

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Когерентные явления в стохастических динамических системах

В.И. Кляцкин, Д. Гурарий

*В работе излагаются основные идеи статистической топографии случайных процессов и полей, которые используются для анализа когерентных явлений в простейших динамических системах. Такие явления, происходящие с вероятностью единица, позволяют установить связь между отдельными реализациями систем и их статистическими характеристиками. Мы ограничиваемся анализом явления переброса под действием случайных сил в сингулярных стохастических задачах; динамической локализации плоских волн в слоистых случайных средах; кластеризации поля примеси в случайных полях скоростей и образованием каустической структуры волновых полей в случайно-неоднородных средах. Все эти явления рассматриваются на основе единого подхода, основанного на анализе одноточечных пространственно-временных плотностей вероятностей.*

PACS numbers: 02.50.-r, 05.40.-j, 05.45.+b, 42.50.-p

## Содержание

1. Введение (171).
2. Примеры динамических систем, формулировка задач и особенности поведения в реализации их решений (173).
  - 2.1. Частица в поле случайных скоростей и сил.
  - 2.2. Плоские волны в слоистых случайных средах.
  - 2.3. Пассивная примесь в случайном поле скоростей.
  - 2.4. Волны в случайно-неоднородных средах.
  - 2.5. Уравнения геофизической гидродинамики.
  - 2.6. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнения и начальных условий.
3. Индикаторная функция и уравнение Лиувилля (182).
  - 3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
  - 3.2. Уравнения в частных производных первого порядка.
  - 3.3. Статистическая топография случайных полей.
4. Статистическое описание динамических систем (185).
  - 4.1. Прямое и обратное уравнения Фоккера–Планка и краевые условия к ним.
  - 4.2. Типичная реализация случайных процессов.
  - 4.3. Логарифмически-нормальный случайный процесс.
5. Явление переброса в сингулярных динамических системах (188).
  - 5.1. Простейший случай.
  - 5.2. Возникновение каустик в случайных средах.
  - 5.3. Фаза коэффициента отражения плоской волны в слоистых случайных средах.

6. Локализация плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах (191).
    - 6.1. Однослойная модель среды.
    - 6.2. Двухслойная модель среды.
    - 6.3. Локализация волн в параболическом волноводе.
  7. Пассивная примесь в случайном поле скоростей (195).
    - 7.1. Лагранжево описание.
    - 7.2. Эйлерово описание.
    - 7.3. Учет дополнительных факторов.
  8. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде (203).
    - 8.1. Область слабых флуктуаций интенсивности.
    - 8.2. Область сильных флуктуаций интенсивности.
  9. Заключение (206).
- Список литературы (206).

## 1. Введение

Физические процессы происходят часто в сложных средах, параметры которых можно рассматривать как некоторые реализации хаотических полей в пространстве и во времени. Решение динамических задач для этих конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за чрезвычайной математической сложности задач. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, без отвлечения на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т.е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуаль-

**В.И. Кляцкин.** Институт физики атмосферы РАН,  
109017 Москва, Пыжевский пер., 3, Россия  
Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН,  
690041 г. Владивосток, Россия  
Тел. (095) 269-12-83; E-mail: klyatskin@hotmail.com  
**Д. Гурарий.** Math. Department,  
Case Western Reserve University,  
Cleveland, Ohio 44106-7044, USA  
E-mail: dxg5@po.cwru.edu

Статья поступила 8 июня 1998 г.

ные реализации, например, скалярных двумерных полей  $\rho(\mathbf{R}, t)$ , где  $\mathbf{R} = \{x, y\}$ , напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами. Обычно используемые методы статистического усреднения (т.е. вычисления средних типа среднего значения  $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle$ , пространственной корреляционной функции  $\langle \rho(\mathbf{R}_1, t) \rho(\mathbf{R}_2, t) \rangle$  и т.п., где через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности типичных реализаций, и зачастую полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но и противоречат, на первый взгляд, друг другу. Так, например, статистическое усреднение по всем реализациям делает поле средней концентрации пассивной примеси в случайном поле скоростей все более гладким, в то время как каждая его отдельная реализация за счет перемешивания областей с существенно разной концентрацией стремится стать все более изрезанной в пространстве. Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют "глобальные" пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри ее. А такие детали для данного примера существенно зависят от характера поля скоростей — является оно дивергентным или бездивергентным. Так, в первом случае с вероятностью, равной единице, в отдельных реализациях образуются *кластеры* — компактные области повышенной концентрации примеси, окруженные обширными областями плотности низкой концентрации [1, 2]. Однако при этом все статистические моменты расстояния между частицами экспоненциально растут во времени, т.е. имеет место статистическое разбегание частиц в среднем [2–4]. Аналогично этому имеет место экспоненциальное разбегание и лучей в среднем при распространении волн в случайных средах [3–5], и в то же время с вероятностью единица происходит возникновение каустик на конечных расстояниях [6–9]. Другим примером, иллюстрирующим вышесказанное, является динамическая локализация плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах, заключающаяся в том, что при падении волны на полупространство такой среды реализации интенсивности волнового поля экспоненциально убывают в глубь среды с вероятностью, равной единице, и в то же время все ее статистические моменты экспоненциально растут с расстоянием от границы среды [10–13].

Такие физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, будем называть *когерентными* процессами и явлениями. Подобную "статистическую когерентность" можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы, и выделение ее статистически устойчивых характеристик аналогично понятию когерентности как самоорганизации многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов (см., например, [14]). Такое определение когерентности процессов и явлений не является стандартным, однако оно представляется нам естественным. Получить же ответ на вопрос о том, происходит ли данное явление с вероятностью единица, вообще говоря, достаточно сложно. Однако для ряда задач в рамках простейших моделей флуктуирующих параметров это удается сделать чисто теоретическим путем. В других случаях убедиться в этом можно с

помощью численного моделирования или путем анализа экспериментальных данных. Из такого определения ясно, что установление факта когерентности явления — задача более математическая, чем физическая. При этом мы в настоящее время зачастую даже не понимаем физических причин, приводящих к появлению данного явления. Так, например, упомянутая выше кластеризация частиц в случайном потенциальном поле скоростей — чисто кинематическое явление, происходящее в отсутствие какого-либо взаимодействия между частицами.

Полная статистика (например, все  $n$ -точечные пространственно-временные моментные функции) содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удается исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные главным образом с одновременными и односточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос: как, зная такого рода статистические характеристики и особенности системы, получить основные количественные и качественные особенности поведения отдельных реализаций системы? Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Ответ на этот вопрос дают методы статистической топографии.

Термин "статистическая топография", по-видимому, впервые был введен в книге [15], хотя основные идеи восходят к существенно более ранним работам [16–19] (см. также обзорную работу [20], где дана подробная библиография по данному вопросу). В этих работах статистическая топография случайных полей использовалась для анализа статических задач, связанных со статистическим описанием взволнованности морской поверхности и статистической обработкой локационных и телевизионных изображений объектов. Применение методов статистической топографии к динамической задаче о диффузии пассивной примеси в случайной среде рассматривалось в работах [2, 21–23], а к задаче о волнах в случайно-неоднородных средах — в работе [24]. Методы статистической топографии позволяют переосмыслить "философию" статистического анализа динамических стохастических систем, что может быть полезно и для экспериментаторов, планирующих статистическую обработку экспериментального материала.

В настоящей работе излагаются основные идеи статистической топографии случайных процессов и полей, которые используются для анализа когерентных явлений в простейших динамических системах. Из всего многообразия когерентных явлений в данной работе мы ограничиваемся анализом следующих явлений:

- переброс под действием случайных сил в сингулярных стохастических задачах (явление переброса в регулярных стохастических задачах, например, типа переброса между возможными устойчивыми стационарными решениями, хорошо известно и описано практически во всех учебниках);

- динамическая локализация плоских волн в слоистых случайных средах;

- кластеризация поля примеси в случайных полях скоростей;

- образование каустической структуры волновых полей в случайно-неоднородных средах.

Все эти явления можно понять на основе единого подхода, основанного на анализе одноточечных пространственно-временных плотностей вероятностей, соответствующих исходным динамическим стохастическим системам.

Прежде всего рассмотрим несколько примеров типичных задач и обсудим особенности их решений в присутствии случайных возмущений параметров, определяющих их динамику. Статистический анализ этих задач будет проведен несколько позднее. Мы ограничимся примерами из статистической гидродинамики, статистической радиофизики и статистической акустики, что связано непосредственно с научными интересами авторов, но мы думаем, что развитые здесь методы могут найти применение и в других областях физики.

## 2. Примеры динамических систем, формулировка задач и особенности поведения в реализации их решений

### 2.1. Частица в поле случайных скоростей и сил

Частица в поле случайных скоростей в простейшем случае описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$  — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — случайная составляющая. При отсутствии случайностей ( $\mathbf{u} = 0$ ) и постоянстве величины  $\mathbf{u}_0$  движение частицы будет, очевидно, прямолинейным:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0(t - t_0).$$

Система уравнений типа (2.1) также описывает динамику частицы в поле случайных внешних сил  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ . В простейшем случае динамика частицы при наличии линейного трения описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При отсутствии внешних возмущений и трения решение задачи также соответствует прямолинейному движению частицы:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t.$$

Остановимся теперь на стохастических особенностях решения задачи (2.1) для системы частиц при отсутствии среднего потока. С формальной точки зрения, исходя из уравнения (2.1), каждая частица движется независимым образом. Однако если случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет конечный пространственный радиус корреляции  $l_{\text{кор}}$ , то частицы, расстояние между которыми меньше  $l_{\text{кор}}$ , находятся в общей зоне влияния случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и могут появиться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц. В общем случае случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  может иметь как соленоидальную (для которой  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ), так и потенциальную (для которой  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi(\mathbf{r}, t)$ ) составляющие. Как показывают результаты численного моделирования [22, 25],

динамика системы частиц в этих случаях существенно различная. Так, на рис. 1а для бездивергентного поля скоростей схематически изображена эволюция во времени системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. Для случая же потенциального поля скоростей ( $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ) частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области (компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах). Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1б. Подчеркнем, что это — чисто кинематический эффект. При усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, очевидно, такая особенность динамики частиц исчезает. Численное моделирование, результаты которого приведены на рис. 1, было осуществлено для реализации стационарного (не зависящего от времени) случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

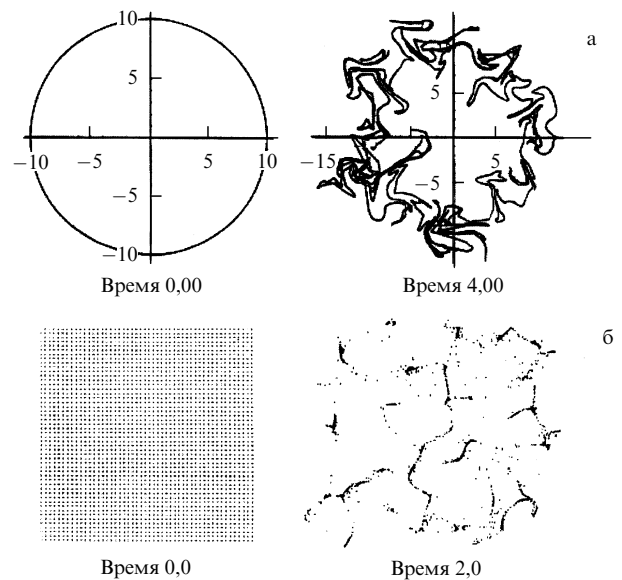


Рис. 1. Динамика частиц в соленоидальном (а) и потенциальном (б) полях скоростей.

Впервые, по-видимому, такого рода кластеризация для системы частиц была обнаружена в работах [26, 27], где в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование в рамках программы EOLE. В рамках этого глобального эксперимента в 1970–1971 гг. в Аргентине было запущено 500 баллонов постоянной плотности, которые распространились по всему Южному полушарию на высоте примерно 12 км. На рисунке 2 представлено распределение баллонов по Южному полушарию через 105 суток после начала моделирования [27], из которого видно, что они концентрируются в группы, что соответствует кластеризации.

Остановимся теперь на другом стохастическом аспекте, связанном с динамическими уравнениями типа

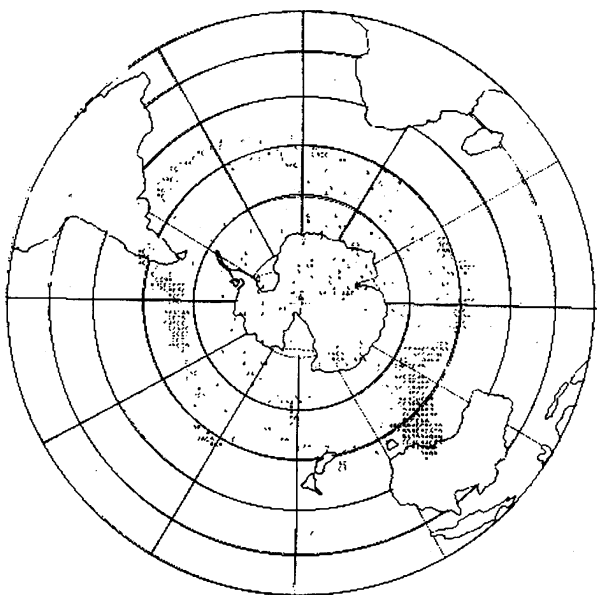


Рис. 2. Распределение баллонов в атмосфере через 105 суток.

(2.1), а именно на явлении переброса, обусловленного случайными флуктуациями. Хорошо известны примеры явления переброса для динамических систем, имеющих конечное число устойчивых стационарных состояний (см., например, [3, 28]). Здесь же мы ограничимся простейшим примером стохастической системы, возникающей в статистической теории волн и имеющей сингулярное поведение во времени:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \lambda > 0, \quad (2.3)$$

где  $f(t)$  — случайная функция времени. В отсутствие случайностей ( $f(t) = 0$ ) решение уравнения (2.3) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(t - t_0)}, \quad t_0 = -\frac{1}{\lambda x_0}.$$

Если  $x_0 > 0$ , то  $t_0 < 0$ , и решение задачи  $x(t)$  монотонно стремится к нулю с ростом времени. Если же  $x_0 < 0$ , то решение  $x(t)$  обращается в  $-\infty$  в течение конечного времени  $t_0 = -1/(\lambda x_0)$ , т.е. становится сингулярным и имеет взрывной характер. В этом случае влияние случайной силы  $f(t)$  на динамику системы несущественно. Влияние случайной силы становится важным только в случае положительного значения  $x_0$ . В этом случае решение задачи, слегка флуктуируя, уменьшается с ростом времени, оставаясь положительным. При достижении достаточно малого значения  $x(t)$  оно будет "переброшено" под действием силы  $f(t)$  в область отрицательных значений  $x$  и по прошествии некоторого конечного времени обратится в  $-\infty$ .

Таким образом, в стохастическом случае для любых значений величины  $x_0$  решение задачи (2.3) имеет взрывной характер и оно обращается в  $-\infty$  в течение конечного времени  $t_0$ . Примерная реализация поведения решения задачи (2.3)  $x(t)$  во времени для  $t > t_0$  имеет как бы квазипериодическую структуру и схематически изображена на рис. 3. Доминирующее когерентное явление здесь — взрывной характер реализаций.

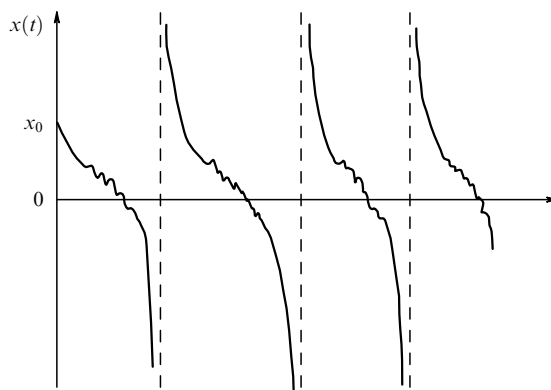


Рис. 3. Типичная реализация решения уравнения (1.3).

Рассмотренные выше стохастические примеры соответствовали аддитивному включению случайных воздействий на динамику систем. Простейший нетривиальный пример мультипликативного (параметрического) воздействия можно проиллюстрировать на примере стохастического параметрического резонанса, описываемого уравнением второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2[1 + z(t)]x(t) &= 0, \\ x(0) = x_0, \quad \frac{d}{dt}x(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $z(t)$  — случайная функция времени. Это уравнение возникает практически во всех областях физики. С физической точки зрения очевидно, что динамическая система (2.4) подвержена параметрическому возбуждению, так как случайный процесс  $z(t)$  содержит гармонические компоненты всех частот, включая значения  $2\omega_0/n$ ,  $n = 1, 2, 4, \dots$ , которые в точности соответствуют параметрическому резонансу в системе с периодической функцией  $z(t)$ , например для уравнения Матье (см., например, [3, 5, 10]).

## 2.2. Плоские волны в слоистых случайных средах

В предыдущем разделе мы рассмотрели несколько примеров динамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Рассмотрим теперь простейшую линейную краевую задачу, а именно стационарную одномерную волновую задачу.

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства  $L_0 < x < L$ . Плоская волна с единичной амплитудой  $u_0(x) = \exp[-ik(x - L)]$  падает на него из области  $x > L$  (рис. 4а). Волновое поле в слое неоднородной среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2[1 + \varepsilon(x)]u(x) = 0, \quad (2.5)$$

где функция  $\varepsilon(x)$  описывает неоднородности среды. Вне слоя считаем, что  $\varepsilon(x) = 0$ ; внутри же слоя предполагаем, что  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$ , где  $\varepsilon_1(x)$  — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть  $\gamma \ll 1$  описывает поглощение волны в среде.

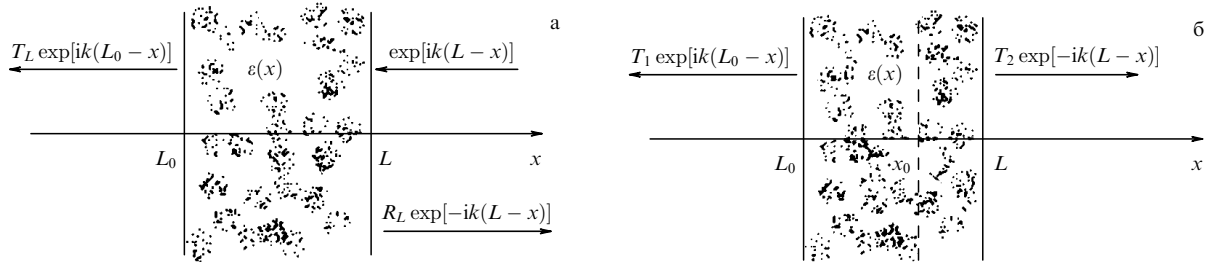


Рис. 4. Падение плоской волны на слой среды (а) и источник внутри среды (б).

В области  $x > L$  волновое поле имеет структуру  $u(x) = \exp[-ik(x - L)] + R_L \exp[ik(x - L)]$ , где  $R_L$  — комплексный коэффициент отражения. В области  $x < L_0$  волновое поле имеет структуру  $u(x) = T_L \exp[ik(L_0 - x_0)]$ , где  $T_L$  — комплексный коэффициент прохождения. Краевыми условиями для уравнения (2.5) являются условия непрерывности функции  $u(x)$  и ее производной  $du(x)/dx$  на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\frac{i}{k} \frac{d}{dx} u(x) + u(x)|_{x=L} = 2, \quad \frac{i}{k} \frac{d}{dx} u(x) - u(x)|_{x=L_0} = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, волновое поле в слое неоднородной среды описывается краевой задачей (2.5), (2.6). Само же уравнение (2.5) по внешнему виду совпадает с (2.4).

Если параметры среды  $\varepsilon_1(x)$  заданы статистически, то решение статистической задачи (2.5), (2.6) состоит в нахождении статистических характеристик величин  $R_L = u(L) - 1$ ,  $T_L = u(L_0)$ , связанных со значением поля на границах слоя, и интенсивности волнового поля  $I(x) = |u(x)|^2$  внутри среды (статистическая теория переноса излучения).

Из уравнения (2.5) при  $x < L$  следует равенство

$$k\gamma I(x) = \frac{d}{dx} S(x),$$

где плотность потока энергии  $S(x)$  определяется равенством

$$S(x) = \frac{1}{2ik} \left[ u(x) \frac{d}{dx} u^*(x) - u^*(x) \frac{d}{dx} u(x) \right].$$

При этом  $S(L) = 1 - |R_L|^2$ ,  $S(L_0) = |T_L|^2$ .

Если затухание волны в среде отсутствует ( $\gamma = 0$ ), то сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1. \tag{2.7}$$

Остановимся на некоторых особенностях решения стохастической краевой задачи (2.5), (2.6). При отсутствии неоднородностей среды ( $\varepsilon_1(x) = 0$ ) и для достаточно малого затухания  $\gamma$  интенсивность волнового поля слабо (экспоненциальным образом) затухает в глубь среды по закону

$$I(x) = |u(x)|^2 = \exp[-k\gamma(L - x)]. \tag{2.8}$$

На рисунке 5 приведены две реализации интенсивности волнового поля в достаточно толстом слое среды,

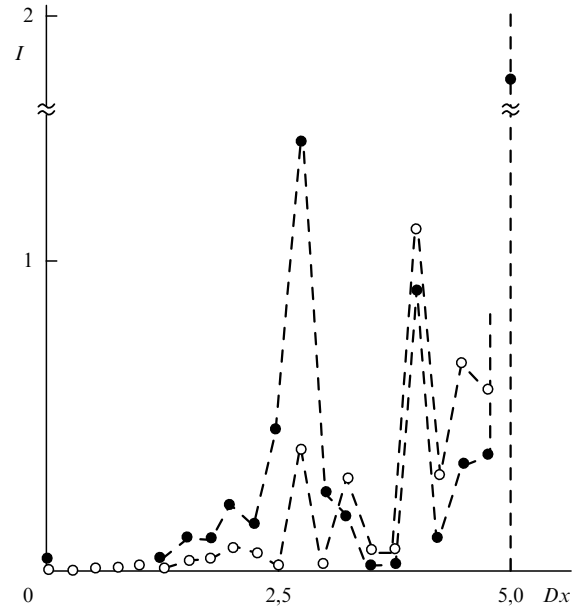


Рис. 5. Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды.

соответствующие двум реализациям неоднородностей среды [29], полученные численным моделированием. Не останавливаясь на детальном описании параметров задачи, отметим только, что на этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального спада (с большими выбросами как в сторону увеличения величины интенсивности, так и к значениям, близким к нулю), обусловленная многократным переотражением волны в хаотически неоднородной среде (динамическая локализация).

Аналогичным образом поле точечного источника, расположенного в слое случайно-неоднородной среды, описывается краевой задачей для функции Грина уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x; x_0) &= 2ik\delta(x - x_0), \\ \frac{i}{k} \frac{d}{dx} G(x; x_0) + G(x; x_0)|_{x=L} &= 0, \\ \frac{i}{k} \frac{d}{dx} G(x; x_0) - G(x; x_0)|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

В этом случае волновое поле вне слоя среды имеет структуру уходящих волн (рис. 4б) с коэффициентами прохождения  $T_1 = G(L; x_0)$ ,  $T_2 = G(L_0; x_0)$ . При этом волновое поле в области  $x < x_0$  пропорционально полю

плоской волны, падающей из однородного полупространства  $x > x_0$  на слой среды  $(L_0, x_0)$  [10], т.е.

$$G(x; x_0) \sim u(x; x_0), \quad x \leq x_0.$$

Отметим, что задача о падении волны на слой среды (2.5), (2.6) получается из задачи (2.9) с источником на границе слоя  $x_0 = L$ , т.е.  $u(x) = G(x; L)$ .

Краевые задачи (2.5), (2.6) и (2.9) с помощью метода погружения [30–32] можно переформулировать в виде динамических задач с начальными условиями по параметру  $L$  — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая решение этих задач как функции этого параметра [10]. Так, для краевой задачи (2.5), (2.6) коэффициент отражения  $R_L$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \quad (2.10)$$

а волновое поле в слое  $u(x) \equiv u(x; L)$  описывается линейным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u(x; L) &= ik u(x; L) + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)u(x; L), \\ u(x; x) &= 1 + R_x. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.10) вытекает уравнение для квадрата модуля коэффициента отражения  $W_L = |R_L|^2$

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*)(1 - W_L), \quad W_{L_0} = 0. \quad (2.12)$$

Если граница слоя  $L_0$  является полностью отражающей границей, то начальным условием к уравнению (2.12) будет условие  $W_{L_0} = 1$ . В этом случае при отсутствии затухания (т.е. при  $\gamma = 0$ ) падающая на слой волна полностью отражается этим слоем, т.е.  $W_L = 1$ , и, следовательно, коэффициент отражения имеет структуру  $R_L = \exp\{i\phi_L\}$ . Для фазы коэффициента отражения в этом случае из (2.10) вытекает динамическое уравнение

$$\frac{d}{dL} \phi_L = 2k + k\varepsilon_1(L)(1 + \cos \phi_L), \quad (2.13)$$

определяющее изменение фазы на всей оси значений  $(-\infty, \infty)$ . В уравнение же для волнового поля (2.11) входят только тригонометрические функции от фазы коэффициента отражения. Поэтому желательно перейти к ее области значений  $(-\pi, \pi)$ . Это можно сделать, вводя новую функцию [13, 33]

$$z_L = \tan\left(\frac{\phi_L}{2}\right), \quad (2.14)$$

для которой получаем динамическое уравнение типа уравнения (2.3)

$$\frac{d}{dL} z_L = k(1 + z_L^2) + k\varepsilon_1(L), \quad (2.15)$$

имеющего сингулярный характер решения.

В общем случае произвольной границы  $L_0$  для полупространства случайно-неоднородной среды  $(L_0 \rightarrow -\infty)$  при отсутствии затухания формально также имеется "стационарное", не зависящее от  $L$  решение  $W_L = 1$ , соответствующее полному отражению падающей

волны. Это решение, как будет показано далее, действительно осуществляется в статистической задаче с вероятностью, равной единице [10].

Часто исследователи сталкиваются с многомерной ситуацией, когда одни типы волн могут порождать другие благодаря пространственной неоднородности параметров задачи. В ряде случаев возможно параметризовать такую задачу, разбивая среду на слои в каком-то направлении, характеризуемые дискретным набором некоторых параметров, в то время как другие параметры в этих слоях меняются непрерывным образом. В качестве примера можно привести описание крупномасштабных и низкочастотных движений в атмосфере и океане Земли (например, волн Россби). Эти движения можно описывать в рамках квазигеострофической модели, в которой атмосфера и океан рассматриваются как тонкие многослойные пленки, характеризуемые по вертикали толщинами слоев и значениями плотности в них [34]. И возможным источником локализации волн Россби являются, например, пространственные изменения неоднородностей топографии дна в горизонтальной плоскости. Простейшая однослойная модель, эквивалентная одномерному уравнению Гельмгольца, описывает баротропные движения среды, а двухслойная модель учитывает уже бароклинные эффекты [35–37].

Простейшая модель распространения взаимодействующих волн в двухслойной среде описывается системой уравнений [38]

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1 + k^2 \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2 + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2 + \alpha_2 F(\psi_1 - \psi_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\alpha_1 = 1/H_1$ ,  $\alpha_2 = 1/H_2$  ( $H_1, H_2$  — толщины верхнего и нижнего слоев),  $F$  характеризует взаимодействие волн, а функция  $\varepsilon(x)$  описывает неоднородности среды в нижнем слое. Считаем, как и ранее, что функция  $\varepsilon(x)$  отлична от нуля только в области  $(L_0, L)$  и является случайной функцией. Геометрия задачи для системы (2.16) приведена на рис. 6. Краевыми условиями для системы уравнений (2.16) являются условия излучения на бесконечности и условие непрерывности волновых полей и их производных на границах области  $L_0$  и  $L$ .

Параметр  $F$ , характеризующий параметризацию среды по вертикали, в системе уравнений (2.16) проявляется как горизонтальный масштаб, ответственный за генерацию дополнительной волны. Характер взаимодействия волн (и, в частности, зависимости параметров  $\alpha_i$  от толщин слоев) в системе (2.16) соответствует задачам геофизической гидродинамики [35–37]. Для задач другого типа эти соотношения могут измениться, что

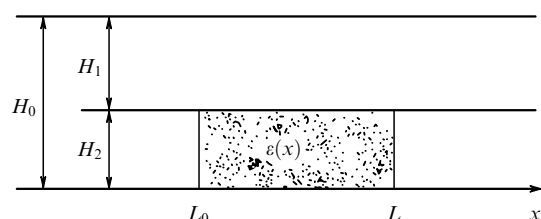


Рис. 6. Двухслойная модель среды.

несущественно. Принципиально важно лишь то, что взаимодействие между волнами линейно.

Переход к однослойной модели осуществляется при  $F = 0$ ,  $\psi_1 = 0$ , и соответствующее волновое уравнение принимает вид уравнения Гельмгольца (2.5). Переход к однослойной задаче можно также осуществить и предельным переходом  $H_1 \rightarrow 0$ ; при этом  $\psi_1 = \psi_2$ . Следует, однако, иметь в виду, что предельные переходы  $L_0 \rightarrow -\infty$  (переход к полупространству) и  $H_i \rightarrow 0$  в статистической задаче неперестановочны [35]. В этом случае толщины слоев  $H_i$  должны быть конечными, хотя и сколь угодно малыми.

Рассмотрим систему уравнений для функции Грина

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1 + k^2 \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2) &= -v_1 \delta(x - x_0), \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2 + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2 + \alpha_2 F(\psi_1 - \psi_2) &= -v_2 \delta(x - x_0), \end{aligned} \quad (2.17)$$

соответствующую задаче о возбуждении волн в верхнем и нижнем слоях соответственно. Вводя векторное обозначение  $\Psi(x; x_0) = \{\psi_1(x; x_0), \psi_2(x; x_0)\}$ ,  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}$ , можно переписать систему (2.17) в векторной форме:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x; x_0) = -\mathbf{v} \delta(x - x_0), \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} k^2 - \alpha_1 F & \alpha_1 F \\ \alpha_2 F & k^2 - \alpha_2 F \end{pmatrix}, \\ A &= k \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_2 + \lambda \tilde{\alpha}_1 & (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_1 \\ (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 + \lambda \tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (2.19)$$

здесь введены параметр

$$\lambda^2 = \left[ 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{F}{k^2} \right],$$

описывающий моду, которую будем называть  $\lambda$ -волной (считаем, что  $\lambda^2 > 0$ ), и относительные толщины слоев

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_2}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_1}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = 1.$$

В такой форме записи уравнение (2.18) подобно уравнению Гельмгольца (2.5), где матрица  $A$  описывает постоянное значение показателя преломления, а величина  $\varepsilon \Gamma$  описывает неоднородности среды.

Рассмотрим матрицу  $\Psi$ , описываемую уравнением

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x; x_0) = -E \delta(x - x_0), \quad (2.20)$$

через которую вектор-функция  $\Psi(x; x_0)$  определяется согласно равенству

$$\Psi(x; x_0) = \Psi(x; x_0) \mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Тогда компоненты матрицы  $\{\psi_{11}, \psi_{21}\}$  и  $\{\psi_{12}, \psi_{22}\}$  описывают волны, генерируемые источниками  $\{v_1, 0\}$ ,  $\{0, v_2\}$  в верхнем и нижнем слоях соответственно.

Краевыми условиями для уравнения (2.20) являются условия

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} - iA \right) \Psi(x; x_0) \Big|_{x=L} &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} + iA \right) \Psi(x; x_0) \Big|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Далее, следуя [38], еще больше упростим задачу, а именно будем считать, что источник плоских волн расположен на границе области существования неоднородностей  $x_0 = L$ . В этом случае, используя условие на скачок волнового поля в точке расположения источника  $x_0$ , получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x; L) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} - iA \right) \Psi(x; L) \Big|_{x=L} &= E, \\ \left( \frac{d}{dx} + iA \right) \Psi(x; L) \Big|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Последнее уравнение может быть упрощено диагонализацией матрицы  $A$  (2.19) с помощью матриц

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & 1 \\ -\tilde{\alpha}_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразованные матрицы  $A$  и  $\Gamma$  превращаются в

$$B = k \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = K \Gamma K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 & -1 \\ -\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix},$$

и мы получаем новую систему для преобразованной матрицы  $\Psi$

$$U(x; L) = -2iK\Psi(x; L)K^{-1}B \quad (2.24)$$

в виде

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dx^2} + B^2 + k^2 \varepsilon(x) \tilde{\Gamma} \right] U(x; L) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} - iB \right) U(x; L) \Big|_{x=L} &= -2iB, \\ \left( \frac{d}{dx} + iB \right) U(x; L) \Big|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Краевая задача (2.25) описывает падение на среду  $k$ - и  $\lambda$ -волн с единичными амплитудами. Причем падающая  $\lambda$ -волна  $U_{11}$  генерирует  $k$ -волну  $U_{21}$ , а падающая  $k$ -волна  $U_{22}$  генерирует  $\lambda$ -волну  $U_{12}$ .

Из системы (2.25) следует, что амплитуда генерируемой  $k$ -волны  $U_{21}$  пропорциональна параметру  $\delta = \lambda \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 = \lambda H_1 H_2 / H_0^2$ . В общем случае  $\delta < \lambda/4$ . Однако, поскольку обычно в моделях, описывающих реальные среды,  $\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \ll 1$  (так, например, для атмосферы предполагается, что  $H_2 \ll H_1$  или  $\tilde{\alpha}_1 \ll 1$ ,  $\tilde{\alpha}_2 \cong 1$ , а для океана предполагается, что  $H_1 \ll H_2$  или  $\tilde{\alpha}_2 \ll 1$ ,  $\tilde{\alpha}_1 \cong 1$ ), в рассматриваемой задаче появляется малый параметр  $\delta$ . Для моделей среды, где  $H_2/H_1 \cong 1$ , имеем  $\delta \ll 1$  при  $\lambda \ll 4$ .

Введем теперь матрицы  $R(L) = U(L; L) - E$  и  $T(L) = U(L_0; L)$ . Тогда  $R_{ij}$ ,  $T_{ij}$  будут комплексными коэффициентами отражения и прохождения падающих ( $i = j$ ) и возбужденных ( $i \neq j$ )  $\lambda$ - и  $k$ -волн соответственно.

Из системы (2.25) следует существование двух интегралов, соответствующих сохранению плотности потока энергии  $\lambda$ - и  $k$ -волн:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[ U_{11}^*(x) \frac{d}{dx} U_{11}(x) - U_{11}(x) \frac{d}{dx} U_{11}^*(x) \right] + \\ + U_{21}^*(x) \frac{d}{dx} U_{21}(x) - U_{21}(x) \frac{d}{dx} U_{21}^*(x) = \text{const}, \\ \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[ U_{12}^*(x) \frac{d}{dx} U_{12}(x) - U_{12}(x) \frac{d}{dx} U_{12}^*(x) \right] + \\ + U_{22}^*(x) \frac{d}{dx} U_{22}(x) - U_{22}(x) \frac{d}{dx} U_{22}^*(x) = \text{const}. \end{aligned}$$

В терминах коэффициентов отражения и прохождения они записываются в виде

$$\begin{aligned} \delta [1 - |R_{11}|^2 - |T_{11}|^2] = |R_{21}|^2 + |T_{21}|^2, \\ 1 - |R_{22}|^2 - |T_{22}|^2 = \delta [|R_{12}|^2 + |T_{12}|^2]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Если осуществляется полная локализация волн в области неоднородностей среды ( $L_0, L$ ), то все коэффициенты прохождения  $T_{ij}$  должны стремиться к нулю при увеличении ее размера.

Равенства (2.26) определяют связь коэффициентов прохождения с коэффициентами отражения, которые на основе метода погружения можно описать замкнутой системой уравнений [37, 38]. Метод погружения позволяет перейти от задачи с краевыми условиями для матричной функции  $U(x; L)$  к системе уравнений для матричных функций  $U(x; L)$  и  $U(L; L)$  с начальными условиями по параметру  $L$  (в этом случае переменная  $x$  рассматривается как параметр)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} U(x; L) = iU(x; L)B + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)U(x; L)B^{-1}\tilde{\Gamma}U(L; L), \\ U(x; L)|_{L=x} = U(x; x), \\ \frac{d}{dL} U(L; L) = -2iB + i[U(L; L)B + BU(L; L)] + \\ + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)U(L; L)B^{-1}\tilde{\Gamma}U(L; L), \quad U(L; L)|_{L=L_0} = E. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Последнее уравнение для матрицы  $R(L) = U(L; L) - E$  можно переписать в виде матричного уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R(L) = i[R(L)B + BR(L)] + \\ + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)[E + R(L)]B^{-1}\tilde{\Gamma}[E + R(L)], \quad R(L)|_{L=L_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Расписывая это уравнение в виде системы уравнений для компонент  $R_{ij}$ , легко видеть, что имеется дополнительный интеграл  $R_{21} = \delta R_{12}$ . Это позволяет рассматривать систему из трех уравнений для  $R_{11}$ ,  $R_{12}$  и  $R_{22}$ .

Обратимся теперь к примерам динамических систем (динамических полей), описываемых уравнениями в частных производных.

### 2.3. Пассивная примесь в случайном поле скоростей

Простейшей задачей, описываемой линейным уравнением в частных производных первого порядка, является

уравнение непрерывности для плотности консервативной примеси, описывающее перенос пассивной примеси случайным полем скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (2.29)$$

Общая масса примеси при этом сохраняется, т.е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}).$$

Линейное уравнение в частных производных первого порядка (2.29) может быть решено методом характеристик. Вводя характеристические кривые (частицы)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \xi, \quad (2.30)$$

его можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = - \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\xi). \quad (2.31)$$

Такая формулировка задачи соответствует лагранжеву описанию, в то время как исходное динамическое уравнение (2.29) соответствует эйлерову описанию.

Характеристический векторный параметр  $\xi$  введен в систему уравнений (2.30), (2.31). Уравнение (2.30) совпадает при этом с уравнением (2.1), описывающим частицу в поле случайных скоростей.

Решение системы уравнений (2.30), (2.31) зависит от начального значения  $\xi$ , что будем отмечать вертикальной чертой, т.е.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\xi), \quad \rho(t) = \rho(t|\xi). \quad (2.32)$$

Первое из равенств (2.32) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для характеристического параметра  $\xi$ , решение которого

$$\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$$

существует, так как расходимость  $j(t|\xi) = \text{Det } |j_{ik}(t|\xi)|$  отлична от нуля, где  $j_{ik}(t|\xi) = \partial r_i(t|\xi) / \partial \xi_k$ . Следовательно, решение уравнения (2.29) можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t|\xi(\mathbf{r}, t)). \quad (2.33)$$

Для расходимости  $j(t|\xi)$  из (2.30) следует уравнение

$$\frac{d}{dt} j(t|\xi) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t|\xi), \quad j(0) = 1. \quad (2.34)$$

Сопоставляя (2.31) и (2.34), видим, что

$$\rho(t|\xi) = \frac{\rho_0(\xi)}{j(t|\xi)},$$

и, следовательно, (2.33) можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\xi \rho_0(\xi) \delta(\mathbf{r}(t|\xi) - \mathbf{r}), \quad (2.35)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками. Дельта-функция в правой части



(2.35) является индикаторной функцией для положения лагранжевой частицы (см. следующий раздел), и, следовательно, после усреднения равенства (2.35) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей получаем хорошо известную связь средней плотности в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей  $P(t|\xi) = \langle \delta(\mathbf{r}(t|\xi) - \mathbf{r}) \rangle$  лагранжевой частицы (см., например, [39])

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\xi \rho_0(\xi) P(t, \mathbf{r}|\xi).$$

Для бездивергентного поля скоростей ( $\text{div } \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) расходимость частицы так же, как и ее плотность, сохраняется, т.е.

$$j(t|\xi) = 1, \quad \rho(t|\xi) = \rho_0(\xi),$$

и, следовательно, решение уравнения (2.29) в этом случае имеет структуру

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\xi(\mathbf{r}, t)).$$

Остановимся теперь на стохастических особенностях решения задачи (2.29). Для бездивергентного поля скоростей эволюция во времени контура постоянных значений концентрации  $\rho(\mathbf{r}, t) = \text{const}$  совпадает с динамикой частиц в этом поле скоростей, рассмотренным в разделе 2.1, и совпадает, следовательно, с динамикой, приведенной на рис. 1а. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и, как видно из рисунка, возникает сильная изрезанность картины, т.е. происходит как обострение градиентов, так и возникновение динамики контура на все меньших и меньших масштабах. В другом предельном случае (потенциальном поле скоростей) площадь, ограниченная контуром, стремится к нулю, и поле плотности сжимается, образуя кластеры. Примеры численного моделирования для этого случая приведены в работе [25]. При усреднении по ансамблю реализаций эти особенности динамики исчезают.

Из описанной картины ясно, что динамическое уравнение (2.29) в качестве модельного уравнения, описывающего физическую реальность, может использоваться только на ограниченном интервале времени. Для более полного анализа необходимо включить в рассмотрение поле градиента концентрации примеси  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ , которое описывается уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) p_i(\mathbf{r}, t) = -p_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial r_k}, \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}). \quad (2.36)$$

Кроме того, следует учесть также эффект молекулярной диффузии (с коэффициентом молекулярной диффузии  $\kappa$ ), сглаживающий упомянутое обострение градиентов, который описывается линейным уравнением в частных производных второго порядка

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \kappa \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (2.37)$$

#### 2.4. Волны в случайно-неоднородных средах

Распространение волн в случайно-неоднородной трехмерной среде будем рассматривать на основе скалярного параболического уравнения [5, 40, 41], которое

справедливо для описания распространения волн в среде с крупномасштабными трехмерными неоднородностями и описывает рассеяние волны на малые углы:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}),$$

$$u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}). \quad (2.38)$$

Здесь введены обозначения:  $x$  — координата в направлении распространения волны;  $\mathbf{R}$  — координаты в поперечной плоскости;  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  — отклонение диэлектрической проницаемости от единицы. Это уравнение является, естественно, приближенным.

**Замечание.** Уравнение (2.38) является аппроксимацией полного уравнения Гельмгольца в пространстве  $(x, \mathbf{R})$ . Однако в случае слоистой среды ( $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon(z)$ ) поле точечного источника в точной постановке задачи, описываемое уравнением Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\mathbf{p}} + k^2 [1 + \varepsilon(z)] \right\} G(z, \mathbf{p}; z_0) = \delta(z - z_0) \delta(\mathbf{p}),$$

где  $\mathbf{p} = \{x, y\}$ , выражается через решение двумерного параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, z; z_0) = \frac{i}{2k} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(z) \right] \psi(\tau, z; z_0),$$

$$\psi(0, z; z_0) = \delta(z - z_0),$$

со вспомогательной переменной  $\tau$  с помощью точного равенства [13, 42]

$$G(z, \mathbf{p}; z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \exp \left[ ik \left( \frac{\rho^2 + \tau^2}{2\tau} \right) \right] \psi(\tau, z; z_0).$$

Если ввести комплексную фазу волнового поля в уравнении (2.38) по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{ iS(x, \mathbf{R}) \} = \exp \{ \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}) \},$$

где  $\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$  и  $S(x, \mathbf{R})$  — уровень амплитуды и фаза волны соответственно, то уравнение для интенсивности волнового поля  $I(x, \mathbf{R}) = u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R})$  можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (2.39)$$

Отсюда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости  $x = \text{const}$

$$E_0 = \int d\mathbf{R} I(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} I_0(\mathbf{R}).$$

Уравнение (2.39) по форме совпадает с уравнением (2.29) и, следовательно, его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей ( $\mathbf{U} = \nabla S$ ). Однако только в приближении геометрической оптики, когда фаза волны, ее поперечный градиент  $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = (1/k) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})$ , а также матрица ее вторых производных, характеризующая

кривизну фазового фронта  $S(x, \mathbf{R}) = \text{const}$ ,

$$u_{ij}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} S(x, \mathbf{R}),$$

описываются замкнутыми уравнениями [3, 5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \mathbf{p}^2(x, \mathbf{R}) &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) u_{ij}(x, \mathbf{R}) + u_{ik}(x, \mathbf{R}) u_{kj}(x, \mathbf{R}) &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

эту примесь можно считать пассивной. В общем же случае при учете дифракционных эффектов она является активной.

Реализации поля интенсивности, согласно предыдущему разделу, должны иметь кластерный характер, который проявляется в виде каустических структур. На обороте обложки — форзаце книги [41] — приведена фотография поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере, фрагмент из которой воспроизведен на рис. 7 (см. также [43–45], где приведены результаты как лабораторных исследований, так и численного моделирования). На рисунке 7 видно возникновение каустической структуры волнового поля. На рисунке 8 приведена фотография бассейна также с четко выраженной каустической структурой волнового поля на его дне. Подобные структуры возникают при преломлении и отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на так называемом фазовом экране.

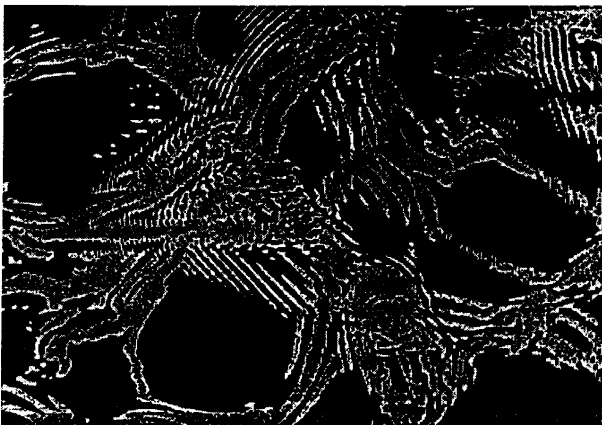


Рис. 7. Поперечное сечение лазерного пучка в турбулентной среде.

Рассмотрим теперь, следуя [5, 13], распространение волнового пучка

$$u_0(R) = u_0 \exp \left[ -\frac{R^2}{2a^2} \right] \quad (2.41)$$

в случайном параболическом волноводе

$$\varepsilon(x, R) = -[\alpha^2 - z(x)] R^2, \quad (2.42)$$



Рис. 8. Каустики в бассейне.

где параметр  $\alpha$  детерминированный, а функцию  $z(x)$  будем считать случайной. Если параметры волнового пучка и среды согласованы с волноводом, т.е.

$$k\alpha a^2 = 1, \quad (2.43)$$

то в параболическом волноводе при отсутствии флуктуаций диэлектрической проницаемости волновой пучок (2.41) является собственной модой задачи, и решение уравнения (2.38) имеет вид

$$u_0(x, R) = u_0 \exp \left[ -\frac{R^2}{2a^2} - i\alpha x \right],$$

т.е. амплитуда не меняется при распространении. При наличии флуктуаций диэлектрической проницаемости решение уравнения (2.38) можно записать в виде

$$u(x, R) = u_0 \exp \left[ -\frac{R^2}{2a^2} A(x) + B(x) \right],$$

где комплексные функции  $A(x)$  и  $B(x)$  описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A(x) &= -\frac{i}{ka^2} [A^2(x) - \alpha^2 k^2 a^4] - ika^2 z(x), \quad A(0) = 1, \\ \frac{d}{dx} B(x) &= -\frac{i}{ka^2} A(x), \quad B(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Следствием системы уравнений (2.44) является равенство (считаем для простоты, что  $|u_0|^2 = 1$ )

$$I(x, R) = I(x, 0) \exp \left[ -\frac{R^2}{a^2} I(x, 0) \right], \quad (2.45)$$

где (см. [5, 13])

$$I(x, 0) = \frac{1}{2} [A(x) + A^*(x)] \quad (2.46)$$

— интенсивность пучка в неоднородном волноводе на его оси. Далее будет показано, что в этом случае осуществляется локализация волнового пучка вдоль направления его распространения.

Остановимся теперь подробнее на приближении геометрической оптики для параболического уравнения (2.38). В этом приближении замкнутое уравнение для поперечного градиента (2.40) является квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка, и

его можно решать методом характеристик (см., например, [46]). Уравнения для характеристических кривых (лучей) имеют вид

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}(x) = \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (2.47)$$

а интенсивность волнового поля и матрица вторых производных фазы волны вдоль характеристик будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I(x) &= -I(x) u_{ii}(x), \\ \frac{d}{dx} u_{ij}(x) + u_{ik}(x) u_{kj}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Уравнения (2.47) совпадают с уравнениями для частицы в поле случайных внешних сил при отсутствии трения (2.4) и соответствуют гамильтоновой системе.

Уравнения (2.47), (2.48) существенно упрощаются в двумерном случае ( $R = y$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y(x) &= p(x), \quad \frac{d}{dx} p(x) = \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon(x, y), \\ \frac{d}{dx} I(x) &= -I(x) u(x), \quad \frac{d}{dx} u(x) + u^2(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Уравнение (2.49) для величины  $u(x)$  подобно уравнению (2.3), решение которого имеет сингулярный характер. Оно отличается только более сложной структурой случайного члена. Однако очевидно, что и в этом случае решение стохастической задачи (2.49) имеет взрывной характер, т.е. на конечном расстоянии функция  $u(x)$  обратится в  $-\infty$ , а интенсивность — в  $\infty$ . Это соответствует случайной фокусировке волнового поля в случайно-неоднородной среде, т.е. возникновению каустик [6–9].

## 2.5. Уравнения геофизической гидродинамики

Рассмотрим теперь описание гидродинамических потоков на вращающейся Земле в так называемом квазигеострофическом приближении [34]. В простейшем случае однослойной модели несжимаемый поток жидкости в двумерной плоскости  $\mathbf{r} = (x, y)$  описывается функцией тока, удовлетворяющей уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r}, t) &= J(\Delta \psi(\mathbf{r}, t) + h(\mathbf{r}); \psi(\mathbf{r}, t)), \\ \psi(\mathbf{r}, 0) &= \psi_0(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.50)$$

где параметр  $\beta_0$  — производная по широте от локального параметра Корриолиса  $f_0$ ;  $J(\psi, \varphi)$  — якобиан двух функций,  $\psi$  и  $\varphi$ ;  $h(r) = f_0 h(\mathbf{r}) / H_0$  — отклонение топографии дна  $\tilde{h}(\mathbf{r})$  относительно ее средней толщины  $H_0$ . Поле скоростей определяется через функцию тока с помощью равенства

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y}, \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \right).$$

Отметим, что в пренебрежении эффектами вращения Земли и топографии подстилающей поверхности уравнение (2.50) переходит в обычное уравнение двумерной гидродинамики [47].

Уравнение (2.50) описывает баротропное движение жидкости. В более общем случае для исследования

бароклинных движений используется двухслойная модель гидродинамических потоков, описываемая системой уравнений [34]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\Delta \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2)] + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 &= \\ &= J(\Delta \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2); \psi_1), \\ \frac{\partial}{\partial t} [\Delta \psi_2 - \alpha_2 F(\psi_2 - \psi_1)] + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 &= \\ &= J(\Delta \psi_2 - \alpha_2 F(\psi_2 - \psi_1) + f_0 \alpha_2 h; \psi_2), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где введены дополнительные параметры  $F = f_0^2 \rho / g(\Delta \rho)$ ,  $\Delta \rho / \rho = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_0 > 0$  и  $\alpha_1 = 1 / H_1$ ,  $\alpha_2 = 1 / H_2$  — обратные толщины слоев.

Частными случаями уравнений (2.50), (2.51) будут уравнения, получаемые путем пренебрежения эффектом вращения Земли (двумерная гидродинамика) с учетом, однако, топографии дна, и линеаризованные квазигеострофические уравнения, описывающие влияние топографии на распространение волн Россби. Особенностью таких задач является то, что в динамические уравнения входят производные от топографии.

## 2.6. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнения и начальных условий

Выше мы рассмотрели ряд примеров динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Для многих приложений, связанных с изучением статистических характеристик их решений (см. далее раздел 4), требуется знание зависимости решений этих задач от коэффициентов уравнения (вообще говоря, функциональной) и начальных условий. Эти зависимости обладают некоторыми общими свойствами, из которых два особенно важны для статистического описания. Проиллюстрируем их на примере простейшей задачи — системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1), описывающей динамику частиц в поле случайных скоростей, которую можно переписать в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}(\tau), \tau). \quad (2.52)$$

Решение уравнения (2.52) функционально зависит от векторного поля  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau)$  и начальных условий  $\mathbf{r}_0, t_0$ .

**2.6.1. Принцип динамической причинности.** Проварьируем уравнение (2.52) по полю  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ . Считая, что начальное условие  $\mathbf{r}_0$  не зависит от поля  $\mathbf{U}$ , получаем линейное уравнение для вариационной производной

$$\begin{aligned} \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \\ &+ \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где  $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$  — дельта-функция Дирака, а  $\theta(z)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Из уравнения (2.53) следует, что

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0, \quad (2.54)$$

т.е. решение  $\mathbf{r}(t)$  динамической задачи (2.52), рассматриваемое как функционал поля  $\mathbf{U}(\mathbf{y}, t')$ , зависит только от значений  $\mathbf{U}(\mathbf{y}, t')$  при  $t_0 < t' < t$ . Следовательно, функция  $\mathbf{r}(t)$  не меняется, если поле  $\mathbf{U}(\mathbf{y}, t')$  изменяется вне интервала  $(t_0, t')$ , т.е. для  $t' < t_0$  или  $t' > t$ . Условие (2.54) будем называть *условием динамической причинности*.

Принимая это условие во внимание, уравнение (2.53) можно переписать в виде

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')},$$

и, следовательно, переходя к пределу  $t \rightarrow t' + 0$ , получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} \right|_{t=t'+0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t')). \quad (2.55)$$

Интегральное уравнение (2.53) для вариационной производной, очевидно, эквивалентно линейному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')},$$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} \right|_{t=t'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t')). \quad (2.56)$$

Условие динамической причинности является общим свойством задач, описываемых дифференциальными уравнениями с начальными условиями. Краевые же задачи этим свойством не обладают. Так, для задачи (2.5), (2.6), описывающей распространение плоской волны в слое неоднородной среды, волновое поле в точке  $x - u(x)$  так же, как и коэффициенты отражения и прохождения, зависит функционально от значения функции  $\varepsilon(x)$  во всем слое среды  $(L_0, L)$ . Переформулировка же этой задачи с помощью метода погружения в задачу с начальными условиями по вспомогательному параметру  $L$  позволяет использовать свойство причинности для уравнений метода погружения.

**2.6.2. Зависимость решения задачи от начального условия.** Обозначим теперь зависимость решения уравнения (2.52)  $\mathbf{r}(t)$  от параметров  $\mathbf{r}_0, t_0$  вертикальной чертой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0|\mathbf{r}_0, t_0). \quad (2.57)$$

Продифференцируем уравнение (2.52) по параметрам  $r_{0k}$  и  $t_0$ . В результате для якобиевой матрицы  $\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)/\partial r_{0k}$  и величины  $\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)/\partial t_0$  получаем линейные уравнения

$$\frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}} = \delta_{ik} + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}},$$

$$\frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} = -U_i(\mathbf{r}_0(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0}. \quad (2.58)$$

Умножая теперь первое из этих уравнений на  $U_k(\mathbf{r}_0(t_0), t_0)$ , суммируя по индексу  $k$  и складывая его со

вторым уравнением, получаем для векторной функции

$$F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \left( \frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)$$

линейное однородное уравнение

$$F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} F_j(\tau|\mathbf{r}_0, t_0),$$

решение которого, очевидно, —  $\mathbf{F}(t|\mathbf{r}_0, t_0) \equiv 0$ . Таким образом, получаем равенство

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad (2.59)$$

которое можно рассматривать как линейное уравнение в частных производных по переменным  $\mathbf{r}_0, t_0$  с начальным условием при  $t_0 = t$

$$\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0. \quad (2.60)$$

Теперь переменная  $t$  входит в задачу (2.59), (2.60) как параметр.

Уравнение (2.59) решается в направлении времени, обратном по отношению к задаче (2.1), и может быть названо *обратным уравнением*.

Уравнение (2.59) с начальным условием (2.60), очевидно, также обладает свойством динамической причинности по параметру  $t_0$ , т.е.

$$\frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0,$$

и при этом, как следует из уравнения (2.59), имеет место равенство

$$\left. \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) \right|_{t'=t_0+0} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial r_{0j}} \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0). \quad (2.61)$$

### 3. Индикаторная функция и уравнение Лиувилля

Современный аппарат теории случайных процессов позволяет построить замкнутое описание динамических систем, если эти системы удовлетворяют принципу динамической причинности и описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями определенного типа [5]. Переход от описания исходной, вообще говоря, нелинейной системы к эквивалентному описанию с помощью линейных уравнений в частных производных можно осуществить с помощью индикаторных функций [5]. Однако размерность пространства переменных при этом увеличивается. Рассмотрим такой переход на примере динамических систем, рассмотренных в предыдущей главе.

#### 3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть стохастическая задача описывается системой уравнений (2.1). Введем скалярную функцию

$$\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (3.1)$$

сосредоточенную на сечении случайного процесса  $\mathbf{r}(t)$  заданной плоскостью  $\mathbf{r} = \text{const}$  и обычно называемую *индикаторной функцией*.

Дифференцируя (3.1) по времени  $t$  с помощью уравнения (2.1), получаем линейное уравнение в частных производных [3, 5]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi(t; \mathbf{r}) = 0, \quad \Phi(t_0; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}), \quad (3.2)$$

которое эквивалентно исходной системе и называется *уравнением Лиувилля*.

Переход от системы (2.1) к уравнению Лиувилля (3.2) сопровождается расширением фазового пространства  $(t, \mathbf{r})$ , которое, однако, имеет конечную размерность. Отметим, что уравнение (3.2) по своей форме совпадает с уравнением переноса примеси полем скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  (2.29) и отличается от него только начальным условием.

Решения уравнений (2.1), (3.2) зависят от начальных условий. Так, функция  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0)$  как функция от переменных  $\mathbf{r}_0, t_0$  описывается линейным уравнением в частных производных (2.59). Дифференцируя теперь функцию (3.1) по параметру  $t_0$ , с помощью уравнения (2.59) получаем также линейное уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \Phi(t; \mathbf{r}|t_0, \mathbf{r}_0) = 0, \quad \Phi(t; \mathbf{r}|t, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}), \quad (3.3)$$

которое может быть названо *обратным уравнением Лиувилля*.

### 3.2. Уравнения в частных производных первого порядка

Если мы имеем исходную задачу, описываемую дифференциальными уравнениями в частных производных, то всегда можно перейти к эквивалентному описанию с помощью линейного уравнения в вариационных производных в бесконечномерном пространстве (уравнение Хопфа) [5, 39, 48]. Для конкретного типа задач такой переход может быть упрощен. Так, если исходная динамическая система описывается уравнением в частных производных первого порядка (линейным типа уравнения (2.29) для примеси в случайном поле скоростей или квазилинейным типа уравнения (2.40) для поперечного градиента фазы волны в случайно-неоднородной среде), то фазовое пространство для соответствующей индикаторной функции имеет конечную размерность [3, 5]. Это связано с эквивалентностью уравнений в частных производных первого порядка и характеристических обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим подробнее задачу о переносе примеси случайным полем скоростей.

В лагранжевом представлении поведение пассивной примеси описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (2.30), (2.31). От них легко перейти к линейному уравнению Лиувилля в соответствующем фазовом пространстве для функции

$$\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho|\xi) = \delta(\mathbf{r}(t|\xi) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t|\xi) - \rho), \quad (3.4)$$

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат  $\xi$ . Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho|\xi) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right] \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho|\xi),$$

$$\Phi_{\text{Lag}}(0; \mathbf{r}, \rho|\xi) = \delta(\xi - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho). \quad (3.5)$$

Переход от лагранжева описания к эйлерову осуществляется с помощью матрицы расходимости  $j_{ik}(t|\xi) = \partial r_i(t|\xi) / \partial \xi_k$ , определитель которой  $j(t|\xi)$  описывается уравнением  $dj(t|\xi) / dt = (\nabla \cdot \mathbf{U})j(t|\xi)$  (2.34). Включим в рассмотрение функцию  $j(t|\xi)$ , т.е. заменим  $\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{R}, \rho|\xi)$  функцией

$$\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\xi) = \delta(\mathbf{r}(t|\xi) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t|\xi) - \rho) \delta(j(t|\xi) - j). \quad (3.6)$$

Уравнение Лиувилля для нее очевидным образом обобщает уравнение (3.5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\xi) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \right] \times \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\xi),$$

$$\Phi_{\text{Lag}}(0; \mathbf{r}, \rho, j|\xi) = \delta(\xi - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho) \delta(j - 1). \quad (3.7)$$

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию, аналогичную (3.1):

$$\Phi(t; \mathbf{r}, \rho) = \delta(\rho(t, \mathbf{r}) - \rho), \quad (3.8)$$

сосредоточенную на поверхности  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$  в трехмерном случае или контуре в двумерном случае. Уравнение для нее легко получить как непосредственно из (2.29) [5], так и исходя из уравнения Лиувилля (3.7) в лагранжевом представлении. В самом деле, приняв во внимание равенство

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r}(t|\xi) - \mathbf{r}) &= \frac{1}{|\partial r_\alpha / \partial \xi_\beta|} \delta(\xi - \xi(t, \mathbf{r})) = \\ &= \frac{1}{j(t|\xi)} \delta(\xi - \xi(t, \mathbf{r})), \end{aligned}$$

выражение (3.6) можно переписать в виде

$$\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\xi) = \frac{1}{j} \delta(\xi - \xi(t, \mathbf{r})) \delta(j(t|\xi) - j) \Phi(t; \mathbf{r}, \rho). \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$\Phi(t; \mathbf{r}, \rho) = \int d\xi \int_0^\infty j dj \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j|\xi). \quad (3.10)$$

Домножая уравнение (3.7) на  $j$  и интегрируя его по  $j$  и  $\xi$ , получаем соответствующее уравнение Лиувилля в эйлеровом представлении

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t; \mathbf{r}, \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi(t; \mathbf{r}, \rho),$$

$$\Phi(0; \mathbf{r}, \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho). \quad (3.11)$$

Для бездивергентного поля скоростей уравнения (3.3), (3.5) и (3.11) совпадают. Принципиальные отличия возникают только при наличии потенциальной составляющей у поля скорости.

Отметим, что одновременные и одноточечные плотности вероятностей для решения динамических задач совпадают с усредненными по ансамблю реализаций

значениями соответствующих индикаторных функций

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \xi) = \langle \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \xi) \rangle, \quad P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}; \rho) \rangle.$$

Этим и объясняется их особое значение в статистической динамике систем.

Кроме того, индикаторные функции дают богатую количественную и качественную информацию о геометрической структуре случайных полей. Остановимся на этом вопросе подробнее.

### 3.3. Статистическая топография случайных полей

В статистической топографии основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}. \quad (3.12)$$

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе будем говорить о двумерном случае) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию (3.8), сосредоточенную на них и являющуюся функционалом параметров среды.

Через функцию (3.8) выражаются, например, такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ :

$$S(t, \rho) = \int \theta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \, d\mathbf{r} = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \quad (3.13)$$

и общая "масса" поля, заключенная в этих областях:

$$M(t, \rho) = \int \rho(\mathbf{r}, t) \theta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \, d\mathbf{r} = \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}). \quad (3.14)$$

Так, для динамики пассивной примеси, описываемой уравнением Лиувилля (3.11), дифференцируя по времени равенства (3.13) и (3.14), получаем выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}) = \\ &= \int d\mathbf{r} \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \\ \frac{\partial}{\partial t} M(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}) = \\ &= \int d\mathbf{r} \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \tilde{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \end{aligned}$$

и, следовательно, площадь области, ограниченной контуром  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ , а также общая масса, сосредоточенная в этой области, сохраняются для бездивергентного поля скорости. В этом случае также сохраняется число замкнутых контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени в зависимости от заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве, определяемого равенством  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho = \text{const}$ .

При наличии у поля скорости потенциальной составляющей все эти величины эволюционируют во времени.

Как указывалось выше, среднее значение функции (3.8) по ансамблю реализаций определяет одновремен-

ную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) \rangle = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle, \quad (3.15)$$

и, следовательно, средние по ансамблю реализации значения выражений (3.13), (3.14) (функционалов  $\Phi$ ) непосредственно определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$  можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ . Так, например, величина

$$l(t, \rho) = \int d\mathbf{r} |\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)| \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) = \oint dl \quad (3.16)$$

описывает общую длину контуров [18–22].

Выражение (3.16) описывается расширенной индикаторной функцией с добавочной переменной  $\mathbf{p}$

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}), \quad (3.17)$$

удовлетворяющей, например, для примеси в случайном поле скоростей уравнению Лиувилля, вытекающему из (2.29) и (2.36),

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \\ = \left[ \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial p_i} p_k + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial r_k} \frac{\partial}{\partial p_i} \rho \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}). \quad (3.18)$$

Следствием уравнения (3.18), например, является эволюционное уравнение для длины контура (3.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} l(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \left[ - \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{p_i p_k}{p} + \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} p \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial r_k} \frac{p_i}{p} \rho \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

откуда видно, что длина контура эволюционирует во времени даже для бездивергентного поля скоростей.

Отметим, что средние значения формул (3.17)–(3.19) связаны с совместной одновременной плотностью вероятностей полей  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и его градиента  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ , определяемой путем усреднения индикаторной функции (3.17) по ансамблю реализаций, т.е. функцией

$$P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \rangle. \quad (3.20)$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$  с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы [19]

$$\begin{aligned} N(t, \rho) &= N_{\text{in}}(t, \rho) - N_{\text{out}}(t, \rho) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{r} \varkappa(t, \mathbf{r}; \rho) |\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)| \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $N_{in}(t, \rho)$ ,  $N_{out}(t, \rho)$  — числа контуров, для которых вектор  $\mathbf{p}$  направлен по внутренней и внешней нормали соответственно, а  $\kappa(t, \mathbf{r}; \rho)$  — кривизна линии уровня.

Для пространственно однородного поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей  $P(t, \mathbf{r}; \rho)$  и  $P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p})$  не зависят от  $\mathbf{r}$ , статистические средние всех выражений (без интегрирования по  $\mathbf{r}$ ) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин, если они, конечно, существуют.

Перейдем теперь к статистическому описанию задач, рассмотренных в предыдущей части работы.

## 4. Статистическое описание динамических систем

### 4.1. Прямое и обратное уравнения Фоккера–Планка и краевые условия к ним

Пусть векторная функция  $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$  описывается динамической системой

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.1)$$

где через  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  обозначены детерминированные функции, а через  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  обозначено гауссово векторное случайное поле с корреляционным тензором

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Здесь, как и ранее, через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Соответствующее уравнение Лиувилля для индикаторной функции  $\Phi(t, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x})$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \Phi(t, \mathbf{x}), \\ \Phi(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Усредним теперь уравнение (4.2) по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . В результате для одно-временной плотности вероятностей  $P(t, \mathbf{x}) = \langle \Phi(t, \mathbf{x}) \rangle$  получаем незамкнутое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) P(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \Phi(t, \mathbf{x}) \rangle, \\ P(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом в правой части уравнения (4.3) возникают члены, обусловленные корреляцией поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  с функцией  $\Phi(t, \mathbf{x})$ , которая является функционалом поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Методы расщепления подобных корреляций в общем случае зависят от природы случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . В случае гауссова случайного поля расщепление осуществляется на основе так называемой формулы Фурутцу–Новикова [49, 50] (см. также [5, 39])

$$\begin{aligned} \langle f_k(\mathbf{x}, t) R[\mathbf{f}] \rangle &= \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} R[\mathbf{f}] \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.4)$$

справедливой для произвольного функционала  $R[\mathbf{f}]$  от гауссова случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  и являющейся по сути

дела формулой интегрирования по частям в функциональном пространстве [51]. В результате уравнение (4.3) с учетом условия динамической причинности (2.54) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) P(t, \mathbf{x}) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \Phi(t, \mathbf{x}) \right\rangle, \\ P(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В общем случае уравнение (4.5) по-прежнему является незамкнутым уравнением.

В приближении дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  вместо тензора  $B_{ij}$  вводится эффективный корреляционный тензор (см., например, [5])

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t), \quad (4.6)$$

где пространственный фактор  $F_{ij}$  определяется равенством

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t').$$

В применении к дельта-коррелированному по времени полю  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  (4.6) уравнение (4.5) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) P(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t)} \Phi(t, \mathbf{x}) \right\rangle, \\ P(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где под оператором вариационной производной  $\delta/\delta \mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$  подразумевается предельный переход  $\delta/\delta \mathbf{f}(\mathbf{x}', t - 0)$ .

Учитывая, что для уравнения (4.2) имеет место равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t)} \Phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Phi(t, \mathbf{x}) \},$$

получаем, что уравнение (4.5) принимает вид замкнутого уравнения Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] P(t, \mathbf{x}) &= \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) P(t, \mathbf{x})], \\ P(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где коэффициенты определяются детерминистической скоростью  $\mathbf{v}$  и пространственным фактором  $F_{ij}$

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_l'} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \Big|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

В этом приближении решение системы уравнений (4.1) является марковским случайным процессом, и его переходная плотность вероятностей

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle$$

также описывается уравнением (4.8) с начальным условием

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \Big|_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Уравнение (4.8) является уравнением в частных производных и обычно называется *прямым уравнением Фоккера–Планка*. Для него дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по  $\mathbf{x}$ , которые определяются типом задачи, подлежащей исследованию.

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  (т.е. уравнения Фоккера–Планка) является условие малости временного радиуса корреляции  $\tau_0$  случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче, т.е.  $\tau_0 \ll \tau_1$  равно  $L/v$  или  $L/\sqrt{\langle f^2 \rangle}$ , где параметр  $L$  представляет типичный масштаб длины. Этот масштаб может зависеть от свойств течения (например,  $L = v/|\nabla v|$  — типичный размер вихрей) или от плотности примесей ( $L = \rho/|\nabla \rho|$ ). В любом случае эти размеры уменьшаются со временем за счет появления мелкомасштабных структур. В результате два временных масштаба становятся сравнимы, и в такой ситуации приближение дельта-коррелированности становится неприменимым. Необходимо принимать во внимание конечность временного радиуса корреляции  $\tau_0$ .

Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  можно провести в рамках диффузионного приближения (см., например, [1, 23, 52]). Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. В рамках этого приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка  $\tau_0$  несущественно, т.е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

В диффузионном приближении уравнение (4.5) является точным, а вариационная производная описывается системой динамических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{x}) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Phi(t, \mathbf{x}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \Phi(t, \mathbf{x})}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \Phi(t, \mathbf{x})}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right] \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \Phi(t, \mathbf{x}) \Big|_{t \rightarrow t'} &= \Phi(t', \mathbf{x}), \\ \frac{\delta \Phi(t, \mathbf{x})}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t \rightarrow t'} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Phi(t', \mathbf{x}) \}. \end{aligned}$$

При  $t \gg \tau_0$  решение исходной динамической системы (4.1) в диффузионном приближении также является марковским случайным процессом, и условиями применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции  $\tau_0$ .

Усредняя обратное уравнение Лиувилля (3.3) по ансамблю реализаций, легко получить также *обратное уравнение Фоккера–Планка*, которое описывает эволюцию переходной плотности вероятностей от начальных условий  $t_0, \mathbf{x}_0$  (см., например, [28]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Прямое и обратное уравнения Фоккера–Планка эквивалентны. Прямое уравнение более удобно для анализа временной эволюции статистических характеристик решения задачи (4.1). Обратное же уравнение более удобно для анализа статистических характеристик, связанных со временем пребывания случайного процесса  $\mathbf{x}(t)$  в какой-либо области пространства, со временем достижения границ этих областей и т.п. Действительно, вероятность пребывания случайного процесса  $\mathbf{x}(t)$  в области пространства  $V$  описывается интегралом

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int d\mathbf{x} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0),$$

который согласно уравнению (4.9) описывается замкнутым уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} G(t; \mathbf{x}_0, t_0) + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} G(t; \mathbf{x}_0, t_0), \\ G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x}_0 \in V, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x}_0 \notin V. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Необходимо также сформулировать дополнительные краевые условия для уравнения (4.10), которые определяются характером как самой области  $V$ , так и ее границ.

Как отмечалось во введении, решения ряда стохастических динамических задач характеризуются большими выбросами в ту или иную сторону относительно некоторой детерминированной кривой, характеризующей поведение динамической системы в целом во всем интервале времен, названной *типичной*. Это понятие можно определить исходя из одновременной плотности вероятностей.

#### 4.2. Типичная реализация случайных процессов

Пусть  $y(\tau)$  — случайный процесс с одновременной плотностью вероятностей

$$P(\tau; y) = \langle \delta(y(\tau) - y) \rangle,$$

где  $\tau$  — некоторый безразмерный параметр, который для определенности будем называть *временем*. Интегральная функция распределения для этого процесса определяется с помощью равенств

$$F(\tau, y) = P(y(\tau) < y) = \langle \Theta(y - y(\tau)) \rangle,$$

где  $\Theta(y)$  — функция Хевисайда, равная нулю при  $y < 0$  и единице при  $y > 0$ .

Назовем *типичной реализацией* случайного процесса  $y(\tau)$  детерминированную кривую  $y^*(\tau)$ , которая является медианой интегральной функции распределения и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(\tau, y^*(\tau)) = \frac{1}{2}.$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени  $(\tau_1, \tau_2)$  случайный процесс  $y(\tau)$  как бы "обвиняет" кривую  $y^*(\tau)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $y(\tau) > y^*(\tau)$ ,



совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство  $y(\tau) < y^*(\tau)$  (рис. 9) [12, 13], т.е.

$$\langle T_{y(\tau) > y^*(\tau)} \rangle = \langle T_{y(\tau) < y^*(\tau)} \rangle = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1).$$

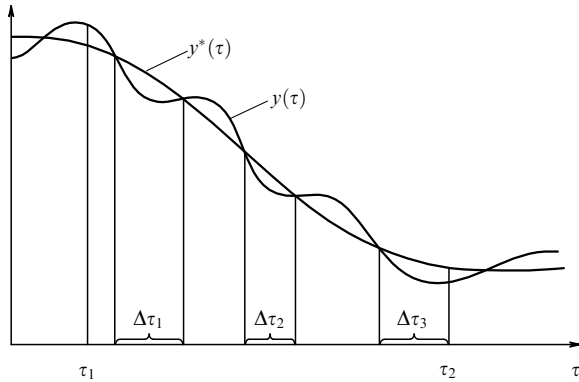


Рис. 9. Типичная реализация случайного процесса.

При этом, естественно, кривая  $y^*(\tau)$  может существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса  $y(\tau)$  и не описывает величину возможных выбросов.

Таким образом, кривая типичной реализации  $y^*(\tau)$  случайного процесса  $y(\tau)$ , полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена, тем не менее, на всем интервале времени  $\tau \in (0, \infty)$ .

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

Простейшим примером положительно определенного случайного процесса, возникающего в огромном числе приложений практически во всех областях физики, является логарифмически-нормальный случайный процесс. Этот процесс обладает рядом замечательных свойств [12, 13], которые проявляются для задач, рассмотренных в разделе 2, в таких конкретных физических явлениях, как пространственная локализация и кластеризация.

**4.3. Логарифмически-нормальный случайный процесс**

Определим логнормальный случайный процесс по формуле

$$y(\tau) = \exp \left\{ -\tau + \int_0^\tau d\xi z(\xi) \right\}, \tag{4.11}$$

где  $z(\xi)$  — гауссов процесс белого шума с параметрами

$$\langle z(\xi) \rangle = 0, \quad \langle z(\xi)z(\xi') \rangle = 2\delta(\xi - \xi').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{d\tau} y(\tau) = \{ -1 + z(\tau) \} y(\tau), \quad y(0) = 1.$$

Свойства этого процесса следующие.

1. Логнормальный процесс является марковским процессом, и его одновременная плотность вероятностей  $P(\tau; y) = \langle \delta(y(\tau) - y) \rangle$  описывается уравнением

Фоккера – Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; y) &= \frac{\partial}{\partial y} y P(\tau; y) + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(\tau; y), \\ P(0; y) &= \delta(y - 1), \end{aligned} \tag{4.12}$$

решение которого

$$P(\tau; y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau y}} \exp \left\{ -\frac{1}{4\tau} \ln^2(ye^\tau) \right\} \tag{4.13}$$

имеет длинный пологий "хвост", показывающий, что одновременная статистика процесса  $y(\tau)$  описывается большими выбросами (рис. 10). Интегральная функция распределения при этом имеет вид

$$F(\tau; y) = P(y(\tau) < y) = \Phi \left[ \frac{1}{(2\tau)^{1/2}} \ln^2(ye^\tau) \right],$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл ошибок,

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^z dy \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right).$$

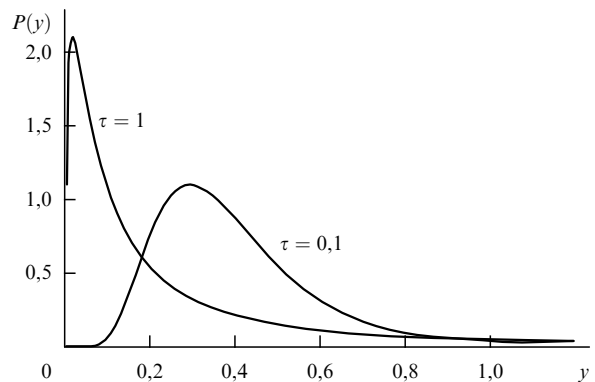


Рис. 10. Плотность вероятностей логнормального случайного процесса.

2. Для этого процесса моментные функции определяются равенствами

$$\langle y^n(\tau) \rangle = \exp \{ n(n-1)\tau \}, \quad \left\langle \frac{1}{y^n(\tau)} \right\rangle = \exp \{ n(n+1)\tau \}, \tag{4.14}$$

$n = 1, 2, \dots,$

и экспоненциально растут во времени.

3. Кривая типичной реализации для этого процесса экспоненциально спадает во времени:

$$y^*(\tau) = e^{-\tau}. \tag{4.15}$$

Следовательно, экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса относительно этой кривой как в сторону больших, так и малых значений. Однако вероятность выполнения неравенства  $y < 1$  при  $\tau \gg 1$  при этом быстро стремится к единице:

$$P(y(\tau) < 1) = F(\tau, 1) = 1 - \frac{1}{(\pi\tau)^{1/2}} e^{-\tau/4}.$$

4. Для любой заданной вероятности  $0 < p < 1$  существует однопараметрическое семейство экспоненциально

спадающих во времени кривых

$$Y_p(\tau, \beta) = (1-p)^{-1/\beta} \exp\{-(1-\beta)\tau\} \quad (0 \leq \beta \leq 1); \quad (4.16)$$

это означает, что соответствующая часть реализаций лежит ниже кривой  $Y_p(\tau, \beta)$ , т.е.

$$P\{y(\tau) < Y_p(\tau, \beta) \text{ для всех } \tau \in (0, \infty)\} = p.$$

В частности, с вероятностью  $p = 1/2$  выполняется неравенство

$$y(\tau) < 4 \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\right\} \quad (4.17)$$

для любого времени  $\tau$  из интервала  $(0, \infty)$ .

5. Существуют стационарные плотности вероятностей для случайных интегралов  $S_n = \int_0^\infty d\tau y^n(\tau)$ , характеризующих структуру больших выбросов и имеющих степенную асимптотику при больших значениях  $S$ , а именно

$$P_n(S) = \frac{n^{-2/n}}{\Gamma(1/n)} \frac{1}{S^{1+1/n}} \exp\left\{-\frac{1}{n^2 S}\right\}; \quad (4.18)$$

в частности, для величины площади  $S_1 = \int_0^\infty d\tau y(\tau)$  стационарная плотность вероятностей и соответствующая ей интегральная функция распределения имеют вид

$$P_1(S) = \frac{1}{S^2} \exp\left\{-\frac{1}{S}\right\}, \quad F(S) = \exp\left\{-\frac{1}{S}\right\}.$$

Это означает, что выбросы логнормального случайного процесса достаточно узки.

Все эти свойства, характеризующие эволюцию логнормального случайного процесса во времени, являются следствиями, вытекающими только из одновременного распределения вероятностей (4.13).

Перейдем теперь непосредственно к статистическому анализу конкретных задач, сформулированных во второй части работы.

## 5. Явление переброса в сингулярных динамических системах

### 5.1. Простейший случай

Прежде всего рассмотрим стохастическое уравнение (2.3), которое запишем в виде ( $\lambda = 1$ )

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.1)$$

где будем считать случайный процесс  $f(t)$  гауссовым дельта-коррелированным во времени процессом с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2D\delta(t-t').$$

При отсутствии флуктуаций решение задачи (5.1) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{t-t_0}, \quad t_0 = -\frac{1}{x_0}.$$

Если начальная точка  $x_0 > 0$ , то решение задачи монотонно стремится к нулю. В случае же  $x_0 < 0$  решение обращается в  $-\infty$  за конечное время  $t_0$ .

Решение статистической задачи (5.1) описывается прямым и обратным уравнениями Фоккера–Планка по переменной  $t - t_0$ , которую обозначим через  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}p(x, t|x_0) &= \frac{\partial}{\partial x}x^2p(x, t|x_0) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x, t|x_0), \\ \frac{\partial}{\partial t}p(x, t|x_0) &= -x_0^2\frac{\partial}{\partial x_0}p(x, t|x_0) + D\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}p(x, t|x_0), \\ p(x, 0|x_0) &= \delta(x-x_0). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Величины  $x$ ,  $p(x, t|x_0)$  и  $D$  имеют соответственно размерности  $[x] = t^{-1}$ ,  $[D] = t^{-3}$ ,  $[p] = t$ , и, следовательно, безразмеривая уравнения (5.2), можно переписать их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}p(x, t|x_0) &= \frac{\partial}{\partial x}x^2p(x, t|x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x, t|x_0), \\ \frac{\partial}{\partial t}p(x, t|x_0) &= -x_0^2\frac{\partial}{\partial x_0}p(x, t|x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}p(x, t|x_0), \\ p(x, 0|x_0) &= \delta(x-x_0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Необходимо далее сформулировать краевые условия для (5.3) в сингулярных точках  $\pm\infty$ . Существует два типа задач, представляющих непосредственный интерес.

Первый тип краевых условий возникает, если предположить, что кривая  $x(t)$  обрывается в точке  $t_0$ , где она обращается в  $-\infty$ . Это соответствует условию, что плотность потока вероятностей

$$J(t, x) = x^2p(x, t|x_0) + \frac{\partial}{\partial x}p(x, t|x_0) \quad (5.4)$$

должна равняться нулю при  $x \rightarrow \infty$ , т.е. условиям

$$J(t, x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty; \quad p(x, t|x_0) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty.$$

В этом случае величина

$$G(t|x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, t|x_0) \neq 1$$

определяет вероятность того, что функция  $x(t)$  остается конечной на всей оси  $(-\infty, \infty)$ , т.е. является вероятностью  $P(t < t_0)$  отсутствия сингулярной точки в момент времени  $t$ . Следовательно, вероятность появления сингулярной точки в момент времени  $t$  определяется равенством (см., например, [28])

$$P(t > t_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, t|x_0),$$

и ее плотность вероятностей

$$p(t|x_0) = \frac{\partial}{\partial t}P(t > t_0) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, t|x_0) \quad (5.5)$$

описывается уравнением, вытекающим из обратного уравнения Фоккера–Планка (5.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t|x_0) = -x_0^2\frac{\partial}{\partial x_0}p(t|x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}p(t|x_0). \quad (5.6)$$

Оценим среднее время  $\langle T(x_0) \rangle = \int_0^\infty t dt p(t|x_0)$ , за которое система перейдет из состояния  $x_0$  в состояние

$-\infty$ . Эта величина описывается уравнением, вытекающим из (5.6),

$$-1 = -x_0^2 \frac{d}{dx_0} \langle T(x_0) \rangle + \frac{d^2}{dx_0^2} \langle T(x_0) \rangle \quad (5.7)$$

с крайвыми условиями  $\langle T(x_0) \rangle \rightarrow 0$  при  $x_0 \rightarrow -\infty$ , и величина  $\langle T(x_0) \rangle$  ограничена при  $x_0 \rightarrow \infty$ . Это уравнение легко интегрируется, и в результате получаем

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_{-\infty}^{x_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - \eta^3) \right\}. \quad (5.8)$$

Для среднего времени между двумя сингулярными точками (см. рис. 3) из (5.8) получаем

$$\langle T(\infty) \rangle = \sqrt{\pi} \frac{12^{1/6}}{3} \Gamma \left( \frac{1}{6} \right) \approx 4,976.$$

Отметим также, что величина  $\langle T(0) \rangle = (2/3) \langle T(\infty) \rangle$  соответствует среднему времени перехода из состояния  $x_0 = 0$  в состояние  $x_0 = -\infty$ .

Совершенно другие крайвые условия возникают, если считать, что функция  $x(t)$  разрывна и определена для всех значений времени  $t$ . Если ее обращение в  $-\infty$  в момент времени  $t \rightarrow t_0 - 0$  немедленно сопровождается ее появлением при  $t \rightarrow t_0 + 0$  со значением  $\infty$ , то крайвым условием для уравнения (5.3) будет условие непрерывности плотности потока вероятностей (5.4), т.е. условие

$$J(t, x)|_{x \rightarrow -\infty} = J(t, x)|_{x \rightarrow \infty}.$$

При  $t \rightarrow \infty$  существует стационарная плотность вероятностей, не зависящая от  $x_0$ ,

$$P(x) = J \int_{-\infty}^x d\xi \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - x^3) \right\}, \quad (5.9)$$

где стационарная плотность потока вероятностей  $J = 1/\langle T(\infty) \rangle$ .

Для больших значений  $x$  из (5.4) следует асимптотическая формула

$$P(x) = \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle x^2}. \quad (5.10)$$

Эта асимптотика формируется разрывами функции  $x(t)$  типа

$$x(t) = \frac{1}{t - t_k},$$

и влияние случайностей несущественно. В самом деле, для достаточно больших  $t \gg \langle T(\infty) \rangle$  и больших  $x$  в этом случае имеем

$$\begin{aligned} p(x, t|x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left( x - \frac{1}{t - t_k} \right) \right\rangle = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta(t - t_k) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-izt) \sum_{k=0}^{\infty} \langle \exp(izt_k) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-izt) \frac{\Phi_0(z)}{1 - \Phi(z)}, \end{aligned}$$

где  $\Phi_0(z) = \langle \exp(izt_0) \rangle$  — характеристическая функция первой сингулярной точки, а  $\Phi(z) = \langle \exp(izT) \rangle$  — характеристическая функция времени между сингулярностями. Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  получаем асимптотику

$$P(x) = -\frac{1}{2\pi i x^2 \langle T(\infty) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-izt) \frac{1}{z + i0} = \frac{J}{x^2},$$

совпадающую с (5.10).

### 5.2. Возникновение каустик в случайных средах

Близкой к рассмотренной выше является задача о каустиках в случайных средах. В двумерном случае кривизна фазовой поверхности в плоскости  $(x, y)$  описывается уравнением

$$\frac{d}{dx} u(x) = -u^2(x) + f(x), \quad u(0) = u_0, \quad (5.11)$$

где  $f(x) = (1/2) \partial^2 \varepsilon(x, y(x)) / \partial y^2$ , а поперечное смещение луча  $y(x)$  описывается системой уравнений (2.49). Для однородных, изотропных, гауссовых дельта-коррелированных флуктуаций поля  $\varepsilon(x, y)$

$$\langle \varepsilon(x, y) \varepsilon(x', y') \rangle = \delta(x - x') A(y - y')$$

одноточечная плотность вероятностей кривизны статистически не зависит от смещения луча и описывается уравнением Фоккера – Планка

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x; u) = \frac{\partial}{\partial u} J(x; u), \quad P(0; u) = \delta(u - u_0), \quad (5.12)$$

где плотность потока вероятностей есть

$$\begin{aligned} J(x; u) &= u^2 P(x; u) + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x; u); \\ D &= \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial y^4} A(0) = \pi \int_0^{\infty} z^4 dz \Phi_\varepsilon(0, z) \end{aligned}$$

— диффузионный коэффициент;  $\Phi_\varepsilon(0, z)$  — двумерная спектральная функция случайного поля  $\varepsilon(x, y)$ .

Уравнение (5.12) рассматривалось в предыдущем разделе. Было показано, что случайный процесс  $u(x)$  является разрывным и обращается в  $-\infty$  на конечном расстоянии  $x(u_0)$ , которое определяется начальным условием  $u_0$ , что означает фокусировку волны в случайно-неоднородной среде. Среднее значение  $\langle x(u_0) \rangle$  в этом случае описывается выражением

$$\langle x(u_0) \rangle = \frac{2}{D} \int_{-\infty}^{u_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{2}{3D} (\xi^3 - \eta^3) \right\}, \quad (5.13)$$

и, следовательно [6–8],

$$D^{1/3} \langle x(\infty) \rangle \approx 6,27, \quad D^{1/3} \langle x(0) \rangle = \frac{2}{3} D^{1/3} \langle x(\infty) \rangle \approx 4,18.$$

Величина  $\langle x(0) \rangle$  описывает среднее расстояние возникновения фокуса для плоской падающей волны, а величина  $\langle x(\infty) \rangle$  описывает среднее расстояние между двумя последовательными фокусами.

**Замечание.** В методе плавных возмущений (см., например, [5, 40, 41]) анализ флуктуаций интенсивности для оптических полей базируется на анализе уровня интенсивности  $\chi(x, y) = \ln I(x, y)$ . Все статистические

характеристики  $\chi$  определяются величиной дисперсии уровня интенсивности  $\sigma^2(x)$ , вычисленной в первом приближении метода плавных возмущений, в котором  $\sigma^2(x) \cong Dx^3$ . Флуктуации интенсивности имеют разное поведение при условии  $\sigma^2(x) \ll 1$  (слабые флуктуации) и  $\sigma^2(x) \gg 1$  (сильные флуктуации). Как видно из (5.13), случайная фокусировка осуществляется в области сильных флуктуаций интенсивности.

Уравнение (5.12) имеет "стационарную" при  $x \rightarrow \infty$  предельную плотность вероятностей, соответствующую постоянству плотности потока вероятностей, аналогичную (5.9),

$$P(u) = J \int_{-\infty}^u d\xi \exp \left\{ \frac{2}{3D} (\xi^3 - u^3) \right\}, \quad (5.14)$$

где  $J = 1/\langle x(\infty) \rangle$ . При больших значениях  $u$  из (5.12) следует асимптотическая формула

$$P(u) = \frac{1}{\langle x(\infty) \rangle u^2},$$

что означает формирование стационарной статистики видом функции  $u(x)$  в окрестности ее разрывов

$$u(x) = \frac{1}{x - x_k}.$$

Интенсивность волнового поля также имеет структуру, вытекающую из (2.49),

$$I(x) = \frac{x_k}{|x - x_k|},$$

и асимптотика ее плотности вероятностей для больших значений  $I$  и  $x$  имеет вид

$$P(x, I) = \frac{2x}{\langle x(\infty) \rangle I^2},$$

зависящий от расстояния, пройденного волной.

Вероятность возникновения фокуса на расстоянии  $x$  согласно предыдущему разделу определяется выражением

$$P(x > x_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} du P(x, u),$$

и, следовательно, плотность вероятностей связана с плотностью потока вероятностей выражением [6–8]

$$p(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(x > x_0) = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} du P(x, u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} J(x, u).$$

Чтобы получить асимптотическую зависимость  $p(x)$  от малого параметра ( $D \rightarrow 0$ ), воспользуемся стандартной процедурой анализа параболического уравнения с малым параметром при старшей производной (см., например, [28]). Представим решение уравнения (5.12) в виде

$$P(x, u) = C(D) \exp \left\{ - \frac{1}{D} A(x, u) - B(x, u) \right\}. \quad (5.15)$$

Подставляя (5.15) в уравнение (5.12) и выделяя члены порядка  $D^0$  и  $D^{-1}$ , получаем уравнения в частных

производных для функций  $A(x, u)$  и  $B(x, u)$ . Постоянная  $C(D)$  определяется из условия, что при  $x \rightarrow 0$  плотность вероятностей, например, для плоской падающей волны, должна иметь вид

$$P(x, u) = \frac{1}{(2\pi Dx)^{1/2}} \exp \left\{ - \frac{u^2}{2Dx} \right\}.$$

Это дает оценку  $C(D) \cong D^{-1/2}$ . Подставляя (5.15) в выражение для плотности вероятностей образования фокуса, получаем

$$p(x, u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} P(x, u) \left[ u^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} A(x, u) \right]. \quad (5.16)$$

Представление  $P(x, u)$  в виде (5.15) позволяет получить структурную зависимость  $p(x)$  от  $x$  из размерных соображений [9]. В самом деле, величины  $u$ ,  $D$  и  $P(x, u)$  имеют размерности соответственно

$$[u] = x^{-1}, \quad [D] = x^{-3}, \quad [P(x, u)] = x,$$

и, следовательно, исходя из (5.15) и (5.16), получаем зависимость

$$p(x) = C_1 D^{-1/2} x^{-5/2} \exp \left\{ - \frac{C_2}{Dx^3} \right\},$$

и остается вычислить постоянные  $C_1$  и  $C_2$ . Эти постоянные были вычислены в работе [6], и окончательная формула имеет вид

$$p(x) = 3\alpha^2 (2\pi D)^{-1/2} x^{-5/2} \exp \left\{ - \frac{\alpha^4}{6Dx^3} \right\}, \quad (5.17)$$

где  $\alpha = 1,85$ .

Условие применимости (5.17) является условием  $Dx^3 \ll 1$ . Однако, как было показано в [6] путем численного моделирования, выражение (5.17) также достаточно хорошо описывает плотность вероятностей и при  $Dx^3 \sim 1$ .

В трехмерном случае из размерных соображений можно получить для плотности вероятностей образования каустик выражение [9]

$$p(x) = \alpha D^{-1} x^{-4} \exp \left\{ - \frac{\beta}{Dx^3} \right\},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — численные постоянные. Этот закон с  $\alpha = 1,74$  и  $\beta = 0,66$  был получен в [7].

### 5.3. Фаза коэффициента отражения плоской волны в слоистых случайных средах

Переход к разрывным случайным процессам может быть полезным приемом и для описания в ряде случаев динамических систем, изначально не имеющих разрывных решений. Такая ситуация возникает при описании фазовых флуктуаций в волновых задачах. Так, например, в разделе 2.2 работы было показано, что фаза коэффициента отражения для плоской волны  $\phi_L$ , падающей на достаточно толстый слой среды со слоистыми неоднородностями, описывается уравнением (2.13). Нас интересует закон распределения вероятностей случайной величины  $\phi_L$ . Решение уравнения (2.13) определяет его на всей оси  $\phi_L (-\infty, \infty)$ . Однако для приложений полезнее знание

распределения вероятностей на интервале  $(-\pi, \pi)$ , которое для полупространства, естественно, не должно зависеть от  $L$ . Для получения этого распределения удобно вместо фазы волны  $\phi_L$  рассматривать функцию  $z_L = \tan(\phi_L/2)$ , имеющую сингулярные точки. Динамическое уравнение для нее имеет вид (2.15). Считая, что случайная функция  $\varepsilon_1(L)$  является гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(L) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(L)\varepsilon_1(L') \rangle = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(L - L'),$$

где  $\sigma_\varepsilon^2$  — дисперсия, а  $l_0$  — радиус корреляции для случайной функции  $\varepsilon_1(L)$ , для "стационарной", не зависящей от  $L$  плотности вероятностей (случай полупространства)

$$P(z) = \lim_{L_0 \rightarrow -\infty} P(L, z)$$

получаем уравнение

$$-\kappa \frac{d}{dz} (1 + z^2) P(z) + \frac{d^2}{dz^2} P(z) = 0 \quad (5.18)$$

с параметром  $\kappa = k/(2D)$ , где  $D = k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 / 2$ , описывающим влияние волнового числа и параметров среды на статистические характеристики задачи. Решение уравнения (5.18), соответствующее постоянству плотности потока вероятностей, имеет вид [13, 33]

$$P(z) = J(\kappa) \int_z^\infty d\xi \exp \left\{ -\kappa \xi \left[ 1 + \frac{\xi^2}{3} + z(z + \xi) \right] \right\},$$

$$J^{-1}(\kappa) = \left( \frac{\pi}{\kappa} \right)^{1/2} \int_0^\infty \xi^{-1/2} d\xi \exp \left\{ -\kappa \left( \xi + \frac{\xi^3}{12} \right) \right\}. \quad (5.19)$$

Соответствующее распределение вероятностей для фазы волны в интервале  $(-\pi, \pi)$  имеет вид

$$P(\phi) = \frac{1 + z^2}{2} P(z)_{z=\tan(\phi/2)}$$

и приведено на рис. 11 для различных значений параметра  $\kappa$ :  $\kappa = 0, 1$  (А),  $\kappa = 1$  (В),  $\kappa = 10$  (С).

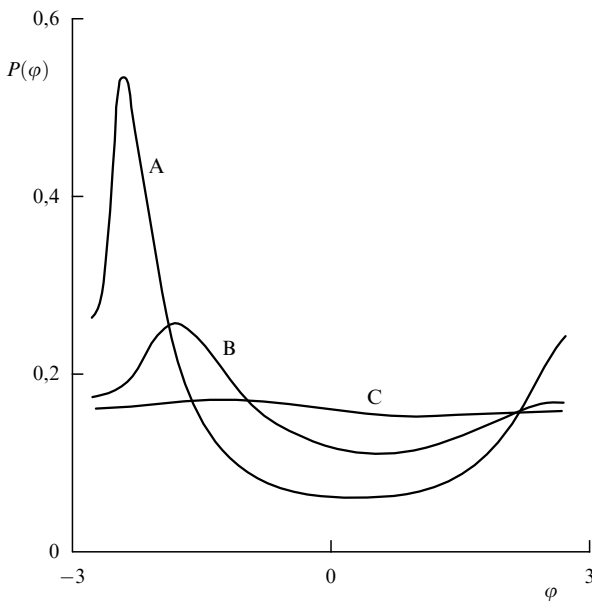


Рис. 11. Плотность вероятностей для фазы плоской волны в слоистой среде.

При  $\kappa \gg 1$  получаем асимптотическую зависимость  $P(z) = 1/\pi(1 + z^2)$ ,  $-\infty < z < \infty$ , что соответствует равномерному распределению фазы коэффициента отражения

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \phi < \pi.$$

### 6. Локализация плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах

Цель данного раздела обсудить распространение волн в однослойной и многослойной моделях среды.

В последние годы усиленно дискутируется проблема локализации волнового поля в хаотически слоистых средах при наличии и отсутствии поглощения в среде (см. обзоры [11–13]). При этом не всегда дается однозначный ответ о существовании локализации в той или иной физической ситуации. Последнее обусловлено тем, что реализации поля внутри среды обладают сложной пространственной структурой. А именно убывание интенсивности волны при удалении от источника в глубь среды чередуется все более редкими, но и более сильными выбросами интенсивности за счет когерентного сложения многократно рассеянных в среде волн (см. рис. 5). В итоге оказывается, что практически в каждой конкретной реализации поля наблюдается динамическая локализация, в то время как поведение статистических средних, например, средней интенсивности и ее высших моментов, указывает на отсутствие статистической энергетической локализации, т.е. локализации средней интенсивности волны, выражающей свойства всего статистического ансамбля реализаций.

#### 6.1. Однослойная модель среды

Постановка задачи в рамках однослойной модели среды о падении волны на слой среды была дана в разделе 2.2. При этом статистическая задача распадается на две: анализ статистических характеристик коэффициентов отражения и прохождения, связанных со значениями волнового поля на границах слоя среды, и анализ статистических характеристик интенсивности волны внутри слоя среды.

**6.1.1. Коэффициенты отражения и прохождения.** Квадрат модуля коэффициента отражения как функция параметра  $L$  (положения правой границы слоя, на которую падает волна, в рамках метода погружения) описывается замкнутыми уравнениями (2.10), (2.12). Считая случайную функцию  $\varepsilon_1(x)$  гауссовой, дельта-коррелированной по  $x$  случайной функцией с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(L) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(L)\varepsilon_1(L') \rangle = B_\varepsilon(L - L') = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(L - L'),$$

где  $\sigma_\varepsilon^2$  — дисперсия, а  $l_0$  — радиус корреляции для случайной функции  $\varepsilon_1(L)$ , для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения  $P(L, W) = \langle \delta(W_L - W) \rangle$  получаем уравнение Фоккера–Планка [10]

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} (WP) - 2D \frac{\partial}{\partial W} [W(1 - W)P] + D \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)^2 W \frac{\partial}{\partial W} P, \quad P(L_0, W) = \delta(W), \quad (6.1)$$

с коэффициентом диффузии  $D = k^2 \sigma_e^2 l_0 / 2$ . При выводе (6.1) используется дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, связанным с фазой коэффициента отражения, что справедливо при естественном ограничении  $k/D \gg 1$  (см. раздел 5.3).

При учете конечности радиуса корреляции  $l_0$  для случайной функции  $\varepsilon_1(L)$  в рамках диффузионного приближения уравнение (6.1) не меняется, меняется лишь коэффициент диффузии, который определяется выражением

$$D = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos(2k\xi) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k), \quad (6.2)$$

где  $\Phi_\varepsilon(2k)$  — спектральная функция процесса  $\varepsilon(L)$ . Диффузионное приближение, заключающееся в предположении о малости влияния  $\varepsilon_1(x)$  на волновое поле в масштабе радиуса корреляции  $l_0$ , справедливо при выполнении условия  $Dl_0 \ll 1$ .

При отсутствии поглощения в среде уравнение (6.1) интегрируется [10], и для достаточно большой толщины слоя, а именно  $\tau = D(L - L_0) \gg 1$ , для моментов модуля коэффициента прохождения  $|T_L|^2 = 1 - W_L$  имеем асимптотику

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle \approx \frac{[(2n-3)!!]^2 \pi^2 \sqrt{\pi}}{2^{2n-1} (n-1)!} \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right).$$

Таким образом, асимптотическая зависимость любого момента коэффициента прохождения или отражения от толщины слоя  $\tau$  имеет универсальный характер, меняется лишь численный коэффициент. Стремление к нулю всех моментов  $|T|$  при увеличении толщины слоя означает, что модуль коэффициента отражения  $|R| \rightarrow 1$  с вероятностью единица. Следовательно, полупространство хаотически слоистой среды полностью отражает падающую на нее волну.

При наличии поглощения решить уравнение (6.1) для слоя конечной толщины  $\tau$  не представляется возможным. Однако для полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty, \tau \rightarrow \infty$ ) существует "стационарное", не зависящее от  $L$  и  $\tau$  распределение вероятностей для  $W_L = |R_L|^2$

$$P(W) = \frac{2\beta}{(1-W)^2} \exp\left(-\frac{2\beta W}{1-W}\right), \quad (6.3)$$

где  $\beta = k\gamma/D$  — безразмерный коэффициент поглощения. Физический смысл плотности вероятностей (6.3) очевиден: она описывает статистические свойства коэффициента отражения от достаточно протяженного хаотически неоднородного слоя, до конца которого падающая волна не проникает вследствие ее динамического поглощения средой. С помощью распределения (6.3) можно вычислить все моменты величины  $W_L = |R_L|^2$ . В частности, справедливы асимптотические формулы

$$\langle W(L) \rangle = \begin{cases} 1 - 2\beta \ln\left(\frac{1}{\beta}\right), & \beta \ll 1, \\ \frac{1}{2\beta}, & \beta \gg 1, \end{cases} \quad (6.4)$$

а также рекуррентное соотношение для моментов более высокого порядка

$$n \langle W^{n+1} \rangle - 2(\beta + n) \langle W^n \rangle + n \langle W^{n-1} \rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.5)$$

Если источник плоских волн находится внутри пространства, заполненного хаотически слоистой средой, то волновое поле описывается краевой задачей (2.9). В этом случае для неограниченного пространства ( $L_0 \rightarrow -\infty, L \rightarrow \infty$ ) средняя интенсивность в точке расположения источника [5, 10]

$$\langle I(x_0; x_0) \rangle = 1 + \beta^{-1}$$

и ее неограниченный рост при  $\beta \rightarrow 0$  свидетельствуют о накоплении энергии волны в хаотически слоистой среде.

**6.1.2. Интенсивность волнового поля внутри среды.** Обсудим теперь структуру волнового поля внутри слоя хаотической среды. При отсутствии поглощения и для достаточно толстого слоя ( $\tau = D(L - L_0) \gg 1$ ) имеет место явление *стохастического волнового параметрического резонанса*, заключающегося в экспоненциальном росте моментных функций интенсивности волнового поля  $\langle I^n(x; L) \rangle$ , нормированных на  $\langle I^n(L; L) \rangle$  ( $I(x; L) = |u(x; L)|^2$ ), от границ слоя в глубину среды при  $n > 1$  [10]. При этом максимальное значение достигается примерно в середине слоя (рис. 12, где  $\xi = (x - L_0)/(L - L_0)$ ). В предельном случае полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) область экспоненциального роста для моментов, начиная со второго, занимает все полупространство, а среднее значение интенсивности волны  $\langle I(x; L) \rangle = 2$ . Интенсивность волнового поля в этом случае имеет структуру

$$I(x; L) = 2W(x; L)(1 + \cos \phi_L); \quad (6.6)$$

здесь  $\phi_L$  — фаза коэффициента отражения — описывается стохастическим уравнением (2.13) (см. раздел 5.3), а функция  $W(x; L)$  при этом определяется равенством

$$W(x; L) = \exp\left\{-[q(L) - q(x)]\right\},$$

где  $q(L)$  удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{d}{dL} q(L) = k\varepsilon_1(L) \sin \phi_L. \quad (6.7)$$

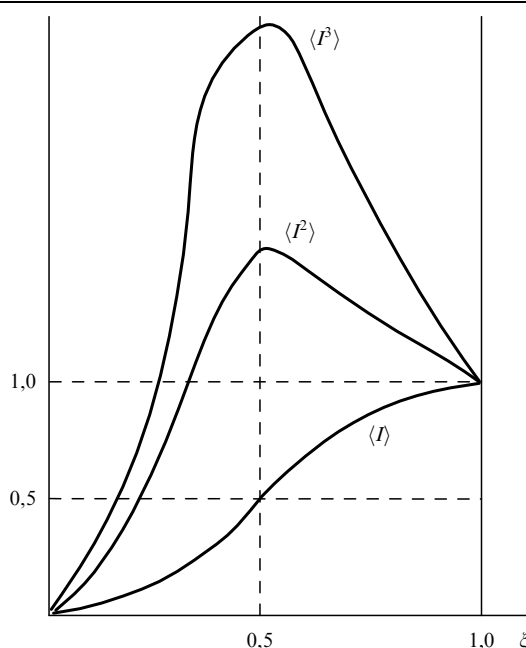


Рис. 12. Стохастический волновой параметрический резонанс.

Начальным условием для уравнения (6.7) является условие  $q(B) = 0$  в произвольной, достаточно удаленной точке  $B$ , и при этом случайная величина  $\phi_B$  имеет равномерное распределение вероятностей [10].

В этом случае случайные функции  $q(L)$  и  $\phi_L$  статистически независимы и плотность вероятностей  $P(L, q) = \langle \delta(q(L) - 1) \rangle$  для функции  $q(L)$  после усреднения по быстрым осцилляциям описывается уравнением Фоккера – Планка

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, q) = -D \frac{\partial}{\partial q} P(L, q) + D \frac{\partial^2}{\partial q^2} P(L, q),$$

$$P(B, q) = \delta(q). \quad (6.8)$$

Следовательно, функция  $q(L)$  является гауссовой случайной функцией, а функция  $W(x; L)$  имеет логнормальное распределение, и ее моментные функции, начиная со второй, экспоненциально растут в глубь среды,

$$\langle W(x; L) \rangle = 1, \quad \langle W^n(x; L) \rangle = \exp \{n(n-1)D(L-x)\}. \quad (6.9)$$

По свойствам логнормального распределения вероятностей типичной реализацией функции  $W(x; L)$  является функция

$$W^*(x; L) = \exp \{ -D(L-x) \}, \quad (6.10)$$

и, например, с вероятностью 1/2 для ее реализаций имеет место неравенство, справедливое для всего полупространства,

$$W(x; L) < 4 \exp \left\{ -\frac{D(L-x)}{2} \right\}.$$

Экспоненциальное спадание с ростом  $\xi = D(L-x)$  типичной реализации (6.10) и отождествляется обычно в физике неупорядоченных систем со свойством динамической локализации [11, 53, 54]. Величина  $l_{\text{loc}} = 1/D$  называется *длиной локализации*, и статистическая энергетическая локализация при этом не осуществляется.

Таким образом, знание одноточечной плотности вероятностей позволяет понять эволюцию во всем пространстве интенсивности волнового поля в отдельных реализациях и оценить параметры этой эволюции в терминах статистических характеристик флуктуирующей среды.

При наличии поглощения в среде экспоненциальный рост моментов (6.9) прекращается, и при  $\xi \gg 4(n-1/2) \ln(n/\beta)$  они стремятся к нулю по закону [13]

$$\langle W(\xi) \rangle \cong A_n \beta^{-(n-1/2)} \ln \left( \frac{1}{\beta} \right) \xi^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{\xi}{4} \right\}.$$

Что касается средней интенсивности поля точечного источника в неограниченном пространстве, то при достаточно большом удалении от источника  $\xi = D(x-x_0) \gg 1$  [13]

$$\langle I(x; x_0) \rangle = \frac{\pi^{5/2}}{8\beta} \xi^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{\xi}{4} \right\},$$

т.е. имеет место статистическая локализация наряду с динамической.

## 6.2. Двухслойная модель среды

Простейшая модель распространения волн в двухслойной среде приведена в разделе 2.2 и описывается системой уравнений (2.17).

В работах [37, 38] в диффузионном приближении было получено уравнение Фоккера – Планка, описывающее плотность вероятностей квадратов модулей коэффициентов отражения  $W_{ij} = |R_{ij}|^2$ , содержащее (в отличие от однослойной среды) четыре коэффициента диффузии, которые выражаются через спектральную функцию случайного процесса  $\varepsilon(x)$  следующим образом:

$$D_1 = \left( \frac{k}{2\lambda} \frac{H_1}{H_0} \right)^2 \Phi_\varepsilon(2\lambda k), \quad D_2 = \left( \frac{k}{2} \frac{H_2}{H_0} \right)^2 \Phi_\varepsilon(2k),$$

$$D_3 = \left( \frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_\varepsilon(k(1+\lambda)), \quad D_4 = \left( \frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_\varepsilon(k(1-\lambda)). \quad (6.11)$$

Для мелкомасштабных неоднородностей среды ( $kl_0 \ll 1$ ) все коэффициенты диффузии выражаются через один коэффициент  $D$ , описываемый формулой (6.2), а именно

$$D_1 = \left( \frac{1}{\lambda} \frac{H_1}{H_0} \right)^2 D, \quad D_2 = \left( \frac{H_2}{H_0} \right)^2 D, \quad D_3 = D_4 = \frac{1}{\lambda^2} D. \quad (6.12)$$

Диффузионное приближение применимо при условии  $Dl_0 \ll 1$ .

Как упоминалось выше, в рассматриваемой задаче существует параметр  $\delta$ , малость которого можно использовать для упрощения анализа задачи. Пренебрегаем в уравнении для плотностей вероятностей слагаемыми второго порядка по  $\delta$ , т.е. эффектами вторичного переизлучения волн. В этом приближении величины  $W_{11}$  и  $W_{22}$  статистически независимы, и их плотности вероятностей  $P(L, W_{11})$  и  $P(L, W_{22})$  описываются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, W_{11}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{11}} [-D_1(1-W_{11})^2 + 2\delta(D_3+D_4)W_{11}] + \right.$$

$$\left. + D_1 \frac{\partial^2}{\partial W_{11}^2} (1-W_{11})^2 W_{11} \right\} P(L, W_{11}),$$

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, W_{22}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{22}} [-D_2(1-W_{22})^2 + 2\delta(D_3+D_4)W_{22}] + \right.$$

$$\left. + D_2 \frac{\partial^2}{\partial W_{22}^2} (1-W_{22})^2 W_{22} \right\} P(L, W_{22}), \quad (6.13)$$

которые отличаются от уравнения (6.1) для однослойной модели наличием члена  $2\delta(D_3+D_4)\partial[WP(L, W)]/\partial W$ . Это означает, что процесс генерации  $\lambda$ -волны (или  $k$ -волны) падающей  $k$ -волной (или  $\lambda$ -волной) статистически эквивалентен включению "затухания" в исходную стохастическую задачу для падающих волн  $U_{11}$ ,  $U_{22}$  (т.е. замене в уравнениях для этих волн  $\varepsilon(x) \rightarrow \varepsilon(x) + i\delta(D_3+D_4)$ ). При этом для полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) существуют "стационарные" (не зависящие от  $L$ ) решения уравнений (6.13)

$$P(W_{11}) = \frac{2\gamma_1}{(1-W_{11})^2} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_1 W_{11}}{1-W_{11}} \right\},$$

$$P(W_{22}) = \frac{2\gamma_2}{(1-W_{22})^2} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_2 W_{22}}{1-W_{22}} \right\}, \quad (6.14)$$

где параметры

$$\gamma_1 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_1}, \quad \gamma_2 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_2} \quad (6.15)$$

определяют относительную роль такого "затухания" (генерации вторичных волн) по сравнению с непосредственной диффузией этих волн (многократным переломом этих волн на неоднородностях среды). Для мелкомасштабных неоднородностей среды параметры "затухания"

$$\gamma_1 = 2\lambda \frac{H_2}{H_1}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{\lambda} \frac{H_1}{H_2} \quad (6.16)$$

определяются только относительными толщинами слоев (для фиксированной длины  $\lambda$ -волны) и не зависят от статистических характеристик неоднородностей. При этом имеет место равенство  $\gamma_1\gamma_2 = 4$ , т.е. малость одного из параметров  $\gamma$  по сравнению с единицей означает большое значение для другого параметра.

Распределения вероятностей (6.14) позволяют вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения для падающих волн. Из сказанного выше ясно, что для достаточно большой области ( $L_0, L$ ) (или предельного случая полупространства) величины  $|T_{11}|^2$  и  $|T_{22}|^2$  равны нулю с вероятностью единица, т.е. падающие  $\lambda$ - и  $k$ -волны локализованы, и их локализационные длины определяются либо коэффициентами диффузии, если диффузия действует существенно сильнее, чем "затухание", либо "затуханием" в противоположном случае. Так, если  $\gamma_1 \ll 1$  ( $\gamma_2 \gg 1$ ), то

$$l_{\text{loc}}^{(1)} = \frac{1}{D_1} = \left(\frac{\lambda H_0}{H_1}\right)^2 l_{\text{loc}}, \quad l_{\text{loc}}^{(2)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{\text{loc}},$$

где  $l_{\text{loc}}$  — локализационная длина в однослойной задаче. В случае выполнения обратного неравенства  $\gamma_1 \gg 1$  ( $\gamma_2 \ll 1$ )

$$l_{\text{loc}}^{(1)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{\text{loc}}, \quad l_{\text{loc}}^{(2)} = \frac{1}{D_2} = \left(\frac{H_0}{H_2}\right)^2 l_{\text{loc}}.$$

Нахождение статистики  $W_{12}$  — существенно более сложная задача, так как она обусловлена корреляцией  $W_{12}$  с  $W_{11}$ ,  $W_{22}$ . Из соответствующего уравнения Фоккера–Планка следует, что для комбинаций  $T_1 = 1 - W_{11} - \delta W_{12}$  и  $T_2 = 1 - W_{22} - \delta W_{12}$ , вытекающих из (2.26) и определяющих коэффициенты прохождения возбуждаемых волн, стационарные решения для полупространства вида  $P(T_i) = \delta(T_i)$  отсутствуют. Это означает отсутствие локализации для генерируемых волн [38].

Возвращаясь к первоначальной постановке задачи об источниках, расположенных в верхнем и нижнем слоях среды (на границе области существования неоднородностей  $x_0 = L$ ), получаем, что коэффициенты прохождения для волн отличны от нуля как в верхнем, так и в нижнем слоях среды, т.е. локализация отсутствует вообще [38].

Усложнение задачи (включение неоднородностей также в верхний слой, изменение характера взаимодействия волн, изменение модели флуктуирующих параметров, например,  $\varepsilon(x)$  на  $d\varepsilon(x)/dx$ , как это имеет место в

задачах геофизической гидродинамики [35–37]) приводит к усложнению соответствующего уравнения Фоккера–Планка, изменению зависимостей статистических характеристик от геометрических параметров, но не меняет основного результата — отсутствия динамической локализации для волн в целом.

### 6.3. Локализация волн в параболическом волноводе

Распространение волнового пучка в случайном параболическом волноводе описывается выражением (2.45) и системой уравнений (2.44). Представим функцию  $A(x)$  в виде

$$A(x) = k\alpha a^2 \frac{1 + \psi(x) \exp\{-2i\alpha x\}}{1 - \psi(x) \exp\{-2i\alpha x\}}.$$

Тогда функция  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению, вытекающему из (2.44),

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = -\frac{i}{2\alpha k} [\exp(i\alpha x) - \psi \exp(-i\alpha x)]^2 z(x), \\ \psi(0) = \frac{1 - k\alpha a^2}{1 + k\alpha a^2}.$$

Введем теперь амплитуду и фазу для функции  $\psi(x)$  по формуле

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{w(x) - 1}{w(x) + 1}} \exp\{i(\phi(x) - 2\alpha x)\}, \quad w \geq 1.$$

Тогда для функций  $w(x)$  и  $\phi(x)$  получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dx} w(x) = -\frac{1}{\alpha k} z(x) \sqrt{w^2(x) - 1} \sin\{\phi(x) - 2\alpha x\}, \\ w(0) = \frac{1}{2k\alpha a^2} [1 + k^2 \alpha^2 a^4], \\ \frac{d}{dx} \phi(x) = \frac{1}{\alpha k} z(x) \left[1 - \frac{w}{\sqrt{w^2(x) - 1}} \cos\{\phi(x) - 2\alpha x\}\right], \\ \phi(0) = 0. \quad (6.17)$$

Следовательно, выражение для интенсивности волнового поля на оси волновода (2.46) принимает вид

$$I(x, 0) = \frac{\alpha k a^2}{w(x) + \sqrt{w^2(x) - 1} \cos\{\phi(x) - 2\alpha x\}}. \quad (6.18)$$

Как и ранее, будем считать случайную функцию  $z(x)$  гауссовой, дельта-коррелированной функцией с параметрами

$$\langle z(x) \rangle = 0, \quad \langle z(x)z(x') \rangle = 2\sigma^2 l \delta(x - x').$$

Кроме того, считаем, что дисперсия флуктуаций  $z(x)$  достаточно мала ( $\sigma^2 \ll 1$ ). Тогда статистические характеристики функций  $w(x)$  и  $\phi(x)$  медленно меняются на масштабе порядка  $1/\alpha$ , и для определения статистических характеристик интенсивности волны (6.18) можно использовать дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, что соответствует статистической независимости функций  $w(x)$ ,  $\phi(x)$  и равномерному распределению вероятностей для фазы  $\phi(x)$ . В результате для



плотности вероятностей функции  $w(x) - P(x, w) = \langle \delta(w(x) - w) \rangle$  получаем уравнение Фоккера – Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(x, w) &= D \frac{\partial}{\partial w} (w^2 - 1) \frac{\partial}{\partial w} P(x, w), \\ P(0, w) &= \delta(w(0) - w) \end{aligned} \quad (6.19)$$

с коэффициентом диффузии  $D = \sigma^2 l / (2\alpha^2 k^2)$ .

В рамках указанных предположений, вычислим моменты интенсивности на оси волновода  $\langle I^n(x, 0) \rangle$ . Усреднение проведем в два этапа. На первом этапе усредняем по быстрым осцилляциям фазы. В результате получаем выражение

$$\left\langle \left( \frac{I}{\alpha k a^2} \right)^n \right\rangle_\phi = P_{n-1}(w). \quad (6.20)$$

Здесь через  $P_n(w)$  обозначен полином Лежандра порядка  $n$ . На втором этапе усредним (6.20) по распределению  $w$  (6.19). В результате получаем окончательный результат [5, 13]

$$\left\langle \left( \frac{I}{\alpha k a^2} \right)^n \right\rangle = P_{n-1}(w_0) \exp \{ D n(n-1)x \}. \quad (6.21)$$

Для согласованного волнового пучка с волноводом (см. (2.43)) имеем  $w_0 = 1$  и формула (6.20) переходит в

$$\langle I^n(x, 0) \rangle = \exp \{ D n(n-1)x \}; \quad (6.22)$$

это означает, что величина  $I(x, 0)$  распределена согласно логнормальному закону. Однако, как мы видели ранее, типичная реализация процесса  $I(x, 0)$  экспоненциально спадает в глубь среды:

$$I^*(x, 0) = \exp \{ -Dx \},$$

и в конкретных реализациях излучение должно уходить с оси волновода в поперечном направлении, что соответствует свойству динамической локализации по оси  $x$ . Типичной реализацией интенсивности в поперечном направлении будет (согласно (2.45)) выражение

$$I^*(x, \mathbf{R}) = I^*(x, 0) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{a^2} I^*(x, 0) \right\}.$$

## 7. Пассивная примесь в случайном поле скоростей

Рассмотрим теперь задачу статистического описания диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей, постановка которой дана в разделе 2.3.

Поле скоростей предполагается в общем случае соответствующим сжимаемой среде ( $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ), статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ( $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle &= B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \\ E_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где  $N$  — размерность пространства, а спектральный тензор поля скоростей имеет вид

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (7.2)$$

Здесь через  $E^s(k, t)$  и  $E^p(k, t)$  обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Непосредственный практический интерес представляют случаи:

— чисто гидродинамический поток, для которого  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$  ( $E^p(k, t) = 0$ );

— чисто потенциальное поле скоростей ( $E^s(k, t) = 0$ );

— смешанный случай.

Последний случай осуществляется, например, для плавучей примеси [2, 22]. В самом деле, пусть пассивная примесь движется на поверхности  $z = 0$  в несжимаемой среде ( $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{U}, w)$ ). На этой поверхности создается эффективный двумерный сжимаемый поток с двумерной дивергенцией  $\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = -\partial w / \partial z|_{z=0}$ . Считаем, что спектральный тензор скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет вид

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (7.3)$$

Представим плотность плавучей примеси в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{R}, t) \delta(z), \quad \mathbf{r} = (\mathbf{R}, z), \quad \mathbf{R} = (x, y).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.29) и интегрируя по  $z$ , получаем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \right) \rho(\mathbf{R}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{R}, 0) = \rho_0(\mathbf{R}). \quad (7.4)$$

Поле  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  гауссово, однородное и изотропное со спектральным тензором

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2} \right), \\ \alpha, \beta &= 1, 2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Сопоставляя теперь (7.5) с (7.2), получаем выражения для соленоидальной и потенциальной составляющих скорости  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  на плоскости  $z = 0$  [2]

$$\begin{aligned} E^s(\mathbf{k}_\perp, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t), \\ E^p(\mathbf{k}_\perp, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t) \frac{k_z^2}{\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Вернемся теперь к общему случаю. В дальнейшем при расчете статистических свойств поля плотности и его градиента воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , в рамках которого корреляционный тензор (7.1) аппроксимируется выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = 2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) \delta(t), \quad (7.7)$$

где

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t).$$

В силу однородности и изотропности поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеют место равенства

$$B_{kl}^{\text{eff}}(0) = \frac{D_0}{N} \delta_{kl}, \quad \frac{\partial}{\partial r_i} B_{kl}^{\text{eff}}(0) = 0, \quad \frac{\partial^4 B_{kl}^{\text{eff}}(0)}{\partial r_i \partial r_k \partial r_j \partial r_l} = \frac{D_4^p}{N} \delta_{ij},$$

$$-\frac{\partial^2 B_{kl}^{\text{eff}}(0)}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{D_2^s}{N(N+2)} [(N+1)\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] +$$

$$+ \frac{D_2^p}{N(N+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}]. \quad (7.8)$$

Здесь по повторяющимся индексам, как обычно, предполагается суммирование и введены обозначения ( $\tilde{E}^s(k) = \int_0^\infty dt E^s(k, t)$ ,  $\tilde{E}^p(k) = \int_0^\infty dt E^p(k, t)$ )

$$D_0 = \int d\mathbf{k} [(N-1)\tilde{E}^s(k) + \tilde{E}^p(k)], \quad D_2^s = \int d\mathbf{k} k^2 \tilde{E}^s(k),$$

$$D_2^p = \int d\mathbf{k} k^2 \tilde{E}^p(k), \quad D_4^p = \int d\mathbf{k} k^4 \tilde{E}^p(k). \quad (7.9)$$

В дальнейшем для наглядности ограничимся двумерными движениями ( $N=2$ ), т.е. уравнением (7.4).

Как указывалось в разделе 2.3, это уравнение в частных производных первого порядка может быть решено методом характеристик. Вводя характеристические кривые  $\mathbf{R}(t)$  (2.30) (частицы), его можно записать в виде уравнения (2.31), т.е. в нашем случае в виде системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t|\xi) = \mathbf{U}(\mathbf{R}, t), \quad \mathbf{R}(0|\xi) = \xi;$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t|\xi) = -\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}} \rho(t|\xi), \quad \rho(0|\xi) = \rho_0(\xi). \quad (7.10)$$

Это — лагранжево описание. Соответствующее уравнение для расходимости (2.34) имеет вид

$$\frac{d}{dt} j(t|\xi) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}} j(t|\xi), \quad j(0|\xi) = 1, \quad (7.11)$$

и, следовательно,

$$\rho(t|\xi) \equiv \frac{\rho_0(\xi)}{j(t|\xi)}. \quad (7.12)$$

### 7.1. Лагранжево описание

В лагранжевом описании индикаторная функция

$$\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \delta(\mathbf{R}(t|\xi) - \mathbf{R}) \delta(\rho(t|\xi) - \rho) \delta(j(t|\xi) - j)$$

описывается уравнением Лиувилля (3.7), которое для нашего случая имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}} \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \right] \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi), \quad (7.13)$$

$$\Phi_{\text{Lag}}(0; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \delta(\xi - \mathbf{R}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho) \delta(j - 1).$$

Обсудим прежде всего такие важные статистические характеристики частиц примеси, как их положение в пространстве и их плотность. Усреднение уравнения (7.13) по ансамблю реализаций поля скоростей  $\{\mathbf{U}\}$  приводит к уравнению Фоккера–Планка для одномерной лагранжевой плотности вероятности  $P(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \langle \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) \rangle$  [2, 23]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \left\{ \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + \right.$$

$$\left. + D_2^p \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial j} \rho j + \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right) \right\} P(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi),$$

$$P(0; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = \delta(\xi - \mathbf{R}) \delta(\rho_0(\xi) - \rho) \delta(j - 1). \quad (7.14)$$

Решение уравнения (7.14) таково:

$$P(t; \mathbf{R}, \rho, j|\xi) = P(t; \mathbf{R}|\xi) P(t; j|\xi) \delta\left(\rho - \frac{\rho_0(\xi)}{j}\right), \quad (7.15)$$

где

$$P(t; \mathbf{R}|\mathbf{R}') = \exp\left\{ \frac{1}{2} D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \right\} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') =$$

$$= \frac{1}{2\pi D_0 t} \exp\left\{ -\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{2D_0 t} \right\} \quad (7.16)$$

— вероятностное распределение координат частицы пассивной примеси, а

$$P(t; j|\xi) = \exp\left\{ D_2^p t \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right\} \delta(j - 1) =$$

$$= \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{ -\frac{\ln^2(je^\tau)}{4\tau} \right\} \quad (7.17)$$

— вероятностное распределение поля расходимости в ее окрестности. В (7.17) и всюду ниже используется безразмерное время  $\tau = D_2^p t$ .

Подчеркнем, что полученное решение (7.15) означает статистическую независимость координат  $\mathbf{R}(t|\xi)$  и расходимости  $j(t|\xi)$  в окрестности частицы с лагранжевыми координатами  $\xi$ . Причем гауссово распределение (7.16) соответствует стандартному броуновскому движению частицы с параметрами

$$\langle \mathbf{R}(t|\xi) \rangle = \xi,$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^2(t) = \langle [R_\alpha(t) - \xi_\alpha][R_\beta(t) - \xi_\beta] \rangle = D_0 \delta_{\alpha\beta} t, \quad (7.18)$$

а логарифмически нормальное распределение (7.17) для моментов случайного поля расходимости означает, что средняя расходимость постоянна ( $\langle j(t|\xi) \rangle = 1$ ), а ее высшие моменты экспоненциально растут со временем:

$$\langle j^n(t|\xi) \rangle = \exp\{n(n-1)\tau\}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.19)$$

Заметим, что согласно (7.19) и (7.12) имеем выражение для моментов плотности вида

$$\langle \rho^n(t|\xi) \rangle = \rho_0^n(\xi) \exp\{n(n+1)\tau\}, \quad (7.20)$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост как средней плотности, так и ее высших моментов в лагранжевом представлении. При этом совместное вероятностное распределение плотности и расходимости имеет вид

$$P(t; \rho, j|\xi) = P(t; j|\xi) \delta\left(\rho - \frac{\rho_0(\xi)}{j}\right), \quad (7.21)$$

где  $P(t; j|\xi)$  описывается выражением (7.17). Интегрируя равенство (7.21) по  $j$ , получим лагранжево вероятностное распределение плотности

$$P(t; \rho|\xi) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^{-\tau}/\rho_0(\xi))}{4\tau} \right\}. \quad (7.22)$$

Его можно получить и как решение уравнения Фоккера – Планка, следующего из (7.14):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho|\xi) = D_2^p \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P(t; \mathbf{R}, \rho|\xi),$$

$$P(0; \rho|\xi) = \delta(\rho_0(\xi) - \rho). \tag{7.23}$$

Выявленное выше парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности, состоящее в одновременном росте со временем их моментных функций, объясняется свойствами логнормального распределения вероятностей. Так, типичной реализацией случайной расходимости является экспоненциально спадающая кривая

$$j^*(t) = \exp(-\tau). \tag{7.24}$$

При этом для реализаций логнормального процесса  $j(t|\xi)$  существуют мажорантные оценки. Так, например, с вероятностью  $p = 1/2$

$$j(t|\xi) < 4 \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)$$

на всем интервале времени  $t \in (0, \infty)$  [2]. Аналогично для реализаций плотности имеем типичную реализацию и минорантную оценку

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^\tau, \quad \rho(t|\xi) > \frac{\rho_0}{4} \exp\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства примеси в сжимаемых потоках качественно отличаются от свойств примеси в несжимаемых средах, где  $j(t|\xi) \equiv 1$ , а плотность в окрестности фиксированной частицы сохраняется:  $\rho(t|\xi) = \rho_0(\xi) = \text{const}$ . Приведенные выше оценки для примеси означают, что статистика случайных процессов  $j(t|\xi)$  и  $\rho(t|\xi)$  формируется выбросами их реализаций относительно типичных реализаций.

В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях сжимаемого и несжимаемого поля скоростей по сути одинаковы.

Рассмотрим теперь относительную диффузию двух частиц. Так, для величины  $\mathbf{I}(t) = \mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_2(t)$  имеем динамическое уравнение

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{R}_1, t) - \mathbf{U}(\mathbf{R}_2, t), \quad \mathbf{I}(0) = \mathbf{I}_0,$$

которому соответствует уравнение Фоккера – Планка [2]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{I}) = \frac{\partial^2}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} D_{\alpha\beta}(\mathbf{I}) P(t; \mathbf{I}), \quad P(0; \mathbf{I}) = \delta(\mathbf{I} - \mathbf{I}_0), \tag{7.25}$$

где  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{I}) = 2[B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(0) - B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{I})]$  — структурная матрица векторного поля  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$ .

В общем случае решить уравнение (7.25) не удастся. Однако если начальное расстояние между частицами  $l_0 \ll l_{\text{cor}}$ , где  $l_{\text{cor}}$  — пространственный радиус корреляции поля скорости  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$ , то можно разложить функции  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{I})$  в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{I}) = - \left. \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{I})}{\partial l_\gamma \partial l_\delta} \right|_{\mathbf{I}=0} l_\gamma l_\delta.$$

С использованием представления (7.8) диффузионный тензор  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{I})$  упрощается и может быть записан в виде

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{I}) = \frac{1}{8} [3D_2^s + D_2^p] \mathbf{I}^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} [D_2^s - D_2^p] l_\alpha l_\beta. \tag{7.26}$$

Подставляя (7.26) в (7.25), умножая обе части полученного уравнения на  $l^n$  и интегрируя по  $\mathbf{I}$ , получаем замкнутое уравнение [2]

$$\frac{d}{dt} \langle l^n(t) \rangle = \frac{1}{8} n [n(D_2^s + 3D_2^p) + 2(D_2^s - D_2^p)] \langle l^n(t) \rangle,$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ( $n = 1, 2, \dots$ ). При этом распределение вероятностей для случайного процесса  $l(t)/l_0$  будет логнормальным, и типичной реализацией для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция времени

$$l^*(t) = l_0 \exp\left\{ \frac{1}{4} (D_2^s - D_2^p) t \right\},$$

растущая или затухающая в зависимости от знака  $(D_2^s - D_2^p)$ . В частности, для несжимаемого случая ( $D_2^p = 0$ ) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D_2^s t \ll \ln\left(\frac{l_{\text{cor}}}{l_0}\right),$$

при которых справедливо разложение (7.26). В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ( $D_2^s = 0$ ) — типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц "слиться". Учитывая, что при этом сами жидкие частицы сжимаются, мы видим, что в этом случае должны образовываться кластеры, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах. Это согласуется с результатами численного моделирования (рис. 1б), хотя для статистического анализа мы использовали совершенно другую статистическую модель для поля скоростей. Это показывает, что для самого эффекта кластеризации частиц тип модели несуществен. Отметим также, что даже при условии  $(D_2^s - D_2^p) > 0$ , как мы увидим далее, осуществляется кластеризация в эйлеровом описании, что обусловлено одним только фактом наличия потенциальной составляющей у случайного поля скоростей.

**7.2. Эйлерово описание**

Для описания статистических свойств поля плотности в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию  $\Phi_{\text{Eul}}(t, \mathbf{R}; \rho) = \delta(\rho(t, \mathbf{R}) - \rho)$ , описываемую уравнением Лиувилля (3.11)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \Phi_{\text{Eul}}(t, \mathbf{R}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi_{\text{Eul}}(t, \mathbf{R}; \rho), \tag{7.27}$$

$$\Phi_{\text{Eul}}(0, \mathbf{R}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{R}) - \rho).$$

Соответствующую одноточечную плотность вероятностей эйлерова поля плотности

$$P(t, \mathbf{R}; \rho) = \langle \Phi_{\text{Eul}}(t, \mathbf{R}; \rho) \rangle$$

получим, усредняя непосредственно (7.27) по ансамблю реализаций поля скоростей, или на основе формулы (3.10) [2, 22]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}D_0\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2}\right)P(t, \mathbf{R}; \rho) = D_2^p\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\rho^2P(t, \mathbf{R}; \rho), \quad (7.28)$$

$$P(0, \mathbf{R}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{R}) - \rho).$$

Отсюда следует, что моментные функции поля плотности описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}D_0\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2}\right)\langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle &= D_2^p n(n-1)\langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle, \\ \langle \rho^n(\mathbf{R}, 0) \rangle &= \rho_0^n(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (7.29)$$

В частности, для средней плотности имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle = \frac{1}{2}D_0\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2}\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle. \quad (7.30)$$

Это уравнение совпадает с уравнением для вероятностного распределения координат частицы (7.14), и, следовательно, коэффициент диффузии  $D_0$  характеризует лишь масштабы области сосредоточения примеси в целом, не неся информации о локальной структуре реализаций плотности.

Решение уравнения (7.29) имеет вид

$$\langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle = \exp\{n(n-1)\tau\} \int d\mathbf{R}' P(t; \mathbf{R}|\mathbf{R}') \rho_0^n(\mathbf{R}'). \quad (7.31)$$

Так, если начальная плотность примеси всюду одинакова:  $\rho_0(\mathbf{R}) = \rho_0 = \text{const}$ , то вероятностное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{R}$  и логнормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения

$$\begin{aligned} P(t; \rho) &= \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(\rho e^\tau/\rho_0)}{4\tau}\right\}, \\ F(t; \rho) &= \Phi\left(\frac{\ln(\rho e^\tau/\rho_0)}{2\sqrt{\tau}}\right). \end{aligned} \quad (7.32)$$

При этом

$$\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle = \rho_0^n \exp\{n(n-1)\tau\}, \quad (7.33)$$

а типичная реализация поля плотности в любой заданной точке экспоненциально убывает со временем:

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(-\tau). \quad (7.34)$$

Таким образом, формирование эйлеровой статистики плотности идет за счет флуктуаций плотности относительно кривой типичной реализации (7.34), которая свидетельствует о наличии кластерного характера плотности среды в произвольных сжимаемых потоках.

Выше мы обсудили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что позволило нам сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Это распределение дает также возможность выявить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности [2].

Как отмечалось в разделе 3.3, важные сведения о пространственном поведении реализаций поля плотности несет анализ линий уровня, определяемых равен-

ством

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \rho = \text{const}.$$

Так, средняя площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$ , и средняя общая масса, заключенная в этих областях, выражаются через решение уравнения (7.28) по формулам

$$\begin{aligned} \langle S(t, \rho) \rangle &= \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{R} P(t, \mathbf{R}; \tilde{\rho}), \\ \langle M(t, \rho) \rangle &= \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{R} P(t, \mathbf{R}; \tilde{\rho}). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Легко написать уравнения для этих величин и найти явные выражения для них [2]:

$$\begin{aligned} \langle S(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{R} \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0(\mathbf{R})e^{-\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right), \\ \langle M(t, \rho) \rangle &= \int \rho_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0(\mathbf{R})e^{\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Отсюда видно, в частности, что при  $\tau \gg 1$  площадь областей, где плотность выше уровня  $\rho$ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{R})} d\mathbf{R}, \quad (7.37)$$

в то время как заключенная в этих областях масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle = M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{R})} d\mathbf{R} \quad (7.38)$$

монотонно стремится к полной ее массе:

$$M = \int \rho_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что поле плотности в сжимаемом потоке со временем стремится собираться в кластеры — компактные области повышенной концентрации, окруженные разреженными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере равномерного первоначального распределения примеси  $\rho_0(\mathbf{R}) = \rho_0 = \text{const}$ . В этом случае удельная (приходящаяся на единицу площади) площадь областей, внутри которых  $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$ , равна

$$s(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} P(t; \tilde{\rho}) d\tilde{\rho} = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 e^{-\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (7.39)$$

где  $P(t; \rho)$  — не зависящее от  $\mathbf{R}$  решение уравнения (7.28), т.е. функция (7.32), а удельная средняя масса примеси, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$m(t, \rho) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) d\tilde{\rho} = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 e^{\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (7.40)$$

Из (7.39), (7.40) следует, что на больших временах их удельная площадь убывает по закону

$$s(t, \rho_0) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right) \quad (7.41)$$

независимо от отношения  $\rho/\rho_0$ , в то время как внутри них собирается практически вся масса примеси:

$$m(t, \rho_0) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right). \quad (7.42)$$

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения  $\rho/\rho_0$ . Так, если  $\rho/\rho_0 < 1$ , то в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 1$  и  $m(0, \rho) = 1$ . Далее образуются небольшие области, где  $\rho(\mathbf{R}, t) < \rho$ , содержащие незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (7.41), (7.42). Отметим еще, что в момент времени  $\tau^* = \ln(\rho_0/\rho)$  величина площади есть  $s(\tau^*, \rho) = 1/2$ .

В другом, наиболее интересном случае  $\rho/\rho_0 > 1$  в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 0$  и  $m(0, \rho) = 0$ . Сперва образуются небольшие кластерные области, где  $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$ , которые затем интенсивно стягивают в себя значительную часть общей массы. Площади этих областей с течением времени уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (7.41), (7.42) (рис. 13).

Для более детального описания поля плотности в случайном поле скоростей необходимо, как указывалось в разделе 2.3, рассматривать его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla\rho(\mathbf{R}, t)$  и, вообще говоря, производные высшего порядка.

Градиент плотности описывается динамическим уравнением (2.36), и, следовательно, индикаторная функция

$$\Phi(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{R}, t) - \rho)\delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p})$$

описывается уравнением (3.18) с заменой  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{R}$ . Усредняя теперь (3.18) по ансамблю реализаций поля скорос-

тей в приближении дельта-коррелированного во времени поля скоростей, получаем уравнение для одноточечной совместной плотности вероятностей плотности и ее градиента  $P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) = \langle \Phi(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) \rangle$ , зависящей от пространственно-временной точки  $(\mathbf{R}, t)$ , вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) = & \left[ \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + D_2^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R} \partial \mathbf{p}} \rho + D_2^s \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 + \right. \\ & + \frac{1}{8} D_2^s \widehat{L}^s(\mathbf{p}) + \frac{1}{8} D_2^p \widehat{L}^p(\mathbf{p}) + 3D_2^p \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \\ & \left. + \frac{1}{2} D_4^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \rho^2 \right] P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

$$P(0, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{R}) - \rho)\delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}) - \mathbf{p}), \quad (7.43)$$

где введены операторы

$$\begin{aligned} \widehat{L}^s(\mathbf{p}) = & 3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} - 2 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 = 3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l, \\ \widehat{L}^p(\mathbf{p}) = & \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 + 18 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 + 10 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Уравнение (7.43) не удастся исследовать в общем случае. Это можно сделать только для бездивергентного поля скоростей, когда [21–23]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) = \left[ \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} + \frac{1}{8} D_2^s \widehat{L}^s(\mathbf{p}) \right] P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}). \quad (7.45)$$

В этом случае среднее значение градиента плотности сохраняется, а модуль градиента плотности имеет логнормальное распределение вероятностей, и его типичная реализация так же, как и все моменты, экспоненциально растет во времени. При этом

$$\langle \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t) \rangle \sim \mathbf{p}_0^2 \exp\{D_2^s t\}.$$

Кроме того, из уравнения (7.45) с учетом формулы (3.16) следует, что средняя длина контура  $\rho(\mathbf{R}, t) = \rho = \text{const}$  также экспоненциально растет во времени по закону

$$\langle L(t, \rho) \rangle = l_0 \exp\{D_2^s t\},$$

где  $l_0$  — начальная длина контура. Напомним, что для бездивергентного поля скоростей сохраняется число контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени в зависимости от заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве.

Таким образом, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным; пространственные градиенты обостряются и линии уровня приобретают фрактальный характер. Такую картину мы видели на рис. 1а, соответствующем численному моделированию, правда, для совершенно другой модели флуктуаций поля скоростей. Это означает, что общие особенности поведения, отмеченные выше, несущественны для типа моделей.

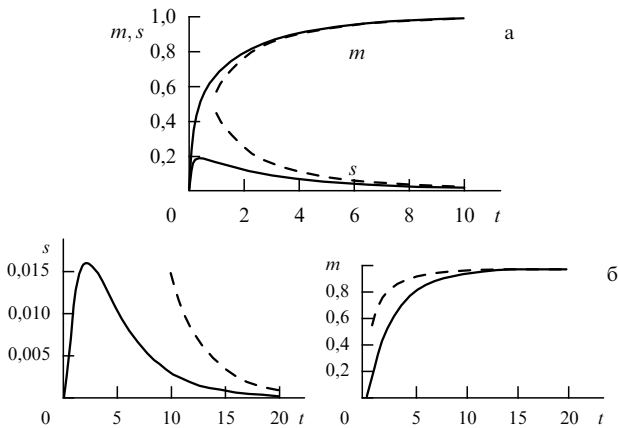


Рис. 13. Динамика образования кластеров для  $\rho/\rho_0 = 1,5$  (а) и  $\rho/\rho_0 = 10$  (б).

**Замечание.** Выше мы изучали статистические характеристики решения уравнения (7.4) в лагранжевом и эйлеровом описаниях, и было показано, что при наличии потенциальной составляющей у поля скорости происходит кластеризация как в динамике частиц, так и в эйлеровом поле плотности. Наряду с динамическим уравнением (7.4) представляет определенный интерес и уравнение, соответствующее переносу неконсервативной примеси (см., например, [47]),

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \rho(\mathbf{R}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{R}, 0) = \rho_0(\mathbf{R}).$$

Отметим также, что такую же структуру имеет и уравнение (2.59), описывающее зависимость решения обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных условий. В этом случае в лагранжевом описании уравнение для динамики частиц совпадает с уравнением (7.10), и, следовательно, для частиц осуществляется кластеризация. Однако в эйлеровом описании, как легко видеть, кластеризация не осуществляется. В этом случае аналогично бездивергентному полю скоростей сохраняется как среднее число контуров, так и средняя площадь, где  $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$ , и средняя "масса" примеси  $\int dS \rho(\mathbf{R}, t)$ , сосредоточенная в этих контурах.

### 7.3. Учет дополнительных факторов

Выше мы рассмотрели простейшую задачу о диффузии примеси в случайном поле скоростей при отсутствии регулярного потока и эффекта молекулярной диффузии. Также для статистического описания использовалось приближение дельта-коррелированного во времени случайного поля скоростей. Все неучтенные факторы начинают действовать с какого-то момента времени, так что полученные выше результаты справедливы лишь на начальном этапе диффузии. Кроме того, эти факторы могут приводить и к новым физическим эффектам. В данном разделе кратко обсудим эти дополнительные задачи для бездивергентного поля скоростей.

#### 7.3.1. Плоско-параллельный поток с линейным сдвигом.

Пусть теперь поле скоростей наряду со случайной компонентой имеет и детерминированную составляющую, соответствующую линейному сдвигу [23]

$$v_x = \alpha y, \quad v_y = 0.$$

В этом случае вместо уравнения (7.45) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) = & \left[ -\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \right] P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}) + \\ & + \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8} D_2^s \left[ 3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] \right\} \times \\ & \times P(t, \mathbf{R}; \rho, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Следствием этого уравнения является то, что среднее значение градиента поля примеси уже не сохраняется и соответствует решению задачи при отсутствии флуктуаций поля скоростей

$$\langle p_x(t) \rangle = p_x(0), \quad \langle p_y(t) \rangle = p_y(0) - \alpha p_x(0)t.$$

Что касается вторых моментов градиента, то они описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p}^2 \rangle &= D_2^s \langle \mathbf{p}^2 \rangle - 2\alpha \langle p_x p_y \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p_x p_y \rangle &= -\frac{1}{2} D_2^s \langle p_x p_y \rangle - \alpha \langle p_x^2 \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p_x^2 \rangle &= \frac{3}{4} D_2^s \langle \mathbf{p}^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle p_x^2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Подставляя в (7.47) решение экспоненциального вида  $\exp\{\lambda t\}$ , получаем для  $\lambda$  характеристическое уравнение

$$\left( \lambda + \frac{1}{2} D_2^s \right)^2 (\lambda - D_2^s) = \frac{3}{2} \alpha^2 D_2^s, \quad (7.48)$$

корни которого существенно зависят от параметра  $\alpha/D_2^s$ .

Для малых значений  $\alpha/D_2^s \ll 1$  имеем для корней уравнения (7.48) приближенные решения

$$\lambda_1 = D_2^s + \frac{2\alpha^2}{3D_2^s}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} D_2^s + i|\alpha|, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} D_2^s - i|\alpha|.$$

Следовательно, в диапазоне времен  $D_2^s t \gg 2$  решение задачи полностью определяется случайным фактором. Это означает, что эффекты, связанные с флуктуациями поля скоростей, полностью доминируют над эффектами, связанными со слабым градиентом линейного сдвига.

В другом предельном случае  $\alpha/D_2^s \gg 1$  уравнение (7.48) имеет корни

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left( \frac{3}{2} \alpha^2 D_2^s \right)^{1/3}, \quad \lambda_2 = \left( \frac{3}{2} \alpha^2 D_2^s \right)^{1/3} \exp \left\{ i \frac{2}{3} \pi \right\}, \\ \lambda_3 &= \left( \frac{3}{2} \alpha^2 D_2^s \right)^{1/3} \exp \left\{ -i \frac{2}{3} \pi \right\}. \end{aligned}$$

Так как действительные части  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  отрицательны, то при  $(3/2 \alpha^2 D_2^s)^{1/3} t \gg 1$  асимптотическое решение системы (7.47) имеет вид

$$\langle \mathbf{p}^2(t) \rangle \sim \exp \left\{ \left( \frac{3}{2} \alpha^2 D_2^s \right)^{1/3} t \right\},$$

и, следовательно, даже малые флуктуации поля скоростей являются определяющими в присутствии сильного градиента сдвигового потока.

**7.3.2. Учет молекулярной диффузии.** Как отмечалось ранее, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным, возникает динамика на все меньших и меньших масштабах и пространственные градиенты плотности обостряются при наличии флуктуаций поля скоростей. В реальных условиях, конечно, существование молекулярной диффузии сглаживает такие процессы и описанная выше динамика справедлива лишь на ограниченном интервале времен.

При наличии молекулярной диффузии диффузия примеси описывается стохастическим уравнением в частных производных второго порядка (2.37), для которого уже не удастся получить уравнения для одноточечной плотности вероятностей. Оценим время в простейшем случае двумерного потока, следуя [23].

Следствием уравнения (2.37) является то обстоятельство, что теперь величина  $\rho^n(\mathbf{R}, t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , будет описываться незамкнутым уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \right) \rho^n(\mathbf{R}, t) = \kappa \Delta \rho^n(\mathbf{R}, t) - \kappa n(n-1) \rho^{n-2}(\mathbf{R}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t).$$

Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля скоростей, получаем незамкнутое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle = \left( \frac{1}{2} D_0 + \kappa \right) \Delta \langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle - \kappa n(n-1) \langle \rho^{n-2}(\mathbf{R}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t) \rangle. \quad (7.49)$$

При условии  $\kappa \ll D_0$  уравнение (7.49) можно переписать в интегральном виде:

$$\begin{aligned} \langle \rho^n(\mathbf{R}, t) \rangle &= \exp \left\{ \frac{1}{2} D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \right\} \rho_0^n(\mathbf{R}) - \\ &- \kappa n(n-1) \int_0^t d\tau \exp \left\{ \frac{1}{2} D_0 (t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \right\} \times \\ &\times \langle \rho^{n-2}(\mathbf{R}, \tau) \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, \tau) \rangle. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Чтобы оценить последний член в (7.50), воспользуемся уравнением (7.45), соответствующим отсутствию молекулярной диффузии. В результате для величины  $\langle \rho^{n-2}(\mathbf{R}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t) \rangle$  можно получить замкнутое уравнение, решение которого имеет вид

$$\langle \rho^{n-2}(\mathbf{R}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t) \rangle = \exp \left\{ D_2^s t + \frac{1}{2} D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} \right\} \rho_0^{n-2}(\mathbf{R}) \mathbf{p}_0^2(\mathbf{R}). \quad (7.51)$$

Подставляя (7.51) в (7.50), можно получить условия, при которых последний член в правой части (7.50) не играет роли. Эти условия накладывают ограничения на характерный пространственный масштаб начального распределения плотности  $\mathbf{R}_0^2$  и на временной интервал. Они имеют вид [23]

$$D_2^s \mathbf{R}_0^2 \gg \kappa n(n-1), \quad D_2^s t \ll \ln \frac{D_2^s \mathbf{R}_0^2}{\kappa n^2}.$$

Случай наличия среднего градиента плотности допускает более полный анализ [55]. Этот случай соответствует решению уравнений (2.29), (2.37) с начальными условиями (здесь мы также ограничиваемся двумерным случаем)

$$\rho_0(\mathbf{R}) = \mathbf{G}\mathbf{R}, \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{R}) = \mathbf{G}.$$

Представляя поле плотности в виде

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \mathbf{G}\mathbf{R} + \tilde{\rho}(\mathbf{R}, t),$$

получаем уравнение для флуктуирующей части  $\tilde{\rho}(\mathbf{R}, t)$  поля плотности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \right) \tilde{\rho}(\mathbf{R}, t) = -\mathbf{G}\mathbf{U}(\mathbf{R}, t) + \kappa \Delta \tilde{\rho}(\mathbf{R}, t), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{R}, 0) = 0. \quad (7.52)$$

Эта задача, в отличие от рассмотренных выше, имеет стационарные (при  $t \rightarrow \infty$ ) плотности вероятностей как самого поля плотности, так и его градиента, и в последнее время привлекает значительное внимание как с теоретической, так и с экспериментальной стороны [56–62]. В этих работах на основе численного моделирования и использования феноменологических моделей было обнаружено существование у распределения "медленно затухающих хвостов" экспоненциального типа. Отметим, что в работе [62] было обнаружено, что и стационарная плотность самого поля плотности также имеет "медленно затухающие хвосты".

Из уравнения (7.52) следует, что для дисперсии флуктуаций плотности  $\tilde{\rho}(\mathbf{R}, t) = \nabla \tilde{\rho}(\mathbf{R}, t)$  имеет место [55]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{R}, t) \rangle = \frac{D_0 \mathbf{G}^2}{2\kappa}, \quad (7.53)$$

а дисперсия плотности описывается выражением

$$\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{R}, t) \rangle = D_0 \mathbf{G}^2 \int_0^t d\tau \left\{ 1 - \frac{2\kappa}{D_0 \mathbf{G}^2} \langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{R}, \tau) \rangle \right\}. \quad (7.54)$$

Формулы (7.53) и (7.54) позволяют оценить как время выхода на статистический стационарный режим

$$D_2^s T_0 \sim \ln \left[ \frac{D_0 + 2\kappa}{2\kappa} \right],$$

так и стационарную дисперсию флуктуаций поля плотности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{R}, t) \rangle \sim \frac{D_0}{D_2^s} \mathbf{G}^2 \ln \left[ \frac{D_0 + 2\kappa}{2\kappa} \right].$$

Принимая во внимание, что  $D_0 \sim \sigma_u^2 t_0$  и  $D_0/D_2^s \sim l_0^2$ , где  $\sigma_u^2$  — дисперсия флуктуаций поля скорости, а  $t_0$  и  $l_0$  — соответственно временной и пространственный его радиусы корреляции, видим, что время  $T_0$  ввиду логарифмической зависимости от коэффициента молекулярной зависимости  $\kappa$  может быть не слишком большим и

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle \sim \mathbf{G}^2 l_0^2 \ln \left[ \frac{\sigma_u^2 t_0}{\kappa} \right] \quad \text{при} \quad \kappa \ll \sigma_u^2 t_0.$$

### 7.3.3. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля скоростей.

Учет конечности временного радиуса корреляции, как указывалось в разделе 4.1, можно провести в рамках диффузионного приближения. При этом, конечно, также возникают ограничения на радиус корреляции, но они будут более слабыми, чем для приближения дельта-коррелированного поля. Также могут появиться и новые физические эффекты, обусловленные конечностью временного радиуса корреляции. В качестве иллюстрации можно указать на задачи диффузии оседающей примеси [23, 63] и плавучей примеси, сосредоточенной на случайной поверхности  $z(\mathbf{R}, t)$ , статистически не зависящей от поля скоростей.

В первой задаче возникает естественная анизотропия тензора диффузии по отношению к направлению оседания примеси. Так, если скорость оседания есть  $v$ , то для модели флуктуаций поля скоростей, описываемой спектральной функцией вида

$$E(k, t) = E(k) \exp \left\{ -\frac{|t|}{\tau_0} \right\},$$

где  $\tau_0$  — временной радиус корреляции поля скоростей, тензор диффузии имеет структуру вида (при  $t \rightarrow \infty$ )

$$D_{ij}(v) = \frac{1}{v} \int \mathbf{dk} E(k) \Delta_{ij}(\mathbf{k}) \frac{p}{k} \frac{1}{1 + p^2(\mathbf{kv})^2/(k^2 v^2)},$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right),$$

где  $\cos \theta = \mathbf{kv}/(kv)$  и

$$p(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{kv}\tau_0}{1 + \kappa k^2 \tau_0}.$$

Следовательно, в трехмерном случае для проекции этого тензора на направление оседания примеси и на плоскость, перпендикулярную этому направлению, получаем выражения

$$D_{\parallel}(v) = \frac{4\pi}{v} \int_0^{\infty} k dk E(k) f_{\parallel}(k, v),$$

$$D_{\perp}(v) = \frac{4\pi}{v} \int_0^{\infty} k dk E(k) f_{\perp}(k, v),$$

где

$$f_{\parallel}(k, v) = \left[ \arctan(p) + \frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} \arctan(p) - 1 \right) \right],$$

$$f_{\perp}(k, v) = \left[ \arctan(p) - \frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} \arctan(p) - 1 \right) \right].$$

При малых значениях параметра  $p$  ( $v\tau_0 \ll l_0$ , где  $l_0$  — пространственный радиус корреляции поля скоростей) функции  $f_{\parallel}(k, v)$ ,  $f_{\perp}(k, v)$  близки к  $2p/3$ , что соответствует изотропной, не зависящей от скорости оседания диффузии, а при больших значениях параметра  $p$  ( $v\tau_0 \gg l_0$ ) имеем  $f_{\parallel}(k, v) = 2f_{\perp}(k, v) \cong \pi/2$ . Подчеркнем еще раз, что этот эффект анизотропии связан с конечностью временного радиуса корреляции для поля скоростей.

Для второй задачи вместо уравнения (7.4) имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{R}, t) + \frac{\partial}{\partial R_x} \left\{ U_x(\mathbf{R}, z(\mathbf{R}, t); t) \rho(\mathbf{R}, t) \right\} = 0,$$

$$\mathbf{R} = \{x, y\}. \quad (7.55)$$

Считаем, что

$$\int d\mathbf{R} \rho(\mathbf{R}, t) = 1.$$

Усредняя, например, это уравнение по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, z; t)$  в диффузионном приближении, получаем уравнение для средней плотности

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial^2}{\partial R_x \partial R_\beta} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}_\perp \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t - t') \exp \{ ik_z Z(\mathbf{R}, t, t') \} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) -$$

$$- i \frac{\partial}{\partial R_x} \int d\mathbf{k}_\perp \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} k_z dk_z E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t - t') \times$$

$$\times \exp \{ ik_z Z(\mathbf{R}, t, t') \} \frac{\partial(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\beta} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t), \quad (7.56)$$

где спектральный тензор поля скоростей есть

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t) = E(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2} \right)$$

и введены обозначения

$$Z(\mathbf{R}, t, t') = z(\mathbf{R}, t) - z(\mathbf{R}, t'), \quad \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle_u.$$

Это уравнение — стохастическое уравнение по случайному полю  $Z(\mathbf{R}, t, t')$ . Будем считать поле  $z(\mathbf{R}, t)$  гауссовым полем с корреляционной функцией

$$\langle z(\mathbf{R}, t) \rangle = 0, \quad \langle z(\mathbf{R}, t) z(\mathbf{R}', t') \rangle = B_z(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t - t').$$

Введем теперь новую функцию

$$F(\mathbf{R}; t, t'; k_z) = \exp \{ k_z^2 D_z(t - t') + ik_z Z(\mathbf{R}, t, t') \} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t),$$

$$\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \exp \{ -k_z^2 D_z(t - t') - ik_z Z(\mathbf{R}, t, t') \} F(\mathbf{R}; t, t'; k_z),$$

где  $D_z(t) = B_z(0, 0) - B_z(0, t)$ . Тогда уравнение для  $\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t)$  можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial^2}{\partial R_x \partial R_\beta} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \times$$

$$\times E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t - t') \exp \{ -k_z^2 D_z(t - t') \} \times$$

$$\times F(\mathbf{R}; t, t'; k_z) - i \frac{\partial}{\partial R_x} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} k_z dk_z \times$$

$$\times E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, t - t') \exp \{ ik_z Z(\mathbf{R}, t, t') \} \frac{\partial z(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\beta} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t). \quad (7.57)$$

Случайное поле  $\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t)$  является функционалом положения взволнованной поверхности, т.е.

$$\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \mathfrak{R}[\mathbf{R}, t; z(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\tau})],$$

и при этом среднее значение функционала  $F(\mathbf{R}; t, t'; k_z)$  по полю  $z(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\tau})$  описывается формулой (см., например, [5])

$$\langle F(\mathbf{R}; t, t'; k_z) \rangle_z = \left\langle \exp \{ k_z^2 D_z(t - t') + \right.$$

$$\left. + ik_z Z(\mathbf{R}, t, t') \} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) \right\rangle_z = \left\langle \mathfrak{R}[\mathbf{R}, t; z(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\tau}) + \right.$$

$$\left. + ik_z \{ B_z(\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}, \tilde{\tau} - t) - B_z(\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}, \tilde{\tau} - t') \} \right\rangle_z,$$

т.е. определяется средней величиной плотности с функциональным сдвигом.

Нас интересует тензорная величина

$$\Sigma_{\alpha\beta}(t) = \left\langle \int R_x R_\beta \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) d\mathbf{R} \right\rangle_z,$$

равная  $(1/2)\sigma^2(t)\delta_{\alpha\beta}$  в силу пространственной изотропии. Она связана со средним значением  $\langle \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) \rangle$ . Для ее вычисления надо усреднить уравнение (7.57). Можно показать, что с точностью до членов порядка  $\sim \sigma_z^4$  коэффициент диффузии описывается выражением

$$D(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2(t) = 2 \int_0^t d\tau \int d\mathbf{k}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2, \tau) \times$$

$$\times \exp \{ -k_z^2 D_z(\tau) \} \int d\mathbf{R} \langle F(\mathbf{R}; t, t - \tau; k_z) \rangle_z.$$



Таким образом, влияние взволнованности поверхности проявляется двояким образом. Во-первых, меняется эффективный спектр поля скоростей и, во-вторых, изменяется сама структура поля плотности. Эти эффекты связаны, естественно, с конечностью временного радиуса корреляции, и статистические свойства плотности не зависят от волнения поверхности в приближении дельта-коррелированности поля скоростей и совпадают со статистическими свойствами плотности примеси на идеальной плоскости.

## 8. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде

Распространение волн в случайных средах в рамках приближения параболического уравнения (уравнение (2.38)) рассматривалось в разделе 2.4, где было показано, что она по своей математической сути близка к задаче о диффузии примеси в потенциальном поле скоростей. Принципиальной особенностью последней задачи является существование кластерной структуры поля концентрации примеси. Эта особенность для рассматриваемой волновой задачи проявляется в виде возникновения каустической структуры в результате случайных фокусировок и дефокусировок в случайной среде.

Метод для нахождения статистических параметров, характеризующих эту кластерную структуру, используемый в предыдущем разделе и основанный на аппроксимации случайного поля скоростей дельта-коррелированным по  $x$  полем, в данном случае неприменим, так как продольный радиус корреляции для фазы волны имеет порядок длины трассы [5, 40, 41]. И в данной ситуации динамическое уравнение (2.39) для интенсивности волнового поля становится практически бесполезным для анализа его структуры в случайной среде. Однако знание одноточечной плотности вероятностей для интенсивности волны, полученной на основе решения уравнения (2.38), позволяет использовать идеологию статистической топографии [24]. Отметим, что впервые, по-видимому, теория выбросов случайного поля интенсивности была применена для анализа задачи о распространении волн в турбулентной среде в работах [64, 65] (см. также [66]).

Введем систему контуров — линий уровня интенсивности в фиксированной плоскости  $x = \text{const}$  (двухмерный случай), определяемых равенством  $I(x, \mathbf{R}) = I = \text{const}$ , и индикаторную сингулярную функцию, сосредоточенную на них,

$$\Phi(x, \mathbf{R}; I) = \delta(I(x, \mathbf{R}) - I), \quad (8.1)$$

являющуюся функционалом параметров среды. Среднее значение (8.1) по ансамблю реализаций определяет одноточечную плотность вероятностей

$$P(x, \mathbf{R}; I) = \langle \Phi(x, \mathbf{R}; I) \rangle = \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle. \quad (8.2)$$

Через функцию (8.2) выражаются такие величины, как средняя общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $I(x, \mathbf{R}) > I$ ,

$$\langle S(x, I) \rangle = \int_I^\infty d\tilde{I} \int d\mathbf{R} P(x, \mathbf{R}; \tilde{I}) \quad (8.3)$$

и средняя мощность поля, заключенная в этих областях

$$\langle E(x, I) \rangle = \int_I^\infty \tilde{I} d\tilde{I} \int d\mathbf{R} P(x, \mathbf{R}; \tilde{I}). \quad (8.4)$$

Дополнительную информацию о детальной структуре поля можно получить, включив в рассмотрение поперечный градиент интенсивности  $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} I(x, \mathbf{R})$ . Тогда величина

$$\langle L(x, I) \rangle = \int d\mathbf{R} \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| P(x, \mathbf{R}; I, \mathbf{p}) \quad (8.5)$$

описывает среднюю общую длину контуров  $I(x, \mathbf{R}) = I = \text{const}$ , где

$$P(x, \mathbf{R}; I, \mathbf{p}) = \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}) \rangle$$

— совместная одноточечная плотность вероятностей поля  $I(x, \mathbf{R})$  и его градиента  $\mathbf{p}(x, \mathbf{R})$ .

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить среднее число контуров с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы

$$\begin{aligned} \langle N(x, I) \rangle &= \langle N_{\text{in}}(x, I) \rangle - \langle N_{\text{out}}(x, I) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle, \quad (8.6) \end{aligned}$$

где  $N_{\text{in}}(x, I)$ ,  $N_{\text{out}}(x, I)$  — числа контуров, для которых вектор  $\mathbf{p}$  направлен по внутренней и внешней нормальям соответственно, а  $\kappa(x, \mathbf{R}; I)$  — кривизна линии уровня:

$$\begin{aligned} \kappa(x, \mathbf{R}; I) &= \left[ -p_y^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial z^2} - p_z^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2p_y(x, \mathbf{R}) p_z(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y \partial z} \right] p^{-3}(x, \mathbf{R}). \quad (8.7) \end{aligned}$$

Для плоской падающей волны, которую и будем рассматривать в дальнейшем, в силу пространственной однородности все одноточечные плотности вероятностей не зависят от переменной  $\mathbf{R}$ , и соответствующие статистические средние (8.3)–(8.7) (без интегрирования по  $\mathbf{R}$ ) будут описывать удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин. При этом естественным масштабом длины в плоскости  $x = \text{const}$ , не зависящим от параметров среды, является размер первой зоны Френеля  $L_f(x) = \sqrt{x/k}$ , определяющий размер переходной области свет-тень при дифракции на краю непрозрачного экрана (см., например, [40, 41]). Тогда удельные средние значения длины контуров и оценка для среднего их числа будут описываться безразмерными выражениями

$$\langle l(x, I) \rangle = L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle, \quad (8.8)$$

$$\langle n(x, I) \rangle = \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle. \quad (8.9)$$

Формула (8.9) описывает среднюю разность числа контуров с противоположной ориентацией векторов нормали, приходящихся на первую зону Френеля.

Будем считать случайное поле  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  гауссовым однородным и изотропным полем с корреляционной и

спектральной функциями

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x_1 - x_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) &= \langle \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_2, \mathbf{R}_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(q_x, \mathbf{q}) \exp \{ i q_x (x_1 - x_2) + \\ &\quad + i \mathbf{q} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \}, \\ \Phi_\varepsilon(q_x, \mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int d\mathbf{R} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) \exp \{ -i q_x x - i \mathbf{q} \mathbf{R} \}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

По характеру поведения флуктуаций интенсивности ось  $x$  можно условно разделить на три области:

- область слабых флуктуаций интенсивности;
- область сильных фокусировок;
- область сильных флуктуаций интенсивности.

### 8.1. Область слабых флуктуаций интенсивности

В области слабых флуктуаций статистические характеристики интенсивности хорошо описываются на основе метода плавных возмущений, в котором уровень амплитуды

$$\chi(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \ln I(x, \mathbf{R})$$

описывается теорией возмущений и является гауссовым случайным полем. В этом случае среднее значение уровня амплитуды определяется ее дисперсией, а именно

$$\langle \chi(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_\chi^2(x).$$

Введем параметр, обычно называемый *индексом мерцания* (см., например, [40, 41]),  $\beta_0(x) = 4\sigma_\chi^2(x)$ . При этом дисперсия интенсивности волнового поля при условии  $\beta_0(x) \ll 1$  будет описываться формулой

$$\sigma_I^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \beta_0(x),$$

и интенсивность волнового поля является логнормальным случайным полем с одноточечной плотностью вероятностей

$$P(x; I) = \frac{1}{I\sqrt{2\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0(x)} \ln^2 (Ie^{\beta_0(x)/2}) \right\}. \quad (8.11)$$

Область слабых флуктуаций интенсивности ограничивается значениями параметра  $\beta_0(x) \leq 1$ . Для логнормального процесса (8.11) типичной реализацией случайной интенсивности является экспоненциально спадающая с дистанцией кривая

$$I^*(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta_0(x) \right\},$$

и формирование статистики (например, моментных функций  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ ) осуществляется за счет больших выбросов процесса  $I(x, \mathbf{R})$  относительно этой кривой. Кроме того, для реализаций этого процесса  $I(x)$  существуют также мажорантные оценки, и, например, с вероятностью  $p = 1/2$  для отдельных реализаций интенсивности волнового поля выполняется неравенство

$$I(x) < 4 \exp \left\{ -\frac{1}{4} \beta_0(x) \right\}$$

для любых расстояний  $x$ . Все эти обстоятельства указывают на начало образования кластерной структуры интенсивности волнового поля.

Знание плотности вероятностей (8.11) легко позволяет получить некоторые количественные характеристики таких кластерных образований, как средняя удельная площадь областей  $\langle s(x, I) \rangle$ , внутри которых  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , и удельная средняя мощность  $\langle e(x, I) \rangle$ , сосредоточенная в этих областях [24].

Характер пространственной эволюции кластерной структуры при изменении параметра  $\beta_0(x)$  существенно зависит от фиксируемого уровня  $I$ . В наиболее интересном случае  $I > 1$  в начальной плоскости  $\langle s(0, I) \rangle = 0$  и  $\langle e(0, I) \rangle = 0$ . С ростом  $\beta_0(x)$  образуются небольшие кластерные области, где  $I(x, \mathbf{R}) > 1$ , практически сохраняющиеся на некоторых расстояниях и интенсивно вытягивающие в себя значительную часть общей мощности. В дальнейшем площади этих областей уменьшаются с увеличением  $\beta_0(x)$ , а содержащаяся в них мощность увеличивается, что соответствует увеличению средней яркости внутри этих областей. Эти процессы связаны с фокусировкой излучения отдельными участками среды.

В области слабых флуктуаций интенсивности пространственный градиент уровня амплитуды  $\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$  статистически не зависит от  $\chi(x, \mathbf{R})$ . Это позволяет как вычислить удельную среднюю длину контуров  $I(x, \mathbf{R}) = I$ , так и оценить удельное среднее число таких контуров. В самом деле, плотность вероятностей для градиента уровня амплитуды  $\mathbf{q}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$  в области слабых флуктуаций имеет вид гауссова распределения и [24]

$$\begin{aligned} \langle I(x, I) \rangle &= 2L_f(x) \langle |\mathbf{q}(x, \mathbf{R})| \rangle IP(x, I) = \\ &= L_f(x) \sqrt{\pi \sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} IP(x, I), \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= -\frac{1}{\pi} L_f^2(x) \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle I \frac{\partial}{\partial I} IP(x, I) = \\ &= \frac{L_f^2(x) \sigma_{\mathbf{q}}^2(x)}{\pi \beta_0(x)} \ln (Ie^{\beta_0(x)/2}) IP(x, I). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Отметим, что при значении  $I = I_0(x) = \exp\{-\beta_0(x)/2\}$  выражение (8.13) обращается в нуль. Это означает, что для данного уровня интенсивности среднее удельное число контуров, ограничивающих область  $I(x, \mathbf{R}) > I_0$ , совпадает со средним удельным числом контуров, для которых  $I(x, \mathbf{R}) < I_0$ .

Выше были приведены общие выражения, содержащие параметр  $\beta_0(x)$ , характеризующий свойства среды. В приближении дельта-коррелированности поля  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  по  $x$  его корреляционная функция (8.10) аппроксимируется выражением (см., например, [5, 40, 41])

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \delta(x) A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}).$$

Для турбулентной среды функция  $\beta_0(x)$  определяется выражениями [5, 40, 41]

$$\begin{aligned} \beta_0(x) &= 4\sigma_\chi^2(x) = 2k^2 \pi^2 x \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \times \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \left( \frac{q^2}{k} x \right) \right], \end{aligned} \quad (8.14)$$

где  $\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}) = \Phi_\varepsilon(q)$  — трехмерная спектральная функция от двумерного вектора  $\mathbf{q}$ , если турбулентная среда

занимает все пространство. Если же поле  $\varepsilon(x, \mathbf{R})$  отлично от нуля только в тонком слое  $\Delta x \ll x$  (случайный фазовый экран), то

$$\beta_0(x) = 4\sigma_z^2(x) = 2k^2\pi^2\Delta x \int_0^\infty dq q\Phi_\varepsilon(q) \times \left[ 1 - \cos\left(\frac{q^2}{k}x\right) \right]. \quad (8.15)$$

В выражениях (8.14), (8.15) спектральная функция диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = AC_\varepsilon^2 q^{-11/3} \exp\left\{-\left(\frac{q^2}{\kappa_m^2}\right)\right\},$$

где  $A = 0,033$  — численная постоянная,  $C_\varepsilon^2$  — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров потоков, а  $\kappa_m$  — волновое число, соответствующее микромасштабу турбулентности. При условии, что так называемый волновой параметр (см., например, [40, 41]) имеет вид  $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$ , для параметра  $\beta_0(x)$  получаем соответственно выражения

$$\begin{aligned} \beta_0(x) &= 0,307C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} \quad (\Delta x = x), \\ \beta_0(x) &= 0,563C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x \quad (\Delta x \ll x). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Аналогичным образом для дисперсии градиента уровня амплитуды при  $D(x) \gg 1$  имеем для турбулентной среды, занимающей все пространство,

$$\begin{aligned} \sigma_q^2(x) &= \frac{k^2\pi^2 x}{2} \int_0^\infty dq q^3 \Phi_\varepsilon(q) \left[ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin\left(\frac{q^2}{k}x\right) \right] = \\ &= \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x). \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить зависимости  $\langle l(x, I) \rangle$  и  $\langle n(x, I) \rangle$  от параметров  $\beta_0(x)$  и  $D(x)$ , описываемые формулами (8.12), (8.13). Зависимость средней удельной длины линий уровня и среднего удельного числа контуров от микромасштаба турбулентности указывает на существование мелкой ряби, накладывающейся на более крупномасштабный случайный рельеф. Эта рябь не влияет на перераспределение площадей и мощности, но ведет к большей изрезанности линий уровня и к появлению малых контуров.

Как указывалось ранее, полученное описание справедливо при значениях  $\beta_0(x) \leq 1$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\beta_0(x)$  метод плавных возмущений становится несправедливым и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем же увеличении параметра  $\beta_0(x)$  ( $\beta_0(x) \geq 10$ ) статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения параметра  $\beta_0(x)$  называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

## 8.2. Область сильных флуктуаций интенсивности

В области сильных флуктуаций известно, что плотность вероятностей для интенсивности можно аппроксимиро-

вать выражением (см., например, [24, 67, 68])

$$P(x, I) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty dz \times \exp\left\{-zI - \frac{(\ln z - (\beta(x) - 1)/4)^2}{\beta(x) - 1}\right\}, \quad (8.17)$$

где индекс мерцания есть  $\beta(x) = \langle I^2(x) \rangle - 1$ .

Для турбулентной среды соответственно имеем (см., например, [5])

$$\begin{aligned} \beta(x) &= 1 + 0,861\beta_0^{-2/5}(x) \quad (\Delta x = x), \\ \beta(x) &= 1 + 0,429\beta_0^{-2/5}(x) \quad (\Delta x \ll x), \end{aligned} \quad (8.18)$$

где параметр  $\beta_0(x)$  описывается формулами (8.16). Отметим очень медленную зависимость параметра  $\beta(x)$  от  $\beta_0(x)$ . Так, предельному переходу  $\beta_0(x) \rightarrow \infty$  соответствует значение параметра  $\beta(x) = 1$ , а величине  $\beta_0(x) = 1$  соответствует значение параметра  $\beta(x) = 1,861$ .

Отметим также, что распределение вероятностей (8.17) неприменимо в узкой окрестности  $I \sim 0$  (окрестность тем уже, чем больше параметр  $\beta_0(x)$ ). Это связано с тем, что из формулы (8.17) следуют бесконечно большие значения для моментов величины  $1/I(x, \mathbf{R})$ . Однако для конечного значения  $\beta_0(x)$  (сколь велико оно ни было бы) величины  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$  конечны, и, следовательно, должно выполняться равенство  $P(x, 0) = 0$ . Существование такой узкой окрестности точки  $I \sim 0$ , конечно, не сказывается на поведении моментов  $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$  для больших значений параметра  $\beta_0(x)$ .

Асимптотические формулы (8.17), (8.18) описывают переход в область насыщенных флуктуаций интенсивности ( $\beta(x) \rightarrow 1$ ). В этой области средняя удельная площадь областей, внутри которых  $I(x, \mathbf{R}) > I$ , и удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описываются выражениями

$$P(I) = e^{-I}, \quad \langle s(I) \rangle = e^{-I}, \quad \langle e(I) \rangle = (I + 1)e^{-I}, \quad (8.19)$$

и, следовательно, доля общей средней площади и средней мощности, заключенной внутри линий уровня, зависит только от значения  $I$ . Для больших  $I$  эти доли несущественны.

Экспоненциальное распределение вероятностей (8.19) означает, что комплексное поле  $u(x, \mathbf{R})$  является гауссовым случайным полем. При этом поперечный градиент амплитуды статистически не зависит от интенсивности волнового поля и является гауссовым случайным полем [24]. Он также статистически независим от вторых производных по поперечным координатам интенсивности волнового поля. В этом случае можно вычислить удельную среднюю длину контуров и среднее удельное число контуров:

$$\begin{aligned} \langle l(x, I) \rangle &= L_f(x) \sqrt{2\pi\sigma_q^2(x)} I e^{-I}, \\ \langle n(x, I) \rangle &= \frac{2L_f^2(x)\sigma_q^2(x)}{\pi} \left(I - \frac{1}{2}\right) e^{-I}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

где

$$\sigma_q^2(x) = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x). \quad (8.21)$$

Отметим, что формула (8.20) неприменима в узкой окрестности значения  $I \sim 0$ . Для  $I = 0$  должно быть  $\langle n(x, 0) \rangle = 0$ .

Как видно из (8.20), в режиме насыщенных флуктуаций средняя длина линий уровня и среднее число контуров продолжают расти с ростом параметра  $\beta_0(x)$ , хотя ограниченные ими средние площади и мощности, заключенные в них, остаются постоянными, что приводит к дроблению контуров. Это связано с тем, что определяющую роль в этом режиме играет интерференция парциальных волн, приходящих с разных направлений.

Динамическая картина поведения линий уровня существенно зависит от соотношения между процессами фокусировки и дефокусировки излучения отдельными участками турбулентной среды [69]. Фокусировка на неоднородностях большого масштаба проявляется в появлении высоких пиков на случайном рельефе интенсивности. В режиме максимальных фокусировок ( $\beta_0(x) \sim 1$ ) около половины всей мощности волны концентрируется в узких высоких пиках. При увеличении параметра  $\beta_0(x)$  начинает преобладать дефокусировка излучения, приводящая к расплыванию высоких пиков и образованию сильно изрезанного (интерференционного) рельефа с большим числом вершин уровня  $I \sim 1$ .

Средняя длина уровня и среднее число контуров, кроме параметра  $\beta_0(x)$ , зависят также от параметра  $D(x)$ , т.е. растут с уменьшением микромасштаба неоднородностей. Это связано с тем, что на более крупномасштабный рельеф накладывается мелкая рябь, возникающая вследствие рассеяния на малых неоднородностях.

В настоящем разделе была предпринята попытка дать качественное объяснение кластерной (каустической) структуры волнового поля плоской световой волны в поперечной плоскости при распространении ее в турбулентной среде и количественно оценить параметры такой структуры. В общем случае задача является многопараметрической. Однако если ограничиться анализом задачи в фиксированной плоскости, то для плоской волны при постоянном значении волнового параметра решение задачи описывается единственным параметром — дисперсией интенсивности в области слабых флуктуаций. Анализировались два крайних асимптотических случая, соответствующих слабым и насыщенным флуктуациям интенсивности. Следует заметить, что скорее всего пределы применимости асимптотических формул зависят от величины уровня интенсивности  $I$ . Естественно думать, что для меньших значений уровня эти пределы расширяются.

Для анализа же наиболее интересного, с точки зрения приложений, промежуточного случая, соответствующего области развитой каустической структуры, требуется знание плотности вероятностей интенсивности и ее поперечного градиента для произвольного значения дистанции, пройденной волной. Такой анализ можно произвести либо используя аппроксимирующие выражения для плотности вероятностей для всех значений параметров [61], либо на основе численного моделирования, выполненного, например, в работах [44, 45].

## 9. Заключение

Приведем некоторые общие выводы, имеющие "философский" смысл и вытекающие из предыдущего рассмотрения.

— Для ряда динамических систем статистические характеристики решения задачи не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но и противоречат друг другу. Для таких систем традиционный подход, основанный на моментном описании, неинформативен. Для них необходимо иметь статистическое описание на уровне плотностей вероятностей (как минимум одновременной или одноточечной).

— Существуют, однако, когерентные статистические физические явления в стохастических динамических системах, осуществляющиеся с вероятностью единица. Это означает, что данное явление осуществляется почти во всех реализациях поведения этой динамической системы. По-видимому, такие когерентные явления должны существовать "сплошь и рядом", так как они проявляются даже в простейшей динамической системе, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (2.1). Проще уравнений в физике не бывает. Простейшей моделью для положительно определенных величин, описывающей когерентные процессы, является логарифмически-нормальный случайный процесс.

— Сами когерентные явления практически не зависят от модели флуктуирующих параметров динамической системы и в простейшем случае могут быть описаны в рамках одновременных и одноточечных распределений вероятностей с помощью методов статистической топографии. При этом, конечно, конкретные параметры, характеризующие это явление (например, характерные времена образования кластерных структур и их пространственные характерные масштабы), могут существенно зависеть от моделей.

— Изучение когерентных явлений особенно актуально для таких областей знания, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями. Это имеет место, например, в геофизических проблемах, связанных с атмосферой Земли и океаном.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98-05-64479, 96-15-98527, 96-05-65347) и CRDF (№ RM1-272). Второй автор выражает признательность NCAR (Boulder, CO) за поддержку при завершении данной работы.

## Список литературы

1. Кляцкин В И *УФН* **164** 531 (1994)
2. Кляцкин В И, Саичев А И *ЖЭТФ* **111** 1297 (1997)
3. Кляцкин В И *Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами* (М.: Наука, 1975)
4. Гурбатов С Н, Малахов А Н, Саичев А И *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии* (М.: Наука, 1990)
5. Кляцкин В И *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах* (М.: Наука, 1980); *Ondes et équations stochastiques dans les milieux aléatoirement non homogènes* (Besançon Cedex France: Les éditions de physique, 1985)
6. Kulkarny V A, White B S *Phys. Fluids* **25** 1770 (1982)
7. White B S *SIAM J. Appl. Math.* **44** 127 (1983)
8. Zwillinger D, White B S *Wave Motion* **7** 207 (1985)
9. Klyatskin V I *Waves Random Media* **3** 93 (1993)
10. Кляцкин В И *Метод погружения в теорию распространения волн* (М.: Наука, 1986)
11. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media* (World Scientific Series on Directions in Condensed Matter Physics, Vol. 8, Ed. P Sheng) (Singapore: World Scientific, 1990)

12. Кляцкин В И, Саичев А И *УФН* **162** (3) 161 (1992)
13. Klyatskin V I, in *Progress in Optics* Vol. 33 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 1994) p. 1
14. Nicolis G, Prigogine I *Exploring Complexity: an Introduction* (New York: W.H. Freeman, 1989)
15. Займан Дж *Модели беспорядка. Теоретическая физика одномерно неупорядоченных систем* (М.: Мир, 1982)
16. Кас М *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** 314 (1943)
17. Rice S O *Bell Syst. Tech. J.* **23** 282 (1944), **24** 46 (1945), in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes* (Ed. N Wax) (New York: Dover, 1954)
18. Longuet-Higgins M S *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **52** 234 (1956), **53** 230 (1957); *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **249** 321 (1957), **250** 157 (1957)
19. Swerling P I *R.E. Trans. Inf. Theory* **IT-8** 315 (1962)
20. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
21. Klyatskin V I, Woyczynski W A, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 85, Eds S A Molchanov, W A Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 171
22. Saichev A I, Woyczynski W A, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 85, Eds S A Molchanov, W A Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 359
23. Klyatskin V I, Woyczynski W A, Gurarie D, in *Stochastic Modelling in Physical Oceanography* (Progress in Probability, Vol. 39, Eds R J Adler, P Muller, P Rozovskii) (Boston: Birkhauser, 1996) p. 221; *J. Stat. Phys.* **84** 797 (1996)
24. Кляцкин В И, Якушкин И Г *ЖЭТФ* **111** 2044 (1997)
25. Zirbel C L, Çinlar E, in *Stochastic Models in Geosystems* (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 85, Eds S A Molchanov, W A Woyczynski) (New York: Springer, 1997) p. 459
26. Mesinger F J *Atmos. Sci.* **22** 479 (1965)
27. Mesinger F, Mintz Y *Tech. Rep.* **4, 5** (Los Angeles: Dep. Meteorology, Univ. of California, 1970)
28. Гардинер К В *Стохастические методы в естественных науках* (М.: Мир, 1986)
29. Ярошук И О "Численное моделирование распространения плоских волн в случайных слоистых линейных и нелинейных средах", Дис. ... к-та физ.-мат. наук (Владивосток: Тихоокеанский океанологический институт, 1986)
30. Casti J, Kalaba R *Imbedding Methods in Applied Mathematics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1973)
31. Bellman R, Wing G M *An Introduction to Invariant Imbedding* (Philadelphia: SIAM, 1992)
32. Kagiwada H H, Kalaba R *Integral Equations Via Imbedding Methods* (Reading, MA: Addison Wesley Publ. Co., 1974)
33. Guzev M A, Klyatskin V I, Popov G I *Waves Random Media* **2** 117 (1992)
34. Педлоски Дж *Геофизическая гидродинамика* (М.: Мир, 1984)
35. Кляцкин В И *Изв. РАН Сер. Физ. атм. и океана* **32** 824 (1996)
36. Klyatskin V I, Gurarie D, in *Stochastic Modelling in Physical Oceanography* (Progress in Probability, Vol. 39, Eds R J Adler, P Muller, P Rozovskii) (Boston: Birkhauser, 1996) p. 149
37. Гряник Н В, Кляцкин В И *Изв. РАН Сер. Физ. атм. и океана* **33** 723 (1997); Klyatskin V I, Gryanik N V, Gurarie D *Wave Motion* **28** 333 (1998)
38. Гряник Н В, Кляцкин В И *ЖЭТФ* **111** 2030 (1997)
39. Мониин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика* Ч. I, II (М.: Наука, 1965, 1967)
40. Татарский В И *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1967)
41. Рытов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И *Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2 Случайные поля* (М.: Наука, 1978)
42. Guzev M A, Klyatskin V I *Waves Random Media* **1** 275 (1991)
43. Гурвич А С, Каллистратова М А, Мартвель Ф Э *Изв. вузов Радиофизика* **20** 1020 (1977)
44. Flatté S M, Wang G-Y, Martin J J *Opt. Soc. Am. A* **10** 2363 (1993)
45. Flatté S M, Bracher C, Wang G-Y J. *Opt. Soc. Am. A* **11** 2080 (1994)
46. Узием Дж Б *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)
47. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
48. Hopf E *J. Ration. Mech. Anal.* **1** 87 (1952)
49. Furutsu K J J. *Res. NBS D* **667** 303 (1963)
50. Новиков Е А *ЖЭТФ* **47** 1919 (1964)
51. Donsker MD *Proc. Conference on Theory and Applications of Analysis in Functional Space* (Boston MA: M.I.T. Press, 1964) p. 17, перевод Математика **11** 128 (1967)
52. Klyatskin V I, in *Mathematics of Random Media* (Lectures in Appl. Math., Vol. 27, Eds W E Kohler, B S White) (Providence RI: AMS, 1991) p. 447
53. Лифшиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982)
54. Аньцыгина Т Н, Пастур Л А, Слосарев В А *ФНТ* **7** 5 (1981)
55. Klyatskin V I, Woyczynski W A *ЖЭТФ* **108** 1403 (1995)
56. Pumir A, Shraiman B, Siggia E D *Phys. Rev. Lett.* **66** 2984 (1991)
57. Gollub J P et al. *Phys. Rev. Lett.* **67** 3507 (1991)
58. Holzer M, Pumir A *Phys. Rev. E* **47** 202 (1993)
59. Pumir A *Phys. Fluids* **6** 2118 (1994)
60. Holzer M, Siggia E D *Phys. Fluids* **6** 1820 (1994)
61. Kerstein A R, McMurtry P A *Phys. Rev. E* **49** 474 (1994)
62. Shraiman B, Siggia E D *Phys. Rev. E* **49** 2912 (1994)
63. Кляцкин В И, Налбандян О Г *Изв. РАН Сер. Физ. атм. и океана* **33** 291 (1997)
64. Бункин Ф В, Гочелашвили К С *Изв. вузов, Радиофиз.* **11** 1864 (1968)
65. Бункин Ф В, Гочелашвили К С *Изв. вузов, Радиофиз.* **12** 875 (1969)
66. Гочелашвили К С, Шишов В И *Волны в случайно-неоднородных средах* (Итоги науки и техники. Сер. Радиофизика. Физические основы электроники. Акустика, Т. 1, Под. ред. Н Д Устинова) (М.: ВИНТИ АН СССР, 1981)
67. Dashen R *Opt. Lett.* **9** 110 (1984)
68. Churnside J H, Clifford S F J. *Opt. Soc. Am. A* **4** 1923 (1987)
69. Yakushkin I G, Zavorotny V U *Waves Random Media* **2** 165 (1992)

## Coherent phenomena in stochastic dynamical systems

### V. I. Klyatskin

*Institute of Atmospheric physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, Pacific Oceanological Institute, Russian Academy of Sciences (Far East Division), Vladivostok, Russia*  
Tel. (7-095) 269-12-83; E-mail: klyatskin@hotmail.com

### D. Gurarie

*Math. Department, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio 44106-7044, USA*  
E-mail: dxg5@po.cwru.edu

Basic ideas of statistical topography of random processes and fields are presented, which are used in the analysis of coherent phenomena in simple dynamical systems. Such phenomena take place with probability one, and provide links between individual realizations and statistical characteristics of systems at large. We confine ourselves to several examples: transfer phenomena in singular dynamic systems under the action of random forces; dynamic localization of plane waves in randomly stratified media; clustering of randomly advected passive tracers; formation of caustic structures for wave fields in randomly inhomogeneous media. All these phenomena are studied based on the analysis of one-point (space-time) probability distribution functions.

PACS numbers: **02.50.-r, 05.40.-j, 05.45.+b, 42.50.-p**

Bibliography — 69 references

Received 8 June 1998