднённого атмосферного потока [42, 43, 45]. Это же взаимодействие формирует и вторую после NAM, ортогональную EOF-моду — климатическую структуру PNA [29]. Нелинейное взаимодействие волн и зонального потока можно рассматривать как динамическую систему с двумя основными состояниями в фазовом пространстве, соответствующими положительному и отрицательному состояниям NAM [43–45], что подтверждает принципиальную адекватность простой модели с двумя потенциальными ямами, рассмотренную в разделе 2.2.

2.5. Внешнее воздействие на климатические структуры

Введение внешнего воздействия может изменять либо сами состояния, либо периоды времени пребывания в этих состояниях. К.Г. Россби [40] высказал гипотезу о том, что внешнее воздействие не изменяет состояния, а только влияет на средние периоды времени пребывания в них (частоты заполнения состояний).

Гипотеза Россби была в дальнейшем развита С. Корти [46] и Т. Палмером [47]. В качестве наглядной иллюстрации Палмер привёл рисунок с изображением двух чашек, представляющих состояния шарика, случайным образом сбрасываемого сверху, что моделировало заполнение состояний, и вентилятора, имитирующего внешнее воздействие (рис. 4а). Однако анализ, представленный в разделе 2.2, показывает, что изменение среднего времени пребывания менее существенно по сравнению с изменением хвостов распределений вероятности времени пребывания, т.е. увеличением частоты появления экстремальных событий.

Чтобы понять, почему система реагирует ростом числа экстремальных событий, надо учесть энергетический барьер ΔU , разделяющий две потенциальные ямы, который препятствует переходу системы в другое состояние (рис. 4б). Этот существенно важный фактор отсутствует как в изображении двух твёрдых чашек, представленном Палмером (рис. 4а), так и в первоначальной гипотезе Россби. В действительности внешнее воздействие влияет на состояние, углубляя одну из потенциальных ям относительно другой. Когда изменение глубины значительно, система чаще остаётся в более глубокой яме

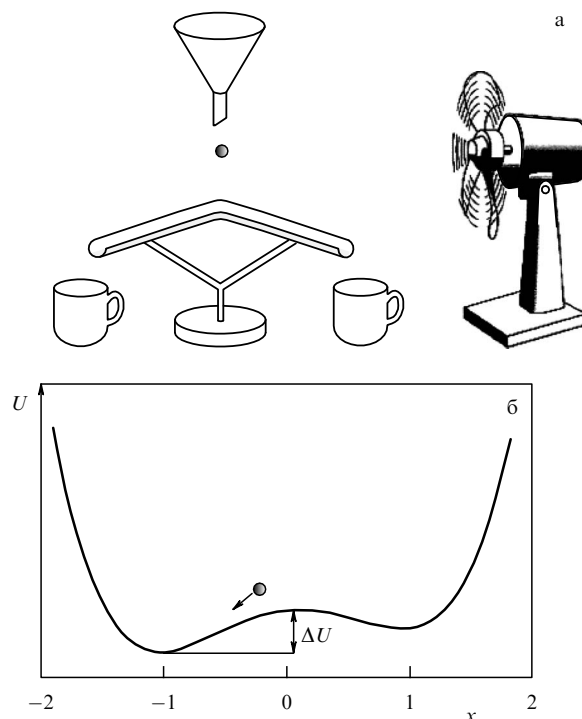


Рис. 4. (а) Иллюстрация внешнего воздействия на систему с двумя состояниями, предложенная Т. Палмером [47]. Отметим, что положение чашек жёстко зафиксировано. (б) Иллюстрация внешнего воздействия на систему с двумя состояниями, предложенная А. Рузмайкин [77]; используется потенциал с двумя ямами. Внешнее воздействие изменяет глубину потенциальной ямы, вследствие этого по отношению к переходу из одного состояния в другое одно из состояний становится преимущественным.

на более длительное время; этим объясняется продлённое сохранение этого состояния. Примером реальной климатической системы с двумя состояниями является NAM. Длительное время пребывания в одном из её состояний может быть связано с преобладанием отрицательного состояния NAM во время продлённого периода сниженного солнечного воздействия на климат — во время длительного периода минимальной солнечной активности, известного как Минимум Маундера (Maunder Minimum) [48], и с недавним арктическим потеплением, которое сопровождалось охлаждением Евразии [33].

Правильность приведённых рассуждений подтверждается простой оценкой, которая основана на описанной выше модели с двумя потенциальными ямами. Как хорошо известно из исследований, основанных на работе [26], вероятность p некоторого периода времени пребывания τ пропорциональна $\exp(\tau/\tau_K)$, где $\tau_K \propto \exp(\Delta U/\sigma)$ — среднее время пребывания, характеризующееся величиной σ , обозначающей величину стохастического внешнего воздействия, которая обеспечивает переходы из одного состояния в другое. Внешнее воздействие, влияющее на глубину одного из этих состояний, эффективно увеличивает (или уменьшает) энергетический барьер. Из-за экспоненциальной чувствительности среднего времени пребывания τ_K к высоте барьера даже небольшое изменение барьера может вызвать заметное изменение среднего времени пребывания. Но изменение вероятности появления очень длительного времени пребывания $\tau_c \gg \tau_K$ ещё больше, его возрастание определяется множителем τ_c/τ_K , так как $dp/p = (\tau_c/\tau_K) d\tau_K/\tau_K$! Расчёты с помощью численной модели системы с двумя потенциальными ямами со стохастическими переходами между ямами, описанной в разделе 2.2, подтвердили правильность этой приблизительной оценки. Когда одна из ям углубляется путём изменения внешнего воздействия на потенциал (8), у функции распределения вероятности времён пребывания в этой яме хвост удлиняется (рис. 2в).

Изменяет ли внешнее воздействие также и пространственное распределение климатической структуры? Модельные исследования простой системы Лоренца и системы с двумя потенциальными ямами, описанных выше, показывают, что позиции аттракторов, или ям, изменяются не сильно. Холл и др. [49] провели модельные расчёты вариаций климата для таких периодов времени на протяжении последних 165 тыс. лет, когда распределение ледяного покрова на Земле было сходно с его распределением в настоящее время. Это условие выполняется в период голоцена, распространяясь до периода, начавшегося приблизительно 11 тыс. лет назад. В результате проведённых экспериментов обнаружилось, что орбитальное внешнее воздействие приводило к вариациям NAM, но его структура сохранялась. Всё же остаётся неясным, может ли изменение граничных условий, вызванное, например, крупномасштабным таянием льдов в Гренландии или Антарктике, изменить климатическую структуру NAM.

На основании рассмотренных модельных оценок можно сформулировать следующую гипотезу о реакции климатической системы на внешние воздействия: внешние воздействия (такие как солнечное или антропогенное) слабо влияют на климатические структуры и средние периоды времени пребывания в них, но увеличивают вероятность появления длительных периодов пребыва-

ния в одном из их состояний. Другими словами, происходящие под влиянием внешних воздействий изменения основных климатических величин, таких как глобальная температура, менее опасны, чем увеличивающаяся длительность и интенсивность редких экстремальных событий, которые могут быть связаны с холодом, проливными дождями и наводнениями в ряде регионов и недостатком влаги (засухами) в других регионах (см. табл. 1). Следовательно, исследование экстремальных событий является задачей первостепенной важности.

В разделе 3 мы в общих чертах опишем некоторые идеи, связанные со статистикой экстремальных событий.

3. Экстремальные события

История научного изучения экстремальных событий восходит к началу XVIII в. В 1709 г. швейцарский математик Николай Бернулли сформулировал следующую задачу: если n человек одного и того же возраста покинут этот мир в течение t лет, то какова будет ожидаемая продолжительность жизни последнего оставшегося в живых? Он предложил и метод решения этой задачи: разместите в случайном порядке n точек на линии длиной t , вычислите среднее самых дальних расстояний от исходной точки для достаточно большого ансамбля размещений. Это было началом развития статистики экстремальных событий. Николай Бернулли, а также Даниил Бернулли, имя которого хорошо известно физикам благодаря его первопроходческой работе в области гидродинамики, были в числе первых иностранных учёных, которых в 1725 г. пригласили войти в члены Академии наук, только что открытой в Санкт-Петербурге.

3.1. Устойчивые распределения вероятностей

Статистика экстремальных событий оказывается совсем другой, чем знакомая физикам обычная статистика больших чисел. Знакомая статистика основана на центральной предельной теореме, гласящей, что большое количество случайных событий имеет неслучайное среднее значение и что отклонения от этого значения подчиняются распределению Гаусса. Но число экстремальных случайных событий (таких как большие наводнения, гигантские землетрясения) обычно статистически очень мало, и центральная предельная теорема к ним неприменима. Однако достаточно удивительным образом статистики XX в. сообразили, что делать со статистикой малых чисел. Вначале предпринимались только эпизодические попытки разобраться в этом, такие как, например, попытка, предпринятая польским статистиком Владиславом фон Борткевичем (1868–1931), который родился в Санкт-Петербурге и получил высшее образование в Петербургском университете. В работе "Klienen Zahlen", опубликованной в Берлине в 1898 г., он попытался решить так называемую задачу о гибели офицеров прусской армии от удара копытом лошади.

Основы статистики малых чисел были заложены тремя выдающимися статистиками: Рональдом Фишером (1890–1962), Леонардом Типпетом (1902–1985) [50] и Борисом Владимировичем Гнеденко (1912–1995) [51]. Результат их работ сформулирован в теореме Фишера – Типпета – Гнеденко (ФТГ). Согласно этой теореме, если $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ — независимые идентично распределённые случайные события, то вероятность $\text{Prob}(M_n \leq x)$

максимумов $M_n = \max(e_1, e_2, \dots, e_n)$ n событий, когда $n \rightarrow \infty$, должна подчиняться одному из трёх распределений кумулятивной вероятности:

$$P_G = \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right], \quad (9)$$

$$P_F = \exp \left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-\alpha} \right], \quad x-\mu > 0, \quad (10)$$

$$P_W = \exp \left[-\left(\frac{-x+\mu}{\sigma} \right)^{\alpha} \right], \quad x-\mu < 0, \quad (11)$$

где μ , σ и α — параметры, определяющие центроид, масштаб и скорость сходимости к единице соответственно. Для простоты мы сохраняем одно и то же обозначение параметров, хотя они различны для каждого из трёх распределений.

Первое распределение было открыто немецким статистиком Эмилем Гумбелем (1891–1966) с целью исследования наводнений, второе — блестящим французским статистиком Морисом Фреше (1878–1973), третье — шведским инженером Валодди Вейбуллом (1887–1979).

Три распределения, выраженных уравнениями (9)–(11), можно объединить в так называемое обобщённое распределение экстремальных значений:

$$G(x) = \exp \left\{ -\left(1 + \frac{\gamma(x-\mu)}{\sigma} \right)^{-1/\gamma} \right\}, \quad 1 + \frac{\gamma(x-\mu)}{\sigma} > 0, \quad (12)$$

где $\sigma > 0$ — масштаб, μ — центроид, γ — параметр формы распределения.

Если $\gamma \rightarrow 0$, то мы получаем гумбелевское кумулятивное распределение: $\exp \{ -\exp [-(x-\mu)/\sigma] \}$. Если $\gamma < 0$, то правый хвост ограничен и G становится обращённым законом Вейбулла. И, наконец, когда $\gamma > 0$, правый хвост функции распределения спадает по степенной зависимости и G сводится к распределению Фреше с $\alpha = 1/\gamma$.

Основой доказательства неочевидной теоремы ФТГ является так называемый постулат устойчивости, введённый Фреше в 1927 г. Вкратце он сводится к следующему: если случайные события описываются функцией распределения $P(x)$, т.е. $\text{Prob}(e_i < x) = P(x)$, то вследствие независимости событий

$$\begin{aligned} \text{Prob}(M_n < x) &= \text{Prob}(e_1 < x) \times \\ &\times \text{Prob}(e_2 < x) \dots \text{Prob}(e_n < x) = [P(x)]^n. \end{aligned}$$

Постулат устойчивости гласит, что существует набор распределений, для которых сложная функция $[P(x)]^n$ сводится к перемасштабированному исходному распределению $P(x)$:

$$[P(x)]^n = P(a_n x + b_n). \quad (13)$$

Теоремой ФТГ уравнения (9)–(11) идентифицируются как единственные распределения, удовлетворяющие условию (13). В частности, Б.В. Гнеденко [51] показал, что постоянные a_n и b_n слабо зависят от n и равны: $a_n = 1$, $b_n = -\sigma \log n$ для распределения Гумбеля и $a_n = n^{-1/n}$, $b_n = \mu(1 - n^{-1/\alpha})$ для распределения Фреше.

Теорема ФТГ обеспечивает статистическую основу для определения характеристик экстремальных событий. В принципе, надо просто взять выборку экстремальных событий и попытаться найти, какому из распределений,

описываемых уравнениями (9)–(11), или какой обобщённой функции распределения экстремальных значений (12) она удовлетворяет. Однако на практике качество этой операции трудно оценить из-за редкости появления экстремальных событий и отсутствия точных математических методов подбора указанных соответствий между случайной выборкой и функцией распределения. Подбор аппроксимирующей кривой зависит от выборки данных, подгоночных параметров и искусности исследователя. Более простой подход состоит в подгонке только лишь хвоста распределения. Это позволяет, не зная всего распределения полностью, использовать только те данные, значения которых расположены выше выбранного порога. Однако метод подгонки хвоста тоже имеет слабое место — произвольный выбор порогового значения.

Есть и другие практические ограничения теоремы ФТГ. Одно из них заключается в том, что наблюдаемые экстремальные события, как правило, не являются независимыми. Наблюдаемые экстремальные события часто приходят в группах (кластерах), т.е. наступают близко друг к другу (см. далее раздел 3.2), что отражено в народной поговорке: "Беда никогда не приходит одна". Ещё одно ограничение заключается в том, что теорема ФТГ ориентирована на распределения интенсивности экстремальных событий и не отвечает прямо на вопрос: насколько часто происходят такие события, т.е. какова частота их появления? Если бы распределение таких событий по времени было подобно временному распределению поступления случайных телефонных звонков, т.е. подчинялось широко известному закону Пуассона, то промежутки времени между последовательными появлениями событий $\tau = t(i+1) - t(i)$ представляли бы собой экспоненциальную зависимость $\exp(-\tau/\tau_0)$, где τ_0 — средний интервал времени между событиями. Но обычно моменты наступления экстремальных событий не подчиняются этому классическому закону.

К счастью, существуют простые практические методы для определения экстремального хвоста функции распределения и частоты появления как независимых, так и коррелированных (сгруппированных в кластеры) экстремальных событий. Один из таких методов называется "метод спектра максимумов" [52]. Автором настоящей статьи с коллегами [53] он был применён для изучения экстремальных событий, связанных с космическим климатом (см. раздел 3.2).

В указанном методе используются максимумы данных, наблюдаемых при различных масштабах времени. Подход с использованием масштабирования — скейлинг (scaling) — знаком физикам и широко применяется во многих приложениях. Он используется, например, при изучении турбулентности (вспомним закон Колмогорова–Обухова для флуктуаций скорости). Простота и полезность методов масштабирования прекрасно проиллюстрирована Г.С. Голицыным [54, 55]. Скейлинг можно естественным образом распространять на новые данные, которые становятся доступными для изучения, что полезно при исследовании экстремальных событий, поскольку во время их рассмотрения выборки данных скудны. Метод также позволяет нам интерполировать поведение переменной на область, находящуюся вне пределов имеющегося набора данных, если ничто не указывает на существование какой-либо предпочтительной величины, которая могла бы нарушить степенной закон самоподобия масштабов.

При применении метода спектра максимумов используется весь диапазон данных, чтобы без дополнительных допущений эффективно оценить порог, отделяющий экстремальные величины от типичных. В результате применения этого метода получаются две экспоненты: одна из них определяет степенную зависимость хвоста функции распределения (если она существует), а другая характеризует число и населённость кластеров экстремальных событий во времени. Указанный метод кратко описан ниже в применении к выборкам данных, представленных временными рядами. Технические подробности и математические доказательства читатель может найти в работах Стоева и др. [52] и Хамиде и др. [56].

Рассмотрим временной ряд данных $X(i)$ длиной N , $1 \leq i \leq N$, и сформируем неперекрывающиеся временные интервалы длиной 2^j для каждого индекса временного ряда $j = 1, 2, 3, \dots, [\log_2 N]$ (квадратные скобки обозначают целую величину), т.е. последовательно удваивая масштаб. При каждом фиксированном масштабе рассчитаем максимум данных в каждом временном интервале:

$$D(j, k) = \max_{1 \leq i \leq 2^j} X(2^j(k-1) + i), \quad k = 1, 2, \dots, b_j,$$

где $b_j = [N/2^j]$ — число интервалов (длиной 2^j), а i — индекс точки данных в k -м интервале. Заметим, что j , т.е. длина временного интервала, играет роль временного масштаба. И отметим, что интервалы масштаба j естественным образом встроены в интервалы большего масштаба $(j+1)$.

Теперь усредним логарифмы максимумов $D(j, k)$ по всем интервалам с масштабом j :

$$Y(j) = \frac{1}{b_j} \sum_{k=1}^{b_j} \log_2 D(j, k).$$

Функция $Y(j)$, т.е. множество чисел $[\log_2 N]$, называется спектром максимумов данных. В работе Стоева и др. [52] установлен важный результат: для достаточно больших j спектр максимумов является линейной функцией:

$$Y(j) \simeq \frac{j}{\alpha} + C, \quad (14)$$

где C и $\alpha > 0$ — постоянные величины; тогда хвост распределения данных следует степенному закону с показателем степени α . Если хвост распределения подчиняется не степенному закону, а, например, экспоненциальному, гауссову или логарифмически нормальному закону, то спектр максимумов выходит на плато при больших масштабах. Стоев с соавторами [52] доказали, что показатель степени α одинаков как для статистически независимых, так и для статистически зависимых (коррелированных) данных при условии, что временные ряды стационарны и их функции распределения одинаковы. Статистическая зависимость, означающая кластеризацию времён экстремальных событий, влияет только на величину C в уравнении (14):

$$Y(j) \simeq \frac{j}{\alpha} + C + \frac{\log_2 \theta}{\alpha}, \quad (15)$$

где величина θ ($0 < \theta \leq 1$) называется экстремальным индексом.

Экстремальный индекс используется в статистических исследованиях для описания группирования (кла-

стеризации) экстремальных событий во времени [57, 58]. Он позволяет представить функцию распределения максимумов n зависимых событий в виде функции распределения максимумов приблизительно $n\theta$ независимых событий, т.е. объединить n зависимых событий в $n\theta$ независимых групп (кластеров). Он также позволяет обобщить теорему Фишера–Типпета–Гнеденко для случая зависимых (кластеризованных) случайных событий:

$$\mathcal{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = G^\theta(x), \quad \mathcal{P}\left(\frac{M_n^* - d_n}{c_n} \leq x\right) = G(x),$$

где M_n и M_n^* — максимумы n зависимых и независимых случайных событий, полученные из того же распределения вероятности, что и временные ряды данных X_i ; $c_n > 0$ и d_n — нормирующие коэффициенты, $G(x)$ — кумулятивная функция распределения экстремальных значений (12). Постоянные $c_n > 0$ и d_n зависят от функции распределения данных. Например, если X_i распределены по степенному закону с показателем степени $\alpha > 0$, то $c_n = n^{1/\alpha}$ и $d_n = 0$. Заметим, что постоянные $c_n > 0$ и d_n одни и те же как для зависимых, так и для независимых событий.

Экстремальный индекс характеризует временную зависимость только между экстремальными событиями, но не всеми событиями. Чем меньше этот показатель, тем сильнее зависимость экстремальных событий, которая проявляется в группировании временных интервалов между событиями. В предельном случае $\theta = 1$ (независимые события) рассмотрим времена t_i появления событий, превышающих некоторый заданный порог $X_i = u$, который можно выбрать, например, как 90-й или 95-й процентиль распределения данных, либо из физических соображений. Тогда распределение времён между двумя последовательными событиями $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$ выражается простой формулой $\mathcal{P}(\tau = k) = (1-p)^{k-1}p$, где $k = 1, 2, 3, \dots$ обозначает временные шаги, а $p = p(u)$ — вероятность появления одного события в единицу времени. Для больших значений порогов p мало, и в этом случае распределение существенно экспоненциально, со значением среднего ожидания $1/p = 1/\mathcal{P}(X_i > u)$.

Уравнения (14) и (15) подсказывают метод оценки как α , так и θ [52, 56]. Обратный показатель степени $1/\alpha$ получается из наклона линии, аппроксимирующей соответствие спектру максимумов данных. Наилучшее линейное соответствие аппроксимирует степенной участок спектра максимумов. На практике необходимо учитывать, что чем больше масштаб j , тем меньше максимумов временных интервалов $D(j, k)$ (индексированных посредством k) и тем больше неопределённость спектра максимумов $Y(j)$. Наилучший способ решения этой проблемы — применение обобщённого метода наименьших квадратов, при котором достигается оптимальное соотношение между средним значением и стандартным отклонением [52].

С учётом уравнений (14) и (15) можно без труда получить оценки экстремального индекса. Перемешивая исходные данные с подстановками (бутстрап) или просто случайным образом без подстановок, получим временной ряд X_i^* , $1 \leq i \leq N$, имеющий ту же функцию распределения, что исходное множество данных, но независимость (т.е. корреляции между данными) теперь разрушена. Повторением этой операции достигается формирование большого множества псевдовременных рядов, в

которых зависимость исходных данных разрушена и события можно рассматривать как почти независимые во времени. Для каждого такого временного ряда рассчитаем спектр максимумов, $Y^*(j)$, $1 \leq j \leq \lfloor \log_2 N \rfloor$, удовлетворяющий уравнению (14). Спектр максимумов исходных данных $Y(j)$ удовлетворяет уравнению (15) с той же константой C ; таким образом, разница между этими двумя спектрами даёт оценку θ :

$$\hat{\theta}(j) = 2^{-\hat{\alpha}(Y^*(j) - Y(j))}, \quad (16)$$

где $\hat{\alpha}$ обозначает оценку экспоненты хвоста функции распределения α , полученную из наклона спектра максимумов. Поскольку имеется большая выборка псевдо-независимых временных рядов, при каждом масштабе j достигается большое количество реализаций $\hat{\theta}(j)$. Медиану, или среднее этих оценок, можно рассматривать как точечную оценку θ при масштабе j . Вся совокупная выборка оценок может быть использована для количественного определения погрешности оценки для каждого временного ряда.

3.2. Кластеризация экстремальных событий

Когда временные интервалы между экстремальными событиями не подчиняются обычному экспоненциальному закону, это означает, что экстремальные события коррелированы, т.е. приходят не в одиночку, а в группах. Стандартные методы анализа временных рядов, такие как автокорреляционная функция рассматриваемого процесса, не могут охарактеризовать кластеризацию экстремальных событий. Чтобы решить эту проблему, были выдвинуты две идеи: кластерный процесс Пуассона [58] и асимптотическая ковариационная функция под названием "экстремограмма" [59].

Средний временной интервал между событиями в некотором кластере зависит от порогового значения, определяющего экстремальные события. Авторы работы [58] показали, что если асимптотически увеличивать пороговые значения всё больше и больше, то временные интервалы τ_i между экстремальными событиями будут сходиться (при временном перемасштабировании) в кластерный пуассоновский процесс, аналогичный обычному пуассоновскому процессу, но со случайным числом событий, группирующихся в кластеры. Кластерный пуассоновский процесс можно отличить от обычного пуассоновского процесса по экстремальному индексу $0 < \theta < 1$, обратное значение которого определяет средний размер кластеров [57].

Для того чтобы получить более детальную информацию о кластерах, можно применить статистическую методику, называемую декластеризацией. В этой методике используется "пороговое время декластеризации" τ_c , которое определяется по экстремальному индексу [60]. Если временной интервал между двумя экстремальными событиями меньше τ_c , то эти события можно объединить в кластер, т.е. τ_c отделяет временные интервалы между случайными событиями внутри кластеров от временных интервалов для событий между кластерами.

Чтобы оценить пороговое значение времени декластеризации, рассмотрим упорядоченную совокупность всех интервалов времени между последовательными экстремальными событиями,

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_{m-1}, \quad (17)$$

и примем τ_c как $\theta \times m$ -е по величине среди них [60]. Правильность этого выбора времени кластеризации подтверждается тем фактом, что экстремальный индекс как обратное среднему размеру кластеров позволяет нам оценить число кластеров. Действительно, если наш временной ряд состоит из m экстремальных событий (т.е. m случайных событий, превышающих пороговое значение u), то в среднем они группируются в $\theta \times m$ кластеров. Теперь рассмотрим временные интервалы τ_i между экстремальными событиями, наступающими в реальной временной последовательности $i = 1, 2, 3, \dots$. Если у m_1 последовательных временных интервалов $\tau_i < \tau_c$, то соответствующие экстремальные события составят кластер размера m_1 . Если время τ_k превышает τ_c , то экстремальные события, наступающие с шагом по времени k и $k + 1$, принадлежат разным кластерам; в частности, это могут быть кластеры, размер которых единица, т.е. единичные экстремальные события.

Пороговое значение времени декластеризации можно оценить и по-другому. Например, можно использовать наблюдаемое распределение временных интервалов между экстремальными событиями в сравнении с экспоненциальным распределением, ожидаемым для независимых событий.

Метод экстремограммы, используемый для кластеризации экстремальных событий, обобщает понятие коэффициента

$$A(\tau) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X(t) > x | X(t + \tau) > x), \quad (18)$$

характеризующего корреляцию между парой экстремальных событий, разделённых временным интервалом τ .

Совокупность значений A содержит информацию о серийной зависимости между экстремальными событиями во временном ряду X . Экстремограммой называется следующий предел [59]:

$$\rho_{AB}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(a_n^{-1}X(t) \in A, a_n^{-1}X(t + \tau) \in B)}{P(a_n^{-1}X(t) > A)}, \quad (19)$$

где A и B — выборки данных, a_n^{-1} — последовательность возрастающих чисел, такая что $P(|X| > a_n) \propto n^{-1}$. Если выбрать $A = B = (1, \infty)$, то экстремограмма $\rho_{AB}(\tau)$ становится просто вероятностью λ_k наблюдения другого экстремального события, наступающего через время k после экстремального события, которое уже наблюдалось, т.е.

$$\lambda_k = P(X_k > u | X_0 > u), \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

для порогового значения u . Если бы X_k были независимы, то эта условная вероятность была бы равна безусловной вероятности $P(X_k > u)$. Поэтому X_k статистически зависимы, если λ_k существенно отлична от $P(X_k > u)$. Параметр λ_k можно оценить с помощью следующей эмпирической статистической характеристики:

$$\hat{\lambda}_k = \frac{[\sum_{j=1}^{n-k} I(X_{j+k} > u, X_j > u)] / (n - k)}{[\sum_{j=1}^n I(X_j > u)] / n}, \quad (21)$$

где $I(A)$ равно единице, если событие A наступает, и равно нулю, если оно не наступает.

В следующих двух разделах 3.3 и 3.4 мы проиллюстрируем применение описанных статистических методов к реальным данным.

3.3. Экстремальные события, связанные с выпадением осадков

На этом примере мы рассмотрим применение метода спектра максимумов к экстремальным событиям, связанным с выпадением осадков над Тихим океаном. Выпадение дождей над океанами определяет стратификацию поверхностного слоя, океанского пресноводного баланса, а также перемешивание океана. Их изменчивость часто определяется явлением Эль-Ниньо. Здесь мы рассмотрим выпадение дождевых осадков над областью Эль-Ниньо 3,4, расположенной посреди Тихого океана (5° ю.ш. – 5° с.ш.; 170° – 120° з.д.), используя данные, полученные с помощью микроволнового сканирующего радиометра (Advanced Microwave Scanning Radiometer — Earth Observing System, AMSR-E), установленного на спутнике "Aqua". Эти данные доступны в Интернете: <http://nsidc.org/data/amse/>.

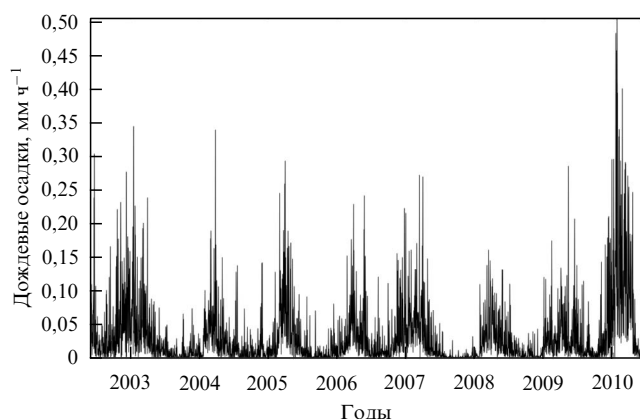


Рис. 5. Данные о выпадении дождевых осадков над областью Эль-Ниньо 3,4 в Тихом океане.

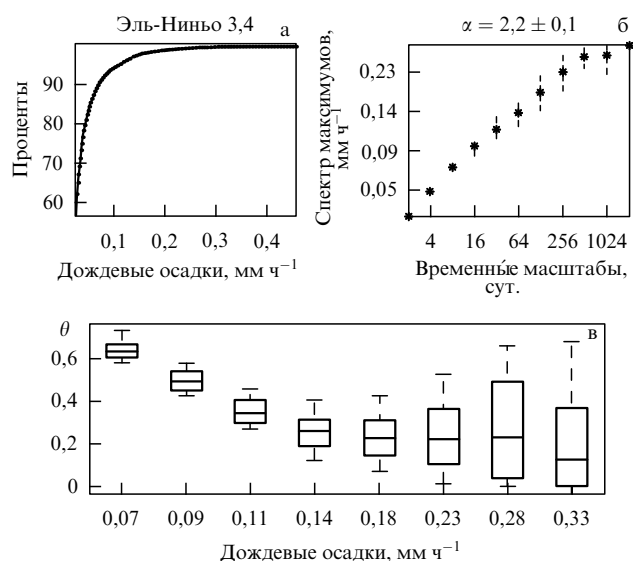


Рис. 6. (а) Кумулятивная функция распределения данных о выпадении дождевых осадков, показанных на рис. 5. (б) Спектр максимумов дождевых осадков в области Эль-Ниньо 3,4. (в) Экстремальный индекс как функция процентилей дождевых осадков.

Прибор AMSR-E производил измерения параметров суши, океана и атмосферы в целях исследования глобального водооборота и глобальных энергетических циклов, включая скорость выпадения осадков, температуру морской поверхности, скопления морского льда, водный эквивалент снежного покрова, влажность почвы, влагосодержание земной поверхности, скорость ветра, водность облаков и содержание водяного пара в облаках, а также в безоблачной атмосфере.

Использованные данные о выпадении дождевых осадков регистрировались ежесуточно в период с июня 2002 г. по июнь 2010 г. (рис. 5). Заметно слабое влияние сезонного цикла (рис. 6). В целях выявления экстремальных событий это влияние было отфильтровано, хотя на спектре максимумов оно существенно не отражается. Кумулятивная функция распределения временного ряда данных и соответствующий спектр максимумов показаны на рис. 6. Спектральный индекс $\alpha = 2,2 \pm 0,1$. Экстремальный индекс довольно мал ($< 0,2$), что указывает на существенную кластеризацию экстремальных событий в рассматриваемой области (в среднем более пяти событий в кластере).

3.4. Экстремальные события, связанные с космическим климатом

Ещё один пример — применение метода спектра максимумов в исследовании экстремальных событий, связанных с космическим климатом [53]. Термин "космическая погода", популярный в настоящее время, относится к сильным возмущениям в верхней атмосфере Земли и в околоземном космическом пространстве [61]. По аналогии с метеорологической терминологией, внешние возмущения в атмосфере Земли и окружающей её космической среде, характеризующиеся большими временными масштабами, например, масштабом 11-летнего цикла солнечной активности, относят к области космического климата [62]. Основные космические возмущения вызываются солнечной плазмой, космическими частицами и галактическими космическими лучами [63]. Оценки космического климата требуются для планирования космических полётов космонавтов и приборов на космических аппаратах. Проявления упомянутых возмущений можно видеть в красивых природных экстремальных событиях — полярных сияниях. Они могут наблюдаться в виде движущихся белых и зелёных полос или рассеянного красного света, это зависит от положения наблюдателя на Земле. Полярные сияния возникают в кольцевой зоне вокруг геомагнитного полюса, называемой авроральным овалом [64]. Ближе к экватору, в пределах 20 градусов широты, небо во время полярного сияния приобретает красный цвет; на протяжении человеческой жизни это можно увидеть только однажды. Если наблюдатель живёт на Крайнем Севере, то он в большинстве случаев увидит сияние зелёного цвета, которое можно наблюдать во время самых тёмных ночей. Находясь в области средних широт, можно видеть это явление раз или два в год; движущийся свет будет либо белёсым, либо зеленоватым, либо ярко-красным. Документальные свидетельства о полярных сияниях в Европе и на Востоке охватывают период вплоть до VII в. до н.э. Эти наблюдения собраны в каталог [65], который используется в научных исследованиях солнечной активности и её влияния на климат Земли.

Во время интенсивных полярных сияний ионосферные возмущения могут быть опасны, вызывая разрушительные электрические токи в электроэнергетических системах, как, например, это случилось во время сильнейшей геомагнитной бури в марте 1989 г., когда выход из строя Канадской Северо-Восточной энергетической системы "Hydro-Quebec" оставил без электроэнергии миллионы людей на период до 9 ч. Такие токи также ускоряют коррозию нефтяных и газовых трубопроводов [66]. Возмущения плотности ионосферы, вызванные космическими процессами, воздействуют на высокочастотные линии радиосвязи на околополярных авиационных маршрутах, а также искажают сигналы спутниковой навигационной системы "Global Positioning System" (GPS) [61]. Выбросы высокоэнергетических частиц и интенсификации радиационного пояса Земли во время интенсивных событий космической погоды могут вызвать аномалии в работе электронных устройств в космических аппаратах и повреждать эти устройства [67].

Основные экстремальные события, связанные с солнечной плазмой, вызываются возмущениями, происходящими за счёт внезапных выбросов большого количества ($> 10^{16}$ г) плазмы из солнечной короны в солнечный ветер. Эти экстремальные события, называемые коронарными выбросами массы (Coronal Mass Ejections — CME), обязаны своим происхождением процессу динамо, действующему в верхней оболочке Солнца и порождающему магнитные поля, которые пронизывают солнечную корону.

Частично такое поле извергается в результате неустойчивости в процессе потери равновесности. CME сопровождается множеством дополнительных процессов, включая магнитное перезамыкание, формирование ударных волн и ускорение частиц [68, 69]. Коронарные выбросы массы распространяются от Солнца через межпланетное пространство, частично по направлению к Земле. Они сильно различаются по скорости — от сравнительно медленных (< 200 км с $^{-1}$) до характеризующихся очень высокими скоростями, более 2500 км с $^{-1}$ [70]. Высокоскоростные (быстрые) коронарные выбросы наиболее интересны с точки зрения изучения экстремальных событий, связанных с космическим климатом. Быстрые коронарные выбросы массы и ударные волны, которые они порождают в солнечном ветре, являются непосредственной причиной экстремальных событий, связанных с высокоэнергетическими частицами (Solar Energetic Particles — SEP) [71]. Взаимодействие сильного магнитного поля солнечного ветра, направленного на юг и связанного с быстрыми CME, с магнитным полем Земли, вызывает мощные геомагнитные бури [72, 73]. Быстрые CME особенно геоэффективны, так как это взаимодействие управляется индуцированным магнитным полем, возникшим за счёт скорости и магнитного поля коронарного выброса массы, распространяющегося в солнечном ветре.

Коронарные выбросы массы связаны с активными областями, возникающими на поверхности Солнца и обычно ассоциированными с солнечными пятнами. Частота появления активных областей регулируется солнечным циклом. Наблюдения показали, что активные области имеют тенденцию группироваться в кластеры, т.е. новые активные области преимущественно возникают вблизи старых [74]. Время жизни кластеров может достигать шести месяцев; существуют признаки того, что

самые быстрые коронарные выбросы массы происходят в основном из них [75].

Спроектированные на небесную плоскость скорости коронарных выбросов массы, распространяющихся через солнечную корону, измеряются коронографом, установленным на космическом аппарате; в частности, коронарные выбросы были измерены коронографом "Large Angle and Spectrometric Coronagraph", установленным на борту Солнечной и гелиосферной обсерватории (the Solar and Heliospheric Observatory) на космическом аппарате "COXO" (LASCO SOHO). Данные этих измерений внесены в каталог, разработанный в процессе совместной работы Научно-исследовательской лаборатории BMC (Naval Research Laboratory), Центра анализа солнечных данных в Центре космических полётов имени Годдарда (Goddard Space Flight Center) и Центра физики Солнца и космической погоды в Американском католическом университете (Center for Solar Physics and Space Weather at the Catholic University of America). Самые ранние данные из числа внесённых в каталог относятся к январю 1996 г. Этот источник данных мы с коллегами использовали в работе [53]. Чтобы избежать влияния очевидной нестационарности, возникающей вследствие зависимости данных от солнечного цикла, выборка данных была ограничена частью солнечного цикла 23 с января 1999 г. до декабря 2006 г., характеризующейся высокой солнечной активностью, в результате было рассмотрено 9408 CME. Приведённые в каталоге значения скоростей CME, использованные в данной работе, были получены путём нахождения полинома 2-го порядка для представления результатов измерений высоты CME, произведённых во время распространения выбросов через солнечную корону, как функции времени. Входные данные для решения задачи методом спектра максимумов включают все коронарные выбросы, без предварительного отбора выбросов с высокими скоростями. В частности, пороговое значение скорости, которое определяет экстремальный хвост функции распределения, было не задано предварительно, а оценено самим методом.

Полученный в итоге спектр максимумов скоростей CME показан на рис. 7. Наилучшая аппроксимация наклона свидетельствует о том, что кумулятивная функция распределения скоростей CME относится к типу распределений Фреше и её хвост подчиняется степенному закону с показателем степени $\alpha = 3,4$. Нижняя граница линейной части спектра максимумов определяет начало хвоста степенной функции, т.е. соответствующее пороговое значение скорости, и начало интервала самоподобия. Это даёт возможность обоснованного определения "быстрых" CME — понятия, которое прежде использовалось исследователями солнечной активности весьма произвольно. Принимая во внимание аналогию со стандартным самоподобным каскадным процессом в турбулентности, который полностью определяется спектральным индексом колмогоровского типа, можно заключить, что физический процесс, приводящий к образованию быстрых CME, один и тот же в диапазоне скоростей от 700 км с $^{-1}$ до самых высоких значений скорости в выборке данных.

На рисунке 8 показан экстремальный индекс, оценка которого произведена с помощью метода спектра максимумов. На нём также представлены "доверительные интервалы", аналогичные тем, которые изображены на

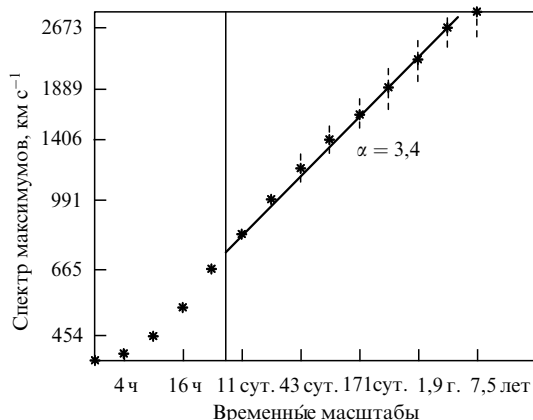


Рис. 7. Спектр максимумов скоростей СМЕ как функция временных масштабов. Величины погрешностей, оценённые с помощью обобщённого метода регрессий [52], соответствуют 95%-ным доверительным интервалам. Единицы $\log_2$ для $Y(j)$ конвертированы в км с^{-1} ; масштабы j переведены в единицы времени по формуле 2^j . Скорость в этом масштабе можно интерпретировать как начало хвоста функции распределения, определяющего быстрые СМЕ справа от вертикальной линии.

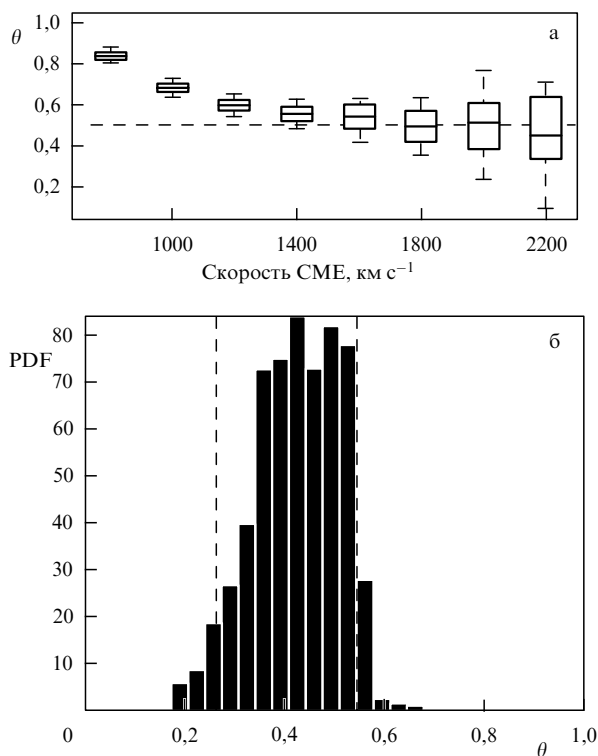


Рис. 8. (а) Экстремальный индекс, полученный методом спектра максимумов. Коробчатые диаграммы для каждого временного масштаба получены по 100 независимым реализациям рандомизированных $\hat{\theta}$, как объяснено в тексте. Центральная линия в каждом прямоугольнике — медиана, сторона прямоугольника — 10-й и 90-й перцентиль, усы распространяются до наиболее экстремальных значений данных. (б) Гистограмма величин $\hat{\theta}$ для пороговых значений скоростей от 1000 до 2300 км с^{-1} .

гистограмме в нижней части рис. 6; эти доверительные интервалы построены для пороговых значений 1000–2300 км с^{-1} . Полученные в результате значения эмпирического 95%-ного доверительного интервала для θ лежат в промежутке от 0,33 до 0,60, со средним значением

Таблица 2. Пример прогнозирующей статистики для кластеров СМЕ со скоростью, превышающей 1000 км с^{-1}

Размер кластера	Число кластеров	Число СМЕ в кластере	Вероятность	Продолжительность, ч
1	177	177	0,61 (0,03)	—
2	53	106	0,18 (0,02)	20,1 (1,7)
3	18	54	0,06 (0,01)	39,7 (3,8)
4	20	80	0,07 (0,01)	56,8 (4,5)
5	7	35	0,02 (0,01)	70 (7,2)
> 5	17	169	0,06 (0,01)	107,7 (10,6)

$\theta = 0,49 \approx 0,5$. Значение θ , взятое в промежутке 0,3–0,6 со средним значением 0,5, можно считать оценкой экстремального индекса. Величина, обратная экстремальному индексу, даёт оценку среднего размера кластера 2–3, т.е. за появлением быстрого СМЕ близко следует в среднем один или два других быстрых СМЕ.

Применение методики декластеризации позволяет нам находить число и содержание кластеров быстрых СМЕ. В качестве примера рассмотрим пороговое значение $U = 1000 \text{ км с}^{-1}$ и $\theta = 0,5$. Для этого порогового значения имеем $n = 586$ быстрых СМЕ с временем декластеризации $\tau_c = 42 \text{ ч}$. Максимальное число быстрых СМЕ в кластере, найденное по использованным в настоящей работе данным каталога LASCO, равно 9. Среднее значение временных интервалов между СМЕ внутри кластера составляет 18 ч со среднеквадратичной погрешностью 2 ч. В таблице 2 даны более детальные сведения о вероятности и соответствующей длительности кластеров как функции их размера (числа СМЕ в кластере). В первом столбце указано число СМЕ в кластере (размер кластера). Во втором и третьем столбцах дано число кластеров данного размера и общее число СМЕ в этих кластерах. В четвёртом столбце приведены оценки и среднеквадратичные погрешности (в скобках) вероятности того, что будет зарегистрирован кластер соответствующего размера. В последнем столбце даны значения ожидаемой средней продолжительности кластеров (в скобках — среднеквадратичная погрешность). Мы видим, что около 30 % быстрых СМЕ единичны. Остальные быстрые СМЕ находятся в кластерах различных размеров. Статистически значимая доля кластеров (около 35 %) с пятью или шестью членами имеет среднюю длительность около 110 ч. Аналогичные оценки могут быть произведены и для других пороговых значений скоростей.

4. Выводы и воспоминания

Основной вывод данного обзора состоит в том, что климатические изменения, вызванные человеческой деятельностью, не очень сильно влияют на параметры среднего состояния климата Земли, например, на глобальную температуру, но значительно увеличивают число экстремальных событий, таких как наводнения и засухи. Этот вывод может помочь нам лучше понять причины изменения климата на Земле, а пример применения современных статистических методов к решению проблем космического климата может представлять

интерес для учёных и инженеров, работающих в области космических исследований.

Я также надеюсь, что этот обзор привлечёт внимание и к другой стороне дела. Как говорил Марк Твен: "В раю найдёшь климат, а в аду — свою компанию" [78]. В прежние времена учёный-физик особенно не нуждался в статистике и подробной информации о шумах. Он жил в царстве закона больших чисел; умения рассчитывать средние значения и среднеквадратичные отклонения было достаточно для того, чтобы избежать ошибок эксперимента. Сегодня учёный обнаруживает, что редкие случайные события могут играть ключевую роль в физических процессах, и начинает понимать важность закона малых чисел, давно сформулированного выдающимися математиками и статистиками.

В данном обзоре, написанном учеником физической школы Я.Б. Зельдовича, предпринята попытка отразить эту поразительную революцию, совершающуюся в наших умах, на примере рассмотрения роли случая в хаотических системах, таких как климат Земли и космический климат, в процессе реакции на внешние воздействия. В духе школы Зельдовича в обзоре используются общие принципы и простые модели. Будучи студентом, потом аспирантом, а затем и коллегой Якова Борисовича в течение 20 лет, я заметил, что он часто основывал свои простые модельные представления на глубоком знании различных разделов математики, что было не всегда очевидно. Однажды я был свидетелем того, как он удивил одного математика в Институте прикладной математики РАН (ныне Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша), где мы работали, точным знанием некоторых топологических инвариантов. В другой раз мне довелось увидеть, как он с гордой улыбкой вышел из своего кабинета после того, как дал знаменитому физику-экспериментатору урок правильного применения статистики в одном нетривиальном случае. И у меня нет сомнений, что другие ученики Якова Борисовича могли бы привести ещё немало примеров его глубочайшей не только физической, но и математической эрудиции.

Благодарности

Я благодарен рецензенту за полезные критические замечания, М.А. Шеляховской за прекрасный, вдумчивый перевод моего текста, М.С. Аксентьевой за некоторые полезные ссылки по теме обзора и редакционную помощь. Я хочу также поблагодарить Стилиана Стоева, познакомившего меня со статистикой экстремальных случаев, и Джоан Фейнман, указавшую мне наилучшие способы обработки данных. Настоящее исследование было проведено в Лаборатории реактивных устройств Калифорнийского технологического института (Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology) в рамках договора с Национальным управлением по авиации и исследованию космического пространства (National Aeronautics and Space Administration).

Список литературы

1. Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *The Almighty Chance* (Lecture Notes in Physics, Vol. 20) (Singapore: World Scientific, 1990)
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика сплошных сред* (М.: ГИТТЛ, 1953) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (London: Pergamon Press, 1959)]
3. Ruelle D, Takens F *Commun. Math. Phys.* **20** 167 (1971)
4. Зельдович Я Б, Молчанов С А, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *ЖЭТФ* **89** 2061 (1985) [Zel'dovich Ya B, Molchanov S A, Ruzmaikin A A, Sokolov D D *Sov. Phys. JETP* **62** 1188 (1985)]
5. Zeldovich Ya B, Molchanov S A, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Sov. Sci. Rev. C Math. Phys. Rev.* **7** 1 (1988)
6. IPCC — Intergovernmental Panel on Climate Change, <http://www.ipcc.ch/> (2013), publications
7. Бялко А В *УФН* **182** 111 (2012) [Byalko A V *Phys. Usp.* **55** 103 (2012)]
8. Демченко П Ф, Кислов А В *Стохастическая динамика природных объектов: броуновское движение и геофизические приложения* (М.: ГЕОС, 2010)
9. Голицын Г С *Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты* (М.: КРАСАНД, 2013)
10. Lovejoy S "What is climate?" *EOS Trans. Am. Geophys. Union* **94** (1) 1 (2013)
11. Nyquist H *Phys. Rev.* **32** 110 (1928)
12. Callen H B, Welton T A *Phys. Rev.* **83** 34 (1951)
13. Kubo R *J. Phys. Soc. Jpn.* **12** 570 (1957)
14. Kraichnan R H *Phys. Rev.* **113** 1181 (1959)
15. Ландау Л Д, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Электродинамика сплошных сред* 2-е изд. (М.: Наука, 1982) [Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Electrodynamics of Continuous Media* 2nd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
16. Leith C E *J. Atmos. Sci.* **32** 2022 (1975)
17. Gritsun A, Branstator G J *J. Atmos. Sci.* **64** 2558 (2007)
18. Dymnikov V P, Gritsun A S *Nonlin. Processes Geophys.* **8** 201 (2001)
19. Дымников В П, Грицун А С *Изв. РАН Физ. атмосферы и океана* **41** 294 (2005) [Dymnikov V P, Gritsun A S *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **41** 266 (2005)]
20. Gritsun A S *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **16** 115 (2001)
21. Питаевский Л П *УФН* **181** 647 (2011) [Pitaevskii L P *Phys. Usp.* **54** 625 (2011)]
22. Бочков Г Н, Кузовлев Ю Е *ЖЭТФ* **76** 1071 (1979) [Bochkov G N, Kuzovlev Yu E *Sov. Phys. JETP* **49** 543 (1979)]
23. Jarzynski C *Phys. Rev. Lett.* **78** 2690 (1997)
24. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
25. Khatiwala S, Shaw B E, Cane M A *Geophys. Res. Lett.* **28** 2633 (2001)
26. Kramers H A *Physica* **7** 284 (1940)
27. Walker G *Quart. J. R. Meteorol. Soc.* **54** 79 (1928)
28. Obukhov A M *УМН* **2** (2) 196 (1947)
29. Quadrelli R, Wallace J M *J. Climate* **17** 3728 (2004)
30. Hurrell J W *Science* **269** 676 (1995)
31. Thompson D W J, Wallace J M *Geophys. Res. Lett.* **25** 1297 (1998)
32. Thompson D W J, Wallace J M *Science* **293** 85 (2001)
33. Honda M, Inoue J, Yamane S *Geophys. Res. Lett.* **36** L08707 (2009)
34. Petoukhov V, Semenov V A *J. Geophys. Res. Atmos.* **115** (D21) (2010), DOI: 10.1029/2009JD013568
35. Wallace J M, Zhang Y, Renwick J A *Science* **270** 780 (1995)
36. Mantua N J et al. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **78** 1069 (1997)
37. Philander S G *El Niño, La Niña, and the Southern Oscillation* (San Diego: Academic Press, 1990)
38. Baldwin M P et al. *Rev. Geophys.* **39** 179 (2001)
39. Thompson D W J, Baldwin M P, Wallace J M *J. Climate* **15** 1421 (2002)
40. Rossby C G "The scientific basis of modern meteorology", in *Climate and Man. Yearbook of Agriculture* (Washington: United States Department of Agriculture, 1941) p. 599
41. Charney J G, Drazin P G *J. Geophys. Res.* **66** 83 (1961)
42. Limpasuvan V, Hartmann D L *J. Climate* **13** 4414 (2000)
43. Ruzmaikin A, Lawrence J, Cadavid C *J. Climate* **16** 1593 (2003)
44. Ruzmaikin A, Feynman J, Yung Y L *J. Geophys. Res. Atmos.* **111** (D21) (2006), DOI: 10.1029/2006JD007462
45. Ruzmaikin A, Cadavid A C, Lawrence J K *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* **68** 1311 (2006)
46. Corti S, Molteni F, Palmer T N *Nature* **398** 799 (1999)
47. Palmer T N *J. Climate* **12** 575 (1999)
48. Ruzmaikin A et al. *Geophys. Res. Lett.* **31** L12201 (2004)
49. Hall A et al. *J. Climate* **18** 1315 (2005)
50. Fisher R A, Tippet L H C *Proc. Camb. Philos. Soc.* **24** 180 (1928)

51. Gnedenko B *Ann. Math.* **44** 423 (1943)
52. Stoev S A, Michailidis G, Taqqu M S *IEEE Trans. Inform. Theory* **57** 1615 (2011)
53. Ruzmaikin A, Feynman J, Stoev S A *J. Geophys. Res. Space Phys.* **116** (A4) (2011), DOI: 10.1029/2010JA016247
54. Голицын Г С *УФН* **178** 753 (2008) [Golitsyn G S *Phys. Usp.* **51** 723 (2008)]
55. Голицын Г С *Докл. РАН* **398** 177 (2004) [Golitsyn G S *Dokl. Phys.* **49** 501 (2004)]
56. Hamidieh K, Stoev S, Michailidis G *J. Comput. Graph. Stat.* **18** 731 (2009)
57. Leadbetter M R, Lindgren G, Rootzén H *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes* (New York: Springer-Verlag, 1983)
58. Hsing T, Hüsler J, Leadbetter M R *Probab. Theory Related Fields* **78** 97 (1988)
59. Davis R A, Mikosch T *Bernoulli* **15** 977 (2009)
60. Ferro C A T, Segers J J. R. *Statist. Soc. B* **65** 545 (2003)
61. *Severe Space Weather Events—Understanding Societal and Economic Impacts* (Workshop Report) (Washington, D.C.: The National Academies Press, 2008); <http://www.nap.edu/catalog/12507.html>
62. Mursula K, Usoskin I G, Maris G *Adv. Space Res.* **40** 885 (2007)
63. Дорман Л И *УФН* **180** 519 (2010) [Dorman L I *Phys. Usp.* **53** 496 (2010)]
64. Feldstein Y I *J. Geophys. Res.* **78** 1210 (1973)
65. Siscoe G L *Rev. Geophys. Space Phys.* **18** 647 (1980)
66. Boteler D, Marti L "Space weather situational awareness for power systems", in *39th COSPAR Scientific Assembly, 14–22 July 2012, Mysore, India*, Abstract E2.1-4-12, p. 225
67. Feynman J, Gabriel S B *J. Geophys. Res. Space Phys.* **105** 10543 (2000)
68. Forbes T G et al. *Space Sci. Rev.* **123** 251 (2006)
69. Amari T et al. *Astrophys. J.* **742** L27 (2011)
70. Kahler S *Rev. Geophys.* **25** 663 (1987)
71. Reames D V *Space Sci. Rev.* **90** 413 (1999)
72. Hirshberg J, Colburn D S *Planet. Space Sci.* **17** 1183 (1969)
73. Gopalswamy N *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* **70** 2078 (2008)
74. Gaizauskas V et al. *Astrophys. J.* **265** 1056 (1983)
75. Ruzmaikin A, Feynman J, in *Multiscale Phenomena in Space Plasmas. Proc. of the 1998 Cambridge Workshop* (Physics of Space Plasmas, Eds T Chang, J Jasperse) (Cambridge, Mass.: MIT Center for Theor. Geo/Plasma Physics, 1998) p. 295
76. Ruzmaikin A, Feynman J *J. Geophys. Res. Atmos.* **107** (D14) ACL7-1 (2002)
77. Ruzmaikin A "Effects of solar variability on the Earth's climate patterns" *Adv. Space Res.* **40** 1146 (2007)
78. Mark Twain Quotations, Newspaper Collections, and Related Resources (Heaven), <http://www.twainquotes.com/Heaven.html>

Climate as a Game of Chance

A. Ruzmaikin

Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA

E-mail: alexander.ruzmaikin@jpl.nasa.gov

The paper uses general concepts and simple models to examine the role of randomness in chaotic systems, like the Earth's climate, response to external forcing. The response of a simple homogeneous system is determined by its correlation function in accord with the Fluctuation Dissipation Theorem. A structured (patterned) system responds in a more complicated way. Whereas its mean state (for example, the Earth's global temperature) changes only slightly, extreme events (such as floods and droughts) increase more dramatically in number. The statistics of extremes reveals remarkable properties, in particular, clustering (troubles never come alone, the saying goes) and are here illustrated by precipitation and space climate processes.

PACS numbers: **02.50. – r**, **05.45. – a**, 92.05.Df

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403f.0297

Bibliography — 78 references

Received 21 October 2013, revised 9 December 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 297–311 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (3) (2014)



Российская Академия Наук

Приложение 1 к постановлению Президиума РАН (от 11 февраля 2014 г. № 20)

Состав организационного комитета по подготовке и проведению юбилейных мероприятий, посвящённых 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича

Фортов В.Е. — академик, председатель
Зелёный Л.М. — академик, заместитель председателя
Сюняев Р.А. — академик, заместитель председателя
Алдошин С.М. — академик
Андреев А.Ф. — академик
Балега Ю.Ю. — член-корреспондент РАН
Варшалович Д.А. — академик
Герштейн С.С. — академик
Григорьев А.И. — академик
Забродский А.Г. — член-корреспондент РАН
Захаров В.Е. — академик
Илькаев Р.И. — академик
Лаверов Н.П. — академик
Литвак А.Г. — академик

Нигматулин Р.И. — академик
Рубаков В.А. — академик
Садовничий В.А. — академик
Старобинский А.А. — академик
Фаддеев Л.Д. — академик
Цивадзе А.Ю. — академик
Черепашук А.М. — академик
Четверушкин Б.Н. — академик
Чуразов Е.М. — член-корреспондент РАН
Щербаков И.А. — академик

Главный учёный секретарь
Президиума Российской академии наук
академик *И.А. Соколов*

Приложение 2 к постановлению Президиума РАН (от 11 февраля 2014 г. № 20)

ПЕРЕЧЕНЬ юбилейных мероприятий, посвящённых 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича

1. Подготовка и проведение Международной конференции "Космология и релятивистская астрофизика", посвящённой 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича, в г. Москве 16–20 июня 2014 г.

2. Подготовка и проведение Третьей международной конференции по горению и детонации "Мемориал Я.Б. Зельдовича", посвящённой 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича в г. Москве в октябре–ноябре 2014 г.

3. Подготовка и проведение 29-й Международной конференции "Уравнения состояния вещества", посвящённой 100-летию со дня рождения академика Я.Б. Зельдовича в п. Эльбрус Кабардино-Балкарской Республики в марте 2014 г.

4. Подготовка и проведение сессии Отделения физических наук РАН 26 марта 2014 г.

5. Переиздание избранных трудов Якова Борисовича Зельдовича (два тома) и книги воспоминаний о Якове Борисовиче Зельдовиче в ГУП Академиздатцентр "Наука" РАН.

6. Организация публикации юбилейных статей в журналах *Вестник Российской академии наук* и *Успехи физических наук* РАН.

7. Организация и проведение мемориальной фото-выставки в здании Президиума РАН (г. Москва, Ленинский просп., 32а), посвящённой жизни и деятельности академика Я.Б. Зельдовича.

8. Организация освещения юбилея академика Я.Б. Зельдовича и событий, связанных с ним, в средствах массовой информации, регулярной печати в России и за рубежом.

9. Обращение к мэру Москвы о присвоении имени академика Я.Б. Зельдовича одной из улиц г. Москвы (предпочтительно в районе Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова).

Главный учёный секретарь
Президиума Российской академии наук
академик *И.А. Соколов*

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Я.Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту

Д.Д. Соколов, Р.А. Степанов, П.Г. Фрик

Вопрос о возникновении и последующей эволюции магнитных полей небесных тел, составляющий предмет теории динамо, интересовал Я.Б. Зельдовича многие годы. За прошедшее с тех пор время изучение процесса динамо, бывшее тогда частью астрофизики и геофизики, превратилось в полноценную область физики: стало возможным изучение процесса динамо в ходе лабораторного физического эксперимента. В обзоре рассказывается как о самих лабораторных динамо-экспериментах (в частности, об экспериментах, проведённых в нашей стране), так и о том, к каким изменениям в теории и в её астрофизических приложениях привела возможность экспериментальной и вычислительной верификации теоретических идей.

PACS numbers: 07.55.Db, 41.20. – q, 91.25. – r, 96.12.Hg, 96.60.Hv

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403g.0313

Содержание

1. Введение. Что такое динамо? (313).
 2. Теория вопроса (317).
 - 2.1. Структура электродвижущей силы $\mathcal{E}^B$.
 - 2.2. Структура электродвижущей силы $\mathcal{E}^{(0)}$.
 - 2.3. Подходы к вычислению транспортных коэффициентов.
 3. Почему так труден лабораторный динамо-эксперимент (320).
 4. Динамо-эксперименты (321).
 5. Экспериментальная верификация отдельных элементов динамо (326).
 6. Лабораторные эксперименты в контексте астрофизических динамо (327).
 7. Успехи вычислительных экспериментов (330).
 - 7.1. Метод тестового поля.
 - 7.2. Комбинированные модели.
 8. Заключение (333).
- Список литературы (333).

1. Введение. Что такое динамо?

Изучение магнетизма обычно ассоциируется с исследованием упорядочения спинов, квантовой физикой твёр-

дого тела и другими разделами физики, составившими славные страницы научной истории XX в. Именно этот круг задач включается в нашей стране в программу конференций по магнетизму, в состав научных классификаторов, в тематику диссертационных советов и фондов. Однако наряду с этими, бесспорно интересными, разделами к числу магнитных явлений трудно не отнести существование магнитного поля у Земли и, как показывают данные космических станций, у ряда других планет. Широко известен 11-летний цикл магнитной активности Солнца (см., например, [1]), а сейчас открыты циклы магнитной активности многих других звёзд (см., например, [2]). Ещё Ферми ([3], см. также [4]), обдумывая данные о распределении космических лучей, пришёл к выводу о том, что наша Галактика — Млечный Путь — представляет собой гигантский магнит, а позднее такие магнитные поля были обнаружены методами радиоастрономии у ряда спиральных галактик [5]. Во всех этих случаях пространственный масштаб магнитных полей оказывается сопоставимым с размером соответствующих небесных тел, а энергия — достаточной для того, чтобы эти магнитные поля могли играть заметную роль по крайней мере в некоторых физических процессах, протекающих в соответствующих небесных телах. Изучение происхождения и эволюции космических магнитных полей представляет как очевидный познавательный, так и практический интерес.

Квазистационарные и крупномасштабные магнитные поля в очень разреженной межзвёздной среде галактик или в горячей плазме звёзд вряд ли разумно связывать с какими-нибудь квантовыми или релятивистскими процессами. Чуть менее очевидна принадлежность к области классической физики проблем магнетизма Земли, поэтому на периферии научной мысли время от времени возникает идея об огромном ферромагнитном теле внутри Земли, порождающем геомагнитное поле. Например, её обсуждает Дж. Свифт в третьей, насыщенной

Д.Д. Соколов. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 939-10-33, (495) 939-23-46. E-mail: sokoloff.dd@gmail.com
Р.А. Степанов. Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва 1, 614013 Пермь, Российская Федерация;
E-mail: rodion@icmm.ru
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Комсомольский просп. 29, 614990 Пермь, Российская Федерация
П.Г. Фрик. Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва 1, 614013 Пермь, Российская Федерация
E-mail: frick@icmm.ru

Статья поступила 1 октября 2013 г.

самыми разнообразными и парадоксальными научными идеями, части "Путешествий Гулливера". Однако научное сообщество решительно отменяет эту возможность, указывая, например, на то, что в недрах Земли температура высокая, а ферромагнетизм исчезает за точкой Кюри. Поэтому ферромагнитные явления привлекаются лишь для объяснения хотя и важных, но локальных особенностей геомагнитного поля вроде Курской магнитной аномалии, существование которой действительно связано с огромными железорудными месторождениями.

Ещё в 1919 г. Дж. Лармор [6] понял, что если не привлекать какие-то неизвестные фундаментальные взаимодействия (а такие попытки, конечно, были, но не увенчались успехом), то для объяснения космического магнетизма остаётся лишь явление электромагнитной индукции. Это было время стремительного развития автомобильной промышленности, так что не только футбольные команды и станции метро, но и предложенная Лармором концепция оказались названными по имени одной из деталей автомобильного двигателя. Так возникло представление о динамо.

Научная реализация идеи Лармора оказалась достаточно сложной. Здравый смысл подсказывает, что образование магнитного поля с помощью механизма динамо должно иметь характер некоторой неустойчивости. Например, такая неустойчивость должна приводить к образованию магнитного поля Солнца, причём инкремент этой неустойчивости должен быть комплексным. Действительная часть его характеризует рост магнитного поля на линейной стадии его эволюции, которая со временем гасится какими-то нелинейными эффектами, а мнимая часть даёт длительность цикла. Конечно, из этой схемы выпадают некоторые частности, относящиеся к описанию ситуаций, в которых магнитное поле вносится в среду внешним источником.

Проблема, однако, в том, что явление электромагнитной индукции даёт отрицательную обратную связь между исходным и новым магнитным полем. Это фиксирует, например, правило Ленца, которое, хочется надеяться, ещё изучают в средней школе. Правило Ленца, естественно, мешает возникновению динамо. Для того чтобы его обойти, приходится рассматривать, говоря языком электротехники, электромагнитную индукцию в двух связанных контурах, так что первый контур наводит магнитное поле во втором, а второй — в первом, а в результате появляется положительная обратная связь и искомая неустойчивость.

Доведение этой идеи до конкретной реализации оказалось очень непростой задачей и потребовало многолетних усилий физиков и астрономов, причём история осознания связей между различными сторонами проблемы была очень запутанной и местами напоминает детективный роман. Ясно, что динамо может возникать лишь в хорошо проводящей среде, в которой индукционные эффекты побеждают диссипативные. Однако в такой среде магнитное поле заморожено (или почти заморожено) в среду, так что магнитные линии текут вместе со средой. Как же тогда может возникать неустойчивость, приводящая к экспоненциальному росту магнитного поля, т.е. как на месте одной магнитной линии можно получить две?

Этот вопрос был осознан исследователями уже после того, как были построены первые жизнеспособные мо-

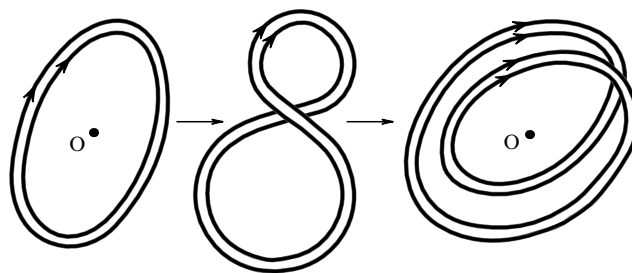


Рис. 1. Восьмёрка Зельдовича: магнитная петля растягивается, переворачивается и складывается вдвое, а магнитный поток при этом удваивается. Магнитная диффузия нужна только для того, чтобы загладить магнитное поле в том месте, где было перекручивание петли.

дели динамо, однако мы отвлечёмся здесь от хронологии. Ответ на него составляет один из важных вкладов Я.Б. Зельдовича в разработку концепции динамо. Представим себе (рис. 1) магнитную петлю, лежащую в плоскости x, y , которая растягивается вдвое несжимаемым течением вдоль оси x . При этом напряжённость магнитного поля возрастает вдвое, поперечное сечение падает вдвое, а магнитный поток сохраняется. Далее течение изменяет свой характер — оно не растягивает петлю, а выводит её из плоскости, перекручивает и складывает в восьмёрку, после чего две половинки восьмёрки накладываются друг на друга. Нетрудно видеть, что в этом случае магнитный поток через площадку, пересекающую обе половинки восьмёрки, удваивается. Далее процедура повторяется многократно, что и приводит к экспоненциальному росту магнитного поля.

Это — знаменитая восьмёрка Зельдовича, или, по-английски, stretch-twist-fold process. По преданию, которое ЯБ никогда не оспаривал, он впервые продемонстрировал эту схему во время дискуссии на конференции в Кракове, используя в качестве модели магнитной петли ремень, который он одолжил у одного из участников конференции. Зельдович совершенно не был рассеянным учёным-чудаком, который не заботится о своих идеях. Однако в 1970-е годы ему, вероятно, казалось, что выступление с замечанием на международной научной конференции уже является формой публикации (современный закон о печати действительно стоит на этой точке зрения). Во всяком случае, он не нашёл нужным посвятить этой своей идее специальную публикацию. Видимо, во время конференции он был в состоянии эйфории — даже в Польшу трижды Героя Социалистического Труда пускали с трудом, и это было для него событием. Конечно, эта схема была позднее рассмотрена во многих работах (впервые, вероятно, в [7])¹, часть из которых написана ЯБ со своими сотрудниками (он не любил говорить — "с учениками"), но авторство Зельдовича никем не оспаривается [13].

Концепция восьмёрки Зельдовича помогает разобраться в возможных реализациях механизма динамо. Во-первых, можно сыграть на том, что магнитные линии всё же не совершенно заморожены в среду, а могут слегка отделяться от движущейся среды. Другими словами,

¹ Проблема динамо и родственные темы многократно возникали в то время на страницах *УФН* как в работах самого Зельдовича (см., например, [8, 9]), так и в работах его сотрудников [10, 11] и коллег (см., например, [12]).

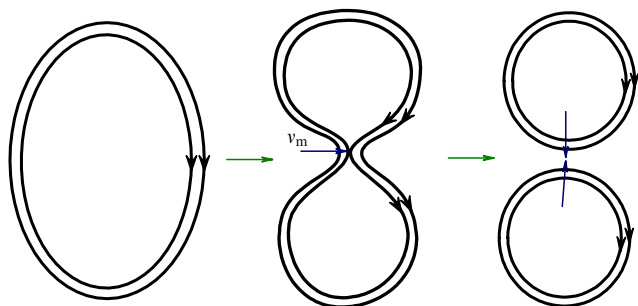


Рис. 2. Процесс Альвена: магнитная петля растягивается, сплющивается и разрывается в результате работы магнитной диффузии, а потом получившиеся петли накладываются друг на друга. Магнитный поток при этом удваивается, однако процесс включает работу малой диффузии, поэтому он медленный.

можно пробовать построить динамо, в котором скорость роста магнитного поля существенно зависит от коэффициента магнитной диффузии, а магнитные линии могут перезамыкаться при работе динамо. Соответствующую картину эволюции магнитных линий предложил Альвен [14] (разумеется, он ничего не знал о восьмёрке Зельдовича, схему процесса Альвена см. на рис. 2): магнитная петля изгибается так, что два её удалённых участка приближаются друг к другу, происходит перезамыкание, петля распадается на две, они вытягиваются и накладываются друг на друга, так что магнитный поток удваивается.

Другой конкретный пример динамо, зависимый от магнитной диффузии, показан в работе Пономаренко [15]: магнитное поле экспоненциально нарастает во вращающейся проводящей струе, окружённой также проводящей средой. Эта работа рассматривается как классическая и приоритетная и имеет многочисленные применения (см. далее раздел 4). Показательно, однако, что в памяти специалистов практически не сохранилось биографических сведений об её авторе, известно лишь, что он работал в ИЗМИРАНе (Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн имени Н.В. Пушкова РАН).

Путь, предложенный Пономаренко, требует достаточно специальных течений, не очень характерных для небесных тел, поэтому он оказался не столь востребованным в астрофизике. Более важно даже, что с участием медленного процесса — магнитной диффузии — трудно получить изменения солнечного магнитного поля с периодом в 11 лет, ничтожным по астрономическим масштабам. Возникает противопоставление медленного (связанного с магнитной диффузией) и быстрого динамо, в котором магнитная диффузия нужна лишь для того, чтобы немного сгладить магнитное поле, выросшее в результате действия восьмёрки. Противопоставление быстрого и медленного динамо по роли в них магнитной диффузии тоже возникло в научной группе Зельдовича. В тот момент появилась возможность писать статьи и даже книги по-английски для иностранных журналов и издательств, поэтому эти термины возникли как английские слова *fast* и *slow*, хотя сейчас видно, что в первом случае лучше было бы, возможно, сказать *quick*. Тем не менее Scientific English принял эту терминологию.

Внесём в представление о динамо ещё одну идею (исторически она далась с большим трудом): нет необходимости тщательно подбирать подходящие поля скорости,

достаточно рассматривать случайные, скажем, турбулентные или конвективные потоки. В них интересующая нас конфигурация возникнет рано или поздно в силу игры случая, лишь бы её не запрещали свойства симметрии случайного поля скорости. Конечно, и магнитное поле, растущее в случайном потоке, тоже является случайным. Нужно фиксировать, в каком смысле должно расти магнитное поле: интересует ли нас рост средней магнитной энергии либо мы озабочены ростом данной реализации магнитного поля (говоря на языке теории вероятностей, рост с вероятностью 1). Сама возможность изучать случайные физические поля не обязательно в рамках средних величин, а также и в рамках индивидуальных реализаций вошла в физику прежде всего в теории локализации Мотта—Андерсона, однако параллельно она развивалась в теории динамо Зельдовичем и его сотрудниками [16]. Отметим, что над только что цитированной книгой, как описывается в предисловии к ней, Яков Борисович работал в день своей смерти. К сожалению, книга до сих пор не переведена на русский язык и малодоступна отечественному читателю.

Теперь мы снова оказываемся у развилки: в восьмёрки петли можно складывать, не выделяя одного направления поворота, а поворачивать их влево и вправо равновероятно. В этом случае мы вряд ли получим ненулевое среднее магнитное поле, так что речь может идти о росте средней магнитной энергии. Фактически эту идею разработал А.П. Казанцев [17], который в 1967 г. предложил уравнение для корреляционной функции магнитного поля в отражательно-симметричном потоке (напомним, что мы излагаем события в логической, а не хронологической последовательности; Казанцев сформулировал своё уравнение за десять лет до появления схемы Зельдовича и не задумывался о его месте в рамках теории динамо). Это уравнение, которое вошло в науку как уравнение Казанцева, действительно имеет решения, экспоненциально растущие при достаточно малой диссипации. Отметим, что в том же году это же уравнение получили независимо, хотя и несколько позже, американские физики Крейчнан и Нагараджан [18], однако отечественный приоритет в этой области получил международное признание.

Для того чтобы получить среднее — читай, крупномасштабное — магнитное поле, которое представляет наибольший интерес для астрономии, нужно складывать магнитные петли, давая предпочтение одной из их ориентаций. Другими словами, нужно нарушить отражательную симметрию течения. Это впервые осознал в 1955 г. известный американский астроном Ю. Паркер [19], который построил на основе этой идеи простую, но жизнеспособную модель солнечного цикла. Работа Паркера основана на серии догадок, которые оказались правильными. Эти идеи стали физической теорией после исторической работы Штеенбека, Краузе и Рэдлера [20], которые написали её на десятилетие позже работы Паркера, но даже не подозревали о существовании последней. Отметим, что М. Штеенбек был президентом Академии наук ГДР, а до этого долгое время и не по своей воле работал в Сухуми. Он оставил интересные воспоминания о своей жизни, которые были переведены в годы перестройки на русский язык, но затерялись в потоке литературы того времени.

Так сложилось представление об α -эффекте, который параметризует зеркальную асимметрию конвекции или

турбулентности при описании среднего магнитного поля. Электродвижущая сила (ЭДС) $\mathcal{E}$ как-то параметризуется с помощью магнитного поля $\mathbf{B}$, при этом обычно $\mathcal{E}$ перпендикулярна $\mathbf{B}$. Анализ симметрий уравнений Максвелла (для квазистационарного магнитного поля они сводятся к одному уравнению — уравнению индукции) показывает, что рост магнитного поля легко получить, если у $\mathcal{E}$ есть компонента, параллельная $\mathbf{B}$. Однако $\mathcal{E}$ — обычный вектор, а $\mathbf{B}$ — псевдовектор, поэтому нужен псевдоскаляр α для того, чтобы написать

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{B} + \dots \quad (1)$$

Зеркальная асимметрия потока и даёт возможность получить искомым псевдоскаляр α . Физической причиной его возникновения служит, например, действие силы Кориолиса на вихри, всплывающие и расширяющиеся либо погружающиеся и сжимающиеся в стратифицированной вращающейся турбулентности. В принципе, эта картина вполне вписывается в стандартные аргументы, которые приводят к уравнениям Максвелла в среде. Может быть, лучше сказать — вывод Максвеллом своих уравнений можно рассматривать как первый пример вывода уравнений среднего поля в случайной среде.

Если бы Максвелл при выводе своих уравнений задумывался о проблемах зеркально асимметричных (говорят также — киральных) сред, то он вполне мог бы прийти к уравнениям среднего поля, полученным Штеенбеком и его сотрудниками. Во всяком случае, параметризация α через угловую скорость и градиент плотности, предложенная Ф. Краузе в своей дипломной работе, которую он тоже не потрудился опубликовать и результатами которой специалисты пользовались десятилетиями, лежит вполне в русле стандартных оценок параметров среды из известных учебников по электродинамике.

α -эффект играет ключевую роль в астрофизических динамо, поэтому полезно привести простейшую формулу, по которой в заданном потоке хорошо проводящей жидкости вычисляется этот эффект:

$$\alpha = \frac{\tau \langle \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \rangle}{3}, \quad (2)$$

где скобки означают осреднение по ансамблю турбулентных вихрей, τ — время памяти, $\mathbf{v}$ — среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций. Видно, что α -эффект определяется плотностью спиральности течения. Иными словами, спиральность и другие явления, связанные с нарушением зеркальной симметрии, которые не очень важны для классических областей физики, существенны не только в микромире, но и в макроявлениях, изучаемых в теории динамо. Отметим здесь, что наряду с решением (2) α -эффект может иметь место в потоке, в котором спиральность строго равна нулю [21].

Из вышеизложенного ясно, что динамо не может возникнуть в очень простых течениях. Известен целый ряд утверждений (так называемых антидинамо-теорем), выделяющих течения, для которых динамо невозможны. Одно из наиболее известных ограничений такого рода принадлежит Зельдовичу [22] и утверждает, что поле скорости, линии тока которого расположены на системе параллельных плоскостей, не может давать динамо.

Подчеркнём, что, как отмечали, например, Зельдович и др. [23], экспоненциальный рост магнитного поля в

некоторых двумерных течениях возможен. Например, нетрудно проверить, что в бездивергентном поле скорости $v_x = Cx$, $v_y = -Cy$, $v_z = 0$ экспоненциально растёт однородное магнитное поле, параллельное оси x . Поэтому утверждение Зельдовича, как всякая теорема, выполняется лишь при определённых условиях, фиксирующих понятие "динамо". Это понятие связывается с генерацией магнитных полей, не вызванных работой источников тока, находящихся на бесконечности. В работе Зельдовича 1956 г. [22] это условие выражено как требование существования конечных интегралов от различных комбинаций магнитного поля и поля скорости, а в приведённом примере эти условия с очевидностью нарушены. Отметим, что жанр статьи 1956 г. не предполагал формально-математического анализа соответствующего понимания динамо. Такой анализ был проведён позже Арнольдом и др. [24], причём выяснилось, что функциональное пространство, в котором должна ставиться задача динамо, не является одним из стандартных пространств функционального анализа (одним из пространств Лебега или Соболева), а определяется тем, что некий трёхкратный интеграл, выражающий магнитный момент, сходится в смысле главного значения. Нам неизвестны специальные математические работы, посвящённые теории операторов в таком пространстве, хотя они и были бы, возможно, интересны для физических приложений. Тем не менее проведённые Зельдовичем энергетические оценки в метрике этого пространства вполне допускают доработку до формально-математических утверждений. Отметим также, что Яков Борисович интересовался подобными методами доказательства диссипационных теорем начиная со своих первых научных работ [25].

Важно, что принятая Зельдовичем [22] формализация понятия динамо не является единственно возможной. В частности, можно рассматривать генерацию магнитного поля в пространственно однородном случайном потоке проводящей жидкости и понимать рост магнитного поля в смысле роста его среднего или среднеквадратичного значения. При этом понимании динамо, которое, конечно, было известно Зельдовичу, но не рассматривалось в его теореме, оказывается возможным [26].

Подчеркнём, что механизм динамо затрагивает лишь одну сторону проблемы космического магнетизма — как при наличии движений проводящей среды возникает магнитное поле. Вопрос о том, как это магнитное поле влияет на движение, представляет в данном контексте подчинённый интерес. Не менее интересна и постановка вопроса о том, откуда берутся сами движения и как на их возникновение влияет магнитное поле. В ответы на эти вопросы отечественные физики тоже внесли заметный вклад. Достаточно сказать, что один из основных механизмов такого рода — знаменитая магниторотационная неустойчивость — был открыт Е.П. Велиховым [27] (см. также [28]). Отметим также фундаментальный обзор [29].

Резюмируя, можно сказать, что изучение явления динамо вскрывает интересную физику. В частности, появление области физики, демонстративно не связанной ни с теорией относительности, ни с квантовой механикой, но не кажущейся тягостным реликтом позапрошлого века, видимо, иллюстрирует наметившуюся фрагментацию некогда единой физики на систему сравнительно изолированных наук, обменивающихся друг с

другом идеями, но не находящихся в отношении соподчинённости. До определённого времени изучение динамо всё-таки не находилось в центре внимания именно физики, а рассматривалось скорее как часть астрономии или геофизики, и к нему применялись мерки этих наук. Достаточно сказать, что до сих пор диссертации по палеомагнетизму, т.е. изучению эволюции геомагнитного поля в геологической истории Земли, приходится защищать по разделу "Физика твёрдой Земли", несмотря на то что все понимают, что эта эволюция обусловлена процессами в жидком внешнем ядре Земли. Однако палеомагнитная история Земли фиксируется в ферромагнитных составляющих твёрдых оболочек Земли, и это, а не физическая сущность процесса, определяет формальную структуру классификаторов.

Нам кажется, что такое периферийное положение динамо среди других физических процессов было связано с тем, что не получалось изучать явление динамо экспериментально, а наблюдательные подходы астрономии и палеомагнитологии всё же не совсем вписываются в основную линию развития физики — науки, внутренне связанной с экспериментом.

Оказывается, что эксперимент в области динамо — чрезвычайно трудная задача. Физика шла к нему начиная от пионерских работ советских и немецких физиков, выполненных в Саласпилсе близ Риги (Латвийская Республика) ещё в 1960-е годы. Отметим, что по принятому в СССР разделению труда, которое сейчас трудно рассматривать как продуманное, соответствующие исследования должны были быть сосредоточены именно в Латвии. Прорыв в экспериментальных работах по динамо наступил на рубеже нового тысячелетия, когда в том же Саласпилсе и в Карлсруэ (Германия) впервые удалось в лабораторном эксперименте наблюдать явление динамо. Важно, что развитие этих работ выросло в целое направление, которое экспериментально изучает динамо. Российским физикам в непростые годы после распада Советского Союза удалось включиться в эти исследования и найти в них своё место.

Конечно, генетическая связь динамо с астрономией и геофизикой остаётся заметной и сейчас. Поэтому в настоящем обзоре мы рассматриваем результаты экспериментальных работ по изучению динамо на фоне моделей динамо в небесных телах.

2. Теория вопроса

Необходимым этапом решения любой задачи о динамо является рассмотрение уравнения индукции магнитного поля в движущейся электропроводящей среде,

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3)$$

где η — постоянная магнитная вязкость (при необходимости можно рассматривать среды с переменной магнитной вязкостью), $\mathbf{U}$ — скорость. Так или иначе, изучение динамо крутится вокруг решения этого уравнения в той или иной форме. Идея преобразовать его так, чтобы оно описывало поведение крупномасштабного поля, учитывая лишь статистические свойства мелкомасштабных полей, развивалась многие десятилетия. Далее мы кратко суммируем успехи, достигнутые на этом пути.

Следуя базовой идее подхода Рейнольдса к описанию турбулентности, нужно перейти к величинам $\bar{\mathbf{B}}$ и $\bar{\mathbf{U}}$,

являющимися средними по реализациям. В теории динамо обычно говорят о полях, осреднённых по пространственным и временным масштабам, которые больше масштабов турбулентности (гипотеза о разделении масштабов, подразумевающая, что масштабы крупномасштабного магнитного поля существенно больше максимальных масштабов турбулентных течений). Величины $\mathbf{b} = \mathbf{B} - \bar{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}$ будем рассматривать как флуктуации. Далее применяем правила осреднения Рейнольдса к уравнению (3) и получаем уравнение индукции среднего поля,

$$\partial_t \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times (\bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{B}} + \mathcal{E}) - \eta \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}, \quad (4)$$

где $\mathcal{E}$ — средняя электродвижущая сила, вызванная пульсациями магнитного поля и поля скорости,

$$\mathcal{E} = \overline{\mathbf{u} \times \mathbf{b}}. \quad (5)$$

В качестве следующего шага можно рассмотреть уравнение для пульсаций магнитного поля,

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{b} + \mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}} + (\mathbf{u} \times \mathbf{b})') + \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (6)$$

где $(\mathbf{u} \times \mathbf{b})' = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \overline{\mathbf{u} \times \mathbf{b}}$, и немедленно обнаружить проблему замыкания, так как уравнение (6) содержит слагаемое второго порядка по флуктуациям. По сути дела, определение аналитической зависимости $\mathcal{E}$ от средних полей $\bar{\mathbf{B}}$ и $\bar{\mathbf{U}}$ и статистических свойств флуктуаций $\mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$ является краеугольным камнем теории динамо средних полей, применяемой к астрофизическим объектам.

Анализ механизмов усиления $\mathbf{b}$, представленных в виде трёх слагаемых под оператором ротора в уравнении (6), позволяет сделать следующий полезный шаг, рассмотрев две составляющие $\mathbf{b}$, а именно флуктуации $\mathbf{b}_0$, имеющие место независимо от наличия $\bar{\mathbf{B}}$, и флуктуации $\mathbf{b}^{\bar{\mathbf{B}}}$, которые возникают только за счёт генерации $\bar{\mathbf{B}}$ и исчезают, если $\bar{\mathbf{B}}$ затухает. Их вклады в $\mathcal{E}$ тоже можно разделить:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{E}^{\bar{\mathbf{B}}}. \quad (7)$$

Составляющая $\mathcal{E}^{(0)}$ возникает в случае существования внешних источников, поддерживающих фоновую магнитогидродинамическую (МГД) турбулентность и не зависит от $\bar{\mathbf{B}}$. Действие $\mathcal{E}^{(0)}$ может способствовать генерации начального магнитного поля, но впоследствии с ростом $\bar{\mathbf{B}}$ вклад пульсаций, не связанных с $\bar{\mathbf{B}}$, становится незначительным и, как правило, $\mathcal{E}^{(0)}$ не рассматривается вовсе. Составляющая $\mathcal{E}^{\bar{\mathbf{B}}}$ включает в себя все механизмы генерации за счёт пульсаций, вызванных ростом $\bar{\mathbf{B}}$. На начальном этапе этот рост происходит в условиях чисто гидродинамической турбулентности, поддерживаемой какими-либо источниками. Впоследствии, когда магнитная и кинетическая энергии становятся сравнимыми, необходимо учитывать динамический аспект, который состоит в том, что в пульсациях поля скорости возникает аналогичная составляющая, $\mathbf{u}^{\bar{\mathbf{B}}}$. Основной и наиболее изученной составляющей является $\mathcal{E}^{\bar{\mathbf{B}}}$. Представленное разложение турбулентного вклада в динамо-процесс сложилось исторически, в результате развития системы допущений и предположений, необходимых для решения уравнения (6), а также аналогичного уравнения для $\mathbf{u}$,

которое здесь не приводится, но может быть найдено в большинстве работ на эту тему. Удобство разделения вкладов вида (7) состоит в последующей, достаточно прозрачной, параметризации $\mathcal{E}$ через поля $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{U}}$ и их градиенты, а также статистические характеристики $\mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$.

2.1. Структура электродвижущей силы $\mathcal{E}^{\bar{\mathbf{B}}}$

Для заданной точки пространства и времени $\mathcal{E}$ может зависеть не только от значений $\bar{\mathbf{U}}$, $\mathbf{u}$ и $\bar{\mathbf{B}}$ в этой точке, но и от их поведения в некоторой её окрестности. Первый шаг состоит в предположении о том, что $\bar{\mathbf{B}}$ медленно меняется в окрестности этой точки, так что $\mathcal{E}$ линейно зависит от компонент вектора $\bar{\mathbf{B}}$ и его пространственных производных. Таким образом, $\mathcal{E}$ может быть представлена в форме

$$\mathcal{E} = \mathcal{A} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \mathcal{B} : \nabla \bar{\mathbf{B}}, \quad (8)$$

где тензоры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, второго и третьего ранга соответственно, есть средние величины, зависящие уже только от $\bar{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{u}$. Здесь и далее операция $(\cdot)$ означает свёртку по одному индексу, а $(:)$ — свёртку по двум индексам. Разложенное на симметричную и кососимметричную части выражение (8) эквивалентно записи в векторном виде [30, 31]:

$$\mathcal{E} = -\alpha \cdot \bar{\mathbf{B}} - \gamma \times \bar{\mathbf{B}} - \beta \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) - \delta \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) - \kappa : (\nabla \bar{\mathbf{B}})^{(s)}, \quad (9)$$

где α и β — симметричные тензоры второго ранга, γ и δ — векторы, κ — тензор третьего ранга, и все они зависят только от $\bar{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{u}$. $(\nabla \bar{\mathbf{B}})^{(s)}$ является симметричной частью тензора градиента $\bar{\mathbf{B}}$, т.е. $(\nabla \bar{\mathbf{B}})^{(s)} = 1/2(\nabla \bar{\mathbf{B}} + \nabla \bar{\mathbf{B}}^T)$.

Слагаемое с α в (9) описывает α -эффект, который в общем случае является анизотропным, а слагаемое с γ соответствует эффективному переносу $\bar{\mathbf{B}}$ за счёт турбулентности, называемому иногда турбулентным диамагнетизмом. О нём впервые писал Зельдович в уже упоминавшейся работе [22]. Слагаемые с β и δ могут интерпретироваться как эффекты турбулентной диффузии, которые в общем случае также анизотропны. Слагаемое с κ не играет особо выделенной роли, но необходимо для полноты разложения. Выражения для α , γ , β , δ и κ через тензоры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ приведены, например, в [32].

Дальнейшие построения основываются на последовательном рассмотрении от самого простого случая — однородной изотропной зеркально-отражательной симметричной турбулентности при $\bar{\mathbf{U}} = 0$ — до наиболее общего случая, который представим подробно. Рассмотрим турбулентные пульсации $\mathbf{u}$, которые характеризуются нарушением зеркальной симметрии, что означает отличное от нуля значение псевдоскалярной величины — спиральности $\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{u}}$, а также наличием неоднородности энергии турбулентных пульсаций, определяемой вектором $\mathbf{g} = (\nabla u^2)/u^2$, где $u = |\mathbf{u}|$. Появление неізотропной и зеркально-несимметричной турбулентности может быть обусловлено действием силы Кориолиса, определяемой общим вращением Ω , и градиента среднего поля скорости $\nabla \bar{\mathbf{U}}$. Для удобства $\nabla \bar{\mathbf{U}}$ раскладывается на симметричную и антисимметричную части. Симметричная часть является тензором скорости деформации $\mathbf{D} = 1/2(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)$ и описывает характер сдвиговой составляющей движения в окрестности рассматри-

ваемой точки. Благодаря условию несжимаемости $\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0$ справедливо $\text{tr}(\mathbf{D}) = 0$. Антисимметричная часть описывает твердотельное вращение в окрестности рассматриваемой точки и определяется вектором $\mathbf{W} = \nabla \times \bar{\mathbf{U}}$.

Для определения структуры $\mathcal{E}$ используются соображения симметрии как полных уравнений магнитной гидродинамики, так и уравнений (4) и (6). Если поля $\mathbf{B}$, $\mathbf{U}$ и Ω удовлетворяют этим уравнениям, то им будут удовлетворять и поля $\mathbf{B}'$, $\mathbf{U}'$, Ω' , полученные из начальных вращением относительно некоторой оси, проходящей, например, через точку $\mathbf{x} = 0$. Аналогично, этим уравнениям будут удовлетворять поля $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$, $\mathbf{U}' = -\mathbf{U}$ и $\Omega' = -\Omega$, полученные из начальных в результате отражения относительно некоторой плоскости, содержащей, например, точку $\mathbf{x} = 0$. Инвариантность к вращению приводит к выводу, что тензоры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, возникающие в (8), α , γ , β , δ и κ могут содержать только элементы единичного симметричного тензора второго ранга δ_{ij} (символ дельты Кронекера) и единичного кососимметричного тензора третьего ранга ϵ_{ijk} (символ Леви–Чивиты), векторов $\mathbf{g}$, Ω и $\mathbf{W}$ и тензора $\mathbf{D}$. Также отметим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ должны быть псевдотензорами, что означает: α , δ и κ — псевдовеличины, а γ и β — обычные (полярные) величины. Общий вид $\mathcal{E}^{\bar{\mathbf{B}}}$ включает перечисленные конструкционные элементы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\bar{\mathbf{B}}} = & -\alpha^{(0)} \bar{\mathbf{B}} - \beta^{(0)} \nabla \times \bar{\mathbf{B}} - \\ & - (\delta^{(\Omega)} \Omega + \delta^{(W)} \mathbf{W}) \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) - \\ & - (\kappa^{(\Omega)} \Omega + \kappa^{(W)} \mathbf{W}) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{B}})^{(s)} - \\ & - \beta^{(D)} \mathbf{D} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}) - \kappa^{(D)} \hat{\kappa}(\mathbf{D}) \cdot (\nabla \bar{\mathbf{B}})^{(s)} - \\ & - \alpha_1^{(\Omega)} (\mathbf{g} \cdot \Omega) \bar{\mathbf{B}} - \alpha_2^{(\Omega)} ((\Omega \cdot \bar{\mathbf{B}}) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \Omega) - \\ & - \alpha_1^{(W)} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{W}) \bar{\mathbf{B}} - \alpha_2^{(W)} ((\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{B}}) \mathbf{W}) - \\ & - \alpha^{(D)} \hat{\alpha}(\mathbf{g}, \mathbf{D}) \cdot \bar{\mathbf{B}} - \\ & - (\gamma^{(0)} \mathbf{g} + \gamma^{(\Omega)} \mathbf{g} \times \Omega + \gamma^{(W)} \mathbf{g} \times \mathbf{W} + \gamma^{(D)} \mathbf{g} \cdot \mathbf{D}) \times \bar{\mathbf{B}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\hat{\kappa}(\mathbf{D})$ — тензор третьего ранга, определяемый как $\hat{\kappa}_{ijk} = \epsilon_{ijl} D_{lk} + \epsilon_{ikl} D_{lj}$, $\hat{\alpha}(\mathbf{g}, \mathbf{D})$ — симметричный тензор, определяемый выражением $\hat{\alpha}_{ij} = (\epsilon_{ilm} D_{lj} + \epsilon_{jlm} D_{li}) g_m$.

В первой строке (10) находятся классические транспортные коэффициенты $\alpha^{(0)}$ и $\beta^{(0)}$, отвечающие за генерационный и диссипационный эффекты в однородной изотропной зеркально-несимметричной турбулентности. Во второй и третьей строке сгруппированы слагаемые, отвечающие за влияние общего вращения и локальной завихренности. Особенно отметим слагаемое при $\delta^{(\Omega)}$ — это $\Omega \times \mathbf{J}$ -эффект, обнаруженный Рэдлером² в 1969 г. [33] и возникающий во вращающейся турбулентности. Совместно с дифференциальным вращением он способен приводить к самовозбуждению магнитного поля (см., например, [34]). Свойственный большинству течений в астрофизических объектах сдвиг среднего поля скорости определяет эффекты в четвёртой строке (10). Несмотря на то что модели динамо, включающие сдвиг, используются давно, его особая роль в формировании крупномасштабного поля была выявлена лишь недавно в [35], где показано, что за счёт эффектов сдвига можно

² Иногда он называется эффектом Рэдлера.

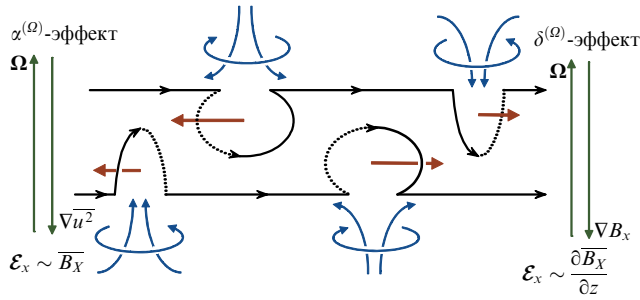


Рис. 3. Схема возникновения $\alpha^{(\Omega)}$ - и $\delta^{(\Omega)}$ -эффектов. Рисунок разработан в сотрудничестве с К.-Х. Рэдлером.

возбуждать крупномасштабное поле в спиральной турбулентности при больших числах Рейнольдса.

Оставшиеся слагаемые возникают в случае неоднородности энергии турбулентных пульсаций в направлении $\mathbf{g}$. Среди прочих можно особенно выделить слагаемое с $\alpha_1^{(\Omega)}$. Как видно, возникающая ЭДС действует в направлении $\bar{\mathbf{B}}$, аналогично классическому α -эффекту. Однако здесь нарушение отражательной симметрии получается за счёт вращения. Рисунок 3 схематически иллюстрирует механизм этого эффекта и проводит аналогию с δ -эффектом, упомянутым выше как $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}$ -эффект. Для соблюдения симметрии рассмотрим четыре возмущения, два из которых направлены вверх, а два — вниз, при этом в каждой паре есть конвергентное и дивергентное движение. Под действием силы Кориолиса возмущения приобретут вращение по направлению общего вращения, задаваемого $\boldsymbol{\Omega}$, и против него. Особо отметим, что получившаяся система вихрей имеет нулевую общую завихренность и нулевую общую спиральность. Каждое из рассматриваемых возмущений вытягивает из изначально горизонтального магнитного поля петлю³ и поворачивает её так, что возникает составляющая ЭДС, направленная параллельно полю. Важно отметить, что ЭДС, создаваемые конвергентным и дивергентным вихрями, отличаются по величине в силу разницы площадей петель. Если напряжённость двух силовых линий и интенсивность возмущений одинакова, то, как и ожидается, суммарный эффект будет равен нулю. Если же принять во внимание вертикальный градиент магнитного поля, как в $\delta^{(\Omega)}$ -эффекте, или градиент интенсивности турбулентных пульсаций, как в $\alpha^{(\Omega)}$ -эффекте, то вклад вихря внизу слева будет преобладать над контрипарным вихрем вверх справа, что даст ненулевое среднее.

Хорошо изученным является слагаемое с $\gamma^{(0)}$ — так называемый эффект турбулентного диамагнетизма, открытый Зельдовичем в 1956 г. [22] и исследованный впоследствии в [36]. Самостоятельно этот эффект не участвует в динамо-цикле, но может существенно снижать порог генерации. Так, например, в рамках $\alpha - \Omega$ -динамо в галактическом диске турбулентный диамагнетизм выталкивает магнитное поле из галактического гало в диск, что делает генерацию эффективнее [37]. Сделаем общее замечание, что $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ входят в (10) одинаково, однако соответствующие транспортные коэффициенты могут отличаться.

³ Здесь можно провести аналогию с петлёй Паркера, но в его схеме для генерации среднего поля требуется преобладание вихрей со спиральностью одного знака.

2.2. Структура электродвижущей силы $\mathcal{E}^{(0)}$

Из самой идеи разделения $\mathcal{E}$ на составляющие (7) следует, что $\mathcal{E}^{(0)}$ может зависеть только от $\mathbf{u}$ и $\bar{\mathbf{U}}$. Если предположить существование такой ЭДС, то $\bar{\mathbf{B}}$ может неограниченно расти из абсолютного нуля даже в отсутствие вклада $\mathcal{E}^{\mathbf{B}}$. В этом случае можно сказать, что фоновая турбулентность играет роль внешней "батареи", усиливающей среднее поле $\bar{\mathbf{B}}$. Более правдоподобная картина может состоять в том, что $\mathcal{E}^{(0)}$ служит источником затравочных полей, которые в дальнейшем подхватываются механизмами, включающими $\mathcal{E}^{\mathbf{B}}$. Этот вариант представляет особый интерес в контексте объяснения магнитных полей молодых галактик [38].

Рассмотрим общий вид $\mathcal{E}^{(0)}$, содержащий как хорошо известные, так и недавно добавленные составляющие [39]:

$$\mathcal{E}^{(0)} = c^{(U)} \bar{\mathbf{U}} + c^{(W)} \mathbf{W} + c^{(\Omega)} \boldsymbol{\Omega} + c^{(g)} \mathbf{g} + c^{(gU)} \mathbf{g} \times \bar{\mathbf{U}} + c^{(g\Omega)} \mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (11)$$

Первые три слагаемых присущи однородной изотропной турбулентности, а оставшиеся возникают в условиях неоднородности, вызванной градиентом энергии турбулентных пульсаций $\mathbf{g}$. Также отметим, что для существования псевдоскаляров $c^{(W)}$, $c^{(\Omega)}$ и $c^{(gU)}$ требуется нарушение зеркальной симметрии. Эффект, связанный с действием второго и третьего слагаемого, часто называют "кросс-спиральным" или эффектом Йошизава [40, 41]. Проявление этого эффекта в контексте динамо в так называемом ABC-потоке (Archontis dynamo) было показано в работе [42]. Систематическое изложение динамо-эффекта, возникающего за счёт перекрёстной спиральности, со множеством наглядных примеров может быть найдено в [43].

2.3. Подходы к вычислению транспортных коэффициентов

Наиболее распространённым подходом к вычислению транспортных коэффициентов, встречающихся в выражениях (10) и (11), является корреляционное приближение второго порядка (SOCA). Этот подход развивался вместе с электродинамикой средних полей [44] и был использован во многих задачах. Как следует из названия, в рамках данного подхода корреляторами высших порядков пренебрегают, а именно вклад $(\mathbf{u} \times \mathbf{b})'$ в (6) считают малым по сравнению с остальными слагаемыми. Это предположение ограничивает применимость получаемых результатов ко многим астрофизическим задачам. Для формулировки соответствующего критерия применимости введём числа Рейнольдса и число Струхала, определённые через характерные амплитуду пульсаций скорости u_c , длину λ_c и время флуктуаций поля скорости τ_c :

$$\text{Re}^t = \frac{u_c \lambda_c}{\nu}, \quad \text{Rm}^t = \frac{u_c \lambda_c}{\eta}, \quad \text{St} = \frac{u_c \tau_c}{\lambda_c}.$$

Для турбулентного поля скорости u_c имеет смысл величины среднеквадратичных пульсаций, а λ_c и τ_c — корреляционных длины и времени. Безразмерный параметр $q = \lambda_c^2 / (\eta \tau_c) = \text{Rm} / \text{St}$ является отношением диффузионного времени на масштабе λ_c к корреляционному времени турбулентности τ_c . Предел $q \rightarrow \infty$ соответствует случаю высокой проводимости, $q \rightarrow 0$ — низкой прово-

димости. Достаточным условием применимости SOCA будет $|\mathbf{B}| \gg |\mathbf{b}|$. Это эквивалентно условию $Rm^t \ll 1$ при $q \lesssim 1$ или $St \ll 1$ при $q \gtrsim 1$. Эти условия можно скомбинировать в виде

$$\min(Rm^t, St) \ll 1. \quad (12)$$

Уравнение для $\mathbf{u}$, аналогичное (6), также будет содержать пульсации второго порядка, которыми в рамках SOCA пренебрегают. Тогда, разделяя по аналогии случаи высокой и низкой вязкости по параметру $q = \lambda_c^2 / (\nu \tau_c)$, получают дополнительное условие применимости

$$\min(Re^t, St) \ll 1. \quad (13)$$

Справедливость этих условий стала предметом интенсивных исследований в связи с разработкой нового численного подхода — метода тестового поля (см. раздел 7.1). Приятной неожиданностью стало то, что формулы для транспортных коэффициентов (они будут показаны ниже) оказались справедливыми при менее строгих ограничениях, а именно при выполнении условия $Rm^t \ll 10$ при $q \lesssim 1$ [45, 46].

Нахождение коэффициентов, входящих в выражение для турбулентной ЭДС (8), сводится к решению уравнения (6). Для случая $\bar{\mathbf{U}} = 0$ решение имеет вид

$$\mathcal{A}_{ip} = (\epsilon_{ijn}\delta_{lp} - \epsilon_{ijp}\delta_{ln}) \int_V \int_0^\infty G(\xi, \tau) \frac{\partial Q_{jn}(\mathbf{x}, t; \xi, -\tau)}{\partial \xi_l} d^3\xi d\tau, \quad (14)$$

$$\mathcal{B}_{ipq} = -(\epsilon_{ijn}\delta_{lp} - \epsilon_{ijp}\delta_{ln}) \times \\ \times \int_V \int_0^\infty \frac{\partial G(\xi, \tau)}{\partial \xi} \frac{\xi_l \xi_q}{\xi} Q_{jn}(\mathbf{x}, t; \xi, -\tau) d^3\xi d\tau,$$

где

$$G(x, t) = (4\pi\eta t)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\eta t}\right) \quad (15)$$

есть функция Грина, а

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \xi, t + \tau) \rangle \quad (16)$$

— двухточечный корреляционный тензор турбулентных пульсаций, который характеризует свойства фоновой гидродинамической турбулентности. В простейшем случае однородной и изотропной турбулентности и $q \rightarrow 0$ выражения для коэффициентов записываются как

$$\alpha^{(0)} = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau)) \rangle d\tau = \\ = -\frac{1}{3} \langle \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \rangle \tau^{(\alpha)}, \quad (17) \\ \beta^{(0)} = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t - \tau) \rangle d\tau = \frac{1}{3} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \tau^{(\beta)},$$

где $\tau^{(\alpha)}$ и $\tau^{(\beta)}$ обычно оцениваются через τ_c .

Относительно недавно появившийся так называемый τ -подход включает в рассмотрение корреляции пульсаций более высокого порядка, выражая их через второй порядок. Подробный критический сравнительный анализ показывает, что далеко не все результаты SOCA

воспроизводятся с использованием τ -подхода даже в пределах выполнения условий (12). Поэтому его применение требует определённой осторожности [47].

3. Почему так труден лабораторный динамо-эксперимент

Естественное желание исследователей получить эффект гидромагнитного динамо в лаборатории возникло вместе с первыми реалистичными моделями космических динамо, т.е. в середине XX в. Однако история динамо-экспериментов развивалась достаточно драматично — две успешные реализации эффекта МГД-динамо были получены в результате длительной конкурентной работы двух больших команд в лабораториях Риги [48, 49] и Карлсруэ [50] только на рубеже нового века с интервалом буквально в один месяц. С тех пор прошло почти полтора десятка лет, но, несмотря на упорную работу целого ряда групп экспериментаторов, появился только один новый пример генерации крупномасштабного магнитного поля движущимся жидким металлом (французский эксперимент VRS (von Karman Sodium) в Кадараше [51, 52], о котором мы подробно расскажем ниже). Однако далеко не все специалисты согласны считать результаты последнего эксперимента гидромагнитным динамо в чистом виде, так как динамо в нём получилось только после введения в поток ферромагнитных деталей. Строго говоря, ни один из трёх динамо-экспериментов нельзя считать прямым аналогом природных динамо, так как в них важную роль играют твёрдые металлические детали (электропроводящие стенки в рижской установке, направляющие трубы сложной формы в Карлсруэ, ферромагнитные детали в Кадараше), что, однако, несколько не умаляет их роли в развитии науки о МГД-динамо. Стоит сказать, что и в работе геодинамо участвуют границы мантии и твёрдого внутреннего ядра, которые в большинстве моделей рассматриваются как твёрдые стенки. Далее изложим всё по порядку.

Начнём с того, что укажем основной источник проблем лабораторных динамо. Дело в том, что МГД-динамо — явление критическое, и оно возможно только по достижении порогового значения магнитного числа Рейнольдса Rm^* , типичные значения которого для известных динамо составляют несколько десятков. Магнитное число Рейнольдса $Rm = UL/\eta$ (U — характерная скорость, L — характерный размер, η — коэффициент магнитной диффузии) определяет отношение генерационного слагаемого к диссипативному в уравнении индукции магнитного поля и связано с обычным (гидродинамическим) числом Рейнольдса $Re = UL/\nu$ (ν — кинематическая вязкость) через магнитное число Прандтля $Pm = \nu/\eta$:

$$Rm = Re Pm.$$

Отметим, что в космических объектах огромные размеры и значительные скорости обеспечивают заведомо закритические значения чисел Рейнольдса. Так, для ядра Земли толщина $H \approx 2 \times 10^6$ м, для Солнца толщина конвективной оболочки $H \approx 2 \times 10^8$ м, а характерная скорость конвективных потоков $U \approx 10^3$ м с⁻¹.

В лабораторных условиях именно малые значения магнитного числа Прандтля, характеризующие доступные в лабораториях жидкости (большая магнитная диффузия, называемая иногда магнитной вязкостью), и

являются основной проблемой для экспериментаторов. Поскольку интерес представляют только жидкие среды, для которых магнитная проницаемость не может существенно отличаться от единицы, то магнитная диффузия определяется электрической проводимостью металла. Наилучшим с точки зрения динамо-эксперимента металлом является натрий, сочетающий в себе хорошую проводимость с малой плотностью и низкой температурой плавления (98°C). Примечательно и то, что с динамической точки зрения натрий ведёт себя как вода (та же плотность и та же вязкость), что даёт возможность исследования динамики потока натрия на водяном прототипе динамо-установки. Определённые проблемы связаны с высокой химической активностью натрия, но альтернативы ему среди металлов на сегодня нет. Итак, жидкий натрий при температуре порядка 100°C (далеко уходить от точки плавления нельзя, так как проводимость падает с ростом температуры) характеризуется магнитным числом Прандтля $\text{Pm} \approx 10^{-5}$, и это означает, что критических значений магнитного числа Рейнольдса можно достичь только в течении, характеризуемом гидродинамическим числом Рейнольдса $\text{Re} \gg 10^6$. А из этого следует, что даже при характерном размере $L \approx 1$ м скорость потока натрия должна составлять десятки метров в секунду. При этом нельзя забывать, что топологически простое течение не может обеспечить эффект динамо в принципе.

Приведённые оценки позволяют сделать вывод, что на практике о ламинарном динамо можно забыть. Говоря же о турбулентных потоках проводящей жидкости, можно предложить, опираясь на рейнольдсовское представление о средних и пульсационных полях ($\mathbf{U}$ и $\mathbf{u}$ для скорости, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{b}$ для магнитного поля), следующую классификацию реализуемых динамо (рис. 4): квазиламинарные динамо, динамо средних полей и мелкомасштабные турбулентные динамо. К квазиламинарным отнесём динамо, в которых генерация среднего (крупномасштабного) магнитного поля $\mathbf{B}$ полностью определяется структурой среднего поля скорости $\mathbf{U}$. Турбулентные пульсации скорости $\mathbf{u}$ приводят к возбуждению мелкомасштабных пульсаций магнитного поля $\mathbf{b}$, но лишь затрудняют генерацию крупномасштабного поля. Наибольший интерес представляют турбулентные динамо средних полей, в которых турбулентные пульсации скорости играют принципиальную роль в генерации крупномасштабного магнитного поля (см. раздел 2). Структура среднего поля скорости может при этом также играть важную для динамо роль (во многих космических динамо важнейшим для динамо фактором является дифференциальное вращение жидкой проводя-

щей среды космического тела), но может и не вносить существенного вклада в динамо-процесс. Отдельно стоит выделить мелкомасштабное турбулентное динамо, реализующееся, как считается, практически в любом турбулентном течении при достаточно высоких магнитных числах Рейнольдса.

Нижняя строка в схеме на рис. 4 касается ещё одной очень важной части динамо-процесса — механизма насыщения. Нарастающее магнитное поле оказывает обратное влияние на поле скорости, снижая тем или иным способом эффективность процесса генерации. При этом возможно и динамическое равновесие, и колебательные режимы. Также известны весьма экзотические случаи — динамо-самоубийцы [53], когда возникшее магнитное поле таким образом модифицирует течение, что условия генерации уже не воспроизводятся. В случае квазиламинарного динамо насыщение происходит в основном за счёт влияния генерируемого магнитного поля на среднее поле скорости. В динамо средних полей процесс насыщения может следовать разнообразным сценариям, воздействуя как на структуру среднего поля, так и на мелкомасштабную турбулентность. В мелкомасштабном турбулентном динамо средние поля не участвуют и насыщение также работает только на уровне пульсаций.

4. Динамо-эксперименты

История построения прототипов течений, способных привести к генерации магнитного поля, начинается с так называемого "униполярного динамо" Булларда [54], представляющего собой электропроводящий диск, вращающийся в магнитном поле, создаваемом катушкой. Между осью и периферией диска возникает разность потенциалов, которая подаётся на катушку. Простая оценка показывает, что при достаточно быстром вращении диска может возникнуть устойчивое магнитное поле. Динамо Булларда — скорее электродинамическое, чем гидромагнитное. Вращающийся диск можно интерпретировать как некий вихрь, но замкнуть динамо-цикл без катушки, генерирующей нужное магнитное поле, не удастся. Подобное "полугидродинамическое динамо" было экспериментально реализовано в 2006 г. в Лионе (Франция) [55] и названо авторами динамо Булларда — Кармана. В нём вместо медного диска было использовано течение Кармана в цилиндре между противорвращающимися дисками, которое за счёт дифференциального вращения производит азимутальное поле при наложенном аксиальном. Получаемое азимутальное поле подаётся на вход усилителя, к выходу которого подключаются катушки, создающие это аксиальное поле. Очевидно, что проблема эффективности такого динамо легко решается за счёт повышения коэффициента усиления усилителя.

Герценберг в 1958 г. [56] предложил схему динамо, представляющую собой два вращающихся шара (оси вращения которых не параллельны друг другу), находящихся в электропроводящей покоящейся среде. Гидродинамическая аналогия в этом случае очевидна: два интенсивных непараллельных вихря в проводящей жидкости. Идея получила развитие во многих теоретических работах (см., например, работу [57] и ссылки в ней). Идея Герценберга получила и экспериментальную реализацию, но только в чисто "твёрдотельном" исполнении

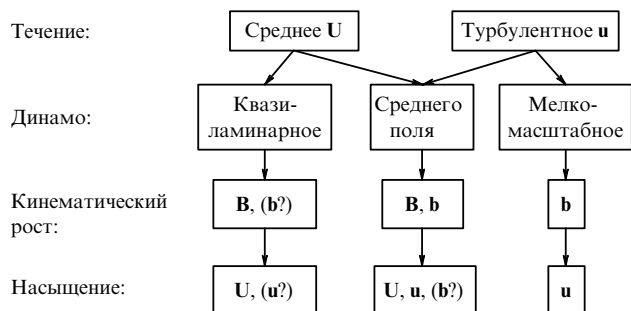


Рис. 4. Классификация реализуемых динамо.

— Лавс и Вилкинсон построили модель на основе вращающихся цилиндров, окружённых ферромагнитным массивом, и получили в ней эффект генерации магнитного поля [58].

Важнейшую для динамо-экспериментов роль сыграла следующая схема твердотельного динамо, предложенная Пономаренко [15] и давшая жизнь целому классу "винтовых динамо" [59, 60]. Пономаренко рассмотрел винтовое движение бесконечного цилиндра в бесконечной проводящей среде и показал, что такое движение может приводить к генерации магнитного поля в виде скрученного (бифилярного) жгута. Отметим, что задача Пономаренко характеризуется низким критическим значением магнитного числа Рейнольдса, равным 17,7 (магнитное число Рейнольдса определяется через радиус стержня и скорость поступательного движения) [61]. Ключевыми для динамо Пономаренко являются два фактора: закрутка (винтовое движение проводящего стержня) и сдвиг, возникающий на границе цилиндра и проводящей окружающей среды.

Естественное развитие идеи Пономаренко состоит в переходе от цилиндра к закрученной струе жидкости. Переход к струе вязкой жидкости сглаживает скачок скорости на границе и повышает порог генерации. Вопрос о возбуждении магнитного поля в винтовых потоках с реальными (не твердотельными) профилями скорости обсуждался рядом авторов [62–64]. В [62] рассматривалось течение проводящей жидкости в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами, один из которых, внутренний, совершает поступательное и вращательное движение. Были исследованы случаи идеально проводящих и абсолютно непроводящих цилиндров. Для обоих случаев критические значения R_m , определённого по толщине зазора и скорости внутреннего цилиндра, оказались близкими (129 и 125 соответственно). В работе [65] исследовался винтовой поток жидкости в идеально проводящей трубе. Профиль скорости описывался гладкими функциями (функциями Бесселя), и критическое число оказалось порядка 40.

Именно винтовое динамо, относящееся с точки зрения практической реализации к квазиламинарным, было взято за основу лабораторного динамо в Институте физики Латвийской АН ещё в 1980-е годы. Первая установка была создана совместно с Научно-исследовательским институтом электрофизической аппаратуры (НИИЭФА) им. Д.В. Ефремова. В ней насос нагнетал жидкий натрий через закручивающий поток направляющий аппарат (дивертор) в цилиндр диаметром 140 мм, который находился внутри цилиндра диаметром 500 мм, также заполненного натрием. Установка была запущена в 1987 г., однако выйти на режим генерации поля не удалось [66]. Во второй половине 1990-х годов к рижской команде присоединилась группа Г. Гербета из Дрездена (Германия), и работы по реализации винтового динамо были возобновлены. Вопрос о возможности понижения критического значения магнитного числа Рейнольдса был изучен очень тщательно. Во-первых, цилиндр диаметром 25 см, в котором реализуется винтовой поток натрия, был окружён не только каналом, по которому следует обратное течение натрия, но и кольцевым слоем покоящегося натрия (см. схему на рис. 5). Обратный поток натрия удерживает возбуждаемое поле в рабочей зоне канала, позволяя получить эффект в канале конечной длины (возникающая в задаче Пономаренко неус-

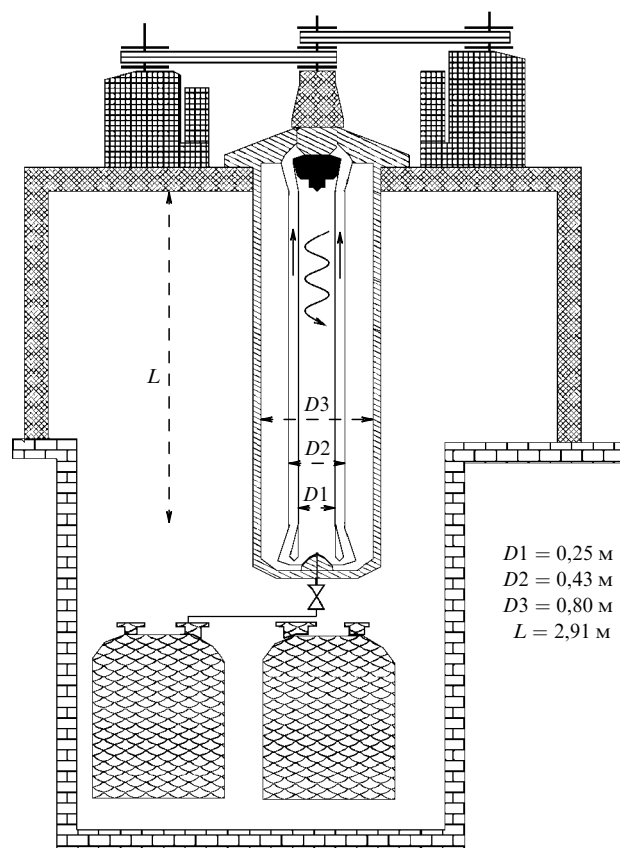


Рис. 5. Схема экспериментальной установки в Риге [48].

тойчивость не является глобальной и реализуется только в бесконечном цилиндре). Во-вторых, были рассмотрены различные варианты оребрения канала для создания оптимального среднего профиля скорости. Все варианты были изучены в работе [64]. Расчёт условий возбуждения поля в таком потоке при различных профилях потока и с учётом конечной длины цилиндров дал значения от 15 до 30.

Первый выход на режим генерации магнитного поля был совершён в Риге в ноябре 1999 г. [48]. Была зафиксирована ожидаемая в динамо Пономаренко бегущая вверх по потоку мода магнитного поля с азимутальным числом $m = 1$. Обратное влияние возбуждаемого магнитного поля на поток натрия и выход на насыщение были изучены в последующей серии экспериментов [49].

Альтернативная схема лабораторного винтового динамо была предложена в Институте механики сплошных сред (ИМСС) УрО РАН в Перми [67]. Основная идея состоит в том, чтобы создать требуемый винтовой поток в замкнутом тороидальном канале. Течение создаётся за счёт сил инерции (канал раскручивается и затем резко тормозится) и приобретает винтовой характер за счёт установленных в канале неподвижных (относительно канала) диверторов (рис. 6). Серьёзными преимуществами такой схемы эксперимента являются резкое снижение объёма требуемого в эксперименте жидкого натрия (порядка 100 кг вместо нескольких тонн, используемых в Риге), уменьшение мощности двигателя (на порядок), отсутствие сальников. Недостаток состоит в том, что реализовать можно только импульсное (нестационарное) винтовое течение, обеспечивающее закритический режим в течение короткого времени (порядка 1 с).

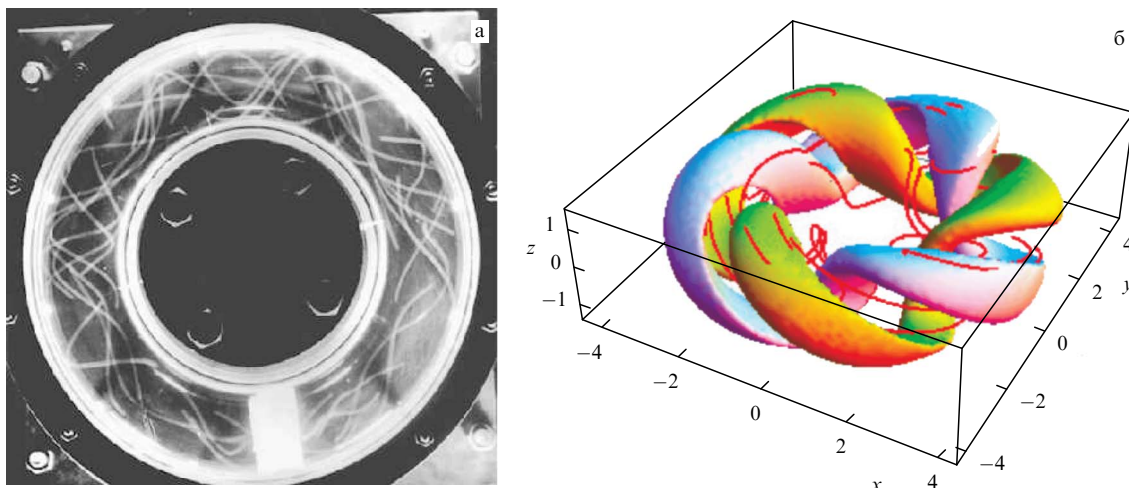


Рис. 6. (В цвете онлайн.) Винтовое течение воды во вращающемся тороидальном канале после вращения, визуализированное взвешенными сферическими частицами. Светлое тело в канале — дивертор, обеспечивающий закрутку потока. (а) Фото из работы [67]. (б) Магнитное поле, генерируемое винтовым потоком (расчёт [73]).

Сама возможность создания требуемого интенсивного винтового течения в торе совсем не очевидна, поскольку азимутальный (вдоль канала) момент импульса препятствует повороту "жидкого винта" вдоль криволинейного канала. Кривизна канала определяется аспектным отношением $\Gamma = R/r$, где R — радиус осевой окружности канала, а r — радиус поперечного сечения. Возможность создания винтового крупномасштабного течения была продемонстрирована на прозрачном, заполненном водой канале с аспектным отношением $\Gamma = 3,81$ и одним дивертором [67]. Используемые для визуализации относительно большие шарики описывали в потоке требуемые винтовые траектории. Динамика нестационарного течения, генерируемого резким торможением вращающегося тороидального канала с установленными в нём диверторами (от одного до четырёх), была исследована в работе [68]. Отметим, что вопрос о реализуемости винтового течения в тороидальном канале действительно не пустой: винтовые течения были получены в каналах с аспектным отношением $2,75 \leq \Gamma \leq 3,89$ [69–71], однако в канале с $\Gamma = 2,25$ создать винтовой поток не удастся в принципе [72].

Задача о винтовом динамо в тороидальной геометрии имеет ряд принципиальных особенностей. С одной стороны, становится существенным вопрос о толщине и проводимости стенок канала. К тому же канал должен быть прочным, но не слишком тяжёлым, так как его нужно быстро остановить. Расчёты порога генерации для различных материалов и толщин стенок канала показали, что критическое число в тороидальном винтовом потоке всегда выше, чем в цилиндрическом канале с практически неограниченной окружающей проводящей средой, но для реальных материалов и приемлемой с конструкторской точки зрения геометрии критическое магнитное число Рейнольдса может быть в пределах 30 [69].

С другой стороны, переход к тороидальной геометрии имеет и преимущество, состоящее в том, что конвективная природа возникающей неустойчивости перестаёт быть проблемой, так как возмущения не уносятся прочь по потоку, а развиваются в замкнутом течении. Численные исследования показали, что магнитное поле

успевает сформироваться в нестационарном замкнутом винтовом потоке до вырождения последнего до критического уровня [74].

Ещё одна, принципиальная, особенность динамо в торе состоит в том, что при росте кривизны (т.е. в пределе "толстого" тора, соответствующего малым Γ) может генерироваться глобальная мода, дающая магнитное поле, не затухающее на оси тора (в "дырке бублика") [73, 75].

Идея создания интенсивного импульсного течения жидкого металла в быстро вращающемся канале путём его резкого торможения оказалась достаточно плодотворной для лабораторных исследований МГД-течений с умеренными и высокими магнитными числами Рейнольдса, хотя на сегодняшний день и не доведена до эффекта динамо. После исследований гидродинамики винтового потока на водяных прототипах в лаборатории физической гидродинамики ИМСС УрО РАН были созданы три жидкометаллические установки с тороидальными каналами: (1) текстолитовый канал объёмом 1 л, заполненный галлием; (2) бронзовый канал объёмом 115 л, заполненный натрием; (3) титановый канал объёмом 25 л, заполненный натрием. Малый (галлиевый) канал (1) позволил получать винтовые течения с небольшими значениями магнитного числа Рейнольдса ($Rm < 0,3$), в которых были исследованы эффекты переноса магнитного поля винтовым потоком [70], а также выполнены приоритетные работы по измерению турбулентных транспортных коэффициентов [71, 76]. О последних речь пойдёт в разделе 5.

Установка с большим бронзовым каналом (2) была сконструирована и построена для динамо-эксперимента. При скорости вращения канала 40 оборотов в секунду она должна обеспечить импульсное течение, характеризующееся магнитным числом Рейнольдса порядка 40, что, по расчётам, обеспечивает выход на режим динамо [74]. Наиболее проблемной частью установки стал сам тороидальный канал, изготовленный из хромистой бронзы, обеспечивающей сочетание прочностных и электропроводящих характеристик при жёстких ограничениях на массу тора. Проблема состоит в изготовлении больших однородных слитков сплава, и в одном из двух полутó-

ров возникли микротрещины, приведшие к разгерметизации тора. После длительного перерыва в работе с каналом было найдено решение по его герметизации и выполнены исследования в подкритических режимах [77], хотя выход на критические режимы остаётся проблематичным из-за прочностных свойств восстановленного канала.

Канал (3) выполнен из титана, проводимость которого в сравнении с проводимостью натрия очень низка, и предназначен для изучения потоков натрия при умеренных магнитных числах Рейнольдса (т.е. $1 < Rm < Rm_{cr}$). Именно в этом канале выполнены исследования турбулентных коэффициентов переноса при $Rm > 1$ [78, 79] (см. далее раздел 5).

Винтовые динамо по классификации рис. 4 относятся к квазиламинарным и не могут быть прототипами астрофизических динамо. Другой путь к реализации динамо в лаборатории связан с динамо средних полей, представляющими прямой интерес с точки зрения моделирования природных динамо. В этом случае ключевым является вопрос о создании "правильной" турбулентности, способной генерировать поле. Винтовое течение в сочетании с другими эффектами может приводить к турбулентной ЭДС, согласно формуле (10), и вызывать разнообразные динамо-эффекты [80].

В разделе 2 было показано, что эффективная электродвижущая сила, обусловленная действием турбулентных пульсаций, включает целый спектр физических механизмов. Исторически первые объяснения возможности появления псевдоскалярного множителя в выражении для турбулентной ЭДС связаны со спиральностью (Паркер); иллюстрацией жизнеспособности этой идеи стал эксперимент, выполненный в Институте физики г. Риги [81]. Экспериментальная установка, получившая извест-

ность под именем "альфа-бокс", представляла собой два переплетённых медных канала, по которым прокачивался натрий (рис. 7). Наложённое магнитное поле подвергается воздействию скрещённых потоков натрия точно в соответствии со схемой Паркера (вытянуть петельку и повернуть), что приводит к появлению электродвижущей силы вдоль наложенного магнитного поля.

Отметим, что альфа-эффект в теории динамо средних полей подразумевает турбулентную (случайную) структуру мелкомасштабного поля скорости, которое этот эффект обеспечивает. Альфа-бокс и все лабораторные прототипы динамо средних полей основаны на создании потока с регулярной мелкомасштабной структурой, обеспечивающей альфа-эффект. С этой точки зрения лабораторные модели турбулентных динамо средних полей правильнее называть двухмасштабными динамо. Примеры течений, мелкомасштабная (но регулярная) структура которых обеспечивает генерацию поля на макромасштабе, обсуждались в ряде работ начиная с середины 1960-х годов (например, [82–85]) и легли в основу динамо-эксперимента в Карлсруэ. Возможность получить динамо в двухпериодическом течении была доказана Робертсом [84].

Установка в Карлсруэ представляет собой сборку из 52 "спиногенераторов", каждый из которых выполнен в виде двух коаксиальных цилиндров (рис. 8). По внутреннему цилиндру проходит "прямой" поток натрия, а по наружному — винтовой поток, формируемый специальными направляющими. Характерные размеры этой сборки (длина спиногенераторов и диаметр всей сборки) составляют 1 м.

Процесс генерации магнитного поля в таком течении был рассмотрен сначала в простых моделях [86], а затем детально изучен на основе теории средних полей [87] и прямого численного моделирования [88]. Полная теория динамо средних полей для установки в Карлсруэ изложена в работах [89, 90].

Эксперимент в Карлсруэ проходил следующим образом. Расход натрия в прямых (центральных) трубах устанавливался постоянным, $115 \text{ м}^3 \text{ ч}^{-1}$, а расход в винтовых каналах наращивался с 95 до $107 \text{ м}^3 \text{ ч}^{-1}$, после чего начинал наблюдаться медленный рост магнитного поля. Процесс роста поля и выхода на режим насыщения занимал достаточно большое время — порядка 90 с. Устано-

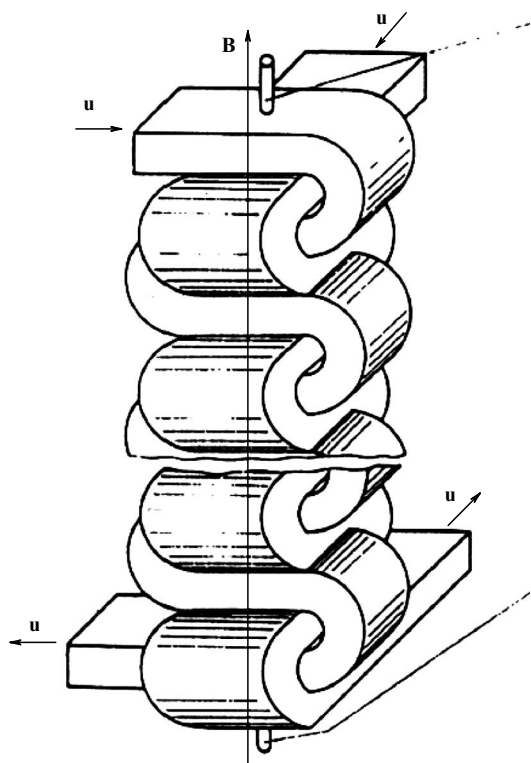


Рис. 7. Экспериментальная установка, получившая известность под именем "альфа-бокс" [81].

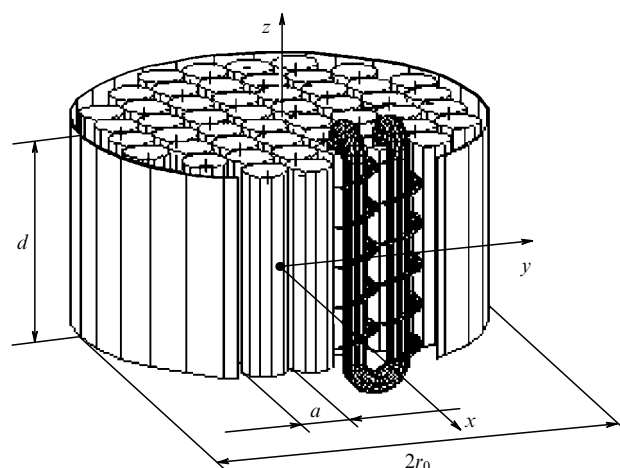


Рис. 8. Схема экспериментальной установки в Карлсруэ [50].

вившееся поле имело вид диполя, ориентированного перпендикулярно оси пакета спиногенераторов [50, 91].

Наиболее распространённое в природе динамо — это так называемое α – Ω -динамо, работающее на совместном действии дифференциального вращения (омега) и мелкомасштабной турбулентности (альфа). Попытка лабораторной реализации динамо такого типа была предпринята в Технологическом институте в Лос-Аламосе (New Mexico Tech), США. В установке создавалось течение натрия между коаксиальными вращающимися цилиндрами радиусом 0,3 и 0,6 м (течение Куэтта, обеспечивающее дифференциальное вращение), в которое впрыскивались закрученные струи натрия, призванные обеспечить альфа-эффект [92, 93]. Схема эксперимента притягательна тем, что альфа-эффект предполагалось получить в свободном потоке жидкого натрия (в отличие от Карлсруэ, где эффект реализован в системе труб), однако выйти на режим генерации поля не удалось.

С точки зрения природных динамо притягательными являются модели, в которых генерирующий поле поток проводящей жидкости создаётся в замкнутом (лучше сферическом) объёме. Наибольшие надежды при такой геометрии связаны с течениями, называемыми T2S2 и включающими две тороидальные и две полоидальные составляющие. Такое течение можно создать с помощью двух противоположно вращающихся пропеллеров, установленных на оси сферы. Именно такое течение активно изучалось в Университете Висконсина (Мэдисон, США) группой К. Фореста. После экспериментов на водяном прототипе и расчётов была создана натриевая установка на основе стальной сферы радиусом 0,5 м, в которой были установлены два пропеллера, вращаемые двумя двигателями по 75 кВт каждый [94]. На этой установке был выполнен целый ряд экспериментальных исследований. Были изучены эффекты трансформации наложенного аксиального магнитного поля [95], с разделением вклада среднего поля скорости и турбулентных пульсаций [96], исследованы генерационные всплески, не приводящие, тем не менее, к устойчивой генерации магнитного поля [97]. Выйти на режим генерации в этих экспериментах так и не удалось, несмотря на оптимистический прогноз, основанный на численных расчётах задачи.

Кинематически близкая схема была принята за основу французской экспериментальной программы динамо, базирующейся на течении Кармана, возникающем в цилиндрической полости между двумя вращающимися дисками [98]. Противовращающиеся диски (на практике использовались крыльчатки различной формы) закручивают жидкость и создают центробежные потоки вблизи торцов цилиндра, возбуждая тем самым то же течение T2S2. Отметим, что во французской программе динамо-экспериментов была задействована самая большая группа учёных, включающая представителей Лиона, Парижа, Орсе, Ниццы, Гренобля. Сама натриевая установка была создана в Исследовательском центре ядерной энергетики в Кадараше. Эксперимент был подготовлен с большой тщательностью, и созданию натриевой установки предшествовали многочисленные исследования течения Кармана для различных форм крыльчаток и различного соотношения скоростей их вращения [99]. Эффекты индукции магнитного поля в подкритических режимах изучались на галлиевом прототипе динамо-

установки [100, 101]. Расчёты предсказывали для натриевой установки генерацию магнитного поля в виде диполя, ориентированного перпендикулярно оси цилиндра [102], однако, как и в Мэдисоне, получить эффект динамо не удалось ни в первой версии эксперимента [103], ни во второй, проведённой после существенной реконструкции установки, направленной на повышение эффективного магнитного числа Рейнольдса и стабилизацию течения в цилиндре с помощью направляющих элементов [104].

Получить эффект динамо в натриевом течении Кармана французской команде всё-таки удалось [51], но после введения в установку ферромагнитных крыльчаток. Идея введения этих крыльчаток состояла в том, чтобы экранировать область за вращающимися дисками, течения в которой повышают порог генерации [105], но истинная роль этих ферромагнитных включений остаётся в центре дискуссий до настоящего времени. Важно подчеркнуть, что ферромагнитные элементы усилили механизмы динамо-цикла (снизили порог генерации), которые изначально совсем не рассматривались. В результате это привело к качественно иному типу динамо — вместо ожидавшегося трансверсного диполя в системе генерируется аксиальный диполь (поле ориентировано вдоль оси цилиндра). Одно из объяснений состоит в том, что течение фон Кармана выполняет лишь половину работы динамо, вторая половина выполняется α -эффектом, возникающим на упорядоченных вихрях в окрестности ферромагнитных элементов [106]. Есть и альтернативная точка зрения, что вариация магнитной проницаемости, которая навязывается внедрёнными ферромагнитными элементами, может быть недостающей частью динамо-цикла [107].

В экспериментальной установке в Кадараше вращение дисков устанавливалось независимо, что позволяло существенно изменять структуру потока в полости (от квазиаксиального вращения, возникающего между сонаправленно вращающимися дисками, через одновихревое T1S1, возникающее при одном покоящемся диске, до симметричного T2S2 в пределе двух противовращающихся с равной скоростью дисков, схематически показанных на рис. 9). На этом многообразии гидродинамических режимов возникает и спектр различных режимов динамо: наряду со стационарным динамо наблюдались колебательные режимы, режимы с динамо-

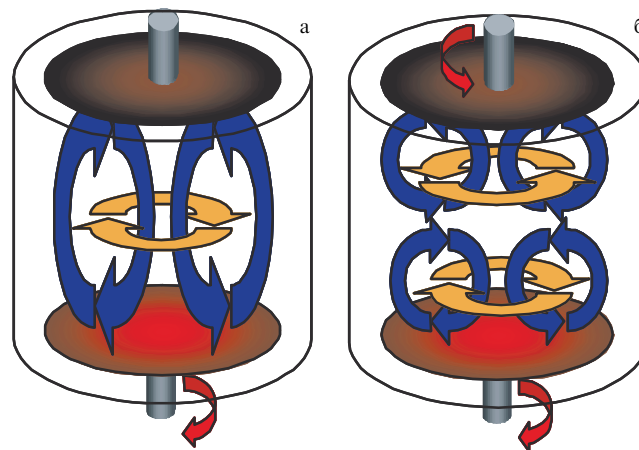


Рис. 9. (В цвете онлайн.) Схема течений T1S1 (а) и T2S2 (б), использованных во французском динамо-эксперименте [51].

вспышками и режимы с хаотическими инверсиями магнитного поля [52].

Наиболее близкой к проблемам человечества задачей динамо остаётся задача о геодинамо, которое реализуется благодаря конвективным течениям жидкого вещества со значительным содержанием железа во внешнем ядре Земли. При этом источником энергии для работы динамо может служить поток тепла из внутреннего ядра, т.е. течение имеет конвективную природу. Не исключено также, что течение поддерживается гравитационной дифференциацией вещества Земли. В лабораторных масштабах обеспечить конвективные течения требуемой интенсивности невозможно (тем более что нужна конвекция во вращающемся шаровом слое под действием центрального поля тяжести) и нужно привлечь прямое механическое возбуждение потока. Важнейшей особенностью течений в ядре является динамический баланс сил Кориолиса и сил Лоренца (магнитострофический режим) на фоне абсолютного доминирования сил Кориолиса над силами вязкости (число Экмана оценивается как 10^{-15}). Все попытки лабораторного моделирования течений в ядре основаны на сферическом течении Куэтта, обеспечивающем регулируемое дифференциальное вращение в шаровом слое. Оценки характеристик натриевой модели сферического течения Куэтта, способной достичь режима динамо, показали, что в сфере диаметром около метра необходимо подвести мощность порядка 700 кВт [108], что сделать непросто. В Гренобле была создана установка, получившая название DTS, для заведомо подкритических режимов (диаметр внешней сферы 0,4 м), на которой были выполнены исследования структуры возникающих течений в отсутствие магнитного поля и в наложенном магнитном поле [109], а также исследованы магнитоинерционные волны и магнитоконвекция [110, 111]. Благодаря значительным усилиям по "обвешиванию" установки измерительными приборами МГД-течение в DTS можно считать самым экспериментально изученным [112].

Грандиозная экспериментальная установка для изучения сферического течения Куэтта в натрии сконструирована и построена совсем недавно в Университете Мэриленда (США). Параметры установки закладывались исходя из намерения обеспечить с хорошим запасом выход на режимы генерации: диаметр внешней сферы составляет 3 м (более 8 т натрия). Установка запущена, и на ней выполнены первые исследования, касающиеся структуры возникающих в сфере течений [113]. На сегодня пройдены режимы, характеризуемые магнитным числом Рейнольдса $Rm = \Delta\Omega\Delta r^2/\eta < 500$ (где $\Delta\Omega$ — разность угловых скоростей вращения сфер, а Δr — разность их радиусов), что составляет приблизительно половину от максимально достижимого на этой установке (при условии монтажа дополнительных систем охлаждения); динамо-эффект пока не обнаружен [114].

5. Экспериментальная верификация отдельных элементов динамо

Пятнадцатилетняя драматическая история динамо-экспериментов показывает, что, несмотря на значительные успехи теории динамо, уровень понимания проблемы остаётся скорее качественным. Сформулированы основные принципы, есть понимание того, какие течения могут приводить к динамо, а какие нет, построены

работоспособные модели звёздных и планетарных динамо. Однако в случае лабораторных экспериментов, когда с трудом удаётся приблизиться к порогу генерации, требуется точный расчёт, учитывающий все особенности конкретной системы. Как мы видим, прогнозы, основанные на всей доступной базе знаний, оправдались только в двух случаях, причём там, где требуемые течения были максимально жёстко навязаны. Можно даже утверждать, что динамо-эксперименты с отрицательным результатом оказались не менее полезными, чем те, что привели к динамо. Общий вывод состоит в том, что вопросов в проблеме динамо осталось очень много и на данном этапе становится важным не просто реализовать динамо-процесс, а ставить эксперименты, помогающие понять механизмы функционирования динамо-систем.

В этом контексте важны эксперименты, направленные на изучение отдельных эффектов, играющих важную роль в турбулентных динамо-процессах. Простейшим эффектом воздействия турбулентного потока проводящей среды на магнитное поле является усиление эффективной диффузии магнитного поля, представляющее собой прямую аналогию усиления эффективной диффузии импульса в турбулентном потоке. В случае диффузии импульса говорят о турбулентной вязкости, а в случае магнитного поля можно по аналогии ввести турбулентную диффузию магнитного поля. В разложении турбулентной электродвижущей силы (9) турбулентная диффузия описывается тензором β и часто упоминается как β -эффект. В случае изотропной турбулентности этот эффект можно интерпретировать как снижение средней (эффективной) проводимости турбулентной среды на крупных масштабах.

Несмотря на то что этот эффект кажется почти очевидным, регистрация малых вариаций проводимости в турбулентном потоке чрезвычайно сложна, и до последнего времени не было достоверных прямых измерений эффективной электрической проводимости турбулентного потока проводящей жидкости. Первая попытка таких измерений была выполнена в сосуде с жидким натрием при интенсивном перемешивании [115], но полученные результаты вызывали сомнения как по уровню наблюдавшихся изменений проводимости, так и по оценкам погрешности выполненных измерений.

Прямые измерения эффективной проводимости металла при турбулентном течении удалось реализовать в нестационарных потоках в тороидальных каналах в ИМСС УрО РАН. Первые эксперименты были проведены с течением низкотемпературного сплава галлия в текстолитовом тороидальном канале [76]. Пиковые значения числа Рейнольдса достигали величины $Re \approx 3 \times 10^5$, что соответствует магнитному числу Рейнольдса $Rm \approx 0,3$. Проводимость металла в канале определялась по сдвигу фаз вынужденных гармонических колебаний в последовательном колебательном контуре, индуктивностью которого являлась намотанная на канал тороидальная катушка. Максимальное отклонение эффективной проводимости турбулентной среды от омической проводимости металла составило порядка 1 %.

Очевидно, что интерес представляют экспериментальные исследования бета-эффекта при значительно больших магнитных числах Рейнольдса. Выход на умеренные магнитные числа Рейнольдса ($1 < Rm < Rm_{cr}$)

стал возможным после изготовления значительно более жёсткого титанового канала больших геометрических размеров и перехода со сплава галлия на жидкий натрий — значительно более лёгкий и хорошо проводящий металл. В экспериментах на натриевой установке максимальное значение числа Рейнольдса составило $Re \approx 3 \times 10^6$, что соответствует магнитному числу Рейнольдса $Rm \approx 30$. Максимальное отклонение коэффициента диффузии от его базового (ламинарного) значения составило порядка 50 % [78]. Впервые были выполнены и одновременные прямые измерения турбулентной вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля [79].

Было показано, что поведение коэффициента турбулентной диффузии магнитного поля определяется значениями магнитного числа Рейнольдса Rm_{rms} , рассчитанными по среднеквадратичному значению турбулентных пульсаций скорости. При $Rm_{rms} < 1$ коэффициент турбулентной диффузии растёт вместе с числом Рейнольдса по квадратичному закону, а при $Rm_{rms} > 1$ турбулентная диффузия магнитного поля становится пропорциональной турбулентной вязкости [79].

Значительно сложнее, чем с бета-эффектом, обстоит дело с экспериментальной верификацией турбулентного альфа-эффекта. Считается, что наиболее простое его проявление должно опираться на действие спиральной турбулентности. Однако сама задача о получении однородной спиральной турбулентности на сегодня не решена, а единственное лабораторное подтверждение турбулентного альфа-эффекта получено всё в том же течении в тороидальном канале, в котором мелкомасштабная спиральность вклада давать не может. Кратковременную генерацию магнитного поля требуемой симметрии удалось наблюдать в тороидальном канале при формировании винтового потока за установленными в канале диверторами. Альфа-эффект определяется при этом совместным действием градиента турбулентных пульсаций и крупномасштабной завихренности [71]. Несмотря на то что природа обнаруженного таким образом α -эффекта существенно отличается от классического α -эффекта (рис. 10), связанного с градиентом плотности и угловой скоростью, сообщество специалистов по динамо единодушно рассматривает данные работы как первое экспериментальное обнаружение α -эффекта, отмечая существенное отличие этих работ от гораздо более ранних работ рижской группы по воспроизведению этого эффекта системой закрученных труб [81].

Отметим ещё один эксперимент, проведённый в Институте механики сплошных сред в контексте запросов астрофизических динамо. Межзвёздная среда, в которой происходит работа галактического динамо, чрезвычайно неоднородна (см., например, [116]). При этом в разных фазах межзвёздной среды её параметры,

имеющие значение для динамо, могут различаться на порядки. Этот факт, конечно, нужно как-то учитывать при выводе уравнений динамо среднего поля, но вопрос совершенно не разработан теоретически. Замечательно, что по крайней мере для одного из таких параметров — коэффициента магнитной проницаемости μ — были проведены измерения в смеси двух веществ с сильно различающимися μ и удалось предложить работоспособные аналитические аппроксимации для зависимости эффективной магнитной проницаемости от состава смеси [70].

6. Лабораторные эксперименты в контексте астрофизических динамо

Поскольку промышленные установки, в которых достигаются очень высокие магнитные числа Рейнольдса, пока рассматриваются в лучшем случае лишь в качестве удалённой перспективы, основной мотивацией постановки динамо-экспериментов остаётся астрофизика и геофизика. Обсудим, что конкретно хотелось бы астрофизикам узнать из этих наблюдений, в какой степени эта цель достигается в существующих экспериментах и каковы перспективы развития рассматриваемой области.

Поскольку теоретическое изучение динамо долгое время развивалось без поддержки экспериментом, современный набор теоретически разработанных моделей динамо гораздо богаче, чем набор ещё сравнительно немногочисленных наблюдений. Поэтому эксперимент прежде всего нужен для того, чтобы убедиться, что имеющиеся теории разумно выделяли модельные ситуации, представляющие интерес в астрофизическом контексте.

Прежде всего, эксперименты в Риге и Карлсруэ подтвердили саму исходную идею о том, что самовозбуждение магнитных полей в движущейся проводящей жидкости, т.е. динамо, действительно возможно. Разумеется, специалисты по астрофизическим динамо и геомагнетизму не сомневались в такой возможности уже давно, но для специалистов во многих смежных областях эта возможность была совершенно не очевидна. Дело в том, что адекватное описание этого самовозбуждения очень сильно отличается от привычных канонов изучения электромагнетизма, сформированных на иных физических задачах. В частности, специалисты по построению моделей динамо единодушно отмечают, что это гораздо удобнее делать, рассматривая непосредственно магнитное поле, а не электрический ток, тогда как представители смежных направлений столь же единодушно придерживаются противоположной точки зрения. Описание этой коллизии специально посвящена книга одного из основателей теории динамо — Ю. Паркера [117].

Следующий момент, проясняемый с помощью динамо-экспериментов, таков. Говоря отвлечённо, можно представить себе довольно много течений, дающих динамо. Многие из этих динамо проанализированы теоретически, прежде всего, представителями английской школы магнитной гидродинамики (см., например, [118]). Однако набор динамо, актуальных для астрофизики и геофизики, не так велик. Как правило, в астрофизических динамо средняя крупномасштабная скорость представляет собой дифференциальное вращение, которое само по себе не может приводить к самовозбуждению магнитного поля. Одно дифференциальное вращение может давать

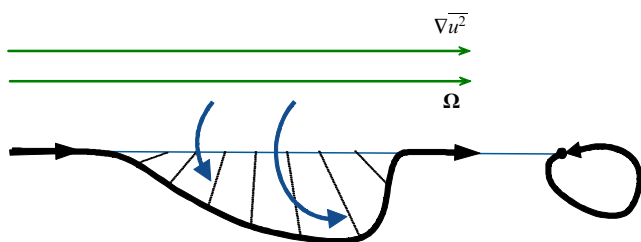


Рис. 10. Схема экспериментально обнаруженного α -эффекта.

временное усиление магнитного поля, однако затем, в силу измельчения масштаба, в действие вступает, пусть первоначально слабая, диссипация и магнитное поле затухает.

Для того чтобы реализовать астрофизическое динамо, необходимо дополнить действие дифференциального вращения каким-то иным фактором. В качестве этого фактора, как правило, выступает зеркальная асимметрия мелкомасштабной турбулентности или конвекции, хотя в принципе могут подойти и другие виды зеркальной асимметрии, скажем, зеркальная асимметрия мелкомасштабного магнитного поля. Впервые важность зеркальной асимметрии для работы динамо была осознана Штеенбеком, Краузе и Рэдлером [20], которые предложили параметризацию влияния этой асимметрии в виде знаменитого α -эффекта. Сама асимметрия может возникать, например, из-за действия силы Кориолиса на всплывающие и опускающиеся вихри в стратифицированной конвекции, хотя возможны и иные механизмы её возникновения. Практически все прагматически полезные модели астрофизических динамо развиты в рамках парадигмы о совместном действии дифференциального вращения (так называемый Ω -эффект) и α -эффекта либо, как предельный случай, действия только α -эффекта. Однако концепцию α -эффекта трудно проиллюстрировать какими-то соображениями из других областей физики просто потому, что в них эта зеркальная асимметрия не играет особой роли.

С другой стороны, α -эффект появляется при формулировке уравнения среднего (крупномасштабного) магнитного поля, которое и представляет первостепенный астрономический интерес. Если оставаться в рамках детального описания магнитного поля, то этот эффект не возникает. Сама по себе такая ситуация в физике достаточно обычна. Например, понятие температуры в молекулярно-кинетической теории газов возникает при осреднённом описании газа, а детальное его описание на языке отдельных молекул в принципе не требует явного введения этой величины. Конечно, в силу огромного числа молекул в макроскопических объёмах газа трудно демонстративно избегать использования температуры или иных родственных понятий. Однако в астрофизических динамо число конвективных (или турбулентных) ячеек далеко не достигает величин, сравнимых с числом Авогадро, так что современные компьютеры позволяют не работать с α -эффектом непосредственно. Дело осложняется и тем, что частные формы α -эффекта, в своё время предложенные немецкой школой и вошедшие в науку как формула Краузе, конечно, совершенно не обязаны исчерпывать всё многообразие возможностей. Совершенно аналогично простейшие формулы для вычисления, например, теплоёмкости не исчерпывают все возможные в этой области физические эффекты. Исторически специалистами в теории динамо были потрачены (и затрачиваются в настоящее время) огромные усилия, показывающие, как именно можно избежать при описании конкретных динамо использования α -эффекта и насколько сильно неадекватной может быть элементарная формула Краузе. Сами по себе эти работы, разумеется, бывают очень интересными, однако они не направлены на прояснение астрофизического контекста.

Дело осложняется дополнительно тем, что в моделях генерации магнитного поля Земли (так называемая задача геодинamo) исторически параметризация α -эффекта

использовалась гораздо реже, чем в астрофизических задачах. Вместо этого очень широко используется прямое численное моделирование уравнений магнитной гидродинамики, одновременно дающее распределение течений внутри жидкого внешнего ядра Земли и магнитное поле. Разумеется, такое развитие теории имело свои резоны — прежде всего, мы очень мало знаем о течениях внутри жидкого ядра Земли. Однако даже проверка того, содержит ли конкретное течение, полученное в ходе прямого численного моделирования, зеркально-асимметричную составляющую, и вычисление соответствующего α представляет собой сложную задачу, которая, как правило, не решается при интерпретации результатов.

Конечно, подобные дискуссии можно себе представить в разнообразных областях физики конденсированного состояния, однако полезность понятия, например, электрического сопротивления подтверждается обычно не общетеоретическими рассуждениями, а непосредственным измерением этого сопротивления. Специфика задачи динамо здесь состоит в том, что до самого последнего времени наблюдательная астрономия совершенно не располагала методами наблюдения α -эффекта и других крупномасштабных коэффициентов переноса, которые тоже возникают при изучении динамо (см. раздел 2). Проблема в том, что α -эффект выражается через корреляцию скорости и вихря, т.е. для его вычисления необходимо знать все три компоненты скорости. Однако в астрономии скорость, как правило, определяется по эффекту Доплера, а он даёт только компоненту скорости вдоль луча зрения. Лишь в самые последние годы солнечная астрономия нашла обходные пути для изучения зеркальной асимметрии солнечных МГД-течений в активных областях на Солнце. Непосредственно в обсуждаемом контексте это изучение так называемого закона Джоя, т.е. значимого отклонения линии, соединяющей центры солнечных пятен, входящих в биполярные группы, от широтного направления. Наличие такого отклонения было известно уже давно [119], но лишь в последнее время [120] объём данных в этой области стал достаточным для уверенного вычисления α -эффекта или его аналогов [121] по наблюдениям солнечных пятен. В целом такие наблюдения подтверждают базисные представления стандартных концепций астрофизических динамо, но эти представления, конечно, совершенно не исчерпывают ситуацию.

В связи с этим непосредственное лабораторное измерение α -эффекта, а также коэффициента турбулентной (конвективной) диффузии магнитного поля, с которым в литературе связаны не меньшие дискуссии, чем с α -эффектом, в течение десятилетий рассматривалось как чрезвычайно заманчивая, но совершенно несбыточная мечта. Напомним, что исторически динамо-эксперименты в Риге, приведшие в своём развитии к лабораторной реализации динамо, были инициированы предложением М. Штеенбека о подтверждении возможности α -эффекта в лаборатории.

В настоящее время можно констатировать, что как α -эффект, так и коэффициент турбулентной диффузии магнитного поля измерены в ходе лабораторных динамо-экспериментов (см. раздел 5) и полученные в них оценки соответствующих коэффициентов переноса вписываются в существующие концепции теории динамо. Следует особо подчеркнуть, что эти пионерские измере-

ния коэффициентов турбулентного переноса в потоках жидкого металла совершенно не означают исчерпания проблемы, а лишь отмечают появление возможности изучать её экспериментально. Проблема, например, в том, что механизмы возникновения зеркальной асимметрии в эксперименте и в астрофизике совершенно различны. Например, в астрофизических течениях ведущую роль при этом играет сжимаемость среды, тогда как жидкие металлы практически несжимаемы. Такого же характера претензии можно предъявить и к определению α из наблюдений, однако позитивные подвижки по сравнению с состоянием безнадёжности, характерным для предыдущих этапов исследования динамо, кажутся несомненными. Например, идея замены жидкого металла потоками плазмы кажется перспективной для решения обозначенной выше трудности со сжимаемостью.

Следующая по степени детализации моделей динамо болевая точка астрофизических дискуссий связана с оценкой предельной напряжённости магнитного поля, создаваемого механизмом динамо. Естественно, такая оценка так или иначе связана с некоторыми балансными соотношениями. Простейшая идея такого рода основана на законе сохранения энергии: энергия, которую неустойчивость может переработать в магнитную энергию, не должна превышать полную энергию, запасённую в системе. Эта оценка, несмотря на её очень приблизительный характер, во многих конкретных астрономических задачах даёт вполне разумные результаты: магнитное поле многих небесных тел действительно можно оценить из соображений равнораспределения магнитной энергии и кинетической энергии движений. Хитрость заключается, однако, в том, кинетическую энергию каких именно движений следует принимать во внимание. Дело в том, что, как правило, кинетическая энергия общего вращения небесного тела несопоставимо больше магнитной энергии, так что в оценке равнораспределения речь обычно идёт об энергии случайных движений, причём её выделение из полной кинетической энергии не является простой задачей. Например, вдоль радиуса конвективной зоны Солнца существенно меняется плотность, а оценка конвективной скорости в глубине конвективной зоны достаточно неопределённая.

В 1990-х годах было осознано, что оценка равнораспределения не раскрывает физики явления. Пионерскими здесь были статьи Вайнштейна, Катанео, Грузинова, Даймонда [122–124], однако современное понимание проблемы возникло после десятилетия ожесточённых дискуссий, которые мы не будем описывать во всех подробностях. Суть дела состоит в том, что запас кинетической энергии (прежде всего, энергии общего вращения) всегда более чем достаточен для того, чтобы создать желаемое магнитное поле, но динамо может прекратить свою работу потому, что окажется подавленным слабое звено цепи самовозбуждения магнитного поля — α -эффект.

Отметим, что коэффициент α имеет размерность скорости, причём скорость общего вращения типичной спиральной галактики порядка 250 км с^{-1} , среднеквадратичная скорость случайных движений порядка 10 км с^{-1} , а обычная оценка α -эффекта составляет 1 км с^{-1} . Естественно думать, что магнитные силы прежде всего подавляют малое α . С другой стороны, соображения симметрии заставляют сомневаться, что при оценке этого

подавления важно рассматривать баланс энергии: α является псевдоскаляром, а энергия — скаляром [125]. И действительно, оказывается, что при оценке подавления α гораздо более ограничительным, чем баланс энергии, оказывается баланс другой специфической для магнитной гидродинамики сохраняющейся величины [126] — магнитной спиральности, которая определяется как $\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x$, где $\mathbf{B}$ — магнитное поле, $\mathbf{A}$ — магнитный потенциал.

В силу того, что магнитный потенциал определён с точностью до калибровки, закон сохранения магнитной спиральности нелокальный: подходящим выбором калибровки плотность магнитной спиральности $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ в данной точке всегда можно обратить в нуль. С нелокальными законами сохранения работать, конечно, гораздо труднее, чем с локальным законом сохранения энергии. Тем не менее коллективными усилиями динамо-сообщества этому удалось научиться (см. обзор [127]). Отметим, что в этом месте ещё раз возникает идейная перекличка между теорией динамо и квантовой механикой. В последней, как показывает знаменитый опыт Ааронова — Бома, магнитный потенциал тоже играет гораздо более самостоятельную роль, чем в привычных областях физики. Можно сказать, что и здесь квантовая механика позволяет лучше понять классическую [128].

Для нас важно то, что непосредственное использование соображений о балансе магнитной спиральности для оценки магнитного поля, генерируемого механизмом динамо, даёт вовсе не поле равнораспределения, а существенно меньшую величину, причём отношение предельного магнитного поля к полю равнораспределения контролируется магнитным числом Рейнольдса, которое в астрофизических задачах может быть огромным. Положение спасает то, что магнитная спиральность в ходе генерации магнитного поля не просто сохраняется, но и переносится различными механизмами, поэтому, как выясняется в ходе детального анализа конкретных моделей, в итоге величина магнитного поля оказывается достаточно близкой к величине магнитного поля равнораспределения (см., например, обзор [127]). Отметим, что приоритетной работой, в которой впервые был поставлен вопрос об учёте баланса магнитной спиральности и её переносе, является работа [129], написанная в то время, когда один из её авторов — Н.И. Клиорин — был последним по времени аспирантом Зельдовича.

Естественно, непростые итоги дискуссии о подавлении спиральности хотелось бы подтвердить экспериментально и наблюдательно. Здесь в данный момент первенство за астрономическими наблюдениями. В результате целенаправленных многолетних усилий астрономов-солнечников разных стран удалось научиться (в рамках определённых допущений, неизбежных при интерпретации астрономических наблюдений) измерять плотность токовой спиральности магнитного поля (т.е. величину $\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}$, где $\mathbf{j}$ — электрический ток) в активных областях на Солнце, а по ней вычислять магнитную спиральность. Идея метода была высказана немецким астрономом Зеэхафером [130], близким к группе, разработавшей само понятие α -эффекта. Во внедрении идеи огромную роль сыграли работы группы китайских астрономов под руководством Х. Жанга [131], которые провели по единой методике мониторинг эволюции магнитной спиральности в активных областях на Солнце за два последовательных солнечных цикла. Хотелось бы

также отметить весьма позитивную роль Российского фонда фундаментальных исследований в организации обработки данных китайских астрономов. Поддержка фонда сделала возможным непосредственный доступ российских специалистов к наблюдательным данным в ходе их получения. В ходе этой работы сформировался интернациональный коллектив, в который, наряду со специалистами КНР и России, вошли специалисты Великобритании, Израиля, США и Японии. Усилиями этого коллектива восстановлена широтно-временная эволюция токовой (и магнитной) спиральности в ходе двух солнечных циклов [132] или, говоря астрономическим языком, построена бабочка-диаграмма токовой спиральности за два цикла. Детальное описание этих результатов выходит за рамки настоящего обзора, отметим лишь, что форма полученного распределения, по крайней мере в общих чертах, соответствует ожиданиям стандартной теории солнечного динамо [133, 134].

Поучительно отметить, что до построения широтно-временного распределения токовой спиральности по данным наблюдений специалистам по моделированию солнечного динамо не приходило в голову описать, как должно выглядеть это распределение согласно теории. Фактически первая попытка такого рода в наиболее простой модели солнечного динамо была сделана в контексте объяснения наблюдательных данных в работе [135], причём выяснилось, что грубые черты этого распределения предсказываются на основании соображений симметрии и других элементарных идей. Конечно, более позднее детальное сопоставление данных наблюдений и теории является гораздо более сложной задачей.

Динамо-эксперименты тоже, конечно, дают материал для изучения процессов нелинейного насыщения динамо, однако здесь мы, по-видимому, находимся в самом начале пути и методы сопоставления этих результатов с идеями, сформировавшимися при изучении астрофизических моделей, ещё предстоит найти. Видимо, это одно из перспективных направлений будущих исследований.

Дальнейшая детализация моделей природных динамо связана с их привязкой к конкретной структуре течений в небесных телах. Оказывается, что и здесь ситуация в самом грубом приближении является обзримой. Набор небесных тел, для которых крупномасштабные магнитные поля хорошо изучены, не так велик: это Солнце и близкие к нему по своим свойствам звёзды, Земля и некоторые планеты (и их спутники), спиральные галактики. В Солнце и в галактиках управляющие параметры динамо не очень сильно превышают свои критические значения, так что для ориентировки можно считать, что подавление работы динамо определяется воздействием растущего магнитного поля на α -эффект. В этих условиях в дисках галактик, в которых градиент угловой скорости параллелен плоскости диска, возникает монотонно растущее, а далее стабилизирующееся крупномасштабное магнитное поле. В сравнительно тонкой конвективной оболочке Солнца при градиенте угловой скорости, трансверсальном к границам оболочки, возникает периодическая (или квазипериодическая) магнитная конфигурация в виде бегущей вдоль оболочки волны магнитного поля, что и даёт известный солнечный цикл. Во внешнем ядре Земли ситуация более сложная, в этом случае чрезвычайно велика измеренная в естественных единицах скорость общего вращения. В самом деле, период вращения Солнца (около месяца)

естественно соотнести с периодом солнечного цикла (11 лет), а для Земли период её вращения (сутки) естественно соотнести с временем существенных изменений общего магнитного поля, которое никак не меньше тысяч лет. Исследования показывают, что в этих условиях магнитные силы могут существенно перестраивать крупномасштабные течения во внешнем ядре Земли. Так или иначе, на сравнительно небольших временных отрезках геомагнитное поле в первом приближении постоянно и вблизи поверхности Земли похоже на поле магнитного диполя, приблизительно параллельного оси вращения, однако палеомагнитные данные [136] показывают, что в ходе геологической истории направление этого диполя многократно (сотни раз) и очень быстро по геологическим меркам меняло свою ориентацию. Последовательность этих инверсий направления магнитного диполя производит впечатление случайной последовательности. Во всяком случае, она далека от периодичности.

Первые два режима работы природных динамо достаточно ожидаемы, и их можно соотнести с появлением в дисперсионных соотношениях комплексных корней с положительной действительной частью. Появление режимов с хаотическими инверсиями магнитного диполя общепризнано геологическим сообществом (см., например, [137]) и подкрепляется прямым численным моделированием в геодинamo [138], однако его экспериментальное подтверждение весьма желательно.

Замечательно, что все три типа временного поведения магнитных конфигураций, созданных механизмом динамо, обнаружены в эксперименте VKS в Кадараше (см. раздел 4). Конечно, этот эксперимент не воспроизводит непосредственно режимы динамо ни в одном из обсуждаемых типов небесных тел, однако экспериментальное подтверждение принципиальной возможности режима, напоминающего поведение геомагнитного поля в ходе геологической истории, является фундаментальным научным достижением.

Мы можем констатировать, что уже первые динамо-эксперименты существенно прояснили ряд трудных вопросов, возникших при изучении явления динамо астрофизическими методами. Существующие проекты будущих динамо-экспериментов дают надежду на то, что в обозримом будущем появятся лабораторные реализации динамо, основанных на совместном действии дифференциального вращения и α -эффекта.

7. Успехи вычислительных экспериментов

Проблематика динамо-экспериментов имеет ещё один необычный аспект. В наше время трудно удивить применением методов вычислительной физики (компьютерного моделирования) для решения физических задач, однако при изучении динамо компьютерный эксперимент занимает совершенно особое место. Дело не столько в объёме компьютерных результатов в общем наборе сведений о динамо — скажем, квантовая химия тоже полна всевозможных численных результатов. Однако вряд ли кто-нибудь станет серьёзно сомневаться, что полезным введением в этот предмет являются стандартные учебники по квантовой механике. Образцовым примером такого учебника является *Квантовая механика* Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, где численные результаты занимают очень скромное место, зато широко представлены разнообразные простые модели

квантово-механических систем, а точно или приближённо решаемые задачи о них являются основой для интерпретации численных результатов квантовой химии.

Формальная аналогия с квантовой механикой очень полезна при работе с моделями динамо (см., например, [139]), однако численные методы занимают при изучении динамо совсем другое положение. Исторически получилось так, что теория динамо развивалась параллельно с развитием вычислительной физики, так что сложность задач динамо росла приблизительно параллельно с ростом возможностей вычислительной физики. В итоге на каждом этапе развития физики не были вынуждены сначала выдумывать модельные, точно или приближённо решаемые задачи, и обращаться к численным методам лишь по исчерпанию этих возможностей. Кульминация этого параллельного развития пришлась на 1990-е годы, когда прямые численные методы в геодинamo достигли того уровня, на котором можно было не обращаться к моделям среднего поля или к каким-то иным упрощённым моделям, а описывать динамо на языке полных уравнений магнитной гидродинамики и получать при этом физически правдоподобные решения, разумно воспроизводящие наблюдения [140]. В результате на некоторое время среди специалистов по теории динамо распространилась иллюзия, что изучение динамо можно вести, опираясь лишь на вычислительный эксперимент и астрономические наблюдения, а использование традиционных методов теоретической физики является излишним. Особенно чувствительно это изменение научной атмосферы воспринималось в нашей стране, поскольку в тот момент отечественная физика не располагала ни техническими возможностями для решения численных задач такого класса, ни кадрами физиков, владеющими на соответствующем уровне численными методами. За прошедшие годы положение в значительной степени нормализовалось: в Россию пришли суперкомпьютеры, а российские физики научились на них работать (здесь нужно прежде всего отметить работы М.Ю. Решетняка, например [141], по прямому численному моделированию геодинamo).

Одновременно пришла и более сбалансированная оценка возможностей прямого численного моделирования. Выяснилось, что достижение реалистичных параметров космической плазмы — задача если и выполнимая, то в отдалённом и неопределённом будущем. Даже имея необходимые компьютерные ресурсы и программное обеспечение, для получения методами прямого численного моделирования реалистичных моделей динамо в конкретных небесных телах необходим огромный набор начальных или иных дополнительных условий, тогда как доступная из наблюдений информация очень скупа и относится обычно к совершенно иным величинам. Непосредственная демонстрация того, что полученные результаты модельно независимы, обычно требует объёма вычислений, выходящего за все разумные пределы. Иными словами, вычислительный эксперимент обладает сравнимым с лабораторным экспериментом набором недостатков, а эти недостатки как раз и восполняются методами теоретической физики.

К настоящему моменту теоретические методы в различных областях изучения динамо развиты очень неравномерно. Лучше всего обстоит дело в моделях галактического динамо [142]. Удалось найти сравнительно простые и адекватные имеющейся наблюдательной

информации методы описания галактических магнитных полей, оперирующие только величинами, которые, по крайней мере потенциально, являются наблюдаемыми. При этом удаётся отказаться от описания деталей строения магнитного поля поперёк галактического диска. Соответствующую координату обычно обозначают z , так что такие модели получили не очень литературное название "no z -models" [143, 144]. Использование прямого численного моделирования в галактическом динамо ограничено теми сравнительно редкими задачами, в которых подобная детализация действительно оправдана.

Упрощённые модели динамо (например, динамо Паркера) широко используются и в моделях звёздных динамо, а огромный объём того, что известно о Солнце, делает оправданным широкое использование прямого численного моделирования, хотя и модели среднего поля занимают здесь достойное место (см., например, [145]). Напротив, в моделях геодинamo лишь с большим трудом удаётся найти хоть какие-то простые и доступные исследования методы (см., например, [146]), а информация о строении жидкого внешнего ядра Земли очень скупа.

Несмотря на то что "героическая эпоха" методов прямого численного моделирования в динамо, видимо, уже позади, роль численных методов в динамо огромна (см., например, [147, 148]).

В рамках данного обзора мы рассматриваем лишь два аспекта применения методов вычислительной физики в динамо. Во-первых, непосредственное применение прямого численного моделирования даёт наряду с тем, что нас действительно интересует, массу побочных малоинтересных результатов. Например, мы хотели бы знать крупномасштабное магнитное поле, скажем, Солнца и усреднённые данные о его мелкомасштабных магнитных полях, поскольку конкретная реализация случайного мелкомасштабного поля, которая неизбежно получается прямыми методами, всё равно непредсказуема. До некоторой степени отстроиться от такой паразитной информации можно методами описания случайных компонент решения с помощью каскадных моделей (см. далее раздел 7.2). С другой стороны, даже имея полное решение уравнений магнитной гидродинамики, нужно ещё научиться измерять интересующие нас величины (скажем, α -эффект). Наивные методы быстро упираются в разнообразные трудности [149], так что требуется развитие специальной методики, получившей название метода тестового поля.

7.1. Метод тестового поля

Мы подробно остановились на теоретических и экспериментальных результатах решения проблемы определения транспортных коэффициентов, нахождения условий возникновения эффектов динамо среднего поля. Как выясняется, теория на сегодня наиболее эффективна при малых числах Рейнольдса, а проведение натурных измерений турбулентной ЭДС связано с возможностями постановки "чистого" эксперимента и возможностями измерительных методов в жидких металлах. Проблема воспроизведения согласованных результатов стоит очень остро. В этой ситуации на помощь могут прийти прямые численные методы. В последнее время был сформулирован и опробован на большом классе задач так называемый метод тестового поля (test field method)

[45, 46]. Ограничения по числам Рейнольдса, естественно, остаются, но они на 2–3 порядка слабее, чем в теоретических расчётах, использующих различные приёмы сглаживания. В то же время открывается полная свобода постановки вычислительного эксперимента и анализа полученных результатов.

Идея метода состоит в том, что расчёт делится на два потока: основной и тестовый. В основном потоке ведётся решение полной системы уравнений магнитной гидродинамики. В тестовом расчёте решается только уравнение индукции (3), в котором поле скорости берётся из основного расчёта, а среднее магнитное поле выбирается исходя из поставленной цели вычислительного эксперимента — вычисления той или иной компоненты тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в выражении (8). Решение, полученное в тестовом потоке, позволяет вычислить $\mathcal{E}$, определяемое выражением (5), а значит, и выделить значение любого из коэффициентов в параметризации (10). Отметим ещё раз, что среднее магнитное поле как бы наложено извне, т.е. задано изначально. Однако принципиальным требованием к методу является независимость результатов от конкретного выбора тестового поля. Изначально метод разрабатывался для кинематического режима, когда магнитное поле растёт экспоненциально, но остаётся достаточно малым для того, чтобы не оказывать воздействия на поле скорости, однако выяснилось, что метод работает и в нелинейном режиме. Это позволяет проверять теоретические модели подавления турбулентных эффектов (quenching). Метод тестового поля был успешно применён для определения турбулентной ЭДС в условиях однородной изотропной турбулентности с учётом спиральности [150], сдвига [151] и с учётом обоих эффектов [152]. В условиях фоновой МГД-турбулентности был получен вклад перекрёстной спиральности в генерацию среднего поля [153].

7.2. Комбинированные модели

Развитие компьютерной базы позволило методам прямого численного моделирования приблизиться к той степени пространственного и временного разрешения, которая позволяет воспроизвести принципиально важные свойства динамо-процесса и прийти на помощь в решении теоретических проблем. Однако значения используемых чисел Рейнольдса остаются по-прежнему очень далёкими от значений, характерных для астрофизических объектов. Важно отметить, что увеличение разрешения на порядок приводит к росту числа узлов на три порядка и уменьшению шага по времени на два порядка (если ориентироваться на диффузионное время). В результате вычислительная трудоёмкость вырастает в 10^5 раз. Делать прогнозы относительно производительности вычислительной техники — не наша задача, но если следовать известному эмпирическому закону, что каждые 10 лет производительность компьютеров растёт примерно на порядок, то сделать такой расчёт будет реалистично лишь через 50 лет. Поэтому ближайшие перспективы применения прямых численных методов, скорее всего, будут связаны с усложнением физических моделей среды и более детальным анализом численных результатов.

Отметим, что переход к большим значениям чисел Рейнольдса — это не только наращивание компьютерных ресурсов, но и необходимость кардинально совершенствовать вычислительные алгоритмы и методы

интерпретации результатов. Таким образом, пытаясь моделировать многомасштабный процесс динамо, мы вынуждены отказаться от воспроизведения турбулентного потока во всей полноте и из огромного числа степеней свободы, которые формально необходимы для описания мелкомасштабного поля, оставить лишь относительно небольшое число переменных, описывающих поведение мелкомасштабных полей. Идея совмещения моделей динамо средних полей с динамическими моделями мелкомасштабной турбулентности легла в основу комбинированных моделей динамо, первая из которых была рассмотрена в [154].

Комбинированная модель, также называемая многомасштабной, представляет собой комбинацию модели динамо крупномасштабного магнитного поля в парадигме теории среднего поля и динамической маломодовой модели мелкомасштабного динамо. На роль модели крупномасштабного поля имеется множество кандидатов. Простейшей является модель α^2 -динамо, записываемая в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд тороидальной и полоидальной компонент крупномасштабного магнитного поля [154, 155]. Примером более продвинутой модели, воспроизводящей динамику профиля крупномасштабного поля, является модель динамо в тонком галактическом диске, которая представляет собой одномерные уравнения в частных производных [156, 157]. Также представляется вполне разумным использование для описания крупномасштабного магнитного поля квазидвумерных моделей, например уже упоминавшихся "по z -models", учёт в которых мелкомасштабного поля также ведёт к реалистичному воспроизведению магнитного поля [158]. Главное, что все эти модели включают лишь крупномасштабные переменные, а влияние мелкомасштабного поля выражается через турбулентную ЭДС. Для описания динамики мелкомасштабных турбулентных полей наиболее естественными и удобными в расчётах являются каскадные модели МГД-турбулентности.

Аппарат каскадных моделей турбулентности был создан и развивался начиная с 1970-х годов при активном участии отечественных учёных, принадлежавших школе Колмогорова–Обухова. Каскадные уравнения заменяют сложные уравнения в частных производных относительно простой и доступной для численного исследования даже при очень больших значениях чисел Рейнольдса системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно невысокого порядка (несколько десятков переменных, характеризующих пульсации поля скорости и магнитного поля в различных масштабах, вплоть до диссипативных). Каскадные уравнения позволяют следить за динамикой спектральной плотности энергии пульсаций обоих полей, а также вычислять спектральные потоки и другие статистические характеристики, влияющие на крупномасштабные поля. Принципы построения каскадных уравнений основаны на строгом выполнении всех законов сохранения, справедливых для полных уравнений. Обобщение каскадных моделей на случай магнитной гидродинамики [159–161] показало их высокую эффективность в изучении спектральных свойств МГД-турбулентности. В настоящее время удаётся в достаточной степени формализовать вывод каскадных уравнений, провести классификацию моделей по их физическим свойствам и обосновать выбор модели для решения конкретной задачи. Систематиче-

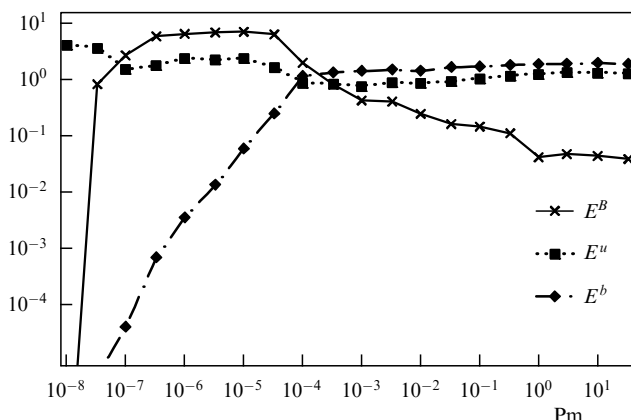


Рис. 11. Зависимость энергии крупномасштабного поля E^B , мелкомасштабной кинетической E'' и магнитной E^b энергии от магнитного числа Прандтля Pm при $Re = 10^6$ в комбинированной модели α^2 -динамо. (Из работы [155].)

ское изложение этого материала с описанием наиболее значимых результатов, полученных при изучении МГД-турбулентности, можно найти в обзоре [162].

Ключевым элементом комбинированной модели являются соотношения, связывающие модели крупно- и мелкомасштабного поля. Выражения для транспортных коэффициентов, получаемые в теории среднего поля (см. раздел 2.3), имеют вид интегралов корреляционных характеристик по спектру, что естественным образом переписывается через сумму по каскадным переменным. Для того чтобы образовать замкнутую систему, влияние крупномасштабных переменных должно быть введено в каскадные уравнения. Конкретная разработка искомого сопряжения зависит от специфики рассматриваемой задачи, однако ряд возникающих при этом проблем носит общий характер и, как правило, решается с использованием законов сохранения для системы в целом [157]. Полученная комбинированная модель позволяет изучать нелинейную динамику магнитных полей в очень широком диапазоне параметров. В качестве примера на рис. 11 показан результат исследования с помощью комбинированной модели эффективности α^2 -динамо при различных значениях магнитного числа Прандтля: диапазон рассмотренных значений магнитного числа Прандтля составил 10 порядков! Построение комбинированных моделей динамо представляется очень перспективным направлением, в котором выдающиеся теоретические идеи могут найти своё место в рамках не менее выдающихся вычислительных подходов.

8. Заключение

Оглядываясь на представленную в этом обзоре историю изучения процессов генерации магнитных полей в движущейся проводящей жидкости за несколько последних десятилетий, мы видим, какой значительный путь прошла за это время наша область науки. Сам оборот "теория динамо", который по традиции применяется как название этой области, стал не вполне адекватным, поскольку у данного предмета возникли составляющие лабораторного и вычислительного эксперимента, которые постепенно становятся вровень с его теоретической составляющей. В нашем обзоре мы попытались проде-

монстрировать, как первоначальные теоретические идеи были подкреплены результатами усилий экспериментаторов и "численников". Именно эти люди сейчас ставят новые вопросы и задачи.

Десятилетия, которым посвящён обзор, были тяжёлыми для отечественной науки. Как нам кажется, в изучении процессов динамо отечественная наука смогла достойно пройти через эти испытания. Современное поколение смогло продолжить традиции, заложенные поколением Зельдовича, и открыло перспективы поиска в будущем точек соприкосновения динамо с интересами промышленности. Внушительный список литературы отражает откровенно международный характер динамо-сообщества, где российские исследователи занимают признанные позиции. Конечно, было бы наивным предполагать, что будущее открывает только радужные перспективы, однако определённый задел создан и есть, что развивать.

Работа была поддержана проектами РФФИ 11-01-00423-а, 12-02-00170-а, проектами РФФИ и администрации Пермского края (№ 11-01-96031-а, МИГ-245), грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных — докторов наук МД-520.2013.2.

Список литературы

1. Zel'dovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1983) [Зельдович Я Б, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *Магнитные поля в астрофизике* (М. — Ижевск: Инст. компьютер. исслед., РХД, 2006)]
2. Baliunas S L et al. *Astrophys. J.* **438** 269 (1995)
3. Fermi E *Phys. Rev.* **75** 1169 (1949)
4. Chandrasekhar S, Fermi E *Astrophys. J.* **118** 113 (1953)
5. Beck R et al. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34** 155 (1996)
6. Larmor J (Sir), in *Report of the 87th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Bournemouth, September 9–13, 1919* (London: John Murray, 1920) p. 159; <http://www.biodiversitylibrary.org/item/96028>
7. Вайнштейн С И, Зельдович Я Б *УФН* **106** 431 (1972) [Vainshtein S I, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Usp.* **15** 159 (1972)]
8. Зельдович Я Б и др. *УФН* **152** 3 (1987) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Usp.* **30** 353 (1987)]
9. Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *УФН* **152** 263 (1987) [Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A *Sov. Phys. Usp.* **30** 494 (1987)]
10. Рузмайкин А А *УФН* **150** 469 (1986) [Ruzmaikin A A *Sov. Phys. Usp.* **29** 1069 (1986)]
11. Молчанов С А, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *УФН* **145** 593 (1985) [Molchanov S A, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Sov. Phys. Usp.* **28** 307 (1985)]
12. Северный А Б *УФН* **88** 3 (1966) [Severnyi A B *Sov. Phys. Usp.* **9** 1 (1966)]
13. Childress S, Gilbert A D *Stretch, Twist, Fold: the Fast Dynamo* (Berlin: Springer, 1995)
14. Alfvén H *Rev. Geophys.* **15** 271 (1977)
15. Пономаренко Ю Б *Журн. прикл. мех. мех. физ.* (6) 47 (1973) [Ponomarenko Yu B *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **14** 775 (1973)]
16. Zel'dovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *The Almighty Chance* (World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 20) (Singapore: World Scientific, 1990) p. 316
17. Казанцев А П *ЖЭТФ* **53** 1806 (1967) [Kazantsev A P *Sov. Phys. JETP* **26** 1031 (1968)]
18. Kraichnan R H, Nagarajan S *Phys. Fluids* **10** 859 (1967)
19. Parker E N *Astrophys. J.* **122** 293 (1955)
20. Steenbeck M, Krause F, Rädler K-H *Z. Naturforsch. A* **21** 369 (1966)
21. Rädler K-H, Brandenburg A *Phys. Rev. E* **77** 026405 (2008)
22. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **31** 154 (1956) [Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **4** 460 (1957)]

23. Zel'dovich Ya B et al. *J. Fluid Mech.* **144** 1 (1984)
24. Арнольд В И и др. *ДАН СССР* **266** 1357 (1982) [Arnol'd V I et al. *Sov. Phys. Dokl.* **27** 814 (1982)]
25. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **7** 1466 (1937)
26. Kogan V R, Kolokolov I V, Lebedev V V *J. Phys. A Math. Theor.* **43** 182001 (2010)
27. Велихов Е П *ЖЭТФ* **36** 1399 (1959) [Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **9** 995 (1959)]
28. Велихов Е П *Письма в ЖЭТФ* **82** 785 (2005) [Velikhov E P *JETP Lett.* **82** 696 (2005)]
29. Кичатинов Л Л *УФН* **175** 475 (2005) [Kichatinov L L *Phys. Usp.* **48** 449 (2005)]
30. Krause F, Rädler K-H *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1980)
31. Rädler K-H, Kleorin N, Rogachevskii I *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **97** 249 (2003)
32. Rädler K-H, Stepanov R *Phys. Rev. E* **73** 056311 (2006)
33. Rädler K-H *Monatsber. Deutsch. Akad. Wissenschaft. Berlin* **11** 194 (1969)
34. Moffatt H K, Proctor M R E *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **21** 265 (1982)
35. Tobias S M, Cattaneo F *Nature* **497** 463 (2013)
36. Weiss N O *Proc. R. Soc. Lond. A* **293** 310 (1966)
37. Степанов Р А *Астрон. журн.* **76** 243 (1999) [Stepanov R A *Astron. Rep.* **43** 205 (1999)]
38. Brandenburg A, Urpin V *Astron. Astrophys.* **332** L41 (1998)
39. Rädler K-H, Brandenburg A *Astron. Nachr.* **331** 14 (2010)
40. Yoshizawa A *Phys. Fluids B* **2** 1589 (1990)
41. Yoshizawa A *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **45** 129 (1993)
42. Sur S, Brandenburg A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **399** 273 (2009)
43. Yokoi N *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **107** 114 (2013)
44. Krause F, Rädler K H, in *Ergebnisse der Plasmaphysik und der Gaselektronik* (Eds R Rompe, M Steenbeck) Vol. 2 (Berlin: Akademie-Verlag, 1971) p. 1
45. Schrinner M et al. *Astron. Nachr.* **326** 245 (2005)
46. Schrinner M et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **101** 81 (2007)
47. Rädler K-H, Rheinhardt M *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **101** 117 (2007)
48. Gailitis A et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 4365 (2000)
49. Gailitis A et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 3024 (2001)
50. Stieglitz R, Müller U *Phys. Fluids* **13** 561 (2001)
51. Monchaux R et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 044502 (2007)
52. Ravelet F et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 074502 (2008)
53. Fuchs H, Rädler K-H, Rheinhardt M *Astron. Nachr.* **320** 129 (1999)
54. Bullard E (Sir) *Math. Proc. Cambr. Philos. Soc.* **51** 744 (1955)
55. Bourgoin M et al. *New J. Phys.* **8** 329 (2006)
56. Herzenberg A *Philos. Trans. R. Soc. London A* **250** 543 (1958)
57. Brandenburg A, Moss D, Soward A M *Proc. R. Soc. Lond. A* **454** 1283 (1998)
58. Lowes F J, Wilkinson I *Nature* **198** 1158 (1963)
59. Ruzmaikin A, Sokoloff D, Shukurov A *J. Fluid Mech.* **197** 39 (1988)
60. Gilbert A D *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **44** 241 (1988)
61. Гаилитис А, Фрейберг Я *Магнитная гидродинамика* **12** (2) 3 (1976) [Gailitis A, Freiberg Ya *Magnetohydrodynamics* **12** 127 (1976)]
62. Соловьев А А *ДАН СССР* **282** 44 (1985)
63. Степанов Р А, Фрик П Г "Винтовое МГД-динамо в реальных потоках в трубах", в сб. *Гидродинамика: Сб. научных трудов ПГУ* Вып. 12 (Пермь: Пермский гос. ун-т, 1999) с. 240
64. Stefani F, Gerbeth G, Gailitis A, in *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows* (Fluid Mechanics and Its Applications, Vol. 51, Eds A Alemany, Ph Marty, J P Thibault) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999) p. 31
65. Лупян Е А, Шукуров А М *Магнитная гидродинамика* **28** (3) 29 (1992) [Lupyan E A, Shukurov A *Magnetohydrodynamics* **28** 234 (1992)]
66. Гаилитис А К и др. *Магнитная гидродинамика* **23** (4) 3 (1987) [Gailitis A K et al. *Magnetohydrodynamics* **23** 349 (1987)]
67. Денисов С А и др. *Докл. РАН* **365** 478 (1999) [Denisov S A et al. *Dokl. Phys.* **44** 231 (1999)]
68. Денисов С А и др. *Изв. РАН Механика жидкости и газа* (5) 73 (2001) [Denisov S A et al. *Fluid Dynamics* **36** 734 (2001)]
69. Frick P et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 143 (2002)
70. Noskov V et al. *Eur. Phys. J. B* **41** 561 (2004)
71. Stepanov R et al. *Phys. Rev. E* **73** 046310 (2006)
72. Frick P et al. *Magnetohydrodynamics* **48** 31 (2012)
73. Степанов Р А, Чупин А В, Фрик П Г *Вычислительная механика сплошных сред* **1** (1) 109 (2008)
74. Dobler W, Frick P, Stepanov R *Phys. Rev. E* **67** 056309 (2003)
75. Chupin A, Frick P, Stepanov R *Astron. Nachr.* **332** 11 (2011)
76. Денисов С А и др. *Письма в ЖЭТФ* **88** 198 (2008) [Denisov S A et al. *JETP Lett.* **88** 167 (2008)]
77. Khalilov R, Kolesnichenko I, Stepanov R *Magnetohydrodynamics* **49** 73 (2013)
78. Frick P et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 184502 (2010)
79. Noskov V et al. *Phys. Rev. E* **85** 016303 (2012)
80. Rädler K-H, Stepanov R *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **100** 379 (2006)
81. Steenbeck M et al. *Monatsber. Deutsch. Akad. Wissenschaft. Berlin* **9** 714 (1967)
82. Штеенбек М, Краузе Ф *Магнитная гидродинамика* **3** (3) 19 (1967) [Steenbeck M, Krauze F *Magnetohydrodynamics* **3** 8 (1967)]
83. Гаилитис А К *Магнитная гидродинамика* **3** (3) 45 (1967) [Gailitis A *Magnetohydrodynamics* **3** 23 (1967)]
84. Roberts G O *Philos. Trans. R. Soc. London A* **271** 411 (1972)
85. Busse F H *Geophys. J. Int.* **42** 437 (1975)
86. Буссе Ф и др. *Магнитная гидродинамика* **32** 259 (1996) [Busse F et al. *Magnetohydrodynamics* **32** 235 (1996)]
87. Rädler K-H et al. *Studia Geophys. Geodaetica* **42** 224 (1998)
88. Tilgner A *Phys. Lett. A* **226** 75 (1997)
89. Rädler K-H et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 41 (2002)
90. Rädler K-H et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 73 (2002)
91. Stieglitz R, Müller U *Magnetohydrodynamics* **38** 27 (2002)
92. Colgate S A et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 129 (2002)
93. Colgate S A *Astron. Nachr.* **327** 456 (2006)
94. Forest C B et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 107 (2002)
95. Spence E J et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 055002 (2006)
96. Spence E J et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 164503 (2007)
97. Nornberg M D et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 044503 (2006)
98. Marié L et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 163 (2002)
99. Marié L et al. *Eur. Phys. J. B* **33** 469 (2003)
100. Odier P, Pinton J-F, Fauve S *Phys. Rev. E* **58** 7397 (1998)
101. Bourgoin M et al. *Magnetohydrodynamics* **40** 3 (2004)
102. Ravelet F et al. *Phys. Fluids* **17** 117104 (2005)
103. Pétrélis F et al. *Phys. Rev. Lett.* **90** 174501 (2003)
104. Volk R et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 074501 (2006)
105. Stefani F et al. *Eur. J. Mech. B* **25** 894 (2006)
106. Giesecke A, Stefani F, Burguete J *Phys. Rev. E* **86** 066303 (2012)
107. Gallet B, Pétrélis F, Fauve S *J. Fluid Mech.* **727** 161 (2013)
108. Cardin P et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 177 (2002)
109. Nataf H-C et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **100** 281 (2006)
110. Gillet N et al. *J. Fluid Mech.* **580** 83 (2007)
111. Schmitt D et al. *J. Fluid Mech.* **604** 175 (2008)
112. Nataf H-C *Comptes Rendus Physique* **14** 248 (2013)
113. Rieutord M et al. *Phys. Rev. E* **86** 026304 (2012)
114. Lathrop D, in *549. Wilhelm und Else Heraeus-Seminar "Liquid Metal MHD", 15th–18th October, 2013, Physikzentrum Bad Honnef, Germany*
115. Reighard A B, Brown M R *Phys. Rev. Lett.* **86** 2794 (2001)
116. Рузмайкин А А, Соколов Д Д, Шукуров А М *Магнитные поля галактик* (М.: Наука, 1988)
117. Parker E N *Conversations on Electric and Magnetic Fields in the Cosmos* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2007) [Паркер Ю *Беседы об электрических и магнитных полях в космосе* (М.–Ижевск: Инст. компьют. исслед., РХД, 2010)]
118. Hughes D W, Proctor M R E, Cattaneo F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **414** L45 (2011)
119. Hale G E et al. *Astrophys. J.* **49** 153 (1919)
120. Stenflo J O, Kosovichev A G *Astrophys. J.* **745** 129 (2012)
121. Tlatov A et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **432** 2975 (2013)
122. Cattaneo F, Vainshtein S I *Astrophys. J. Lett.* **376** L21 (1991)

123. Vainshtein S I, Cattaneo F *Astrophys. J.* **393** 165 (1992)
124. Gruzinov A V, Diamond P H *Phys. Rev. Lett.* **72** 1651 (1994)
125. Kleorin N et al. *Astron. Astrophys.* **361** L5 (2000)
126. Moffatt H K *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978) [Моффат Г К *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде* (М.: Мир, 1980)]
127. Brandenburg A, Subramanian K *Phys. Rep.* **417** 1 (2005)
128. Парадоксов П У Ф *H* **89** 707 (1966) [Paradoksov P *Sov. Phys. Usp.* **9** 618 (1967)]
129. Kleorin N I, Ruzmaikin A A *Astron. Nachr.* **305** 265 (1984)
130. Seehafer N *Solar Phys.* **125** 219 (1990)
131. Bao S, Zhang H *Astrophys. J. Lett.* **496** L43 (1998)
132. Zhang H et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.* **402** L30 (2010)
133. Zhang H et al. *Astrophys. J.* **751** 47 (2012)
134. Pipin V V et al. *Astrophys. J.* **768** 46 (2013)
135. Шу Х и др. *Астрон. журн.* **86** 182 (2009) [Xu H et al. *Astron. Rep.* **53** 160 (2009)]
136. Gradstein F M, Ogg J G, Smith A G (Eds) *A Geologic Time Scale 2004* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005)
137. Печерский Д М, Соколов Д Д (Сост.) "Палеомагнитный словарь" (2011), <http://paleomag.ifz.ru/books.html>
138. Olson P L et al. *Phys. Earth Planet. Inter.* **180** 66 (2010)
139. Galitsky V M, Sokoloff D D *Acta Astron. Geophys. Univ. Comenianae* **19** 1 (1997)
140. Glatzmaier G A et al. *Nature* **401** 885 (1999)
141. Hejda P, Reshetnyak M *Phys. Earth Planet. Inter.* **177** 152 (2009)
142. Ruzmaikin A A, Shukurov A M, Sokoloff D D *Magnetic Fields of Galaxies* (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 133) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988)
143. Subramanian K, Mestel L *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265** 649 (1993)
144. Moss D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275** 191 (1995)
145. Pipin V V, in *Solar and Astrophysical Dynamos and Magnetic Activity, Proc. of the International Astronomical Union (IAU Symp., Vol. 294, Eds A G Kosovichev, E de Gouveia Dal Pino, Y Yan)* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013) p. 375
146. Собко Г С и др. *Геомagn. и астрономия* **52** 271 (2012) [Sobko G S et al. *Geomagn. Aeron.* **52** 254 (2012)]
147. Brandenburg A *Space Sci. Rev.* **144** 87 (2009)
148. Brandenburg A, Sokoloff D, Subramanian K *Space Sci. Rev.* **169** 123 (2012)
149. Brandenburg A, Sokoloff D *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **96** 319 (2002)
150. Sur S, Brandenburg A, Subramanian K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **385** L15 (2008)
151. Brandenburg A et al. *Astrophys. J.* **676** 740 (2008)
152. Mitra D et al. *Astron. Astrophys.* **495** 1 (2009)
153. Rheinhardt M, Brandenburg A *Astron. Astrophys.* **520** A28 (2010)
154. Соколов Д Д, Фрик П Г *Астрон. журн.* **80** 556 (2003) [Sokoloff D D, Frick P G *Astron. Rep.* **47** 511 (2003)]
155. Frick P, Stepanov R, Sokoloff D *Phys. Rev. E* **74** 066310 (2006)
156. Stepanov R, Frick P, Sokoloff D *Astron. Nachr.* **327** 481 (2006)
157. Степанов Р А, Фрик П Г, Соколов Д Д *Вычислительная механика сплошных сред* **1** (4) 97 (2008)
158. Moss D et al. *Astron. Astrophys.* **537** A68 (2012)
159. Фрик П Г *Магнитная гидродинамика* **20** (3) 48 (1984) [Frick P G *Magnetohydrodynamics* **20** 262 (1984)]
160. Frick P, Sokoloff D *Phys. Rev. E* **57** 4155 (1998)
161. Мизева И А, Степанов Р А, Фрик П Г *Докл. РАН* **424** 479 (2009) [Mizeva I A, Stepanov R A, Frick P G *Dokl. Phys.* **54** 93 (2009)]
162. Plunian F, Stepanov R, Frick P *Phys. Rep.* **523** 1 (2013)

Dynamo: from an astrophysical model to laboratory experiments

D.D. Sokoloff

Department of Physics, Lomonosov Moscow State University,
 Leninskie Gory 1, 119991 Moscow, Russian Federation
 Tel. +7 (495) 939 10 33, +7 (945) 939 23 46
 E-mail: sokoloff.dd@gmail.com

R.A. Stepanov

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 ul. Akademika Koroleva 1, 614013 Perm, Russian Federation
 E-mail: rodion@icmm.ru

Perm National Research Polytechnic University,
 Komsomol'skii prosp. 29, 614990 Perm, Russian Federation

P.G. Frick

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 ul. Akademika Koroleva 1, 614013 Perm, Russian Federation
 E-mail: frick@icmm.ru

Magnetic field generation and evolution in celestial bodies — the subject matter of the theory of the dynamo — held Ya.B. Zeldovich's interest for years. Over the time since then the study of the dynamo process has developed from a part of theoretical astro- and geophysics to a self-contained domain of physics, with the possibility of laboratory dynamo experiments. We give some theoretical background and discuss laboratory dynamo experiments (including those conducted in Russia) as well as their impact on dynamo theory and its astrophysical applications.

PACS numbers: 07.55.Db, **41.20. – q**, **91.25. – r**, 96.12.Hg, 96.60.Hv

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201403g.0313

Bibliography — 162 references

Received 1 October 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (3) 313–335 (2014)

Physics – Uspekhi **57** (3) (2014)

НОВОСТИ ФИЗИКИ В СЕТИ INTERNET

(по материалам электронных препринтов)

PACS number: 01.90.+g

DOI: 10.3367/UFN.0184.201403h.0336

1. Наблюдение шаровой молнии

Исследователи из Университета Northwest Normal University, (Ланьчжоу, Китай) J. Cen, P. Yuan и S. Xue впервые выполнили скоростную съёмку и измерили спектр излучения шаровой молнии (ШМ), которая случайно попала в поле зрения аппаратуры во время изучения обычных молний. Наблюдения велись на горном плато Цинхай на высоте 2530 м над уровнем моря на северо-западе Китая с помощью двух бесщелевых спектрографов, оборудованных видеокамерой и скоростной фотокамерой и работающих в диапазоне 0,4–1 мкм. ШМ, возникшая при грозовом разряде между облаком и землёй вблизи нижнего основания разрядного канала, наблюдалась с расстояния около 900 метров в течение 1,64 с. ШМ имела почти сферическую форму с нарастающим к центру профилем светимости и перемещалась с поперечной скоростью $8,6 \text{ м с}^{-1}$. В спектре ШМ наряду с континуумом видны были линии кремния, железа и кальция — элементов, которые обычно присутствуют в грунте. Это говорит в пользу модели ШМ, предложенной J. Abrahamson и J. Dinniss в 2000 г. В их теории ШМ светится за счёт окисления наночастиц кремния, которые образовались в реакции $\text{SiO}_2 + 2\text{C} \rightarrow \text{Si} + 2\text{CO}$ в веществе грунта под действием волокнистого электрического разряда. Напоминающие ШМ светящиеся кремниевые шары действительно были получены в лабораторных экспериментах, см. *УФН* 180 218 (2010). В эволюции ШМ выделяются три стадии: сначала светимость и размер быстро уменьшались; на второй продолжительной стадии характеристики ШМ были почти стабильными, и видимый диаметр свечения составлял около 5 м; на последнем этапе цвет изменялся от белого до красного, а светимость и размер медленно уменьшались до полного исчезновения ШМ. Интересно, что на втором этапе светимость ШМ испытывала колебания с частотой 99,4 Гц, причём линии Si I, Fe I и Ca I были видны постоянно, а линии Ni I и O I периодически исчезали и появлялись с указанной частотой. Исследователи полагают, что поскольку на расстоянии $\approx 20 \text{ м}$ от ШМ проходила высоковольтная (35 кВ) линия электропередачи, то колебания могли быть связаны со второй гармоникой переменного тока в линии. Возможно, что существуют разные феномены, объединённые общим названием "шаровая молния", и в данном случае наблюдалась лишь одна их разновидность. ШМ является, пожалуй, единственным макроскопическим физическим явлением на Земле, которое до сих пор не объяснено, поэтому выполненные детальные наблюдения очень важны для прояснения её природы. О свойствах ШМ см. также обзоры *УФН* 160 (4) 1 (1990), *УФН* 162 (8) 43 (1992) и статьи *УФН* 166 1253 (1996); *УФН* 174 107 (2004); *УФН* 180 218, 223 (2010).

Источник: *Phys. Rev. Lett.* 112 035001 (2014)<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.035001>**2. Нарушение чётности в рассеяниях электронов на кварках**

Коллаборацией PVDIS в Лаборатории им. Т. Джеферсона (США) исследован эффект нарушений чётности (инвариантности относительно зеркального отражения) в процессах глубоко-неупругих рассеяний электронов на кварках, входящих в состав ядер. Пучок линейно поляризованных электронов с энергиями 6,067 ГэВ направлялся в дейтериевую мишень, и в данных по рассеяниям был выделен малый вклад, происходящий от спина кварков. Впервые определена комбинация $2C_{2u} - C_{2d} = -0,145 \pm 0,068$ эффективных констант слабой связи между электронами и кварками. От этой комбинации зависит асимметрия рассеяний электронов с двумя спиральностями. Получено хорошее согласие с предсказанием Стандартной модели $2C_{2u} - C_{2d} = -0,0950 \pm 0,0004$ и ограничен возможный вклад процессов с нарушением чётности за пределами Стандартной модели. Аналогичные измерения при больших энергиях выполнить пока нельзя, поэтому результаты PVDIS дополняют эксперименты, проводимые на Большом адронном коллайдере.

Источник: *Nature* 506 67 (2014)<http://dx.doi.org/10.1038/nature12964>**3. Дираковские фермионы в 3D-материале**

Z.K. Liu (Стэнфордский институт наук о материалах и энергии, США) и др. обнаружили, что в полуметаллическом соединении Na_3Bi электроны имеют дисперсионную кривую дираковского типа в 3D-объёме образца, т.е. они ведут себя эффективно как безмассовые частицы. Ранее такое свойство наблюдалось лишь у двумерных систем: в графене и на поверхности топологических изоляторов. Исследование электронной структуры кристаллического образца выполнялось методом фотоэмиссионной спектроскопии с угловым разрешением. Как и предсказывали теоретически C.L. Kane (Университет Пенсильвании, США) и его коллеги, электроны в Na_3Bi имеют дисперсионную кривую в виде дираковского конуса в 3D-пространстве, причём конус анизотропен: ферми-скорости $V_x \approx V_y$, $V_z \approx 0,25V_x$. Подобные вещества, являющиеся 3D-аналогом графена, могут найти полезные применения в микроэлектронике и в спинтронике.

Источник: *Science* 343 864 (2014)<http://dx.doi.org/10.1126/science.1245085>**4. Термоядерный синтез с инерционным удержанием: достигнут положительный энергобаланс**

В эксперименте по термоядерному синтезу с инерционным удержанием, проведённом в Ливерморской национальной лаборатории им. Э. Лоуренса (США), впервые получен выход энергии синтеза, в 1,2–1,4 раза превышающий энергию, которая поглощается сжимаемой в капсуле дейтерий-тритиевой мишенью. Свет 192 лазеров с 1,9 МДж в суммарном импульсе переизлучался стенками золотой капсулы в рентгеновском диапазоне, вызывая испарение пластиковой оболочки мишени и сжатие её со скоростью около 300 км с^{-1} , что вело к резкому нагреву и термоядерным реакциям. Использовались не короткие, а несколько растянутые по времени лазерные импульсы (методика "high-foot"). Это позволило стабилизировать фронт сжатия и уменьшить перемешивание вещества оболочки и замороженного дейтерий-тритиевого заряда, являвшиеся серьёзными ограничивающими факторами в других экспериментах. В результате был получен примерно на порядок больший относительный выход энергии, чем ранее. В эксперименте показано, что заметную роль в процессе нагрева мишени играют рождающиеся в реакциях ядерного синтеза альфа-частицы, которые рассеивались на ядрах, передавая им дополнительную энергию.

Источник: *Nature* 506 343 (2014)<http://dx.doi.org/10.1038/nature13008>**5. Масса нейтрино по космологическим данным**

Я.Б. Зельдович и С.С. Герштейн в 1966 г. впервые получили ограничение сверху на массу нейтрино из космологических данных. В последнее время, объединяя данные о флуктуациях реликтового излучения и подсчёты скоплений галактик, выполненные на основе эффекта Сюняева–Зельдовича, коллаборация Planck представила оценку суммы масс трёх сортов нейтрино $\sum m_\nu = (0,22 \pm 0,09) \text{ эВ}$. R.A. Battye (Университет Манчестера) и A. Moss (Университет Ноттингема, Великобритания) уточнили эту оценку, включив в рассмотрение эффекты слабого гравитационного линзирования галактик и реликтового излучения. Оказалось, что все наборы космологических данных хорошо согласуются между собой, если $\sum m_\nu = (0,320 \pm 0,081) \text{ эВ}$. При наличии стерильных нейтрино оценка несколько сдвигается. В среде нейтрино из-за их больших скоростей затруднено формирование крупномасштабных структур, что позволяет связать массу нейтрино с подсчётами скоплений галактик и другими космологическими данными.

Источник: *Phys. Rev. Lett.* 112 051303 (2014)<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.051303>Подготовил Ю.Н. Ерошенко
(e-mail: erosh@ufn.ru)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

М.С. АКСЕНТЬЕВА (ответственный секретарь), Е.Б. АЛЕКСАНДРОВ, П.И. АРСЕЕВ,
В.С. БЕСКИН, В.Б. БРАГИНСКИЙ, Ю.В. ГУЛЯЕВ, С.П. ДЕНИСОВ, И.М. ДРЁМИН,
Г.Р. ИВАНИЦКИЙ, А.А. КАПЛЯНСКИЙ, Г.Н. КУЛИПАНОВ, М.Б. МЕНСКИЙ,
Г.А. МЕСЯЦ, Л.Б. ОКУНЬ, Л.П. ПИТАЕВСКИЙ (зам. главного редактора), В.И. РИТУС,
В.А. РУБАКОВ (первый зам. главного редактора), О.В. РУДЕНКО (зам. главного редактора),
М.В. САДОВСКИЙ, Б.М. СМЕРНОВ, В.Е. ФОРТОВ

"Успехи физических наук" (сокращенно УФН) — журнал, публикующий обзоры современного состояния наиболее актуальных проблем физики и смежных с нею наук. Предназначается для научных работников, аспирантов, студентов-физиков старших курсов, преподавателей. Выходит 12 раз в год (1 том, включающий 12 номеров; при цитировании статей 1990–1993 гг. обязательно указывается номер журнала). Список указателей к вышедшим томам помещался на первой странице годового указателя статей в декабрьских номерах 1990–1995, 1997–2010, 2013 гг.

Вниманию читателей!

*Постановление Президиума
Российской академии наук
"О проведении юбилейных мероприятий,
посвящённых 100-летию со дня рождения
академика Я.Б. Зельдовича"
см. на с. 246 и с. 312 этого номера*

*Электронные препринты статей, опубликованных в журнале УФН,
доступны через Internet с 26 декабря 1994 года (www.ufn.ru)*

Адрес редакции:

119991 Москва, Ленинский проспект 53, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,

Редакция журнала "Успехи физических наук"

Тел. (499) 132-62-65. Тел./факс (499) 132-63-48

Тел./факс (499) 190-42-44, (499) 190-34-52

E-mail: ufn@ufn.ru

CONTENTS

100th ANNIVERSARY OF THE BIRTH OF Ya.B. ZELDOVICH

- 225 From the Editorial Board**
227 *L.I. Ponomarev*. Ya.B. Zeldovich and nuclear power
231 *V.E. Fortov, I.V. Lomonosov*. Ya.B. Zeldovich and equation of state problems for matter under extreme conditions
247 *M.F. Ivanov, A.D. Kiverin, B.A. Klumov, V.E. Fortov*. From combustion and detonation to nitrogen oxides
265 *G.I. Barenblatt, A.J. Chorin, V.M. Prostokishin*. Turbulent flows at very large Reynolds numbers: new lessons learned
273 *V.S. Popov, B.M. Karnakov*. Hydrogen atom in a strong magnetic field
297 *A. Ruzmaikin*. Climate as a Game of Chance
313 *D.D. Sokoloff, R.A. Stepanov, P.G. Frick*. Dynamo: from an astrophysical model to laboratory experiments
336 Physics news on the Internet (*Yu.N. Eroshenko*)

Успехи физических наук, т. 184, № 3
Выпускающий научный редактор *С.М. Апенко*.
Редакторы *М.С. Аксентьева, Т.П. Романова, Е.А. Фример*.
Литературный редактор *Т.Б. Ларионова*.
Стилистическое редактирование английских текстов *Е.Г. Стрельченко*.
Редактор-библиограф *Е.В. Захарова*.

Сдано в набор 10.01.2014 г. Подписано к печати 03.03.2014 г. Формат 60 × 88/8.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,72. Усл. кр.-отт. 14,22.
Физ. л. 14,00. Уч.-изд. л. 17,49. Тираж 500 экз. Заказ 205.
Условия оформления подписки на журнал "Успехи физических наук" на 2014 г. см. на с. 1376, т. 183, № 12, 2013 г.
Стоимость отдельного номера журнала за 1994–2013 гг. для организаций — 200 руб.;
для индивидуальных подписчиков — 100 руб.
(заказ в ООО "ЦЕНТРОЭКС" по тел. (495) 543-32-92 или по адресу 125493 Москва, а/я 334).

Адрес редакции: 119991 Москва, Ленинский проспект 53, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Редакция журнала "Успехи физических наук".
Тел. (499) 132-62-65. Тел./факс (499) 132-63-48. Тел./факс (499) 190-42-44, (499) 190-34-52. E-mail: ufn@ufn.ru

Оригинал-макет подготовлен в Редакции журнала "Успехи физических наук".
Компьютерный набор и верстка: *Н.В. Грибкова, О.В. Моргунова*.
Компьютерная графика и фотоработы: *А.В. Бобков, Г.В. Варванина*.
Поддержка компьютерной системы и информационное администрирование:
Д.А. Олемской, Е.В. Захарова, Ю.Н. Ерошенко, И.А. Садовский, Е.А. Фример.
Номер набран и сверстан с использованием системы Advent 3B2 Total Publishing System (предоставлена фирмой Turpion Ltd.)

Отпечатано с оригинал-макета в ППП "Типография "Наука", 121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6