

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И.Е. ТАММА

Крупномасштабная структура Вселенной.

Аналитическая теория

А.В. Гуревич, К.П. Зыбин

Построена аналитическая теория нелинейной стадии джинсовской неустойчивости в холодном бездиссипативном газе в расширяющейся Вселенной. Показано, что в результате ее развития вокруг галактик возникает гигантское гало темного вещества масштаба 200 кпс, имеющее сингулярность плотности $\rho \propto r^{-\alpha}$, где $\alpha \approx 1,7 - 1,9$. Проведено сравнение аналитической теории с результатами численного моделирования и показано их хорошее согласие. На основе аналитических динамических решений разработан статистический метод вычисления корреляционных функций галактик и скоплений галактик, проведено сравнение теории с имеющимися экспериментальными данными. Обсуждаются астрофизические следствия построенной теории.

PACS numbers: 98.65.-r, 98.80.Bp, 98.80.Hw, 98.90.+s

Содержание

1. Введение (723).
2. Исходные уравнения. Начальные и граничные условия (726).
 - 2.1. Основные упрощения. 2.2. Кинетическое уравнение и уравнения гидродинамики. 2.3. Начальные и граничные условия. 2.4. Спектр Фурье начальных флуктуаций.
3. Линейный рост начальных возмущений (728).
4. Нелинейное развитие джинсовской неустойчивости (729).
 - 4.1. Возникновение первичной особенности. 4.2. Одномерное течение. 4.3. Сферически-симметричное течение. 4.4. Общий случай. 4.5. Область вблизи особенности. Общие замечания.
5. Многопотоковые течения (732).
 - 5.1. Решение вблизи особенности. Плоский одномерный случай. 5.2. Численное моделирование. 5.3. Адиабатическое приближение. 5.4. Сгущение каустик. 5.5. Собственные колебания. 5.6. Изменение энтропии.
6. Сферически-симметричная сингулярность (738).
 - 6.1. Сферически-симметричный случай. 6.2. Адиабатическая теория. 6.3. Численное моделирование.
7. Бездиссипативная гравитационная сингулярность (741).
 - 7.1. Общий случай. 7.2. Адиабатическая теория. 7.3. Численное моделирование.
8. Иерархическая структура (743).
 - 8.1. Общая качественная картина. 8.2. Иерархия масштабов. 8.3. Параметр газовости и оценка корреляционного интеграла.
9. Крупномасштабная структура (746).

А.В. Гуревич, К.П. Зыбин. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Ленинский просп. 53
Тел.: (095) 132-64-14, 132-60-50, 132-61-71
E-mail: alex@td.lpi.ac.ru; zybin@td.lpi.ac.ru

Статья поступила 14 марта 1995 г.

10. Корреляционные функции (748).

10.1. Общие замечания. Определение объекта. 10.2. Модель формирования корреляций. 10.3. Вычисление j -точечных корреляционных функций. 10.4. Парная корреляционная функция.

11. Заключение (752).

11.1. Гигантское гало галактик. 11.2. Гигантское гало нейтронных звезд (модель происхождения гамма-всплесков). 11.3. Парная корреляционная функция. 11.4. Центр БГС.

Приложение. Влияние затухающей моды на формирование БГС (757).

Список литературы (758).

1. Введение

Как показывают наблюдения, наша Вселенная в масштабах порядка радиуса горизонта однородна, изотропна и равномерно расширяется. Расширение приводит к быстрому охлаждению вещества. Холодный гравитирующий газ неустойчив вследствие действия сил всемирного тяготения. Развитие джинсовской неустойчивости приводит к появлению областей сильного сжатия в масштабах, много меньших радиуса горизонта. Это имеет определяющее значение для образования крупномасштабной структуры вещества во Вселенной — галактик, скоплений галактик, сверхскоплений и т.д.

Главную роль в этом процессе играет скрытая масса (ее называют также темным веществом). Скрытая масса проявляет себя лишь в гравитационном взаимодействии. Впервые она была введена в 1933 г. Цвикки, обнаружившим при исследовании галактик в скоплении "Дева", что массы светящихся галактик недостаточно для объяснения их наблюдаемой динамики: необходимо ввести еще дополнительную скрытую (или темную) массу [1]. В дальнейшем наличие динамической скрытой массы отмечалось во многих других скоплениях и галактиках, в том числе и в нашей Галактике.

На существование скрытой массы и ее особую небарионную природу указывает также исследование процесса нуклеосинтеза. В ранней Вселенной тяжелые элементы образовываться не могут, их образование связано со вторичным нуклеосинтезом в звездах. Первичный же нуклеосинтез, согласно современным вычислениям, дает следующее массовое содержание легких элементов X [2]:

$$X(\text{He}^4) \approx 0,24, \quad X(\text{D}) \sim X(\text{He}^3) \sim 10^{-5}, \quad X(\text{Li}^7) \sim 10^{-10}.$$

Такое содержание первичных легких элементов дает сильное ограничение на отношение барионной плотности вещества ρ_b к критической плотности вещества ρ_c , характеризующееся параметром $\Omega_b = \rho_b/\rho_c$:

$$0,010h^{-2} < \Omega_b < 0,015h^{-2}, \quad (1)$$

где величина h — постоянная Хаббла, нормированная на $100 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$. В то же время изучение динамики вещества и, в частности, исследование газа в группах и кластерах галактик дают оценку динамической массы на порядок больше [3, 4] :

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \geqslant 0,2. \quad (2)$$

Другой важный аргумент в пользу существования небарионной скрытой массы следует из данных по анизотропии микроволнового излучения. Дело в том, что флуктуации в барионном веществе могут нарастать только после момента рекомбинации, характеризующегося красным смещением $z_R \sim 1000$. До этого момента флуктуации плотности и температуры связаны соотношением

$$\frac{\delta T_R}{T} \approx \frac{\delta \rho_R}{\rho_0}.$$

Из самого факта существования структур во Вселенной следует, что к настоящему моменту флуктуации плотности $\delta \rho_R/\rho_0$ больше или порядка единицы. Следовательно, на момент рекомбинации должно быть

$$\frac{\delta \rho_R}{\rho_0} \geqslant 10^{-3}.$$

Однако наблюдения показали, что первичные возмущения существенно меньше этой величины. Согласно наблюдениям COBE [5] флуктуации температуры $\delta T/T$ составляют лишь 10^{-5} . Темное вещество позволяет решить эту проблему, так как флуктуации в нем нарастают значительно раньше момента рекомбинации. В результате темное вещество образует потенциальные ямы, в которые после рекомбинации и опускается барионное вещество.

Таким образом, хотя в настоящее время неизвестно, из каких частиц состоит темное вещество, достаточно ясно, что они имеют небарионную природу и, следовательно, очень слабо взаимодействуют между собой и с барионной материией. Обычно предполагают, что это или маломассивные нейтрино (так называемая горячая темная материя — HDM [6]) или какие-либо гипотетические тяжелые частицы: фотино, нейтралино и т.д. (так называемая холодная темная материя — CDM [7–9]). В последние годы рассматривается и их комбинация (CDM + HDM).

Из всего вышесказанного вытекает, что исследование динамики темного вещества, составляющего более 90 % массы Вселенной (при $\Omega = 1$), имеет ключевое значение для понимания нелинейных структур, возникающих во Вселенной.

Проблема возникновения крупномасштабной структуры во Вселенной формулируется следующим образом. В однородной и изотропной равномерно расширяющейся Вселенной линейно нарастают малые начальные возмущения. Естественно предположить, что корреляции линейных возмущений в различных масштабах независимы и носят гауссов характер. Тогда задача полностью определяется видом начального спектра и параметром Ω . Характер спектра первичных флуктуаций на основе весьма общих соображений был указан Зельдовичем и Гаррисоном [10, 11]. Параметр Ω обычно выбирают равным единице. В частности, спектр, близкий к спектру Зельдовича–Гаррисона (при $\Omega = 1$), следует из инфляционной теории [12].

Крупномасштабные структуры развиваются вследствие нелинейной динамики первичных флуктуаций. При решении этой проблемы в последние годы доминирует метод прямого численного моделирования. Бездиссипативный газ заменяется ансамблем одинаковых частиц, взаимодействующих по ньютонаускому закону. Их начальное распределение задается однородным со случайными малыми возмущениями. При этом предполагается, что начальный спектр степенной, достаточно близкий к спектру Зельдовича–Гаррисона. В расчетах обычно варьируется показатель спектра m и параметр Ω .

Проводится анализ и более сложного спектра, возникающего из комбинации флуктуаций CDM и HDM. Моделирование трехмерное. В последних работах рассматривается до $3 \cdot 10^6$ частиц [13–15]. Отметим, что так моделируется лишь бездиссипативная темная материя. В ряде работ изучается и движение малой доли диссипативной барионной материи, описываемой гидродинамическими уравнениями [16].

Результаты численных расчетов сопоставляются с данными астрономических наблюдений и прежде всего с данными о нелинейных структурах. Современные выводы теории можно сформулировать следующим образом [17].

1. Модель CDM после нормализации на данные COBE в масштабе 10^0 находится в соответствии с современными измерениями линейных возмущений в других масштабах. Исключение, возможно, составляют измерения в масштабе (1–5) арсмин, полученные на установке RING [18]. Эти измерения в 3,3 раза превышают экстраполяцию данных COBE согласно линейному спектру Зельдовича–Гаррисона. Отметим, что (1–5) арсмин соответствует масштабу в несколько Мпк.

2. В масштабах порядка $(10–15)h$ Мпк корреляции галактика–галактика и скопление–скопление заметно выше получающихся из стандартного CDM-сценария.

3. Сравнение распределения галактик по скоростям с наблюдаемым показывает, что численные расчеты приводят к более значительной дисперсии скоростей, т.е. к более сильной хаотизации движения. Наблюдаемые потоки содержат коррелированную, когерентную компоненту, которая существенно больше, чем хаотическая.

4. Более предпочтительной оказывается теория, где галактики сформировались уже при красном смещении $Z = 5–10$. В рассматриваемых численных моделях для

чистой CDM-модели это условие удовлетворяется лишь при малых значениях $\Omega = 0,2$.

5. Важную роль играют прямые соударения галактик, приводящие к их слиянию. Влияние этих процессов на распределение галактик пока не ясно.

6. Согласно современным наблюдательным данным постоянная Хаббла H_0 ближе к $60 - 80 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$. С точки зрения рассматриваемых численных расчетов предпочтительнее значение $H_0 \approx 50 - 30 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$, а также малые значения $\Omega \approx 0,2 - 0,3$ (в чистой CDM-модели).

7. Учет возможной комбинации HDM + CDM снижает значительную часть этих противоречий. Такая модель выглядит в настоящее время наиболее предпочтительной [19].

В целом замечательный успех численного моделирования состоит в возможности проверки выбора исходной модели начального спектра и состава темного вещества на основе детального сопоставления с данными наблюдений. Наиболее вероятным в настоящее время представляется вывод о том, что спектр начальных возмущений близок к модифицированному спектру Зельдовича–Гаррисона в комбинированной модели $0,75 \text{ CDM} + 0,25 \text{ HDM}$ темной материи с $\Omega = 1$. Следует, вместе с тем, подчеркнуть, что другие варианты моделей, в частности открытые модели с $\Omega \approx 0,2$, никак нельзя считать исключенными.

Важно подчеркнуть, что от численного моделирования нельзя ожидать слишком точных ответов, так как оно содержит принципиальные модельные ограничения. Дело в том, что даже при максимальном возможном в настоящее время числе частиц (порядка $10^6 - 10^7$) ввиду трехмерности задачи на каждое измерение приходится $(1-2) \cdot 10^2$ частиц. Это означает, что максимальный диапазон изменения спектра возмущений, рассматриваемого в модели, составляет лишь один-полтора порядка:

$$\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \sim 10 - 30.$$

Этого недостаточно, чтобы охватить все изменение реального спектра — от линейной области (больше или порядка $100 - 300 \text{ Мпк}$) до дугалактических масштабов.

Кроме того, использование в численном счете "больших" частиц, масса которых на много порядков превышает массу частиц темной материи (реально их масса на два-четыре порядка больше массы галактики), приводит к колоссальному усилению роли кулоновского рассеяния. Это может существенно повлиять на распределение частиц по скоростям и исказить роль диссипативных процессов. Необходимость использования "больших" частиц является одним из наиболее важных недостатков численного метода. Нельзя также не отметить, что при решении уравнения Пуассона обычно используют метод быстрого преобразования Фурье, что приводит к эффективному сглаживанию сингулярных областей.

Указанные недостатки отсутствуют в аналитическом подходе, также получившем значительное развитие в последние годы. Аналитическое описание нелинейной динамики гравитирующей материи восходит к работе [20], в которой предложено использовать статистические методы динамики сплошных сред, широко применяющиеся ранее в теории гидродинамической турбулентности. Наиболее полное воплощение эта теория нашла в известной монографии Пиблса [21]. В основе теории — предположение о гладком характере высших

корреляционных функций, позволяющее приближенно расцепить цепочку связанных нелинейных уравнений.

К сожалению, в действительности такое предположение не выполняется: выделяются особые сингулярные области, где цепочки корреляционных функций расходятся. Эти области определяются нелинейной динамикой сжатия холодного гравитирующего вещества и играют фундаментальную роль в установлении нелинейного стохастического состояния. Следует отметить, что развитие теории гидродинамической турбулентности в последние годы указало также на определяющую роль нелинейных сингулярностей в высших корреляционных функциях [22]. В теории же гравитирующего газа роль сингулярностей значительно сильнее ввиду джинсовской неустойчивости однородного состояния системы.

Впервые сингулярные образования в динамике бездиссипативного гравитирующего газа были указаны Зельдовичем [23]. Это широко известные "блинны" Зельдовича, исследовавшиеся в работах [24, 25]. Вместе с тем, как выяснилось в дальнейшем, плоская особенность типа "блинов" является не единственной и не главной. В работах авторов [26–29] была обнаружена особенность трехмерного сжатия, имеющая наиболее высокий порядок и составляющая основу установившегося стационарного решения — так называемая бездиссипативная гравитационная сингулярность (БГС). Именно БГС определяет особенности парной корреляционной функции в развитом нелинейном стохастическом состоянии темного вещества [30]. Особенности же типа "блинов" Зельдовича ярко проявляют себя только в корреляционных функциях более высокого порядка.

Указанные особенности динамики гравитирующего газа ясно выделяются в распределении плотности и скорости вещества и в поведении корреляционных функций. Это позволяет сделать вполне определенные предсказания, часть которых (например, гигантское гало темной материи вокруг галактик, распределение скоростей в кривых вращения, сингулярный закон поведения парной корреляционной функции) уже нашла свое подтверждение в данных наблюдений.

Изложению современного состояния аналитической теории крупномасштабной структуры распределения вещества во Вселенной и посвящен настоящий обзор. В разделе 2 обсуждается исходная постановка задачи, приводятся уравнения, описывающие динамику бездиссипативного холодного вещества, начальные и граничные условия к ним. Подчеркивается важная роль обрезания спектра Зельдовича–Гаррисона в коротковолновой области, обусловленного конечной массой частиц темной материи.

Раздел 3 посвящен исследованию линейного роста начальных флуктуаций. Выписывается общее решение и выделяется растущая неустойчивая мода. Обсуждаются соотношения между плотностью и скоростью в растущей моде, важные для построения нелинейной теории. В разделе 4 исследуется нелинейное решение в гидродинамическом приближении. В начальном возмущении выделяются особые точки, вблизи которых нелинейность играет решающую роль. Показывается, что вблизи этих точек через конечное время в исходной гидродинамической системе уравнений возникает особенность, после которой указанная система становится несправедливой.

Исследованию решения после особенности посвящен раздел 5. Подчеркивается, что после первичной особен-

ности в исходном течении возникают области многопоточных течений. Со временем количество потоков в областях увеличивается. Подробно исследуется плоский одномерный случай. При $t \rightarrow \infty$ количество потоков стремится к бесконечности, и в окрестности первичной особенности формируется стационарное размешанное кинетическое состояние БГС, имеющее сингулярность средней плотности $\bar{\rho} \propto x^{-4/7}$.

Изучению БГС в сферически-симметричном случае посвящен раздел 6. Показывается, что в сферически-симметричном случае процесс формирования БГС проходит значительно быстрее, чем в плоском случае. Практически сразу после первичной особенности возникает бесконечное количество потоков и квазистационарное распределение плотности $\rho \propto r^{-2} \ln^{-1/3}(1/r)$. В разделе 7 рассмотрен общий случай. Подчеркивается, что и в общем случае вблизи первичной особенности возникает стационарное сферически-симметричное распределение, имеющее в центре особенность плотности, которую с хорошей точностью можно экстраполировать степенным законом $\rho \propto r^{-\alpha}$, где $\alpha = 1, 7-1, 9$.

В разделе 8 показывается, что в результате последовательного развития джинсовской неустойчивости формируются БГС различных масштабов, причем крупномасштабные БГС могут захватывать мелкомасштабные, формируя тем самым иерархическую структуру в тех областях, где успела развиться многопотоковая картина и возникло квазистационарное состояние.

Раздел 9 посвящен обсуждению структур наиболее крупного масштаба, возникающих в переходных областях течения, где кинетическое размешивание еще полностью не произошло и наблюдаются отдельные каустические особенности. Структурная картина при этом имеет ячеистый характер. Подчеркивается, что в этих областях в корреляционных функциях третьего порядка и выше должны наблюдаться сингулярности, обусловленные ячеистой структурой.

В разделе 10 изучаются корреляционные функции, излагается теория, учитывающая наличие сильных корреляций вблизи особых точек. Показывается, что наблюдаемая сингулярная структура парной корреляционной функции $\xi \propto r^{-\alpha}$ однозначно связана с БГС. В разделе 11 кратко обсуждаются некоторые астрофизические приложения разработанной теории.

Необходимо подчеркнуть, что, говоря об аналитической теории иерархической и крупномасштабной структуры, мы ни в коей мере не хотели бы противопоставить ее численному моделированию, о котором говорилось в начале обзора. Прежде всего ясно, что употребляемый нами термин "аналитическая теория" условный, так как и в этой теории при получении и анализе конкретных решений существенно используются численные методы.

Кроме того, аналитическая теория сосредоточивает свое главное внимание на поведении вещества в окрестности особенностей. Вместе с тем, как будет показано ниже, основная масса вещества оказывается сосредоточенной на периферии, т.е. фактически вне особенностей. Поэтому общие закономерности, касающиеся усредненного поведения сравнительно гладкой части структуры вещества, безусловно, лучше описываются при прямом численном моделировании.

С другой стороны, при описании поведения плотности вещества вблизи особенностей, распределения скоп-

ростей и структуры областей захвата, а также сингулярных свойств корреляционных функций несомненное преимущество имеет аналитическая теория. Оба эти подхода взаимно дополняют друг друга и, по-видимому, наиболее полное и точное описание динамики возникновения и развития структуры вещества во Вселенной будет получено на пути разумного сочетания обоих методов.

2. Исходные уравнения. Начальные и граничные условия

2.1. Основные упрощения

Как указывалось выше, из наблюдательных данных следует, что наша Вселенная в целом однородна, изотропна и равномерно расширяется. Максимальный размер неоднородностей, определяющих крупномасштабную структуру вещества $l < 300-500$ Мпк, т.е. масштабы неоднородностей много меньше радиуса горизонта $R \approx 5 \cdot 10^3$ Мпк. Соответственно, при теоретическом изучении данной проблемы можно ограничиться рассмотрением лишь таких флюктуаций, масштаб которых l мал по сравнению с радиусом горизонта R_H :

$$\frac{l}{R_H} \ll 1. \quad (3)$$

Одновременно и пекулярные скорости течения V можно считать малыми в сравнении со скоростью света c :

$$\frac{V}{c} \ll 1. \quad (4)$$

Действительно, пекулярные скорости $V \leq lH$, где постоянная Хаббла H , определяющая расширением Вселенной, равна

$$H \approx (50-100) \text{ км с}^{-1}\text{Мпк}^{-1}. \quad (5)$$

Отсюда и из (3) с учетом того, что $R_H H = c$, следует соотношение (4). В условиях (3), (4) релятивистские эффекты не важны и можно ограничиться ньютоновской динамикой.

Как указывалось выше, согласно современным представлениям темная материя состоит из невзаимодействующих или очень слабо взаимодействующих частиц. Длина свободного пробега таких частиц l_f значительно превышает масштаб неоднородностей. Тогда по параметру

$$\frac{l}{l_f} \quad (6)$$

можно в первом приближении пренебречь столкновениями частиц темной материи, т.е. рассматривать ее как газ невзаимодействующих частиц.

Отметим также, что в период нелинейного роста флюктуаций вследствие остывания в процессе расширения Вселенной газ частиц, составляющих темную материю, всегда является холодным.

2.2. Кинетическое уравнение и уравнения гидродинамики

Динамика темной материи — динамика газа невзаимодействующих частиц, движущихся в собственном самосогласованном гравитационном поле. В условиях (3), (4),

(6) она описывается кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \\ \Delta\psi = \int f d\mathbf{v}. \quad (7)$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — функция распределения частиц, $\psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал гравитационного поля. В выражении (7) и далее для компактности записи мы выбрали систему единиц, в которой $4\pi G = 1$, где G — гравитационная постоянная.

Конкретный вид функции распределения f , вообще говоря, может зависеть от предыстории возникновения флуктуаций, массы частиц, составляющих темную материю, и их сечения взаимодействия. Однако в интересующий нас реально период времени, как отмечалось выше, темная материя успела остыть и образует холодный бесстолкновительный газ, температура которого ничтожно мала. В этом случае начальную функцию распределения можно выбрать в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)), \quad (8)$$

где ρ — плотность газа, \mathbf{V} — гидродинамическая скорость.

Подставляя (8) в (7) и переписывая полученную систему уравнений для параметров ρ , \mathbf{V} , с учетом космологического расширения Вселенной, т.е. в расширяющейся системе координат, получаем следующую гидродинамическую систему:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + a^{-1}(\mathbf{V}\mathbf{V}\mathbf{V}) + a^{-1}\dot{a}\mathbf{V} + a^{-1}\nabla\varphi = 0, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} + a^{-1}\nabla\{(1+\delta)\mathbf{V}\} = 0, \\ \Delta\varphi = a^2\rho_0\delta. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ — пекулярная скорость вещества, $\delta = \delta(\mathbf{x}, t) = \{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0(t)\}/\rho_0(t)$ — отклонение плотности газа от средней фоновой плотности $\rho_0(t)$, $a(t)$ — масштабный фактор.

Преобразование переменных \mathbf{x} , \mathbf{V} , t из расширяющейся системы координат в какую-либо фиксированную происходит согласно известным соотношениям [21]:

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{x}\dot{a}, \\ \rho = \rho_0(1+\delta), \quad \varphi = \psi + \frac{a}{2}\ddot{a}x^2, \quad (10)$$

где точка означает дифференцирование по времени.

2.3. Начальные и граничные условия

Для решения системы уравнений (9) надо задать начальные и граничные условия на функции \mathbf{V} и δ . В условиях (4) интересующие нас неоднородности развиваются в расширяющейся однородной Вселенной. Граничные условия при этом не существенны, так как требование затухания возмущений на бесконечности легко выполняется за счет расширения.

Что же касается начальных условий, то формально для решения системы (9) надо задать набор из четырех начальных функций в некоторый момент $t = t_i$:

$$\delta(\mathbf{x}, t_i) = \delta_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, t_i) = \mathbf{V}_i(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Какой момент времени t_i следует выбрать за начальный — зависит от физики взаимодействия частиц темной материи и их массы. Для нашего рассмотрения момент t_i соответствует началу того периода эволюции Вселенной, когда ее общее космологическое расширение определяется темной материйей. Обычно это есть момент, когда частицы темной материи становятся нерелятивистскими [21]. Естественно, что начальные флуктуации в этот момент малы:

$$|\delta_i(\mathbf{x})| \ll 1. \quad (12)$$

Ввиду соотношения (12) можно рассматривать первоначальный этап роста флуктуаций в линейном приближении. Наряду с пространственным распределением (11) это позволяет задавать начальные флуктуации их спектром Фурье:

$$|\delta_i(\mathbf{k})|^2, \quad \delta_i(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_i(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (13)$$

2.4. Спектр Фурье начальных флуктуаций

Линейной теории будет посвящен раздел 3 настоящего обзора. Здесь же мы остановимся на некоторых общих свойствах начального спектра. Форма спектра $|\delta_i(\mathbf{k})|^2$ зависит от предыстории возникновения флуктуаций и их развития при $0 < t < t_i$. Обсудим вначале первичный спектр $|\delta_i^0(\mathbf{k})|^2$. Конкретный вид этого спектра определяется физическими процессами, происходящими в ранней Вселенной. Достаточно общие соображения были высказаны Зельдовичем [10] и Гаррисоном [11].

Действительно, физически естественно ожидать, что вариации метрики не имеют сильной расходимости. В ньютоновском приближении метрика имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где φ — потенциал гравитационного поля. Отсюда вариации метрики

$$|\delta g_{00}| = |\delta g_{z\beta}| = 2\varphi c^2.$$

Следовательно,

$$|\delta g_{ik}| \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \varphi_i^{(0)}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (14)$$

Условие слабой (логарифмической) среднеквадратичной расходимости выражения (14) записывается в виде

$$|\varphi_i^{(0)}(\mathbf{k})| \propto \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Тогда, используя связь между потенциалом φ_i и плотностью δ_i из (9), получаем

$$|\delta_i^0(\mathbf{k})|^2 \propto k. \quad (15)$$

При $k \rightarrow 0$ спектр (15) естественно обрезается масштабом горизонта R_H^{-1} .

Что же касается мелких масштабов ($k \rightarrow \infty$), то обрезание спектра в них определяется эволюцией при $0 < t < t_i$. Этот процесс можно описать некоторой "переходной" функцией $C(k)$, которая умножается на

первичный спектр $|\delta_i^0(k)|$ и задает начальный спектр на момент t_i :

$$|\delta_i(\mathbf{k})|^2 = |\delta_i^0(\mathbf{k})|^2 C(k). \quad (16)$$

Функция $C(k)$ в основном искажает "первичный" спектр в малых масштабах, достаточно круто обрезая его, причем обрезание определяется видом частиц темной материи. Поскольку в настоящее время неизвестны частицы, составляющие темную материю, мы не знаем и точный вид функции $C(k)$.

Ограничимся, однако, рассмотрением таких переходных функций $C(k)$, которые достаточно быстро убывают при $k \rightarrow \infty$, выделяя тем самым минимальный масштаб k_{\max} . Как мы увидим ниже (см. раздел 4), на нелинейной стадии джинсовской неустойчивости определяющую роль играет не спектр $|\delta_i(\mathbf{k})|^2$, а конкретный вид реализации начальных флуктуаций $\delta_i(\mathbf{x})$. Достаточно быстрое спадание спектра при $k \rightarrow \infty$ означает достаточную гладкость функции $\delta_i(\mathbf{x})$.

Как будет показано в разделе 4, у функции $\delta_i(\mathbf{x})$ должна существовать вторая производная. Тогда, согласно (13), имеем

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x^2} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \delta_i(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k}, \quad (17)$$

откуда получаем следующее ограничение на спектр $|\delta_i(\mathbf{k})|^2$ при $k \gg k_{\max}$:

$$|\delta_i(\mathbf{k})|^2 \leq k^{-10}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Условие (18) для холодной темной материи всегда выполнено.

Таким образом, при малых $|\mathbf{k}|$ начальный спектр близок к (15), а при $k \rightarrow \infty$ быстро затухает. При этом минимальный масштаб $k = k_{\max}$, соответствующий максимуму начального спектра, определяется массой частиц темной материи [31]. Подчеркнем (см. раздел 4), что, как мы увидим в дальнейшем (см. раздел 4), наличие максимума в спектре и его быстрое спадание при $k > k_{\max}$, согласно (18), имеет фундаментальное значение для развивающейся нелинейной структуры.

Совокупность начальных условий (11) и ограничений на начальный спектр (15), (18) определяет все необходимые требования для построения теории.

3. Линейный рост начальных возмущений

Как отмечалось выше, согласно современным наблюдательным данным (в частности, по анизотропии реликтового излучения [5]) флуктуации в ранней Вселенной весьма малы (см. (12)), так что их начальный рост описывается линейной теорией. Линеаризуя систему (9), получаем [21]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + a^{-1} \dot{a} \mathbf{V} + a^{-1} \nabla \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \delta}{\partial t} + a^{-1} (\nabla \mathbf{V}) &= 0, \\ \Delta \varphi &= a^2 \rho_0(t) \delta. \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений (19) легко разрешима. Действительно, из второго уравнения (19) следует, что плотность изменяется только под действием дивергенции скорости.

Из первого уравнения (19) для роторной части скорости имеем

$$\mathbf{V}^{\text{rot}} = \mathbf{V}_i^{\text{rot}} \frac{a_i(t_i)}{a(t)}. \quad (20)$$

Видно, что вихревая компонента скорости всегда затухает за счет общекосмологического расширения. Вычиная дивергенцию из первого уравнения (19) и подставляя ее во второе, приходим к уравнению на собственные моды вида

$$\frac{d^2 D}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{dD}{dt} = \rho_0(t) D. \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет две моды: одну растущую D_1 и другую затухающую D_2 . В отсутствие расширения ($\dot{a} = 0$, $\rho_0 = \text{const}$) эти моды были бы экспоненциальными. Однако наличие расширения кардинальным образом сказывается на зависимости мод от времени. Так, для случая $\Omega = 1$ (где Ω — отношение плотности к критической) зависимость мод от времени становится чисто степенной. Действительно, подставляя $a(t) \propto t^{3/2}$ и, соответственно, $\rho_0 = (2/3)t^{-2}$ в (21), получаем

$$D_1 = \left(\frac{t}{t_i} \right)^{2/3}, \quad D_2 = \frac{t_i}{t}. \quad (22)$$

Из соотношений (20), (22) видно, что, как и утверждалось выше, только одна мода в линейном решении оказывается растущей со временем.

Используя собственные моды D_1 и D_2 , находим полное решение линейной задачи, удовлетворяющее начальным условиям (11) [21]:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\delta_i}{E} \{ D_1(t) \dot{D}_2(i) - D_2(t) \dot{D}_1(i) \} + \\ &\quad + \frac{\nabla \mathbf{V}_i}{a_i E} \{ D_1(t) D_2(i) - D_2(t) D_1(i) \}, \\ \mathbf{V} &= \frac{a(t)}{4\pi E} \int d\mathbf{x}' \delta_i(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \{ \dot{D}_1(t) \dot{D}_2(i) - \dot{D}_2(t) \dot{D}_1(i) \} + \\ &\quad + \mathbf{V}_i^{\text{div}} \frac{a(t)}{a_i E} \{ \dot{D}_2(t) D_1(i) - \dot{D}_1(t) \dot{D}_2(i) \} + \mathbf{V}_i^{\text{rot}} \frac{a_i}{a(t)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь a_i — масштабный фактор в момент времени t_i , величины $\delta_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{V}_i(\mathbf{x})$ задаются начальными условиями (11), $\mathbf{V}_i^{\text{div}}$ — дивергентная часть скорости. Нормировочная константа E определена соотношением

$$E = D_1(i) \dot{D}_2(i) - D_2(i) \dot{D}_1(i),$$

где индекс i в выражениях $D_1(i)$, $D_2(i)$ означает, что эти функции задаются в момент времени t_i .

Обсудим теперь некоторые важные свойства линейного решения (23). Прежде всего выделим растущую моду:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\delta_i}{E} D_1(t) \dot{D}_2(i) + \frac{\nabla \mathbf{V}_i}{a_i E} D_1(t) D_2(i), \\ \mathbf{V} &= \frac{a(t)}{4\pi E} \int d^3 x' \delta_i(x') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \dot{D}_1(t) \dot{D}_2(i) - \\ &\quad - \mathbf{V}_i^{\text{div}} \frac{a(t)}{a_i E} D_2(i) \dot{D}_1(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Видно, что на линейной стадии в растущей моде все масштабы увеличиваются одинаково, т.е. в ней не

происходит искажение начального спектра флуктуаций, а просто с течением времени амплитуды всех гармоник увеличиваются пропорционально собственной функции D_1 . Следовательно, раньше всего нелинейные эффекты начнут играть роль в масштабе, соответствующем максимуму спектра (16) начальных флуктуаций k_{\max} .

Кроме того, из всевозможных начальных условий, которые характеризуются заданием четырех произвольных функций (плотности и трех компонент скорости), с течением времени нарастает только одна их вполне определенная комбинация. Действительно, из первого уравнения системы (23) видно, что при растущей моде $D_1(t)$ стоит следующая комбинация начальных функций:

$$\delta_i(\mathbf{x}) \dot{D}_2(i) + \frac{\nabla V_i}{a_i} D_2(i). \quad (25)$$

После простого преобразования второго соотношения системы (23) легко убедиться, что нарастает именно та же комбинация (25).

Таким образом, из произвольного набора четырех скалярных начальных функций нарастает во времени значительно более узкий класс, соответствующий только одной скалярной начальной функции. В качестве такой начальной функции можно выбрать, например, потенциал гравитационного поля φ . Тогда начальная плотность и скорость в растущей моде выразятся через него:

$$\delta_i(\mathbf{x}) = \frac{\Delta\varphi_i}{a_i^2\rho_0(i)}, \quad \mathbf{V}_i = -\frac{\nabla\varphi_i}{a_i\rho_0(i)} \frac{\dot{D}_1(i)}{D_1(i)}. \quad (26)$$

Можно воспользоваться и другим, более удобным для нас способом задания начальных условий [27]. А именно, при $t = t_i$ выберем

$$\delta|_{t=t_i} = \delta_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{V}|_{t=t_i} = 0. \quad (27)$$

Действительно, как видно из (24), (25), вместо обычной плотности $\delta_i(\mathbf{x})$ всегда можно ввести некоторую новую "эффективную" плотность

$$\tilde{\delta}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{E} \left\{ \delta_i(\mathbf{x}) \dot{D}_2(i) + \frac{\nabla V_i}{a(i)} D_2(i) \right\}.$$

Тогда с точностью до малосущественных затухающих членов решение (24) примет вид

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}, t) &= \tilde{\delta}_i(\mathbf{x}) D_1, \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{a(t)}{4\pi E} \int d^3x' \tilde{\delta}_i(\mathbf{x}') \times \\ &\times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \{ \dot{D}_1(t) \dot{D}_2(i) - \dot{D}_2(t) \dot{D}_1(i) \}. \end{aligned}$$

Учтем, что в начальный момент $t = t_i = i$ член в фигурных скобках тождественно равен нулю. Построенное решение эквивалентно поэтому решению (23), (24), в котором начальные скорости положены равными нулю.

Таким образом, в линейной задаче при произвольно заданных начальных условиях выделяется только одна растущая мода. Начальные условия (27) полностью замыкают задачу для этой моды. В дальнейшем, при построении нелинейной теории мы будем задаваться начальными условиями в виде (27), изучая нелинейную эволюцию растущей неустойчивой моды. Учет влияния затухающей моды на нелинейную динамику растущей моды малосуществен. Он кратко будет рассмотрен в Приложении.

4. Нелинейное развитие джинсовской неустойчивости

4.1. Возникновение первичной особенности

В предыдущем разделе обсуждалась линейная теория и было показано, что в холодном бездиссипативном газе в линейном приближении в неустойчивой моде начальные флуктуации увеличиваются по амплитуде без искажения первоначальной формы. Это означает, что прежде всего нарушается линейное приближение и становятся важными нелинейные эффекты в тех местах, где начальные возмущения плотности наиболее велики, т.е. вблизи каждого максимума начального распределения эффективной плотности $\delta_i(\mathbf{x})$. Поэтому при исследовании нелинейной стадии джинсовской неустойчивости важно вначале рассмотреть динамику системы в окрестности отдельного максимума.

Для решения задачи зафиксируем систему координат в точке некоторого произвольного начального максимума плотности. При этом учтем, что первыми достигают нелинейной стадии развития неоднородности масштаба k_{\max} . С этих неоднородностей мы и начнем рассмотрение. Особенность их динамики состоит в том, что большие масштабы ($k \ll k_{\max}$) еще не выросли, а более мелкие флуктуации вообще отсутствуют вследствие резкого падения начального спектра (16) при $k > k_{\max}$. Поэтому их можно рассматривать как отдельные гладкие максимумы.

Используя преобразование координат и скоростей (10) и переходя от расширяющейся системы координат к покоящейся с началом координат в точке максимума плотности δ_i , из системы уравнений (9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} &= 0, \\ \Delta\psi &= \rho. \end{aligned} \quad (28)$$

В окрестности максимума плотности при выполнении условий (15), (18) начальное распределение плотности с точностью до членов высшего порядка малости можно представить в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(1 - \xi^2), \quad \xi^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}. \quad (29)$$

Коэффициенты a, b, c в (29) являются, соответственно, членами тейлоровского разложения плотности вблизи точки максимума $\mathbf{r} = 0$:

$$a^{-2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial x^2}, \quad b^{-2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial y^2}, \quad c^{-2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial z^2}.$$

При этом всегда можно считать выполненными соотношения

$$a \geq b \geq c.$$

Условие (29), заданное в момент $t = t_i$, составляет одно из начальных условий к системе (28). Другое начальное условие в соответствии с (27) примет вид

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{r}) = 0. \quad (30)$$

4.2. Одномерное течение

Перейдем теперь к исследованию решений системы уравнений (28) с начальными условиями (29), (30). Соотношение между коэффициентами a, b, c в (29) может быть любым. Рассмотрим сначала предельный случай

$$\frac{b}{a} \ll 1, \quad \frac{c}{a} \ll 1.$$

Тогда в первом приближении по малым параметрам b/a и c/a задачу можно считать одномерной. При этом система уравнений (28) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi &= \rho, \end{aligned} \quad (31)$$

а начальные условия (29), (30) запишутся в виде

$$t = 0, \quad V_i = 0, \quad \rho_i(x) = \rho_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (32)$$

В (32) мы выбрали $t = t_i$ за начало отсчета времени.

Система уравнений (31) интегрируется точно [26]. Действительно, вводя обозначение $y = \partial \psi / \partial x$ и подставляя третье уравнение в первое, после интегрирования по x имеем

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} = c(t), \quad (33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + y = 0. \quad (34)$$

Первое уравнение в (33) выражает закон переноса массы, так как $y(x) = \int_0^x \rho(x_1) dx_1 = m(x)$ — масса вещества в интервале $(0, x)$. Поэтому, если полная масса в системе сохраняется, константа $c(t) \equiv 0$.

Используя преобразование годографа, т.е. считая $t = t(u, y)$ и $x = (u, y)$, после замены переменных из (33), (34) получаем

$$-\frac{\partial x}{\partial u} + u \frac{\partial t}{\partial u} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} - u \frac{\partial t}{\partial y} \right) \left(1 + y \frac{\partial t}{\partial u} \right) = 0. \quad (35)$$

Второе уравнение системы (35) распадается на два: либо

$$\frac{\partial x}{\partial y} - u \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

либо

$$\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{1}{y}.$$

Легко убедиться, что первое уравнение является вырожденным и не удовлетворяет начальным условиям (26). Из второго уравнения в неявном виде находим

$$x = -\frac{u^2}{2y} + H_1(y), \quad t = -\frac{u}{y} + M_1(y). \quad (36)$$

Функции $H_1(y)$ и $M_1(y)$ определяются начальными условиями (29), (30):

$$M_1(y) = 0, \quad x = H_1(y). \quad (37)$$

Разрешая уравнение (37) в окрестности максимума плотности, имеем

$$H_1(y) = \frac{y}{\rho_0} + \frac{y^3}{3\rho_0^3 a^2} \quad (38)$$

(см. (34)). Таким образом, из соотношений (36), (38) мы получаем решение

$$x = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{t^2}{2} \right) y + \frac{y^3}{3\rho_0^3 a^2}. \quad (39)$$

На малых временах (при $t < (2/\rho_0)^{1/2}$), как следует из (39), решение в окрестности максимума плотности $x = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{1/\rho_0 - t^2/2} - \frac{1}{\rho_0^3 a^3} \frac{x^2}{(1/\rho_0 - t^2/2)^4}, \\ u &= -\frac{xt}{1/\rho_0 - t^2/2} + \frac{t}{3\rho_0^3 a^2} \frac{x^3}{(1/\rho_0 - t^2/2)^4}. \end{aligned} \quad (40)$$

Видно, что плотность в максимуме $x = 0$ быстро нарастает со временем t , пик становится уже, появляется течение к центру.

Важно подчеркнуть, что решение (39), (36) существует лишь конечное время. Действительно, в момент $t = t_c = (2/\rho_0)^{1/2}$ в течении возникает особенность:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(\frac{3x}{a} \right)^{-2/3}, \quad \psi = \frac{\rho_0 a^2}{4} \left(\frac{3x}{a} \right)^{4/3}, \\ u &= (2\rho_0)^{1/2} a \left(\frac{3x}{a} \right)^{1/3}, \quad t = t_c = \left(\frac{2}{\rho_0} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Плотность стремится к бесконечности при $x \rightarrow 0$. Скорость и потенциал остаются конечными, особенность имеют лишь их производные. На возникновение особенности в одномерном течении холодного бездиссипативного гравитирующего газа указано в работах Арнольда и Зельдовича [23, 24].

4.3. Сферически-симметричное течение

Рассмотрим другой важный предельный случай — сферически-симметричный, когда параметры a, b, c равны друг другу:

$$a = b = c, \quad \rho_i(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Уравнения (28) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= \rho. \end{aligned} \quad (42)$$

Вводя $y = r^2 \partial \psi / \partial r$, из (42) имеем

$$\frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial r} = c(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{y}{r^2} = 0. \quad (43)$$

Проделывая далее вычисления, аналогичные (33)–(35), находим решение в неявном виде [26]:

$$\begin{aligned} t &= (2y)^{-1/2} H^{-3/2}(y) \left\{ \arctg Z + \frac{Z}{1+Z^2} \right\}, \\ r &= \frac{1}{H(y)(1+Z^2)}, \quad Z = -\frac{u}{(2yH(y))^{1/2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Выражение для функции $H(y)$ в окрестности максимума получаем аналогично (38):

$$H(y) = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-1/3} \left\{ 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{2/3} \right\}, \quad y_0 = \frac{\rho_0 a^3}{3}. \quad (45)$$

Анализ выражений (44), (45) показывает, что в момент $t = t_c^{(1)} = \pi(3/8\rho_0)^{1/2}$ в окрестности точки $r = 0$ также возникает особенность:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3}{7} \left(\frac{40}{9\pi}\right)^{6/7} \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-12/7}, \quad \psi = \frac{7}{2} \beta \left(\frac{r}{a}\right)^{2/7}, \\ u_r &= -(2\beta)^{1/2} \left(\frac{r}{a}\right)^{1/7}, \quad \beta = \frac{\rho_0 a^2}{3} \left(\frac{40}{9\pi}\right)^{6/7}. \end{aligned} \quad (46)$$

Отметим, что особенность (46) интегрируемая. Действительно, потенциал ψ конечен, а функция массы $M(r) \propto r^{9/7}$, т.е. $M = 0$ при $r \rightarrow 0$. Это означает, что, несмотря на наличие особенности плотности ρ в центре, черная дыра не образуется, так как масса растет недостаточно быстро (в случае черной дыры $M \propto r$).

Подчеркнем, однако, что если выбрать более плоское начальное распределение плотности $\rho_i(r)$:

$$\rho_i(r) = \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a_1}\right)^{2n} \right], \quad n \geq 2, \quad (47)$$

то на момент особенности в центре образуется черная дыра. Действительно, при $r \rightarrow 0$ плотность

$$\rho(r) \propto r^{-12n/(3+4n)}. \quad (48)$$

Это означает, что $M(r) \propto r^{9/(3+4n)}$ при $r \rightarrow 0$, т.е. при $n \geq 2$ масса в центре растет быстрее, чем в случае черной дыры. Можно убедиться, что формулы (47), (48) справедливы и в общерелятивистском случае.

Таким образом, при достаточно плоском начальном распределении плотности бездиссипативного вещества в сферически-симметричном случае его нелинейное сжатие приводит к образованию черной дыры в момент первичной особенности. При обычном невырожденном начальном распределении (29) черная дыра не образуется.

4.4. Общий случай

Наконец, рассмотрим решение системы (28) с начальными условиями (29), (30) общего вида. Введем параметры ε_1 и ε_2 , характеризующие отклонение от сферической симметрии:

$$\varepsilon_1 = \frac{a-b}{a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a-c}{a}.$$

Параметры ε_1 и ε_2 меняются в пределах

$$0 \leq \varepsilon_1 \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon_2 \leq 1.$$

В силу условия $a \geq b \geq c$ всегда $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$.

Рассмотрим вначале случай, не сильно отличающийся от сферически-симметричного [28]:

$$\varepsilon_1 \ll 1, \quad \varepsilon_2 \ll 1.$$

Систему уравнений (28) при этом удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} + \mathbf{F} - \tilde{\mathbf{F}} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{F} &= \rho, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь градиент потенциала $\nabla \psi$ представлен как разность сил $\mathbf{F} - \tilde{\mathbf{F}}$. Сила $\tilde{\mathbf{F}}$ пропорциональна малым параметрам ε_1 и ε_2 . В сферически-симметричном случае $\tilde{\mathbf{F}} = 0$.

Пренебрегая в первом приближении силой $\tilde{\mathbf{F}}$ и вводя обозначения

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{\xi} U(\xi, t), \quad \mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{\xi} B(\xi, t), \quad (50)$$

из системы (49) получаем

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{U}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 B) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + B = 0, \quad (51)$$

где ξ —эллипсоидальные координаты, определенные согласно (29).

Система уравнений (51) аналогична сферически-симметричной системе (43), где радиус r заменен на переменную ξ . Ввиду этого решение системы (51) известно: оно в точности соответствует решению (44) при замене $r \rightarrow \xi$. Единственное отличие состоит в том, что $\operatorname{rot} \mathbf{F}$, как следует из (50), теперь не равен нулю в меру малости параметров ε_1 , ε_2 . Чтобы учесть момент импульса, в (49) была введена сила $\tilde{\mathbf{F}}$ такая, что $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}} = 0$. Сила $\tilde{\mathbf{F}}$ полностью вычитает роторную часть из силы \mathbf{F} .

Учтем теперь наличие силы $\tilde{\mathbf{F}}$. Используя решение системы (51), представим скорость в виде

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{\xi} U(\xi, t) + \mathbf{v}. \quad (52)$$

Подставляя (52) в (49), учитывая, что $[\mathbf{r}, \nabla \xi] \sim \varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$, и бера ротор от первого уравнения, с точностью до $o(\varepsilon_1^2)$, $o(\varepsilon_2^2)$ получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \operatorname{rot} \left[\frac{\mathbf{r}}{\xi} U, \mathbf{v} \right] - \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{F}}, \quad (53)$$

где $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, $\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{r}, \nabla(B/\xi)]$.

Решение линейного уравнения (53) с начальными условиями (29), (30) можно выразить через решение системы (51). Оно имеет простой вид:

$$\omega = - \left[\mathbf{r}, \nabla \frac{U}{\xi} \right], \quad (54)$$

в чем легко убедиться после прямой подстановки (54) в (53) и выполнения нескольких векторных операций. Как видно из (54), величина $|\omega|$ всегда имеет порядок $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$. Так, на момент особенности при $t = t_g^{(1)}$, когда, согласно (46), радиальная скорость V_r имеет вид

$$V_r = -(2\beta)^{1/2} \left(\frac{r}{a}\right)^{1/7},$$

поперечные к радиусу \mathbf{r} скорости \mathbf{u}_\perp остаются малыми в том же порядке. Действительно, из (54) имеем

$$\begin{aligned} u_{x\perp} &= \frac{3}{2} V_r \frac{x}{r} (\varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 z^2), \\ u_{y\perp} &= \frac{3}{2} V_r \frac{y}{r} \varepsilon_1, \quad u_{z\perp} = \frac{3}{2} V_r \frac{z}{r} \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (55)$$

Из (55) видно, что вблизи особенности поперечные компоненты скорости не равноправны. Это означает асимметрию сжатия. Наименьшую скорость приобретает движение вдоль наибольшей полуоси начального эллипсоида a . Вблизи особенности, как следует из (55), этой скоростью можно пренебречь.

Выясним, вдоль какого направления скорость сжатия максимальна. Для этого введем функцию

$$g = \frac{V^2}{V_r^2} = 1 + \frac{9}{4} \varepsilon_1^2 \frac{y^2}{r^2} + \varepsilon_2^2 \frac{z^2}{r^2}, \quad (56)$$

причем $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, поскольку $a > b > c$. Переписывая соотношение (56) в полярных координатах, находим точки экстремумов функции $g(\theta\varphi)$:

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad \cos^2 \varphi = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}. \quad (57)$$

Последнее равенство в (57) невозможно, так как $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Легко видеть поэтому, что $g_{\max} = 1 + \varepsilon_2^2$ достигается при $\theta = 0$. Таким образом, наибольшая скорость достигается вдоль оси z , т.е. вдоль наименьшей оси начального эллипсоида. Этот факт находится в полном соответствии с результатами работы [23], согласно которой наиболее сильное сжатие происходит вдоль наименьшей из осей начального эллипсоида.

Поперечная скорость \mathbf{u}_\perp определяет плотность момента импульса газа \mathbf{m} относительно центра неоднородности, так как

$$\mathbf{m} = [\mathbf{r}, \mathbf{u}] = [\mathbf{r}, \mathbf{u}_\perp].$$

При этом в силу закона сохранения момента импульса полный (интегральный) момент импульса \mathbf{M} , естественно, всегда остается равным нулю. Однако средний квадрат момента импульса не сохраняется: в момент особенности он является конечной величиной, пропорциональной ε^2 . При этом для плотности квадрата момента импульса имеем

$$m^2 = \frac{9}{4} V_r^2 r^2 \left\{ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 \left(\frac{yz}{r^2} \right)^2 + \varepsilon_2^2 \left(\frac{xz}{r^2} \right)^2 + \varepsilon_1^2 \left(\frac{xy}{r^2} \right)^2 \right\}.$$

4.5. Область вблизи особенности. Общие замечания

Из вышеизложенного видно, что развитие во времени нелинейного решения системы (28) через конечное время приводит к возникновению особенности. Для дальнейшего описания динамики системы необходимо дополнить уравнение (28) правилами прохождения особенности. Последние определяются физическими свойствами рассматриваемой системы.

Действительно, уравнения (28) в эйлеровом приближении равным образом описывают гидродинамику как обычного (барионного) вещества, так и бездиссипативного (темного) вещества. Однако за особенностью они

принципиально различаются. В обычном газе доминирующую роль в точке особенности и за ней играют диссипативные процессы. Диссипация, пропорциональная высшим производным скорости до возникновения особенности, не существенна, однако в точке особенности градиент скорости $|\nabla \mathbf{V}| \rightarrow \infty$ и она начинает играть доминирующую роль.

Благодаря диссипации движение остается всегда однопотоковым и описывается уравнениями (28). Последние дополняются сильными разрывами (ударными волнами), в которых осуществляется диссипация энергии, а также изменением температуры, приводящим к изменению давления газа, нагрев которого происходит за счет диссипации на ударных волнах [32].

Иная картина имеет место в случае полностью бездиссипативного (темного) вещества. Здесь диссипации нет, так что возможны любые градиенты скорости. Более того, здесь возможны и особые макроскопические течения, когда в одной и той же точке пространства \mathbf{r} идут несколько невзаимодействующих потоков с различными скоростями $\mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t)$. Именно к появлению многопоточных течений и приводят прохождение первичной особенности джинсовской неустойчивости в бездиссипативном веществе.

5. Многопоточные течения

Для описания многопоточных течений естественно воспользоваться кинетической системой уравнений (7). При этом под $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ мы будем понимать функцию распределения потоков вещества в пространстве скоростей. Иначе говоря, если имеется один поток, то функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ определена согласно (8). Если же имеется n потоков, то

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t)). \quad (58)$$

Подчеркнем, что в основе перехода к кинетическому описанию (7), (58) лежит эквивалентность гравитационной и инертной масс: только вследствие этой эквивалентности член $(\partial \psi / \partial \mathbf{r}) \partial f / \partial \mathbf{v}$, описывающий взаимодействие с полем в (7), не зависит от плотности каждого из потоков ρ_i [26].

Действительно, хотя силы гравитации, действующие на каждый из потоков, пропорциональны его плотности ρ_i (гравитационная масса), но силы инерции тоже пропорциональны плотности ρ_i (инертная масса). В результате плотность ρ_i из уравнения (7) выпадает. Благодаря этому кинетическое уравнение (7) для совокупности потоков, имеющих разные плотности ρ_i , принимает точно такую же форму, что и обычное кинетическое уравнение для системы одинаковых частиц.

5.1. Решение вблизи особенности. Плоский одномерный случай

Перейдем к исследованию поведения решения вблизи особенности в одномерном случае. Для этого, как уже указывалось, вместо системы уравнений (28) воспользуемся более общей кинетической системой (7), (58). До точки особенности $t = t_c = (2/\rho_0)^{1/2}$ течение однопоточковое и справедливо решение (36).

В кинетической системе (7), (58) решение можно представить в виде (8) с параметрами $\rho(x, t)$, $V(x, t)$, определенными согласно (36), (41). Поэтому, используя (8), (41), в точке особенности $t = t_c$ имеем

$$\begin{aligned} f(x, v, t)_{t=t_c} &= \rho_1 x^{-2/3} \delta(v + v_1 x^{1/3}), \\ \rho_1 &= \rho_0 \left(\frac{a}{3}\right)^{2/3}, \quad v_1 = (2\rho_0)^{1/2} (3a^2)^{1/3}. \end{aligned} \quad (59)$$

Решение (59) справедливо, разумеется, лишь при $x \ll a$.

Рассмотрим теперь решение непосредственно после особенности, т.е. при $\tau > 0$, где $\tau = t - t_c$, $\tau \ll t_c$. Учтем, что в интересующей нас области $x \ll a$ кинетическая энергия потока $K = v^2/2$ значительно больше потенциальной:

$$K = \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} v_1^2 x^{2/3}, \quad \psi = \frac{1}{4} \rho_0 a^2 \left(\frac{3x}{a}\right)^{4/3}.$$

Это означает, что влияние потенциала в кинетическом уравнении малосущественно, так что в первом приближении им можно пренебречь. Тогда решение уравнения (7) имеет простой вид:

$$f(x, v, \tau) = f(x - v\tau, v, 0). \quad (60)$$

Из (59), (60) следует, что

$$f(x, v, \tau) = \rho_1 (x - v\tau)^{-2/3} \delta(v + v_1(x - v\tau)^{1/3}). \quad (61)$$

Важно, что аргумент δ -функции при $|x| > x_c$ имеет один корень, а при

$$|x| < x_c, \quad x_c = \frac{2}{3\sqrt{3}} (v_1 \tau)^{3/2} \quad (62)$$

он имеет три корня. Это означает, что в окрестности особенности при $\tau > 0$ возникает трехпотоковое течение. Функцию распределения (61) можно переписать при этом в виде (58):

$$f(x, v, \tau) = \sum_{i=1}^3 \rho_i(x, \tau) \delta(v + v_i(x, \tau)), \quad (63)$$

где величина

$$\rho_i = \rho_1 (x - v_i(\tau))^{-2/3} \left| \frac{d\eta(v_i)}{dv_i} (v_i) \right|^{-1}$$

по своему смыслу является плотностью i -го потока, $v_i = v_i(x, \tau)$ — корни уравнения

$$\eta(v_i) = v_i + v_1(x - v_i \tau)^{1/3} = 0. \quad (64)$$

Соотношение (58) вместе с уравнением (7) эквивалентно введению многопотоковой гидродинамики. Действительно, используя представление функции распределения в виде (58), из (7) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_i) &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(v_i \frac{\partial}{\partial x} \right) v_i + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi &= \sum_i \rho_i. \end{aligned} \quad (65)$$

Важное значение в уравнениях (65), (7) имеют каустики — поверхности, на которых происходит слияние или размножение потоков (корней уравнения (64)). Ими являются точки x_c .

Действительно, как следует из (61), при $|x| > x_c$ — три потока, при $|x| < x_c$ — один. В точках x_c производные сливающихся скоростей v_1 и v_2 имеют особенности

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=x_c} \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} \Big|_{x=x_c} \rightarrow +\infty. \quad (66)$$

Плотности потоков ρ_1 и ρ_2 , как и вторая производная поля $\partial^2 \psi / \partial x^2$ в точках $\pm x_c$, также обращаются в бесконечность. Однако сам потенциал и его первая производная остаются непрерывными:

$$\begin{aligned} \rho_1 \Big|_{x=x_c} = \rho_2 \Big|_{x=x_c} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_c} = \\ &= C(x_c, \tau) (x_c(\tau) - x)^{-1/2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow x_c-0} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow x_c+0}, \quad \psi(x_c + 0) = \psi(x_c - 0). \end{aligned} \quad (67)$$

Условия (66), (67) выписываются в каждой точке слияния потоков. Они составляют полную систему граничных условий к уравнениям многопотоковой гидродинамики (65).

5.2. Численное моделирование

Уравнения (7) интегрировались численно методом частиц в ячейках [33]. В численном расчете использовалось $(1-2) \cdot 10^5$ частиц. Результаты решения представлены на рис. 1–3. На рис. 1 показано распределение плотности частиц $\rho(x)$ в момент возникновения особенности $t = t_c$. Видно хорошее согласие численного расчета (точки) с аналитической формулой (41).

Рисунок 2 демонстрирует образование трехпотокового течения. Ясно видны каустические особенности (66) и ход плотности (67) вблизи каустик. Дальнейшая эволюция приводит к тому, что под действием поля

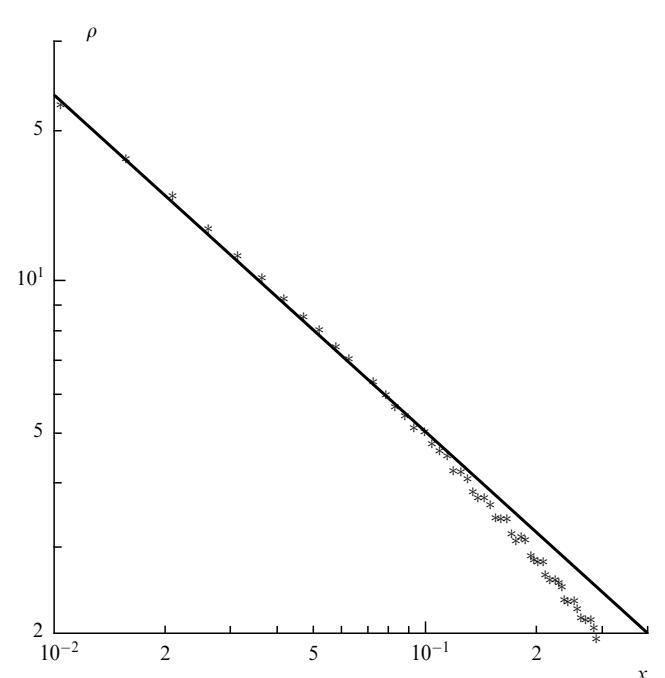


Рис. 1. Распределение плотности $\rho(x)$ в момент особенности

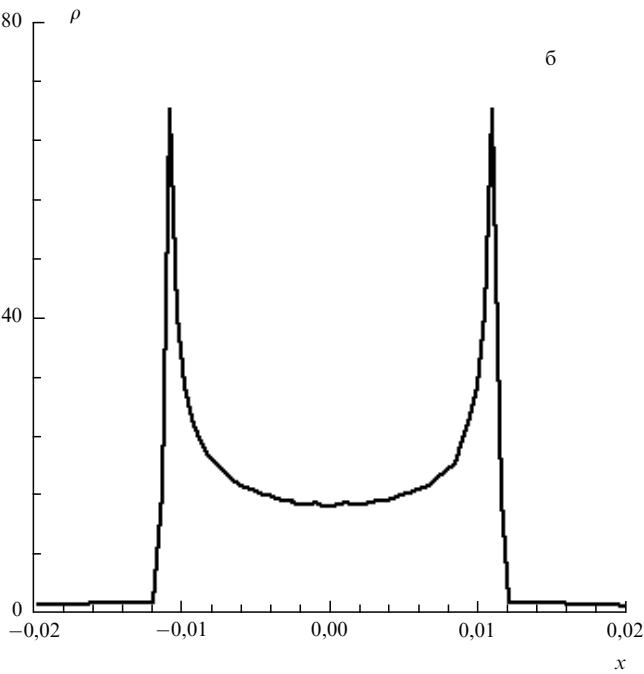
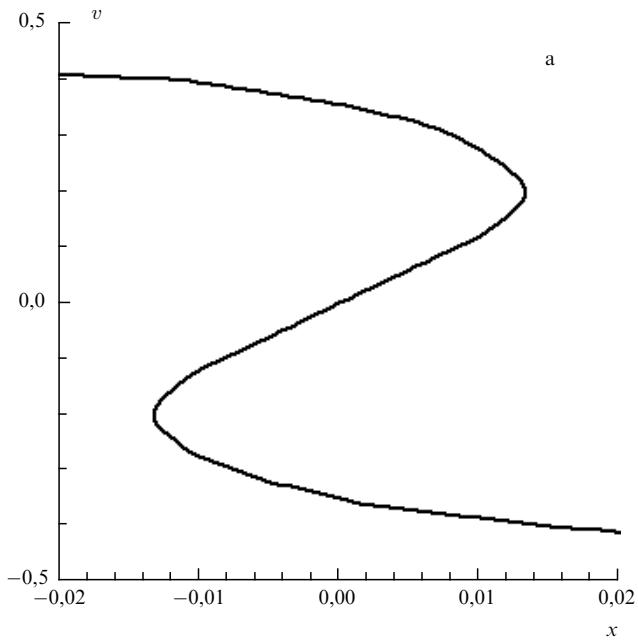


Рис. 2. (а) Возникновение области трехпотокового течения; (б) распределение плотности $\rho(x)$ в трехпотоковом течении

центральный поток постепенно затормаживается, останавливается, начинает движение в противоположном направлении и в некоторый момент времени опрокидывается, т.е. в центре распределения вновь возникает особенность, аналогичная (41). После этого вблизи центра образуется зона пятипотокового течения.

Возникают, естественно, и каустики, разделяющие зоны пятипотокового и трехпотокового течений. В $(x - v)$ -пространстве течение приобретает вид закрученной к центру спирали (рис. 3а). При этом на каждой из каустик плотность по-прежнему имеет особенность (67) (рис. 3б). В дальнейшем спираль закручивается все сильнее, число потоков вблизи центра возрастает. Области с разным числом потоков разделены каустиками. В

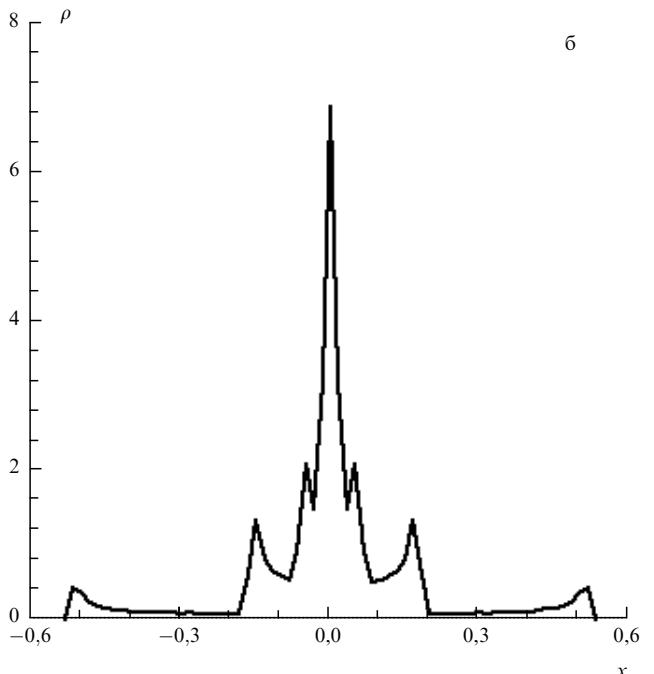
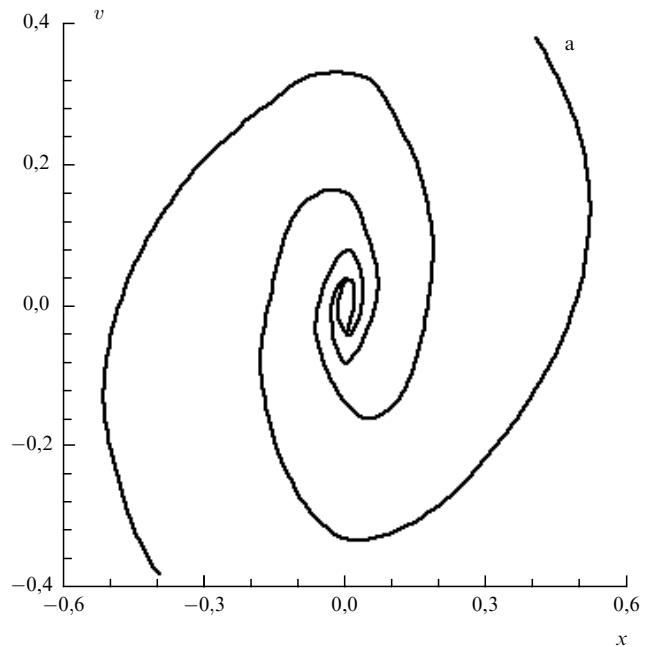


Рис. 3. (а) Фазовое пространство пятипотокового течения; (б) распределение плотности $\rho(x)$ в пятипотоковом течении

результате функция плотности сильно изрезана, интеграл же от плотности m и потенциал ψ при этом остаются достаточно гладкими функциями (67).

Рассмотрим теперь состояние, которое устанавливается в процессе длительного размешивания при $t \rightarrow \infty$. Как указывалось выше, на момент первичной особенности кинетическая энергия вблизи особенности значительно выше потенциальной. В результате здесь нет локального захвата вещества, так что сразу после первичного опрокидывания особенность в центре исчезает (рис. 2б) и распределение плотности приобретает в окрестности точки $x = 0$ гладкий характер.

Естественно было бы ожидать, что и после длительного размешивания возникает аналогичное гладкое рас-

пределение плотности:

$$\rho = \rho_* \left[1 - \left(\frac{x}{a_*} \right)^2 \right], \quad (68)$$

отличающееся от начального распределения плотности лишь изменением констант ρ_* и a_* . Однако это не так.

Численный расчет показывает, что при длительном времени счета наблюдается концентрация вещества вблизи центра. При этом в силу соотношений (67) плотность $\rho(x)$ сильно флюктуирует. Поэтому более ясно эта концентрация видна на кривой интегральной плотности, т.е. массы вещества,

$$m(x) = \int_0^x \rho(x_1) dx_1,$$

показанной на рис. 4. При значениях $t \geq 10t_c$ кривая, представленная на этом рисунке, практически перестает меняться: она показывает, таким образом, установившееся распределение интегральной плотности. Видно, что она существенно отличается от зависимости $m(x) = \rho_* x$, следующей из (68).

Из рис. 4 видно также, что в установившемся состоянии средняя плотность $\bar{\rho}(x) = dm/dx$ сильно возрастает при приближении к центру ($x = 0$). Кроме того, в этой области усиливаются флюктуации плотности ρ , что говорит о сгущении каустических особенностей и указывает на значительное отличие потенциала среднего поля от закона $\psi \propto x^2$ при $x \rightarrow 0$, следующего из (68).

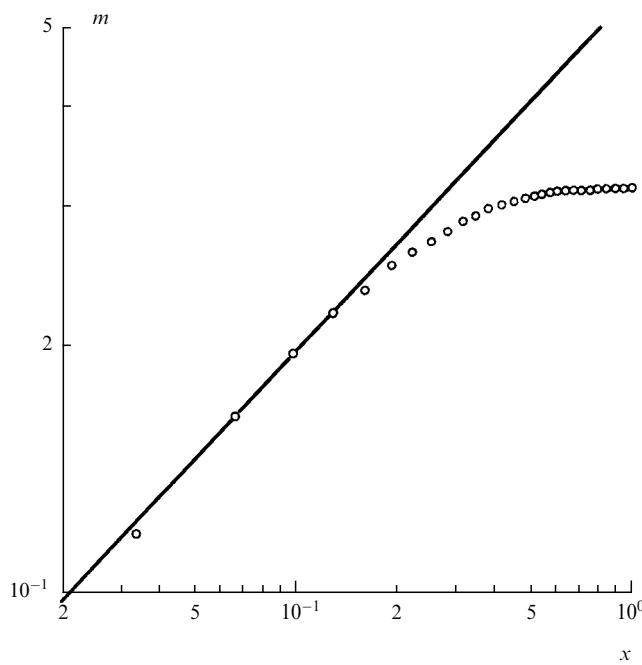


Рис. 4. Интегральная плотность $m(x)$ на временах $t > 10t_c$

5.3. Адиабатическое приближение

Для выявления характера наблюдаемых в численном решении особенностей, необходимо провести аналитический анализ процесса многопотокового размешивания при больших временах t . При этом вместо переменной v в

уравнение (7) удобно ввести новую переменную — адиабатический инвариант

$$I = \int v dx = \int_{-x_m}^{x_m} [2(E - \psi)]^{1/2} dx. \quad (69)$$

Здесь $E = v^2/2 + \psi$ — энергия потока, точки отражения $\pm x_m$ определены условием $E = \psi(x_m)$. При заданном потенциале соотношение (69) устанавливает однозначную связь между энергией E и инвариантом I :

$$E = E(I).$$

Переходя в соответствии с (69) в уравнениях (7) к новым переменным, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \pm [2(E - \psi)]^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x} + \\ + \int_{-x_m}^{x_m} \frac{\partial \psi(x, t)/\partial t - \partial \psi(x_1, t)/\partial t}{[2(E - \psi(x_1, t))]^{1/2}} dx_1 \frac{\partial f}{\partial I} = 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \int_{\psi}^{E_m} \frac{f}{[2(E - \psi)]^{1/2}} dE. \end{aligned} \quad (70)$$

Рассмотрим далее приближение, которое назовем адиабатической моделью. Суть этой модели в следующем. Процесс размешивания состоит в осцилляциях потоков и возникновении многопотоковых течений. При осцилляциях сохраняется адиабатический инвариант I , если они происходят на фоне достаточно медленно меняющегося потенциала. Сохраняется при этом и функция распределения по адиабатическим инвариантам $f(I)$, что следует непосредственно из кинетического уравнения (70).

Границей области многопотоковости (области размешивания) является первая каустика, возникающая сразу после первоначальной особенности. В адиабатической модели мы принимаем, что достаточное размешивание, сопровождающееся сохранением адиабатического инварианта I , возникает сразу после прохождения первой каустики.

Таким образом, в области, ограниченной первой каустикой, функция распределения $f(I)$ сохраняется. Учитывая закон сохранения массы вещества, протекающего через первую каустику, имеем

$$\frac{dm}{dt} = \rho(x_c) \frac{dx}{dt} = f(I_c) \frac{dI_c}{dt}, \quad (71)$$

где x_c — координата каустики, I_c — значение адиабатического инварианта на каустике. Соотношения (41), (69) при этом дают

$$I_c = \int_0^{x_c} u dx = \frac{3}{4} V_1 x_c^{4/3}. \quad (72)$$

Определяя x_c из (72), с помощью (71), (41) находим вид функции распределения $f(I_c)$:

$$f(I_c) = \rho(x_c) \frac{dx_c}{dI_c} = \left(\frac{3}{4} \right)^{3/4} \frac{\rho_1}{V_1} \left(\frac{I_c}{V_1} \right)^{-3/4}. \quad (73)$$

Ввиду сохранения функции распределения по адиабатическим инвариантам при любом значении I имеем

$$f(I) = f(I_c)|_{I_c=I}. \quad (74)$$

При этом уравнение для потенциала поля записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \int_{\psi}^{E_m} \frac{f(I(E))}{(2(E - \psi))^{1/2}} dE, \quad (75)$$

где зависимость $I(E)$ определена согласно (69).

Система уравнений (70), таким образом, в адиабатическом приближении принимает вид (69), (73)–(75). Ее решение при $x \rightarrow 0$ естественно искать в степенном виде:

$$\psi = \psi_1 x^\alpha.$$

Тогда, согласно (69),

$$I = C_0 \frac{E^{1/2+1/\alpha}}{\psi_1^{1/\alpha}}, \quad C_0 = 2^{1/2} \int_0^1 (1 - y^\alpha)^{1/2} dy. \quad (76)$$

Из соотношений (73), (74) находим

$$f = \left(\frac{3}{4C_0} \right)^{3/4} \frac{\rho_1}{V_1} \frac{\psi_1^{1/2}}{V_1} \left(\frac{E}{\psi_1} \right)^{-(3\alpha+6)/8\alpha}. \quad (77)$$

Подставляя (77) в (75), получаем окончательно искомое стационарное решение:

$$\alpha = \frac{10}{7}, \quad \psi_1 = V_1^2 \left[\frac{49}{30} C_1 \left(\frac{3}{4C_0} \right)^{3/4} \frac{\rho_1}{V_1^2} \right]^{8/7}, \quad (78)$$

где

$$C_1 = 2^{-1/2} \int_1^\infty y^{-0.9} (y - 1)^{-1/2} dy,$$

$$C_0 = 2^{1/2} \int_0^1 (1 - y^{10/7})^{1/2} dy.$$

Решение (76)–(78) является полностью размешанным, стационарным, так как функция распределения в нем зависит лишь от энергии потоков E .

Итак, из адиабатической модели видно, что в результате многопотокового размешивания возникает стационарное распределение с особенностью средней плотности в точке $x = 0$. Действительно, при $\alpha = 10/7$ имеем

$$\bar{\rho} = \frac{30}{49} \psi_1 x^{-4/7}. \quad (79)$$

Особенность проявляется и в стационарной функции распределения (77):

$$f \propto E^{-9/10}. \quad (80)$$

Закономерность (79), как отмечалось выше, удобнее наблюдать на кривой $m(x)$, показанной на рис. 4. Видно хорошее совпадение при $x \rightarrow 0$ зависимости (79) с результатами численного моделирования. Реальная функция распределения, согласно (58), состоит из набора δ -функций, поэтому она сильно флюктуирует. Однако и здесь имеется достаточно хорошее согласие численных расчетов с закономерностью (80) [29].

Обсудим теперь наше адиабатическое приближение. Мы видим, что решение (79), (80) имеет скейлинговый характер, реальные флюктуации потенциала невелики (рис. 5) и, кроме того, период осцилляций потоков

$$T(E) = \frac{\partial T}{\partial E} = \frac{6}{5} C_0 \psi_1^{10/7} E^{1/5} \quad (81)$$

стремится к нулю при $E \rightarrow 0$. Поэтому при $E \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) адиабатическое решение является асимптотически точным. Следовательно, оно верно и при всех $E \ll 1$, что и подтверждает сопоставление с численными результатами.

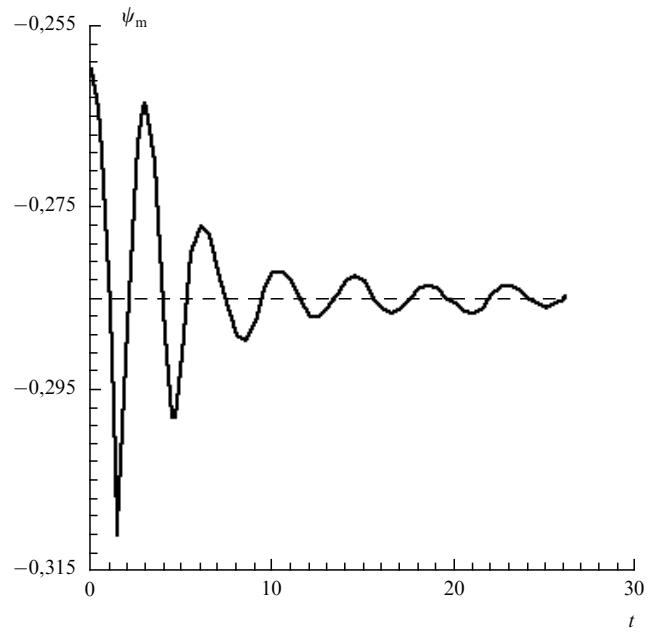


Рис. 5. Зависимость минимума потенциала от времени

Соотношение (81) и скейлинговый характер решения (79), (80) по сути дела являются обоснованием использованного нами адиабатического приближения.

5.4. Сгущение каустик

Убывание периода колебаний (81) с энергией означает, что при $E \rightarrow 0$, т.е. вблизи дна потенциальной ямы, каустики образуются все чаще и чаще. Выясним закон сгущения каустик. Согласно (61), (63) процесс размножения каустик эквивалентен появлению новых корней у δ -функций. Функция распределения в любой момент времени t сохраняет общий вид:

$$f = \rho(x, t) \delta(v - V(x_0, v, t)),$$

где $\tau = t - t_0$, t_0 — начальный момент времени, x_0 — начальная точка траектории, являющаяся интегралом движения.

Предположим, что движение происходит асимптотически в размешанном потенциале. Тогда

$$\tau = \int_{x_0}^x (\tilde{v}^2 - 2\psi_1 x_1^{10/7})^{-1/2} dx_1, \quad \tilde{v}^2 = 2E. \quad (82)$$

При $\tau = 0$, согласно (41), имеем

$$V = -V_1 x_0^{1/3}.$$

Вводя в (82) вместо переменной x переменную $\cos \theta = (2\psi_1/\tilde{v}^2)^{1/2}x^{5/7}$, получаем

$$\tilde{v}\tau = \left(\frac{\tilde{v}^2}{2\psi_1}\right)^{7/10} \int_b^a \cos^{2/5} \theta d\theta, \quad (83)$$

где $a = \arccos [(2\psi_1)^{1/2}x_0^{5/7}/\tilde{v}]$, $b = \arccos [(2\psi_1)^{1/2}x_0^{5/7}/\tilde{v}]$.

Ввиду симметрии картины относительно переменных $v - x$ закономерность появления новых корней, т.е. новых витков спирали, удобнее наблюдать на оси v . Для нахождения точек v_n положим в (83) $x = 0$, т.е. $b = \pi/2$. Тогда на больших временах при $\tau \rightarrow \infty$ решение (83) имеет вид

$$\frac{\pi}{2} + (2\psi_1)^{7/10} \frac{\tau}{q_0 v^{2/5}} = \arccos \left[(2\psi_1)^{1/2} \frac{x_0^{5/7}}{v} \right], \quad (84)$$

где

$$q_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2/5} \theta d\theta.$$

Выражая x_0 через v при помощи соотношений (82), (84), приходим к трансцендентному уравнению

$$v^{8/5} = V_1^3 (2\psi_1)^{-7/10} \sin^{7/5} \left\{ (2\psi_1)^{7/10} \frac{\tau}{q_0 v^{2/5}} \right\}. \quad (85)$$

На больших временах ($t \rightarrow \infty$) решение уравнения (85) практически совпадает с нулями синуса:

$$(2\psi_1)^{7/10} \frac{\tau}{q_0 v_n^{2/5}} = \pi n.$$

Таким образом, последовательность корней v_n подчиняется закономерности

$$v_n \propto \left(\frac{\tau}{n} \right)^{5/2}, \quad (86)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$.

Максимальное число каустик N можно оценить из (85). Так как синус всегда меньше единицы, находим

$$N \geq \tau (2\psi_1)^{7/10} V_1^{3/4}. \quad (87)$$

Видно, что, согласно (87), число каустик растет пропорционально времени τ .

Относительное расстояние между каустиками $\Delta v_n/v_n$ уменьшается с ростом N . Действительно, из (86) имеем

$$\frac{\Delta v_n}{v_n} = \frac{5}{2n}, \quad (88)$$

т.е., согласно (88), измельчение масштаба (а следовательно, и наименьшего расстояния между каустиками) идет по закону

$$\frac{\Delta v_N}{v_N} = \frac{5}{2N} \propto \frac{1}{\tau}. \quad (89)$$

В силу вышесказанного соотношения, аналогичные (86)–(89), выполняются и для координат каустик x_n .

Вспомним, что на каждой каустике плотность обращается в бесконечность (см. (67)). Таким образом, мы видим, что с течением времени истинная картина распределения плотности становится все более и более изрезанной, причем степень изрезанности возрастает с приближением к центру особенности при $x \rightarrow 0$.

5.5. Собственные колебания

Выше исследовалась лишь мелкомасштабные каустические волны. Вместе с тем установившееся кинетическое состояние (80) можно рассматривать как равновесную динамическую систему. Отклонение от положения равновесия, каким является, в частности, начальное состояние (32), должно приводить к возбуждению собственных колебаний системы.

Для описания собственных колебаний представим функцию распределения и потенциал поля в виде

$$f = f_0(E) + f_1, \quad \psi = \psi_0(x) + \varphi_1, \quad (90)$$

где f_0 и ψ_0 — установившиеся функция распределения и потенциал поля, f_1 и φ_1 — отклонения функции распределения и потенциала от равновесия.

Подставляя (90) в (7), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dv. \end{aligned} \quad (91)$$

Из системы (91) естественно выделяется линейная часть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dv. \end{aligned} \quad (92)$$

Уравнения (92) описывают собственные моды линейных колебаний. Первая основная мода видна в осцилляциях потенциала поля, представленных на рис. 5. При этом период и, соответственно, угловая частота первой моды равны

$$T = 4, 2, \quad \omega = 1, 50.$$

Ввиду отсутствия диссипации в системе линейные колебания, естественно, должны быть незатухающими. Вместе с тем из рис. 5 ясно видно убывание амплитуды колебаний, вызванное тем, что амплитуда рассматриваемых колебаний конечна. Ее убывание является следствием нелинейного взаимодействия собственных мод.

Для описания этого процесса разложим функцию f_1 по собственным кет-векторам $|g_n(x, v)\rangle$ системы (92):

$$f_1 = \sum_n \exp(\lambda_n t) A_n(t) |g_n(x, v)\rangle, \quad (93)$$

где λ_n — собственные числа системы (92), $A_n(t)$ — амплитуда, соответствующая собственной моде $|g_n(x, v)\rangle$. Подставляя выражение (93) в (91) и умножая на соответствующий бра-вектор уравнения (92), получаем уравнение для амплитуды l -й моды:

$$\frac{dA_l}{dt} = \sum_{m,n} \exp[(\lambda_n + \lambda_m - \lambda_l)t] A_n A_m K_{l,m,n}, \quad (94)$$

где

$$K_{l,m,n} = \langle g_l | \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 g_n(x_1, v_1) \frac{\partial}{\partial v} | g_m \rangle.$$

Уравнение (94) для A_l позволяет найти асимптотический закон затухания амплитуд при больших временах t . Учитывая, что в системе все собственные числа λ_n чисто мнимые, из (94) при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{dA_l}{dt} = - \sum_m A_{l-m} A_m K_{l,m,l-m}. \quad (95)$$

Вид уравнения (95) для амплитуд мод является естественным следствием квадратичного характера нелинейности в системе (91).

Уравнение (95) имеет очевидное решение:

$$A_l = \frac{C_l}{t}, \quad (96)$$

причем константы C_l удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_m \{ C_{l-m} C_m K_{l,m,l-m} + \delta_{m,l} C_m \} = 0.$$

Таким образом, мы видим, что при больших временах амплитуды собственных мод убывают как $1/t$.

Вполне естественным является соответствие между законом затухания собственных мод (96) и законом дробления масштаба каустическими волнами (89). Дело в том, что убывание амплитуд мод вызвано непрерывным перетеканием энергии в высшие гармоники, которое как раз и происходит за счет каустического дробления масштаба. В этом смысле процесс нелинейной релаксации вполне аналогичен нелинейному затуханию Ландау для колебаний плазмы [34]. Наиболее медленно затухает основная мода, о динамике которой можно судить по зависимости от времени минимума потенциала, представленной на рис. 5. Видно, что закон $1/t$ достаточно хорошо подтверждается численным расчетом.

5.6. Изменение энтропии

Поскольку рассматриваемая система консервативна, то как затухание мод, так и измельчение каустик означают лишь перекачку энергии в более мелкие масштабы. В этом смысле полезно рассмотреть полную энтропию системы

$$S = \int f \ln \frac{e}{f} dv dx. \quad (97)$$

Как следует из (7), (58), (97), в начальном состоянии полная энтропия равна $-\infty$. Динамический процесс (7) не может изменить энтропии. Поэтому в любой момент времени энтропия должна равняться $-\infty$. В справедливости этого утверждения нетрудно убедиться, вспомнив, что функция распределения всегда может быть представлена в виде (58). Вместе с тем, если рассмотреть размешанное состояние (80), то в нем, как вытекает из (97), энтропия имеет конечное значение

$$S_f = \frac{Q_0 \psi_m^{\beta+1}}{\beta+1} \left(\ln Q_0 + \beta \ln \psi_m - \frac{\beta}{\beta+1} \right).$$

Здесь, согласно (80), $\beta = 9/10$, ψ_m — глубина потенциальной ямы,

$$Q_0 = \left(\frac{3}{4C_0} \right)^{3/4} \frac{\rho_1}{V_1} \frac{\psi_1^{1/2}}{V_1} \psi_1^{9/10}.$$

Таким образом, вся энтропия в размешанном состоянии сосредоточена не в основном усредненном распределении, а в гигантских мелкомасштабных флуктуациях, определенных наличием бесконечного множества каустик. В этом смысле можно говорить, что релаксация системы к размешанному кинетическому состоянию за счет рассмотренного выше чисто динамического процесса является неполной: в отсутствие диссипации в системе всегда сохраняются неравновесные (гигантские) флуктуации.

6. Сферически-симметричная сингулярность

6.1. Сферически-симметричный случай

Рассмотрим процесс сжатия сферически-симметричного сгустка после особенности. Проанализируем вначале качественную специфику течения. Согласно (46) вблизи особенности скорость потока

$$V_r = -(2\beta)^{1/2} \left(\frac{r}{a} \right)^{1/7},$$

а потенциал гравитационного поля

$$\psi = \frac{7}{2} \beta \left(\frac{r}{a} \right)^{2/7}.$$

Отсюда видно, что кинетическая энергия потока меньше потенциальной:

$$|\psi| > \frac{V_r^2}{2}.$$

Это означает, что гравитационное поле оказывает определяющее влияние на течение газа вблизи особенности уже до момента опрокидывания $t = t_c^{(1)}$.

Чтобы оценить вид гравитационного потенциала после опрокидывания при $t > t_c^{(1)}$, вместо обычной плотности ρ удобно ввести эффективную плотность $\tilde{\rho} = r^2 \rho$, которая учитывает сферическую кумуляцию потока. Уравнения (42) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\rho} u) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial r} \right) u + \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) &= \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (98)$$

т.е. гидродинамические уравнения имеют точно тот же вид, что и в плоском случае, изменяется только уравнение Пуассона.

Если предположить, что после опрокидывания плотность $\tilde{\rho}$ в центре (при $r = 0$), как и в плоском случае, является конечной (см. рис. 2б): $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$, то, как ясно из (98), при $r \rightarrow 0$ потенциал будет иметь вид

$$\psi = \tilde{\rho}_0 \ln r. \quad (99)$$

Иначе говоря, после опрокидывания возникает бесконечно глубокая потенциальная яма. Скорость же v мала. Ясно, поэтому, что движение газа и плотность частиц вблизи особенности при $r \rightarrow 0$ полностью определяется действием поля.

Важно также, что логарифмическая потенциальная яма при временах t , близких к $t_c^{(1)}$, оказывается очень узкой. Это означает, что частота осцилляций захваченных в ней потоков велика и, как мы увидим ниже, быстро увеличивается по мере углубления в яму, т.е. при $r \rightarrow 0$. Следовательно, в окрестности центра при $t > t_c^{(1)}$ сразу возникает бесконечное множество каустических особенностей, сходящихся к точке $r = 0$. Соответственно, возникает бесконечное множество потоков. Такую структуру мы будем называть бездисипативной гравитационной сингулярностью (БГС).

6.2. Адиабатическая теория

Для описания гравитационной сингулярности естественно использовать теорию адиабатического захвата [35], поскольку изменение со временем параметров потенциальной ямы является медленным в сравнении с частотой осцилляций захваченных в ней потоков (см. (106)). Это означает, что в первом приближении функцию распределения можно представить в виде

$$f = f(E, t) = f(I), \\ I = \int_0^{r_1} V dr = 2^{2/3} \int_0^{r_1} (E - \psi)^{1/2} dr, \quad \psi(r_1, t) = E.$$

Здесь $E = V^2/2 + \psi$ — энергия, I — адиабатический инвариант, $r_1 = r_1(E, t)$ — точка отражения.

Проделывая далее вычисления, совершенно аналогичные (70)–(75) для плоского случая, приходим к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению для потенциала [26]:

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} + \frac{d\tilde{\psi}}{dx} = \int_{\tilde{\psi}}^0 F^{1/8}(y) (y - \tilde{\psi})^{-1/2} dy, \\ F(y) = \int_{-\infty}^{x_1(y)} (y - \tilde{\psi}(x))^{1/2} e^x dx, \quad \tilde{\psi}(x_1) = y. \quad (100)$$

Здесь $x = \ln(r/r_0(t))$, $r_0(t)$ — координата первой каустики, $F(y)$ — функция распределения потоков по энергиям,

$$y = \frac{E}{\psi_1 \tau^{1/3}}, \quad \tau = \frac{t - t_c^{(1)}}{t_c^{(1)}}, \quad \psi(x, \tau) = \psi_1 \tau^{1/3} \tilde{\psi}(x).$$

Исследуем асимптотическое поведение функции $\tilde{\psi}$ при $x \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow 0$. Сделаем предположение (которое будет обосновано в дальнейшем), что функция $F(y)$ достаточно быстро убывает при $y \rightarrow \infty$, так что сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^0 F^{1/8}(y) dy = B_0.$$

Тогда уравнение (100) при $x \rightarrow -\infty$ принимает вид

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dx^2} + \frac{d\tilde{\psi}}{dx} = \frac{B_0}{(-\tilde{\psi})^{1/2}}. \quad (101)$$

Решение уравнения (101), обращающееся в $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, есть

$$\tilde{\psi}(x) = -\left(-\frac{3}{2} B_0 x\right)^{2/3} \left\{ 1 + \frac{2}{9} \frac{\ln(-x)}{-x} + \dots \right\}. \quad (102)$$

Таким образом, при $r \rightarrow 0$ потенциал гравитационного поля

$$\tilde{\psi}(x) \propto \ln^{2/3} \frac{1}{r}. \quad (103)$$

При этом потенциал $\tilde{\psi}$ стремится к $-\infty$ при $r \rightarrow 0$. Эффективная плотность $\tilde{\rho}$ при $r \rightarrow 0$ обращается в нуль по логарифмическому закону:

$$\tilde{\rho} \propto (-x)^{-1/3} \propto \ln^{-1/3} \frac{1}{r}. \quad (104)$$

Сравнивая (103), (104) с (99), мы видим, что распределения поля $\tilde{\psi}$ и плотности $\tilde{\rho}$ вблизи особенности полностью определяются действием гравитационного поля.

Из (100), (102) нетрудно получить также асимптотику и функции распределения по энергии при $E \rightarrow -\infty$:

$$f(E, \tau) = B_1 \tau^{1/6} (-y)^{-1/32} \exp\left\{-\frac{1}{8} (-y)^{3/2}\right\}. \quad (105)$$

Функция распределения (105) экспоненциально убывает при $E \rightarrow 0$, что является, в частности, обоснованием для (101). Отметим, что, несмотря на экспоненциальный характер, распределение (105) весьма далеко от равновесного (больцмановского).

Обсудим, наконец, условие применимости адиабатического приближения, т.е. медленности изменения потенциала $\tilde{\psi}$ за период осцилляций T ,

$$p = \left| \frac{T}{2\pi\tilde{\psi}} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} \right| \ll 1. \quad (106)$$

Выполняя прямые вычисления в технике адиабат инварианта, нетрудно убедиться, что параметр p имеет вид [26]

$$p = p_0 (-y)^{1/4} \exp\left\{-(-y)^{3/2}\right\}, \quad (107)$$

где p_0 — постоянная порядка единицы, а величина y определяется в (100).

Таким образом, условие применимости адиабатического приближения (106) при достаточно больших значениях $|y|$ всегда хорошо выполнено, т.е. в окрестности дна ямы решения (103)–(105) являются асимптотически точными.

Обсудим некоторые свойства полученного решения. Средняя плотность

$$\rho \propto r^{-2} \ln^{-1/3} \frac{1}{r}, \quad (108)$$

аналогично плоскому случаю (79) имеет особенность при $r \rightarrow 0$. Отметим, что при этом истинная (неусредненная) плотность сильно изрезана каустиками (в адиабатич-

ском пределе всюду плотно), но первый интеграл

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr,$$

как и в плоском случае (см. рис. 4), гладкий и стремится к нулю при $r \rightarrow 0$.

В сферическом случае, в отличие от плоского, особенность при $r \rightarrow 0$ имеет и потенциал поля (103). Ввиду этого сразу после образования первичной особенности (46) возникает локальный захват и многопотоковое течение, причем в силу узости ямы, т.е. выполнения соотношений (106), (107), процесс размешивания и перехода к кинетическому состоянию происходит практически сразу при $t > t_c^{(1)}$, в то время как в плоском случае такое состояние возникало лишь при $t \gg t_c$.

6.3. Численное моделирование

Наряду с построением адиабатической теории, проводилось численное моделирование процесса кинетического размешивания в сферически-симметричном случае [36]. Результаты этого моделирования показаны на рис. 6–8. Видно, что на момент $t = t_c^{(1)}$ возникает особенность плотности (рис. 6, кривая 1). Потенциал же при этом имеет конечное значение (рис. 7, кривая 1). Полученные данные хорошо согласуются с точным аналитическим решением (46).

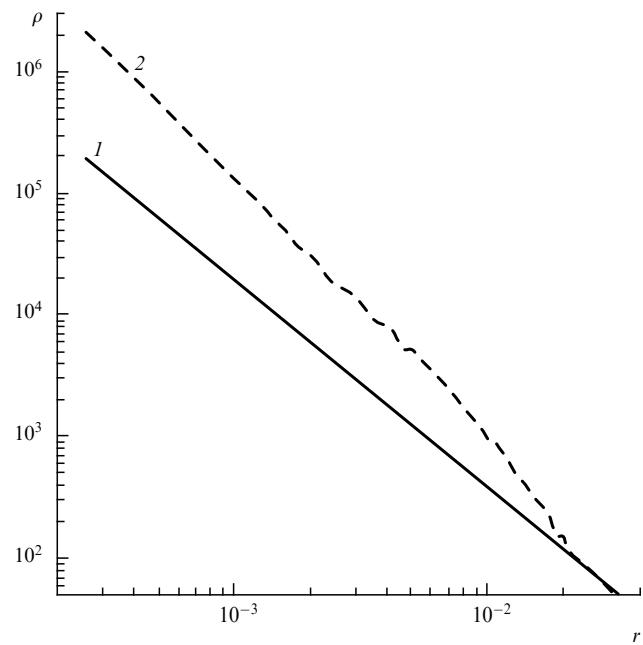


Рис. 6. Вид плотности $\rho(r)$ на момент особенности

При $\tau > 0$ в соответствии с предсказаниями адиабатической теории возникает резкий провал потенциала в центре первоначального распределения вещества (рис. 7, кривая 2). Уже при очень малых τ наблюдаются многократные отражения частиц (при $r \rightarrow 0$) от самосогласованного потенциала поля и возникает распределение плотности, близкое к закону (108) (рис. 6, кривая 2).

Поведение системы в сферически-симметричном случае существенно отличается от плоского. Сразу после возникновения особенности развивается размешанное многопотоковое состояние, характеризующееся функ-

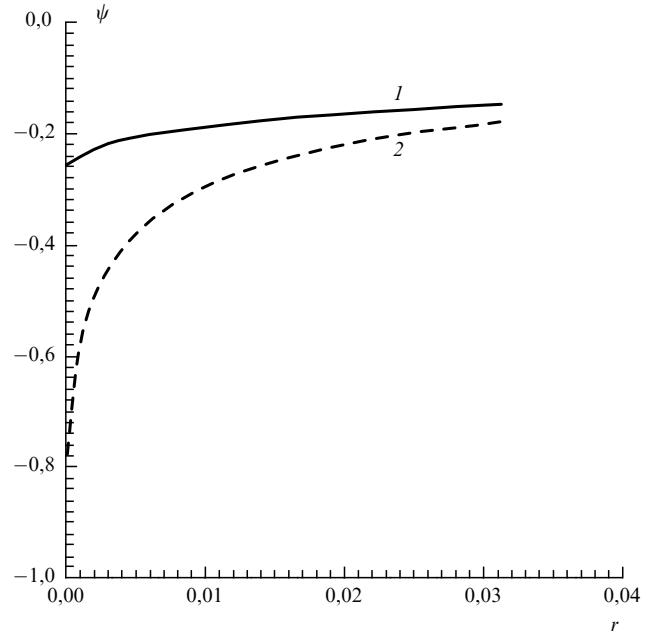


Рис. 7. Вид потенциала $\psi(r)$ на момент особенности

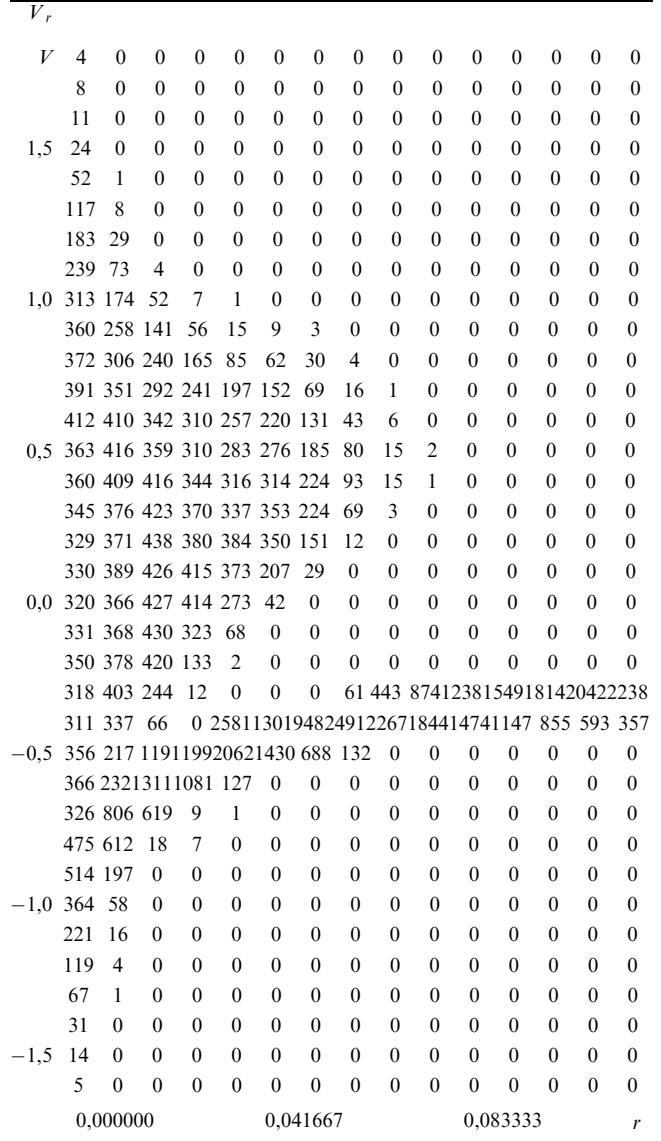


Рис. 8. Фазовая плоскость в случае сферически-симметричного сжатия

цией распределения, в которой практически невозможно выделить δ -образные пики, свойственные многопотоковым течениям (рис. 8).

Напомним, что в плоском случае функция распределения формировалась за счет последовательного уточнения потоков в центре распределения и требовалось довольно большое время для возникновения достаточно гладкой усредненной функции.

Таким образом, предсказания аналитической адиабатической теории хорошо подтверждаются в численном моделировании. Сферически-симметричное течение является, на наш взгляд, уникальной системой, позволяющей за счет динамического процесса за сколь угодно малое время после особенности образовывать кинетическое размешанное состояние. Из рис. 8 видно, как втекающий δ -образный гидродинамический поток быстро перерабатывается в широкую функцию распределения.

Плоский и сферически-симметричный случаи являются предельными для начальной задачи общего вида (28). И в том, и в другом случаях в стационаре возникает особенность плотности: различия связаны лишь с порядком особенности и временем перехода к стационару. Естественно поэтому ожидать, что и в общем случае проявятся основные черты этих двух пределов.

7. Бездиссилиптивная гравитационная сингулярность

7.1. Общий случай

Сферически-симметричный случай является вырожденным в том смысле, что все движение частиц происходит только вдоль радиуса r . Исследуем теперь эволюцию во времени особенности общего вида (55), когда, кроме радиального движения, возникают и поперечные составляющие скорости. При этом аналогично (49)–(55) параметры эллиптичности вблизи максимума первоначальной плотности будем считать малыми:

$$\varepsilon_1 = \frac{a - b}{a} \ll 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{a - c}{a} \ll 1.$$

Для дальнейшего перепишем уравнение (7) в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + p_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p_\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{p_\phi}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \\ + \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{p_\phi}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right\} \frac{\partial f}{\partial E} - \\ - 2 \left(p_\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{p_\phi}{\cos^2 \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial m^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p_\phi} = 0, \quad (109) \\ \Delta \psi = \int f dp_\phi dp_\theta dr, \end{aligned}$$

где импульсы p_r, p_θ, p_ϕ связаны со скоростями v_r, v_θ, v_ϕ соотношениями

$$v_r = p_r, \quad v_\theta = \frac{p_\theta}{r}, \quad v_\phi = \frac{p_\phi}{r \cos \theta},$$

$E = p_r^2/2 + p_\theta^2/2r^2 + p_\phi^2/(2r^2 \cos^2 \theta) + \psi$ — энергия системы, $m^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2/\cos^2 \theta$ — квадрат момента импульса, $p_\phi = m_\phi$ — по своему физическому смыслу есть момент импульса относительно оси z . При этом, как обычно, соотношения на первичной особенности (46),

(55) следует рассматривать как начальные условия для системы (109).

Обратимся теперь к соотношению (55). Поперечными к радиальной скорости v_r являются, естественно, две компоненты: u_ϕ и u_θ . Следовательно, компоненты $u_{\perp x}, u_{\perp y}, u_{\perp z}$ не являются независимыми, причем, как видно из (55), вблизи особенности компонентой $u_{\perp x}$ можно пренебречь. Это означает, что одну из поперечных компонент, например u_ϕ , можно положить равной нулю.

Без ограничения общности с точностью до ε^2 для поперечной компоненты u_θ имеем

$$u_\theta = \frac{3}{2} v_r \varepsilon, \quad (110)$$

где $\varepsilon^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Вследствие этого уравнение (109) можно упростить. Действительно, представляя функцию распределения в виде

$$f = \tilde{f} \delta(p_\phi),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + p_r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{m}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial E} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial m} = 0, \\ p_r = \left[2 \left(E - \psi - \frac{m^2}{2r^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (111) \end{aligned}$$

Для компактности изложения тильду над f далее не пишем.

Из анализа решения (51), (55) видно, что

$$m \sim \varepsilon, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sim \varepsilon,$$

т.е. угловая часть функции распределения мала. Кроме того, со временем происходит ее затухание за счет перекачки в высшие гармоники, вполне аналогичное рассмотренному в разделе 5.

Проведя в уравнении (111) усреднение по углу θ и учитывая, что величины E и m^2 являются интегралами движения, для сферически-симметричной части функции распределения получаем следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \pm \left[2 \left(E - \psi - \frac{m^2}{2r^3} \right) \right]^{1/2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial E} = 0. \quad (112)$$

При этом уравнение Пуассона принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 2^{1/2} \int_0^\infty dm^2 \times \\ \times \int_{\psi+m^2/2r^2}^0 f(E, m^2, r, t) \left(E - \psi - \frac{m^2}{2r^2} \right)^{-1/2} dE. \quad (113) \end{aligned}$$

7.2. Адиабатическая теория

Будем искать решение системы (112), (113) в адиабатическом приближении (см. разделы 5, 6) [28]. В этом приближении функция f зависит от квадрата момента импульса m^2 и адиабатического инварианта

$$I = 2^{1/2} \int_{r_{\min}(E)}^{r_{\max}(E)} \left(E - \psi(r_1, t) - \frac{m^2}{2r_1^2} \right)^{1/2} dr_1, \quad (114)$$

где r_{\min}, r_{\max} — нули подкоренной функции. Энергия E в (113), (114) отсчитывается от каустики. Согласно гидродинамическому решению имеем

$$\begin{aligned} m^2 &= m_0^2 r_0^{16/7}, \quad E(r_0) = E, \\ E(r_0) &= \frac{9}{7} \psi_0 r_0^{9/7} + o(\varepsilon), \\ m_0^2 &= 0,0881 \tilde{\rho}_0 \varepsilon^2, \quad \tilde{\rho}_0 = \rho_0 a^{12/7}. \end{aligned} \quad (115)$$

Условие непрерывности потока на каустике дает

$$\rho(r_0) dr_0 = f(I_0) dI_0. \quad (116)$$

Вид функции распределения $f(I)$, согласно адиабатической теории, определяется условиями на границе захвата, т.е. на каустике, при $I = I_0(t)$. Ввиду сохранения адиабатического инварианта функция распределения

$$f(I) = f(I_m)|_{I_m=I}. \quad (117)$$

Используя соотношения (114)–(117) и учитывая закон сохранения момента импульса, находим

$$f(I) = f_0 I^{1/8}(E) \delta(m^2 - l_0^2 I^2), \quad (118)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{49}{72} \frac{\tilde{\rho}_0}{\psi_0} \left(\frac{7}{9\psi_0} \right)^{7/2} C_1^{-9/8}, \quad l_0^2 = \left(\frac{7}{9\psi_0} \right)^8 \frac{m_0^2}{C_1^2}, \\ C_1 &= 2^{1/2} \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_{\max}} \left[E - \psi_0 \kappa^{2/7} - \frac{m_0^2}{2\kappa^2} \left(\frac{7}{9\psi_0} \right)^8 \right]^{1/2} d\kappa. \end{aligned}$$

Подставляя соотношение (118) в уравнения (113), (114), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 2^{1/2} f_0 \int_0^\infty dm^2 \times \\ &\times \int_{\psi+m^2/2r^2}^0 I^{1/8}(E) \delta(m^2 - l_0^2 I^2) \left(E - \psi - \frac{m^2}{2r^2} \right)^{-1/2} dE, \\ I &= 2^{1/2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(E - \psi(r_1, t) - \frac{l_0^2}{2r_1^2} I^2 \right)^{1/2} dr_1. \end{aligned} \quad (119)$$

При стремлении l_0^2 к нулю уравнения (119) точно переходят в уравнения (100), полученные в отсутствие момента. В этом пределе потенциал поля имеет вид

$$\psi = - \left[\frac{3}{2} C_0 \ln \frac{r_0(t)}{r} \right]^{2/3}, \quad (120)$$

где r_0 — местоположение каустики, разделяющей области однопотокового и многопотокового течений, C_0 — нормировочная константа.

Проводя анализ системы (119) аналогично проделанному ранее, находим, что в области радиуса

$$0 \leq r \leq r_\varepsilon, \quad r_\varepsilon = 0,0731 \left(\frac{\chi_0(t)}{\psi_0} \right)^{7/2} \varepsilon^{46/49},$$

существует степенное решение системы (119) вида

$$\psi = -\chi_0(t) + \psi_1 r^{2/7}, \quad \psi_1 = 5,742 \psi_0 \varepsilon^{-32/49}. \quad (121)$$

Вне области, указанной в (121), моменты не важны и, следовательно, справедливо решение (120). Глубина потенциальной ямы $\chi_0(t)$ в (121) находится из требования непрерывности потенциала в точке $r = r_\varepsilon$. С логарифмической точностью имеем

$$\chi_0 = \left\{ \frac{3}{2} C_0 \ln \left[\frac{r_0}{0,07} \left(\frac{3}{2} C_0 \right)^{-7/3} \psi_0^{-7/2} \varepsilon^{-46/49} \right] \right\}^{1/2}. \quad (122)$$

Соотношения (120)–(122) решают в адиабатическом приближении вопрос о возникновении бездиссиликтивной гравитационной сингулярности при наличии момента. Зависимость плотности вблизи особенности от радиуса изображена на рис. 9. Штриховой линией на рис. 9 показан ход плотности, соответствующий закону (120) (кривая 1) и закону (121) (кривая 2). Видно, что различие между этими кривыми невелико. Так, если представить их в степенном виде $r^{-\alpha}$, то при принятом на рисунке значении $r_\varepsilon = 10^{-2}$ для кривой 1 $\alpha = 1,87$, а для кривой 2 $\alpha = 1,72$.

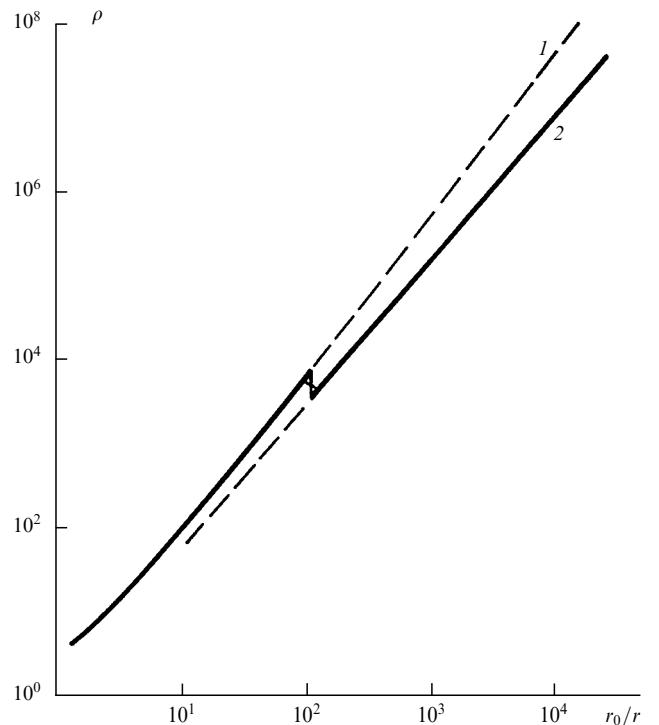


Рис. 9. Зависимость плотности в размешанном состоянии от радиуса ($r_\varepsilon = 10^{-2}$): (1) по закону (120), (2) по закону (121)

Таким образом, установившееся распределение плотности вблизи особенности приближенно можно представить в степенном виде:

$$\rho = Kr^{-\alpha}, \quad \alpha \approx 1,7-1,9, \quad (123)$$

т.е. с погрешностью около 5 % величину α можно считать постоянной.

7.3. Численное моделирование

При численном моделировании после момента особенности решалось уравнение (112), (113) с начальными условиями (110) при $t = t_c$. Результаты моделирования показывают, что сразу после особенности возникает резкий провал потенциала в окрестности центра $r = 0$, однако он менее глубокий, чем в сферическом случае. Возникающее при этом решение обладает свойствами как сферически-симметричного, так и плоского решений.

Действительно, на рис. 10 видны три четко выделенные зоны: 1) $0 < r < r_0$ — область, в которой произошло интенсивное размешивание потоков; 2) $r > r_c$ — область гидродинамического однопотокового течения, отделенная от третьей области каустикой, расположенной в точке r_c ; 3) $r_0 < r < r_c$ — промежуточная переходная область, структура которой напоминает многокаустическую картину одномерного течения (в этой области полного размешивания еще не произошло и выделяются отдельные каустики). Сплошная линия на рис. 10 показывает распределение средней плотности, возникающее после особенности. Видно хорошее согласие результатов численного счета с предсказаниями адиабатической теории (123). Отметим, что предсказание аналитической теории (123) [25, 27] и расчетов [35] подтверждается и результатами численных расчетов, проведенных недавно другими авторами [58].

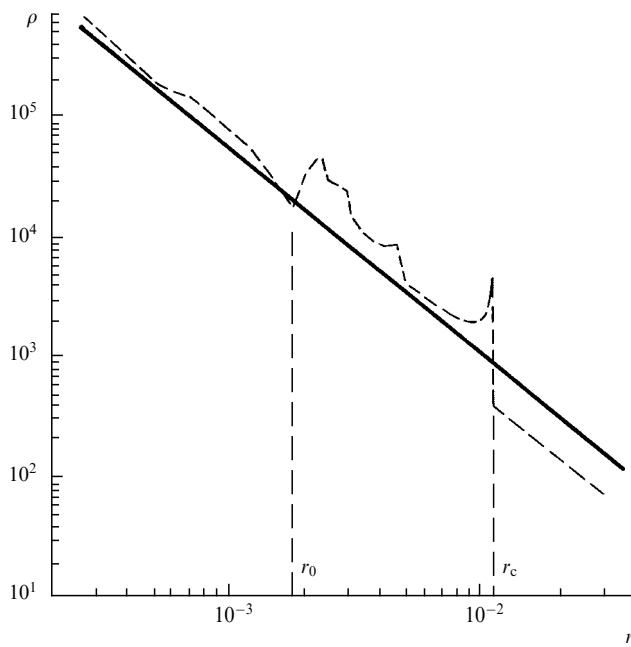


Рис. 10. Пространственное распределение плотности для случая $\varepsilon^2 = 0,1$

Таким образом, при развитии джинсовской неустойчивости в холодном бездиссипативном веществе в окрестности начального максимума эффективной плотности на достаточно больших временах возникает особенность плотности $\rho(r)$ вида (123), практически не зависящая от эллиптичности начального максимума ε . От величины ε существенно зависит время выхода на стационарное решение: чем больше ε , тем длительнее время, в течение которого система переходит в размешанное состояние.

8. Иерархическая структура

8.1. Общая качественная картина

Выше рассматривалась нелинейная динамика отдельного густоты, возникающего в окрестности максимума эффективной плотности (29). Начиная с этого раздела, мы переходим к анализу поведения случайного распределения плотности бездиссипативного самогравитирующего газа, имеющего широкий спектр начальных флуктуаций. Существенно, что это — спектр Зельдовича–Гаррисона, круто обрывающийся при значении волнового числа $k = k_{\max}$, соответствующем массе частиц темной материи (см. раздел 2). В районе $k = k_{\max}$ спектр имеет, следовательно, ярко выраженный максимум, так что нелинейную стадию развития первыми будут проходить неоднородности именно масштаба $R \approx R_m = k_{\max}^{-1}$.

В условиях (18) флуктуации меньшего масштаба отсутствуют, а флуктуации большего масштаба еще малы: они не достигли нелинейной стадии. Это означает, что нелинейное развитие первых неоднородностей носит чисто динамический характер и, следовательно, точно описывается построенными выше решениями.

За время, превосходящее джинсовское время ($t_g = (4\pi G\rho_0)^{-1/2}$), формируются первые стационарные устойчивые динамические структуры БГС масштаба R_m . Их характеризует вполне определенный скейлинговый закон распределения плотности, скорости и потенциала поля (121), мало зависящий от конкретного вида начальных максимумов.

Весьма важно, что в период линейного роста неоднородностей их масштабы увеличиваются со временем в процессе хаббловского расширения Вселенной пропорционально масштабному фактору. После выделения нелинейного связанного объекта (БГС) его масштаб и структура остаются фиксированными. В дальнейшем хаббловском расширении БГС участвуют уже как выделенные элементы-объекты, расстояние между которыми увеличивается, а сами они не изменяются.

Более того, с расширением Вселенной уменьшается средняя плотность материи, а плотность в БГС остается постоянной. Она определяется характерным масштабом БГС и моментом ее образования. Наблюдаемый размер объекта R' в сопутствующих координатах в настоящий момент времени связан с его размером R в момент образования соотношением

$$R' = \frac{R}{1 + z_R}, \quad (124)$$

где z_R — космологическое красное смещение, связанное с моментом образования БГС.

Из монотонности спектра флуктуаций при $k < k_{\max}$ и непрерывности роста амплитуды флуктуаций со временем (речь идет, конечно, лишь о неустойчивой моде (24)) вытекает, что вслед за начальным масштабом R_m нелинейной стадии развития достигают большие масштабы ($R = 1/k > R_m$). БГС масштаба $R_m < R$ могут тогда входить как отдельные элементы в БГС масштаба R . При этом БГС масштаба R после завершения нелинейной релаксации также выделяются как отдельные объекты в расширяющейся Вселенной, так что хаббловское расширение внутри них прекращается.

В дальнейшем проходят нелинейную стадию развития БГС масштаба $R_1 > R$. Они могут включать в себя элементы БГС как масштаба R , так и масштаба R_m . Так постепенно развивается иерархическая структура вложенных друг в друга БГС различных масштабов. Описанию этого процесса и посвящен настоящий раздел.

Следует подчеркнуть, что, поскольку начальный спектр флуктуаций случайный, в зависимости от статистики максимумов начального спектра в отдельные элементы иерархической структуры может объединяться различное количество БГС разного масштаба. Часть из них может вообще не входить ни в какие другие образования, существуя как отдельные нелинейные объекты.

Изучение различных возможных вариантов объединения определяет статистику объектов и их корреляционные свойства. Описанию этой статистики посвящен раздел 10. Наконец, выше говорилось только о полностью сформировавшихся БГС. Определенные структуры возникают и в процессе их формирования. Более того, такие структуры являются наиболее крупномасштабными объектами, выделяющимися во Вселенной. Их рассмотрению посвящен раздел 9.

8.2. Иерархия масштабов

Рассмотрим случайное распределение начальной плотности гравитирующего газа, содержащее широкий спектр флуктуаций, которые предполагаются однородными и изотропными. Динамика системы описывается по-прежнему уравнениями (7) с начальными условиями (27), где $\delta_i(\mathbf{r})$ — случайная функция с широким спектром масштаба R . Введем усредненную по масштабу R функцию распределения

$$f_R(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int f(\mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{v}, t) W(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (125)$$

Здесь $W(\mathbf{s})$ — сглаживающая функция, нормированная и быстро спадающая на бесконечности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = 1.$$

Проведя соответствующее усреднение в уравнениях (7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_R}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_R}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_R}{\partial \mathbf{v}} + S_R = 0, \\ \Delta\psi = \int f d\mathbf{v}, \\ S_R = \int \nabla(\Delta\psi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{r} + \mathbf{s}) W(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \\ \delta\psi = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{s}) - \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (126)$$

Ниже будет показано, что корреляционный интеграл S_R , вообще говоря, мал, так что им в первом приближении можно пренебречь. В этом приближении уравнения (126) фактически совпадают с исходными уравнениями (7). Разница лишь в том, что начальное распределение плотности $\delta_i(\mathbf{r})$ усреднено:

$$\delta(\mathbf{r}, R, t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(|\mathbf{r} - \mathbf{y}|) \delta_i(\mathbf{y}, t_i) d\mathbf{y}. \quad (127)$$

Это означает, что все максимумы начальной плотности в масштабах, меньших R , сглажены. Поэтому решение уравнений (126) с начальным распределением (127) приводит к появлению БГС масштаба R или выше. Разумеется, сингулярный закон распределения плотности в БГС (123) справедлив также лишь до масштабов порядка R .

Рассмотрим масштаб $R_1 \gg R$. Уравнения для f_{R_1} имеют тот же вид (126), но начальные неоднородности, в силу усреднения (127), могут содержать максимумы плотности лишь с масштабами $\tilde{R} \geq R_1$. Динамическое развитие таких систем будет приводить к формированию стационарных гравитационных сингулярностей с масштабом R_1 , содержащих описываемые функцией f_R масштаба R сингулярности как малые элементы, захваченные в поле БГС масштаба R_1 . То же относится и к сингулярностям масштаба $R_2 \ll R$, захваченным в поле БГС с масштабом R и описываемым функцией f_{R_2} .

Важно (см. (124)), что размер каждого объекта R, R_1, R_2 определяется красным смещением z_R , при котором он образовался. Основная часть объектов размером R образуется, когда

$$\langle \delta^2(\mathbf{r}, R, t) \rangle = \delta_0^2 \sim 1. \quad (128)$$

Точно величина δ_0 неизвестна, однако для степенного спектра она не зависит от масштаба сглаживания R_0 и является универсальной константой.

Экстраполируя линейный закон роста плотности до момента t , определяемого соотношением (128), нетрудно получить связь между z_R и R для степенного спектра начальных возмущений:

$$1 + z_R = \left(\frac{R_f}{R} \right)^{(m+3)/2}, \quad (129)$$

где m — показатель спектра начальных возмущений плотности (для спектра Зельдовича–Гаррисона $m = 1$), R_f — максимальный масштаб, входящий в настоящее время в нелинейный режим (128) ($z_{R_f} = 0$). Из соотношений (124), (129) получаем теперь выражение, связывающее размеры объектов в сопутствующей системе координат в настоящее время и в момент образования:

$$R' = R^{(m+5)/2} R_f^{-(m+3)/2}. \quad (130)$$

Таким образом, полное решение в установившейся области масштабов $R < R_f$ представляет собой иерархическую структуру, состоящую как из вложенных друг в друга БГС разных масштабов, движущихся по финитным траекториям, так и из отдельных БГС, движущихся независимо. Характерные размеры БГС при этом описываются соотношениями (128), (130).

Скейлинговые соотношения (123) для плотности темной материи, потенциала и скорости не зависят от начального спектра и остаются одинаковыми во всех масштабах, где успели развиться многопотоковые течения. В то же время количество образующихся БГС разных масштабов существенно зависит от распределения начальных флуктуаций.

8.3. Параметр газовости

и оценка корреляционного интеграла

Основным параметром, характеризующим степень вложенности меньших объектов иерархической структуры в большие, является параметр газовости $\epsilon(R)$, т.е. вероят-

ность объекту размером R оказаться внутри какого-то другого. Она определяется зависимостью концентрации максимумов начального распределения плотности от их размера $n(R)$ и их пространственными корреляциями.

Если начальный спектр в длинноволновой области является степенным: $|\delta(k)|^2 \propto k^m$ (см. раздел 2), то для достаточно больших R благодаря его масштабной инвариантности имеем

$$n(R) dR = 3\beta R^{-4} dR, \quad (131)$$

где β — безразмерный параметр, зависящий от показателя спектра m . Концентрация объектов с размерами, превышающими R , равна $n(> R) = \beta(R^{-3} - R_f^{-3})$, где R_f — размер наибольших объектов, образовавшихся к настоящему времени.

Пренебрегая корреляцией в расположении объектов, параметр газовости можно оценить выражением

$$\epsilon(R) = \int_R^{R_f} \frac{4}{3} \pi R^3 n(R) dR = 4\pi\beta \ln \frac{R_f}{R}. \quad (132)$$

Оценка величины β по данным наблюдений скоплений и групп галактик, взятых из работы [37], дает

$$\beta \approx 6,4 \cdot 10^{-3}.$$

Возможно, эта эмпирическая оценка является несколько заниженной из-за недооценки вклада темной материи в массы объектов. Теоретическая оценка верхнего предела β для степенного спектра с показателем m тоже дает малую величину [38]:

$$\beta < 0,016 \left(\frac{6}{m+5} \right)^{3/2}.$$

Таким образом, степень вложенности объектов в реально осуществляющейся иерархической структуре невелика. Картина развития иерархической структуры зависит от времени t . Для любого данного момента времени t иерархическая структура развивается от масштаба R_m до масштаба $R(t)$, определенного условием (128). Максимальный масштаб турбулентности порядка R_f : он определяется областью масштабов, вступившей к настоящему моменту в нелинейный режим.

Оценим теперь корреляционный интеграл S_R в (126). Эти интегралы различны для БГС меньшего масштаба R , захваченных в БГС большого масштаба R_1 , и для незахваченных БГС, т.е. движущихся независимо. Взаимодействие между БГС, в силу малости параметра β , можно оценить по кулоновскому закону.

По порядку величины корреляционный интеграл

$$S_R \sim \frac{f}{t_R}, \quad t_R = p t_g, \quad (133)$$

где параметр p есть отношение времени "свободного пробега" к джинсовскому времени. Для свободно движущихся БГС параметр

$$p \sim (\beta \Lambda)^{-1}, \quad (134)$$

где Λ — кулоновский логарифм.

Рассмотрим теперь случай захваченных БГС. В силу малости газового параметра β вероятность захвата БГС меньшего масштаба R большим масштабом R_1 невелика: порядка β . Проведя оценку параметра p в этом случае и учитывая распределение плотности (123), получаем

$$p \sim (\Lambda \beta^2)^{-1} \left(\frac{R_1}{R} \right)^{18/7} \left(\frac{r}{R_1} \right)^{6/7}. \quad (135)$$

Видно, что параметр всегда велик: как в случае свободно движущихся БГС (134), так и в случае захваченных БГС (135). Это позволяет в первом приближении пренебречь величиной S_R в (126).

Отметим, что в случае свободно движущихся БГС соударение происходит в основном "краями", что не сказывается на структуре особенности. В случае же захваченных БГС при $t > t_R$ будут происходить искажения в центральной части особенности. Следует, однако, заметить, что оценка (135) делалась в предположении, что при движении БГС меньшего масштаба R в БГС большего масштаба R_1 БГС масштаба R не теряет своей массы. Но в соответствии с (123) основная масса сосредоточена при $r \sim R$. Следовательно, при движении БГС масштаба R в потенциале масштаба R_1 в области больших градиентов будет происходить потеря массы БГС.

Важное значение может иметь и процесс неупругих лобовых столкновений. Наконец, отметим, что, кроме рассеяния БГС друг на друге, существует и рассеяние частиц темной материи на БГС. При этом, ввиду массивности БГС, рассеяние частиц темной материи происходит только по углу, а не по энергии. Такое рассеяние ускоряет изотропизацию функции распределения, усредняя ее по углам.

В принципе обсуждаемые здесь столкновительные процессы ведут к "термализации" вещества. В тепловом равновесии, как известно, мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= -T \frac{\nabla \rho}{\rho}, \\ \Delta \psi &= 4\pi G \rho, \end{aligned} \quad (136)$$

где T — температура равновесного газа. Решение системы (136) приводит к сингулярному распределению плотности (изотермическая сфера):

$$\rho = \frac{T}{2\pi G} r^{-2}. \quad (137)$$

Закон (137) близок к (123), однако функция распределения (118), (119) очень сильно отличается от максвелль-больцмановской. Дело в том, что закон (123) отражает в основном кумуляцию направленных к центру потоков, а в равновесное распределение (137) главный вклад вносят захваченные в глубине потенциальной ямы частицы. Поэтому требуется длительный период для перестройки функции распределения к равновесной. Для холдного бездиссипативного вещества такой режим никогда не реализуется.

Действительно, для достижения равновесия (137) требуется время, значительно больше времени свободного пробега

$$t_f \sim (n\sigma V)^{-1}, \quad (138)$$

где n — плотность темного вещества, σ — сечение соударения частиц темной материи, V — их характерная скорость, определенная по функции распределения (118), (119). Даже для легких нейтрино с массой $m_\nu \approx 2$ эВ время t_f на восемь-девять порядков больше времени жизни Вселенной. Что же касается тяжелых частиц темной материи, то для них время t_f , по-видимому, еще больше.

До сих пор мы обсуждали лишь темную материю, которая является бездиссипативной. Именно вследствие отсутствия диссипации в холодном самогравитирующем темном веществе образуются БГС. Динамика же барионного вещества, напротив, в значительной мере определяется диссипативными процессами. Теряя энергию за счет выщечивания, барионное вещество опускается на дно потенциальных ям, сформированных темным веществом. При этом светящееся барионное вещество является как бы индикатором структуры темного вещества, указывая, в частности, на местоположение центра БГС. Таким образом формируется единый объект: барионное вещество — гало темной материи.

Примерами таких объектов являются галактики: о наличии гало темной материи свидетельствуют здесь плоские кривые вращения [39], или скопления, где наблюдается захваченный горячий газ. При этом следует отметить, что по мере опускания барионного вещества на дно потенциальных ям его плотность растет, и в области, где средние плотности барионного и темного веществ сравниваются, могут возникать существенные искажения в каноническом распределении темного вещества (118), (119).

9. Крупномасштабная структура

В предыдущем разделе обсуждалось размешанное кинетическое состояние бездиссипативного темного вещества. Это состояние реализуется в тех областях, где вещество успело много раз прооциклировать в самосогласованном гравитационном поле. В результате кинетического размешивания устанавливается стационарная функция распределения вещества. Такое состояние, названное нами БГС, образуется в минимумах потенциала исходного спектра флуктуаций. Оно характеризуется вполне определенной функцией распределения (118) и сингулярностью плотности (123). Система БГС разных масштабов образует иерархическую структуру.

Общая же картина возникающих во Вселенной структур развивается во времени и зависит от начального спектра флуктуаций. Так, для спектров типа Зельдовича–Гаррисона иерархическая структура БГС возникает прежде всего в малых масштабах. К настоящему моменту времени БГС, по-видимому, являются уставившимися в масштабах $R \leq 5-10$ Мпк (галактики, скопления). Напротив, в очень больших масштабах ($R > 100-200$ Мпк) флуктуации малы и их рост описывается линейной теорией. Распределение материи в этой области масштабов в основном равномерное: здесь еще нет ярко выраженных структур.

Область масштабов $10 \leq R \leq 100$ Мпк является переходной. В ней можно выделить подобласть промежуточных масштабов $R \approx 50-100$ Мпк, где возмущения только входят в нелинейный режим ($\delta \sim 1$). В этой подобласти течение носит потенциальный характер и описывается однопотоковой гидродинамикой. Плотность вещества вблизи минимума потенциала быстро

нарастает. Распределения плотности и скорости описываются формулами (51), (55) и характеризуются, кроме масштаба R , безразмерными параметрами ε_1 и ε_2 . Подобласти промежуточных масштабов соответствуют во Вселенной нелинейным структурам типа "Великий атTRACTOR" [40], где контраст плотности в максимуме достигает значений $\delta \sim 2-5$.

В подобласти $R \approx 20-50$ Мпк течение уже не является однопотоковым: здесь возникают первые каустики, но число потоков еще невелико. Каустики представляют собой изогнутые плоские объекты типа "блинов" Зельдовича. Происходит пересечение каустик, образуются ните-видные объекты и "узлы", возникает ячеистая структура.

Изучению ячеистой структуры и посвящен настоящий раздел. Основным структурным элементом в этой области являются каустики (см. раздел 4) — разделяющие зоны однопотокового и трехпотокового течений плоские объекты, на которых происходит слияние двух потоков (см. (66), (67)).

Исследуем прежде всего решение уравнения (49) вблизи каустики. После первичной особенности (41) образуется пара каустик. Разлагая решение (36) вблизи каустики при $\tau \ll 1$, для плотностей потоков ρ_1, ρ_2, ρ_3 получаем

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\rho_0}{1+\tau} \frac{1-\zeta_1^2}{\zeta_1^2 - \tau/(1+\tau)}, \\ \rho_2 &= -\frac{\rho_0}{1+\tau} \frac{1-\zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \tau/(1+\tau)}, \\ \rho_3 &= \frac{\rho_0}{1+\tau} \frac{1-\zeta_3^2}{\zeta_3^2 - \tau/(1+\tau)},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 2\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{1/2} - \frac{x-x_c}{3at}, \\ \zeta_{2,3} &= -\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{1/2} \pm \left\{ \frac{x-x_c}{a} (\tau + \tau^2)^{-1/2} \right\}^{1/2}, \\ x_c &= \frac{2}{3} \tau a \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

При подходе к каустике плотности ρ_2, ρ_3 неограниченно растут как $(x-x_c)^{-1/2}$. Полная плотность вещества

$$\rho = \sum_{i=1}^3 \rho_i(x, \tau), \quad (139)$$

показанная на рис. 2б, при приближении к каустике также растет как $(x-x_c)^{-1/2}$. Дифференцируя выражение для x_c , находим скорость и ускорение каустики:

$$\begin{aligned}v_c &= \frac{dx_c}{d\tau} = \frac{1}{1+\tau} \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2}{3}\tau\right), \\ w_c &= \frac{d^2x_c}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \tau^{-1/2} (1+\tau)^{-5/2}.\end{aligned}$$

Система отсчета, движущаяся вместе с каустикой, испытывает ускорение. Поэтому в этой системе появится сила инерции

$$W_c = 2\rho_0 a w_c.$$

Учитывая этот факт, а также используя соотношения (65), в окрестности каустики найдем потенциал:

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0 + \frac{\rho_0 a^2}{1+\tau} \left\{ - \left[\tau^{-1/2} (1+\tau)^{-3/2} + \right. \right. \\ + 2 \left(\frac{\tau}{1+\tau} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\tau}{3} \right) \left. \frac{x-x_c}{a} - \right. \\ - \frac{1}{6\tau} (1-3\tau) \left(\frac{x-x_c}{a} \right)^2 - \\ \left. - \frac{4}{3} \frac{\theta(x-x_c)}{\tau^{1/4} (1+\tau)^{1/4}} \left(\frac{x-x_c}{a} \right)^{3/2} \right\}. \end{aligned} \quad (140)$$

Из решения (140) видно, что потенциал не образует ямы. Поэтому вещество протекает через каустику и в ее окрестности не возникает захваченного состояния материи.

Решение (140) справедливо при временах, близких к времени первоначальной особенности $t = t_c$ (т.е. при $\tau \ll 1$). На достаточно больших временах (при $\tau \gg 1$) вид решения (140) зависит от того, как быстро спадает плотность начального распределения вещества. Если она спадает степенным образом, т.е. если

$$\rho_0(x) = \rho_0 \frac{\mu}{3A^{1/3}} \left(\frac{x}{a} \right)^{-1-\mu/3} \quad \text{при } x \gg a,$$

где A и μ — произвольные положительные константы, то потенциал поля вблизи фронта каустики задается соотношением

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0 + \rho_0 a \left\{ - \left[\frac{\pi}{2} - A^{-1/3} (\pi\tau)^{-\mu/3} \right] (x-x_c) + \right. \\ + \frac{2\sqrt{2}}{3a} C(\mu, A) \tau^{-(1/2+\mu/3)/(1+\mu/3)} (x-x_c)^{3/2} \theta(x-x_c) + \\ \left. + \frac{\mu}{12aA^{1/3}} (\pi\tau)^{-(1+\mu/3)} (x-x_c)^2 \theta(x_c-x) \right\}, \end{aligned} \quad (141)$$

где

$$C(\mu, A) = 2A^{-1/2(\mu+3)} \left(1 + \frac{\mu}{3} \right)^{-1/2} \left(\frac{\mu}{3} \right)^{1/2(1+\mu/3)}.$$

Таким образом, выражение (141), полученное при $\tau \gg 1$, качественно похоже на выражение (140), выписанное в пределе $\tau \ll 1$. Различаются лишь зависимости коэффициентов от времени.

Рассмотрим теперь нитевидные структуры, возникающие в результате пересечения каустических поверхностей. Предположим, что при пересечении каустик не возникает глубокой потенциальной ямы, способной захватить потоки. (Это предположение будет в дальнейшем обосновано.) Тогда в первом приближении вблизи точки пересечения все потоки движутся свободно, не влияя друг на друга. Это означает, что полный потенциал гравитационного поля является суперпозицией потенциалов от двух каустик.

С учетом (141) имеем

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0 + \sum_{j=1,2} \rho_0^{(j)} a_j \left\{ - \left[\frac{\pi}{2} - A^{-1/3} (\pi\tau_j)^{-\mu/3} \right] d_j + \right. \\ + \frac{2\sqrt{2}}{3a_j} C(\mu, A) \tau_j^{-(1/2+\mu/3)/(1+\mu/3)} d_j^{3/2} \theta(d_j) + \\ \left. + \frac{\mu}{12a_j A^{1/3}} (\pi\tau_j)^{-(1+\mu/3)} d_j^2 \theta(-d_j) \right\}. \end{aligned} \quad (142)$$

Здесь индекс j нумерует каустики, d_j обозначает расстояние от точки X , в которой вычисляется потенциал до j -й каустики, причем $d_j > 0$, когда точка X находится в области трех потоков j -й каустики, и $d_j < 0$, когда точка X лежит вне этой области. Штрихи на каустиках (рис. 11) направлены в область, где имеются три потока, относящиеся к данной каустике.

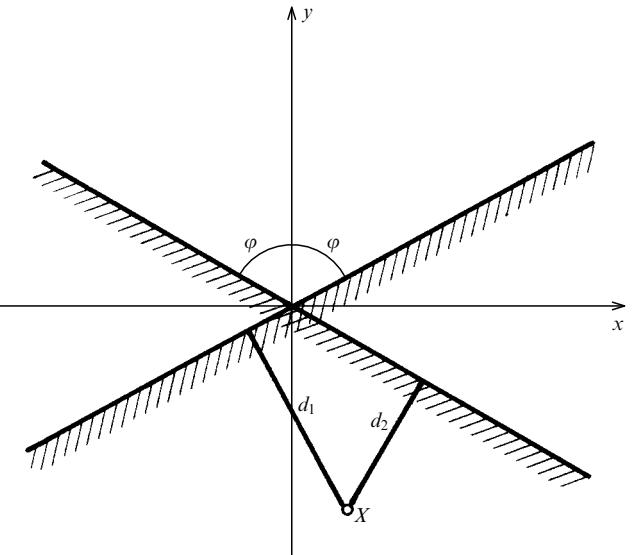


Рис. 11. Картина пересекающихся каустик (X — точка, в которой вычисляется потенциал)

Выражения для d_j ($j = 1, 2$), как видно из рис. 11, задаются соотношениями

$$d_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad d_2 = -x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad (143)$$

где (x, y) — координаты точки X . Подставляя выражение для d_j в (142), получаем искомое выражение для потенциала вблизи точки пересечения двух каустик. При этом общее выражение имеет весьма громоздкий вид.

Для выяснения качественного вида потенциала рассмотрим вначале наиболее простой случай, когда пересекающиеся каустики имеют одинаковые параметры, т.е. предположим, что

$$\rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)} = \rho_0^{(3)}, \quad a_1 = a_2 = a_3, \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \psi_0 + 2\rho_0 a \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - A^{-1/3} (\pi\tau)^{-\mu/3} \right] y \sin \varphi + \right. \\ + \frac{2\sqrt{2}}{3a} C(\mu, A) \tau^{-(1/2+\mu/3)/(1+\mu/3)} \times \\ \times [(x \cos \varphi - y \sin \varphi)^{3/2} \theta(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + \\ + (-x \cos \varphi - y \sin \varphi)^{3/2} \theta(-x \cos \varphi - y \sin \varphi)] + \\ \left. + \frac{\mu}{12a A^{1/3}} (\pi\tau)^{-(1+\mu/3)} (x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (144)$$

Все члены в выражении (144), кроме линейного, положительны и возрастают при удалении от точки пересечения каустик. Иными словами, потенциал $\psi(x, y)$ имеет форму изогнутой "чашки", наклоненной в сторону отрицательных y , причем, как следует из (144), наклон

"чашки" столь велик, что у потенциала нет минимума в окрестности нитевидной особенности. Края у "чашки" загнуты слабо, так как $\tau^{-(1/2+\mu/3)/(1+\mu/3)} \ll 1$, $\tau^{-(1+\mu/3)} \ll 1$.

Аналогичная картина потенциала имеет место и для каустик с любым набором параметров. Как видно из (144), линейный член в потенциале исчезает только в вырожденном случае, когда $\varphi = 0$, т.е. когда каустики сталкиваются фронтами.

Таким образом, в результате пересечения каустик возникают нитевидные объекты, которые также имеют чисто кинематическую структуру: их самосогласованное гравитационное поле не способно захватить потоки вещества, что, в частности, оправдывает предположение о суперпозиции потенциалов (141).

Наряду с нитевидными объектами, которые образуются в результате пересечения пары каустик, возможно и образование "узлов" как результат сечения нити плоскостью. Рассмотрим структуру потенциала вблизи объектов типа "узел". Перейдем в систему отсчета, в которой точка пересечения покойится. Будем задавать ориентацию каустики в пространстве вектором

$$\lambda_j = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j), \quad |\lambda_j| = 1, \quad j = 1, 2, 3,$$

нормальным к фронту каустики и направленным в область трех потоков.

Расстояние от точки \mathbf{X} до j -й каустики

$$d_j = \lambda_j \cdot \mathbf{X}.$$

Вычисления, подобные проведенным при получении соотношения (144), дают для потенциала

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) = & \psi_0 + \sum_{j=1}^3 \rho_0^{(j)} a_j \left\{ -\left[\frac{\pi}{2} - A^{-1/3}(\pi\tau_j)^{-\mu/3}\right] d_j + \right. \\ & + \frac{2\sqrt{2}}{3a_j} C(\mu, A) \tau_j^{-(1/2+\mu/3)/(1+\mu/3)} d_j^{3/2} \theta(d_j) + \\ & \left. + \frac{\mu}{12a_j A^{1/3}} (\pi\tau_j)^{-(1+\mu/3)} d_j^2 \theta(-d_j) \right\}. \end{aligned} \quad (145)$$

Выражение (145) вполне аналогично (144). Как и для "нити", в окрестности "узла" в общем случае не возникает потенциальной ямы, способной захватить потоки и образовать, тем самым, стационарное кинетическое состояние.

Таким образом, область масштабов, в которых развивается крупномасштабная ячеистая структура ("блины", "нити", "узлы"), в математическом смысле является некоторой промежуточной асимптотикой между областью линейного роста возмущений и кинетической областью многопоточных течений. Ввиду высказанного эти структуры не могут привести к стационару.

Вся картина развивается во времени, поскольку, с одной стороны, все большие масштабы подходят к нелинейной стадии, а с другой стороны, в малых масштабах нарастает число каустик, "нитей" и "узлов". Интенсивность этих особенностей с течением времени убывает (см. рис. 5), и область масштабов постепенно переходит в размешанную кинетическую область, в которой формируется иерархическая структура БГС, обсуждавшаяся выше.

Отметим также, что особенности плотности бездиссипативного вещества в ячеистых структурах более

слабые, чем БГС. Действительно, как следует из (141), (144), (145), особенности плотности вблизи "блинов", "нитей" и "узлов" имеют вид

$$\rho \propto d^{-1/2},$$

где d — либо координата вдоль нормали к каустике, либо радиус в плоскости, перпендикулярной нити, либо радиус-вектор в случае "узла". В отличие от БГС вклад этих особенностей в парную корреляционную функцию не является основным. Нитевидные особенности могут дать сингулярный вклад в трехточечную корреляционную функцию, а особенности типа "блеск" — лишь в корреляционную функцию четвертого порядка.

10. Корреляционные функции

10.1. Общие замечания. Определение объекта

В предыдущих разделах изучалась структура нелинейных образований темного вещества. Настоящий раздел посвящен исследованию их статистических свойств. Как было показано в разделе 7, в окрестности начального максимума плотности в результате нелинейного гравитационного сжатия образуется бездиссипативная гравитационная сингулярность (БГС) — стационарное, самозахваченное сферически-симметричное распределение плотности темного вещества $\rho(r)$, имеющее в центре особенность (123):

$$\rho(r) = \tilde{\rho} \left(\frac{r}{R} \right)^{-\alpha}. \quad (146)$$

Согласно (123) величина α меняется в диапазоне 1, 7–1, 9. В дальнейшем мы будем пользоваться средним значением $\alpha \approx 1, 8$. Мы видим, что параметр α в установленном решении фактически является величиной постоянной, не зависящей от формы и масштаба начального максимума. В этом проявляется основное скейлинговое свойство трехмерного нелинейного гравитационного сжатия холодного бездиссипативного вещества.

Таким образом, каждая БГС представляет собой сферически-симметричное образование с распределением плотности (146), характеризующимся лишь двумя параметрами: R и $\tilde{\rho}$. Радиус R представляет собой сопутствующий размер максимума плотности на момент t_R (см. (128)), когда $\tilde{\delta}(0, t_R) = \delta_0 \sim 1$. Момент t_R является характерным моментом времени, когда происходит нелинейное выделение данного пика плотности из общего космологического расширения и фиксация его физического (собственного) размера. Соответствующее моменту t_R красное смещение будем обозначать z_R .

По определению t_R при $t > t_R$ пик проходит нелинейную стадию эволюции и преобразуется в БГС размером R . После этого он существует в качестве отдельного объекта с постоянным физическим размером и стационарным распределением плотности внутри. Наблюдающий размер объекта R' в сопутствующих координатах в настоящий момент времени связан с его сопутствующим размером R в момент образования соотношением (124).

В настоящем разделе под объектом понимается сформировавшаяся БГС — гравитационно связанные образования из темной материи, имеющие распределение

плотности (146) и размер R . Эти объекты (см. раздел 8) образуют иерархическую структуру. При этом степень кластеризации структуры невелика (см. (132)).

Основной целью настоящего раздела является построение статистической теории таких объектов. При этом мы будем следовать работе [30]. Для описания мы используем язык статистики N точек, представляющих собой положения в пространстве всех образовавшихся объектов всех возможных размеров. Стартовым пунктом в нашей теории является совместное распределение вероятностей $P(\bar{y}_i, R_i)$ образования N объектов данных размеров R_i с центрами в данных точках \bar{y}_i .

Влияние нелинейной динамики на статистические свойства системы объектов обычно описывается бесконечной цепочкой зацепляющихся уравнений для моментов от N -частичной функции распределения (цепочки ББГКИ). Для случая самогравитирующего вещества такая задача обсуждалась во многих работах, в частности в монографии [21].

Решение цепочки уравнений обычно проводится путем ее обрезания и пренебрежения высшими моментами. Однако, как указывалось выше, в областях максимумов эффективной плотности возникает сильнокоррелированное сингулярное распределение вещества, где парная корреляционная функция (и высшие моменты) $\xi \gg 1$ и где, следовательно, процедура такого обрезания некорректна. Образование сильнокоррелированных распределений требует адекватного учета, который и заложен в основу используемого ниже метода.

Чтобы описать возникновение сильнокоррелированных распределений, введем вероятность перехода, определенную на основе нелинейного решения (146). Такой подход позволяет сразу найти связь конечных значений корреляционных функций с начальными и является главным новым моментом нашего метода. Он дает возможность избежать решения цепочки зацепляющихся уравнений и эффективно учесть всю иерархию ББГКИ в области $\xi \gg 1$.

10.2. Модель формирования корреляций

Как было сказано выше, после того как в максимуме эффективной плотности (29) ее значение достигает $\delta \sim 1$, достаточно быстро образуется БГС. В нашей статистической модели мы будем считать, что это происходит мгновенно. Если некоторый меньший объект захвачен данной БГС, то вероятность $f(r)$ найти его в настоящее время в единичном объеме на расстоянии r от ее центра мы будем считать пропорциональной плотности вещества (146):

$$f(r, R) = \frac{3 - \alpha}{4\pi} R'^{-3} \theta(R' - r) \left(\frac{r}{R'} \right)^{-\alpha}. \quad (147)$$

Константа в (147) определяется требованием сохранения массы в объеме $r < R$ в процессе образования БГС, а сопутствующий размер объекта в настоящее время R' дается формулой (124).

Распределение плотности внутри БГС, определяющееся законами нелинейного сжатия, имеет вид (146) лишь в асимптотике $r \rightarrow 0$ и дает погрешность порядка 1 при $r \sim R'$. Следовательно, на расстояниях $r \geq R'$ следует ожидать заметных поправок к распределению вероятности (147).

Определим теперь условия захвата одного объекта другим. Объект размером R_2 с центром, находящимся в

точке \bar{y}_2 , захватывает объект размером R_1 с центром, находящимся в точке \bar{y}_1 , если выполнены условия

$$R_1 < R_2, \quad |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| < R_2. \quad (148)$$

Если условие (148) не выполнено ни для каких объектов (\bar{y}_2, R_2), то мы считаем объект (\bar{y}_1, R_1) остающимся на месте.

Для вычисления диаграмм высшего порядка по числу участвующих объектов существенно распределение объектов данного размера по времени их образования (красному смещению). Строго говоря, по временам образования имеется разброс, но для упрощения мы предполагаем, что все объекты данного размера R образуются одновременно при красном смещении z_R . В качестве z_R мы выбираем момент, когда образуется большинство объектов размером R . Величина z_R определяется спектром начальных неоднородностей $|\delta_i(k)|^2$ (см. раздел 8).

Итак, каждый объект в нашей модели характеризуется координатами его центра \bar{x}_i и размером R_i . Структура распределения вещества описывается статистикой большого числа N точек в физическом пространстве \bar{x} и в пространстве размеров R . Нелинейная эволюция описывается случайным процессом последовательного захвата меньших объектов большими. Правила построения соответствующей вероятности перехода для единичного акта захвата рассматриваются ниже. Для вычисления конечных j -точечных корреляционных функций необходимо еще знание начальных корреляций всех N объектов и правила вычисления вероятности перехода при множественном захвате. Переходим к исследованию этих вопросов.

10.3. Вычисление j -точечных корреляционных функций

Определим вероятность перехода для некоторого пробного объекта, захваченного несколькими другими. Пусть радиус первого объекта, захватившего пробный, есть R_1 . Затем образуется объект размером $R_2 > R_1$, который захватывает первый объект. Вероятность перехода $W(\bar{r})$ пробного объекта в конечное состояние, задаваемое вектором \bar{r} относительно центра второго объекта, можно представить в виде

$$W(\bar{r}) = \int f(|\bar{r} + \bar{x}|, R_1) f(|\bar{x}, R_2|) d\bar{x},$$

если, по нашему предположению, столкновения и притягивающие силы не успевают изменить внутреннюю структуру захваченного объекта.

Условимся в дальнейшем всякую величину подобного рода, представляющую собой плотность вероятности найти объекты в единице объема (в единичном интервале размеров) в окрестности данных точек, называть для краткости плотностью вероятности обнаружить объекты (данного размера) в этих точках.

Поскольку различные захваченные объекты быстро "забывают" о своих начальных корреляциях в процессе размешивания, условные плотности вероятности перехода для нескольких объектов, попавших внутрь одного, вычисляются независимо и перемножаются. Например, если два объекта с размерами R_1, R_2 захвачены объектом с размером R_3 , находящимся в точке \bar{x}_3 , то плотность вероятности обнаружить их после размешивания в

точках \bar{x}_1 и \bar{x}_2 соответственно есть просто

$$W(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f(|\bar{x}_1 - \bar{x}_3|, R_3) f(|\bar{x}_2 - \bar{x}_3|, R_3).$$

Аналогичным образом вычисляется плотность вероятности перехода и в общем случае. Обозначим плотность вероятности найти n объектов с размерами R_i в точках \bar{x}_i при условии, что они образовались в точках \bar{y}_i , через $W_a^n(\bar{x}_i, \bar{y}_i, R_i)$. Тогда плотность вероятности найти в настоящее время j объектов с размерами R_1, \dots, R_j в точках $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j$ можно представить как

$$\begin{aligned}
P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j, R_1, \dots, R_j) &= \\
&= \sum_a P_a(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j, R_1, \dots, R_j) = \\
&= \sum_{n=j}^{\infty} \sum_a \int \dots \int W_a^n(\bar{x}_i, \bar{y}_i, R_i) P_a^n(\bar{y}_i, R_i) \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^n d\bar{y}_i \prod_{i=j+1}^n d\bar{x}_i dR_i.
\end{aligned} \tag{149}$$

Здесь индекс a нумерует все возможные варианты пространственного вложения n объектов друг в друга (другими словами, различные конфигурации захвата). Так, при $j = 2, n = 2, 3$ все возможные варианты вложения объектов 1, 2 и 3 имеют вид, схематически изображенный на рис. 12а.

Важно отметить, что при перечислении конфигураций захвата в (149) принимаются во внимание только объекты, реально захватывающие хотя бы один из объектов $1, \dots, j$. Объекты, которые захвачены, но сами

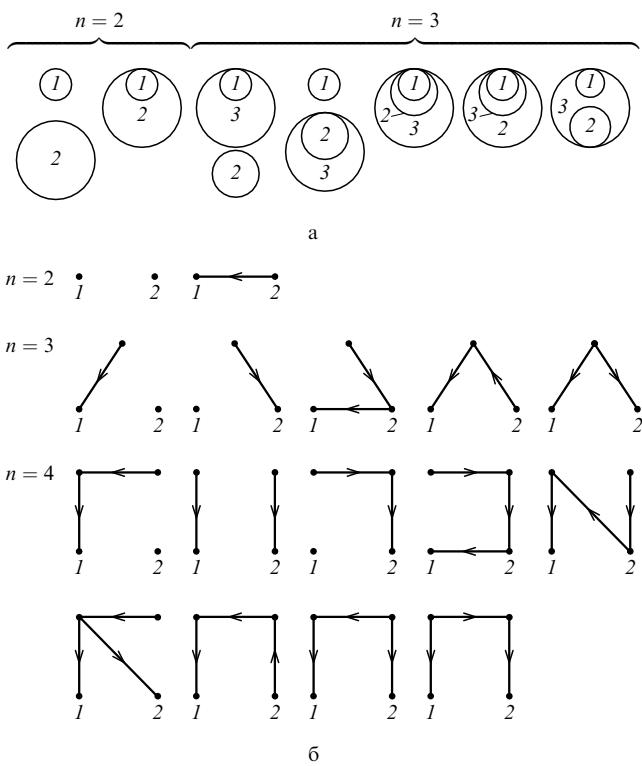


Рис. 12. (а) Схематическое изображение всех вариантов пространственного вложения n объектов друг в друга, входящих в (149) при $j = 2$; (б) все допустимые диаграммы с $n \leq 4$, вносящие вклад в парную ($j = 2$) корреляционную функцию участвующих объектов

не захватывают ни один из них, не учитываются. Наконец, заметим, что суммирование в (149) по n до ∞ имеет смысл при наличии во Вселенной сколь угодно больших объектов. Реально же из-за ограниченности эволюции по времени для галактик, например, достаточно ограничиться $n < (2-3)j$. Это тем более верно, что члены с большими n должны быть малыми в меру малости параметра газовости ϵ .

В (149) $P_a^n(\bar{y}_i, R_i)$ есть плотность вероятности образования данных n объектов в точках \bar{y}_i в конфигурации a так, что никакие другие внешние объекты ни один из них не захватывают. Ее можно представить в виде

$$P_a^n(\bar{y}_i, R_i) = \Theta_a^n(\bar{y}_i, R_i) P^n(\bar{y}_i, R_i).$$

Здесь $P^n(\bar{y}_i, R_i)$ — плотность вероятности образования некоторых n объектов с размерами R_i в точках \bar{y}_i , а всех остальных где угодно, но так, что они их не захватывают. Функция $\Theta_a^n(\bar{y}_i, R_i)$ равна единице, если объекты находятся в конфигурации a , и нулю в противном случае. Она проверяет выполнение условий (148) для каждой пары объектов. Так, в случае $j = 2$, $n = 2, 3$ для приведенных выше конфигураций

$$\begin{aligned}
\Theta_0^2 &= \theta(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| - R_2), \\
\Theta_1^2 &= \theta(R_2 - |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|), \\
\Theta_2^3 &= \theta(R_3 - R_2) \theta(R_3 - |\bar{y}_1 - \bar{y}_3|) \theta(|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| - R_3) \times \\
&\quad \times \theta(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| - R_2) + \theta(R_3 - R_1) \theta(R_2 - R_3) \times \\
&\quad \times \theta(R_3 - |\bar{y}_1 - \bar{y}_3|) \theta(|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| - R_2), \\
\Theta_3^3 &= \theta(R_3 - R_2) \theta(R_3 - |\bar{y}_2 - \bar{y}_3|) \theta(|\bar{y}_1 - \bar{y}_3| - R_3) \times \\
&\quad \times \theta(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| - R_2), \\
\Theta_4^3 &= \theta(R_3 - R_2) \theta(R_3 - |\bar{y}_2 - \bar{y}_3|) \theta(R_2 - |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|), \\
\Theta_5^3 &= \theta(R_2 - R_3) \theta(R_3 - R_1) \theta(R_3 - |\bar{y}_1 - \bar{y}_3|) \times \\
&\quad \times \theta(R_2 - |\bar{y}_2 - \bar{y}_3|), \\
\Theta_6^3 &= \theta(R_3 - R_2) \theta(R_3 - |\bar{y}_2 - \bar{y}_3|) \theta(R_3 - |\bar{y}_1 - \bar{y}_3|) \times \\
&\quad \times \theta(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| - R_2).
\end{aligned}$$

Соответствующие плотности вероятностей перехода имеют вид

$$\begin{aligned} W_0^2 &= \delta(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) \delta(\bar{x}_2 - \bar{y}_2), \\ W_1^2 &= f(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|, R_2) \delta(\bar{x}_2 - \bar{y}_2), \\ W_2^3 &= f(|\bar{x}_1 - \bar{x}_3|, R_3) \delta(\bar{x}_2 - \bar{y}_2) \delta(\bar{x}_3 - \bar{y}_3), \\ W_3^3 &= f(|\bar{x}_2 - \bar{x}_3|, R_3) \delta(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) \delta(\bar{x}_3 - \bar{y}_3), \\ W_4^3 &= f(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|, R_2) f(|\bar{x}_2 - \bar{x}_3|, R_3) \delta(\bar{x}_3 - \bar{y}_3), \\ W_5^3 &= f(|\bar{x}_1 - \bar{x}_3|, R_3) f(|\bar{x}_2 - \bar{x}_3|, R_2) \delta(\bar{x}_2 - \bar{y}_2), \\ W_6^3 &= f(|\bar{x}_1 - \bar{x}_3|, R_3) f(|\bar{x}_2 - \bar{x}_3|, R_3) \delta(\bar{x}_3 - \bar{y}_3). \end{aligned}$$

Каждому слагаемому в сумме (149) может быть сопоставлена диаграмма по следующим правилам:

- Составлена диаграмма по следующим правилам:

 - 1) каждой стрелке $i \rightarrow k$ ставится в соответствие множитель $f(|\bar{x}_i - \bar{x}_k|, R_i)$;
 - 2) вершине с $i \neq 1, \dots, j$, к которой не подходит ни одна стрелка, $i \rightarrow$, соответствует множитель $\delta(\bar{x}_i - \bar{y}_i)$;
 - 3) всей диаграмме с n вершинами дополнительно соответствует множитель $P_a^n(\bar{y}_i, R_i)$.

Интегрирование ведется по всем \bar{x}_i , \bar{y}_i и R_i , кроме $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j$ и $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_j$. В сумму (149) входят все возможные диаграммы, содержащие $n \geq j$ вершин, у которых:

4) в каждую вершину входит не более одной стрелки;

5) единственными вершинами, из которых не выходит ни одна стрелка, являются вершины $1, \dots, j$.

Тем самым в сумму входят только диаграммы, не содержащие петель и частей, не связанных с вершинами $1, \dots, j$. Все допустимые диаграммы с $n \leq 4$, вносящие вклад в парную ($j = 2$) корреляционную функцию, приведены на рис. 12б.

Суммируя все возможные диаграммы для данного j , мы получаем плотность вероятности найти в настоящее время j объектов данных размеров в данных точках. Таким образом, формула (149) и описанная выше диаграммная техника решают, в принципе, вопрос о вычислении конечной j -точечной корреляционной функции при условии, что известна плотность вероятности $P^n(\bar{y}_i, R_i)$ любого начального расположения произвольного числа n незахваченных объектов в момент их образования.

Величина $P^n(\bar{y}_i, R_i)$ характеризует вероятность данного взаимного расположения максимумов плотности различных размеров на линейной стадии и, как мы предполагаем, целиком определяется начальным спектром неоднородностей $|\delta_i(k)|^2$. Вычисление этой величины для произвольного спектра представляет собой отдельную задачу, которая здесь не рассматривается.

В дальнейшем мы будем использовать $P^n(\bar{y}_i, R_i)$ в простом случае, когда начальные корреляции между положениями всех образующихся объектов отсутствуют. Как можно показать, это упрощение не меняет формы парной корреляционной функции ξ в области сильных корреляций ($\xi \gg 1$). В этом случае при условии, что полное число образавшихся объектов велико, получаем

$$P^n(\bar{y}_i, R_i) = n(R_1) \dots n(R_n) \left\{ 1 - \epsilon(v) + \frac{1}{2} \epsilon^2(v) + O(\epsilon^3) \right\}, \quad (150)$$

где

$$\epsilon(v) = \int_{v(\bar{y}_i, R_i)} n(R) dR d\bar{y}.$$

Здесь интегрирование ведется по всей области v в пространстве (\bar{y}, R) , в которой расположены объекты, захватывающие хотя бы один из объектов (\bar{y}_i, R_i) ; $n(R) dR$ есть концентрация объектов с размерами в интервале от R до $R + dR$. Для масштабно-инвариантного спектра она дается формулой (131).

10.4. Парная корреляционная функция

Рассмотрим подробнее наиболее интересную с точки зрения наблюдений парную корреляционную функцию. Она вычисляется по формуле (149) при $j = 2$. В качестве P^n используем выражение (150). Заметим, что в интересующем нас случае небольших n величина $\epsilon(v)$ есть малый параметр, пропорциональный параметру газовости (13):

$$\epsilon(v) \leq \sum_{i=1}^n \int_{R_i}^{R_f} \frac{4}{3} \pi R^3 n(R) dR = 4\pi \beta \sum_{i=1}^n \ln \frac{R_f}{R_i}.$$

Все диаграммы, вносящие вклад в парную корреляционную функцию, состоят из одного или двух связных кусков и имеют вид, приведенный на рис. 13а. Нетрудно показать, что любая из этих диаграмм, содержащая "хвост" из k звеньев (или два хвоста, имеющих в совокупности k звеньев), составляет малую поправку порядка ϵ^k к аналогичной диаграмме без хвоста. Таким образом, все лидирующие члены в разложении по ϵ не имеют хвостов. Занумеруем эти диаграммы, начиная с главных по малому параметру ϵ так, как это сделано на рис. 13б.

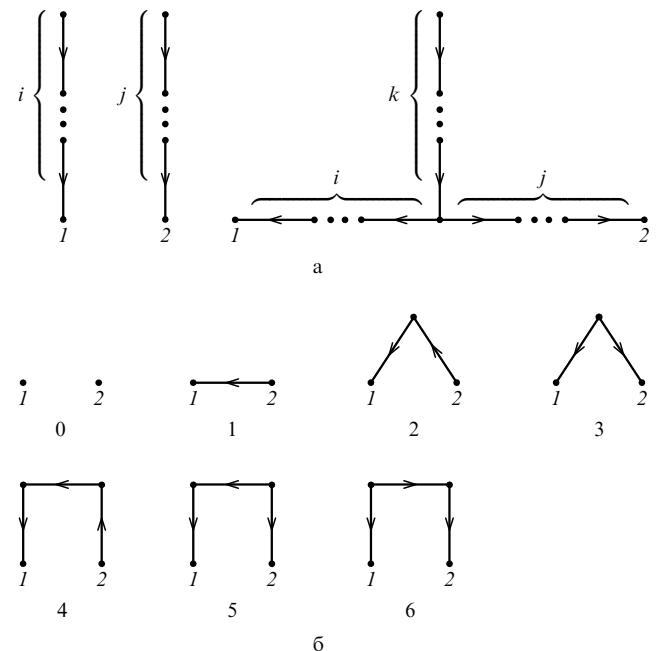


Рис. 13. (а) Общий вид всех диаграмм, вносящих вклад в парную корреляционную функцию ($i, j, k = 0, 1, 2 \dots$); (б) диаграммы для $j = 2, n = 4$, лидирующие по малому параметру ϵ

В силу однородности и изотропии статистики начальных возмущений искомая плотность вероятности (и парная корреляционная функция) зависит только от $r = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$. Нулевая диаграмма описывает вклад начальных корреляций объектов, не захваченных никакими другими. Поскольку в данном оценочном расчете мы начальными корреляциями пренебрегли, вклад этой диаграммы тривиален:

$$P_0(r, R_1, R_2) = n_1 n_2 \theta(r - R_2) \{1 + O(\epsilon)\}, \\ n_1 \equiv n(R_1), \quad n_2 \equiv n(R_2).$$

Первая диаграмма описывает вклад двойных систем:

$$P_1(r, R_1, R_2) = n_1 n_2 \theta(R'_2 - r) \frac{3 - \alpha}{3} (1 + z_2)^3 \left(\frac{r}{R'_2} \right)^{-\alpha}, \quad (151)$$

где $z_2 = R_2/R'_2 - 1 = (R_f/R'_2)^{(m+3)/(m+5)} - 1$ (см. (129)) есть красное смещение в момент образования большего объекта пары. При $r < R'_2$ и $R_1 \neq R_2$ именно эта диаграмма дает основной вклад в парную корреляционную функцию.

Следующие две диаграммы описывают вклад тройных систем:

$$P_2(r, R_1, R_2) = n_1 n_2 \frac{2}{3} \frac{3-\alpha}{m+5} A \left[\left(\frac{R'_2}{R'_1} \right)^{3-\alpha} - 1 \right] \times \beta (1+z_2)^3 \left(\frac{r}{R'_2} \right)^{3-2\alpha}, \quad r \ll R'_2, \quad (152)$$

$$P_3(r, R_1, R_2) = n_1 n_2 \frac{3-\alpha}{16\gamma} A \left[\frac{17}{6} + \frac{22}{\gamma-6} \right] \times \beta (1+z_2)^3 \left(\frac{r}{R'_2} \right)^{3-2\alpha}, \quad r \ll R'_2, \quad (153)$$

где $\gamma = (m+5)(3-\alpha) + 3$, A — константа порядка 1.

В (151)–(153) выписаны лидирующие члены разложения по ϵ . Можно показать, что других вкладов в корреляционную функцию, расходящихся при $r \rightarrow 0$, нет. Следует отметить, что при вычислении доминирующей диаграммы (151) не использовалась связь (130) между моментом образования объекта и его размером. Используя это, при рассмотрении главного вклада в корреляционную функцию мы можем не предполагать связь (130) и считать R_i и z_i независимыми характеристиками объектов.

Кроме того, мы можем не использовать предположения (150) об отсутствии корреляций в положениях образующихся объектов и рассмотреть случай произвольного $P^n(\bar{y}_i, R_i)$. Тогда вклад главной диаграммы примет вид

$$P_1(r, R_1, R_2) = C(R_1, R_2) n_1 n_2 \theta(R'_2 - r) \times \frac{3-\alpha}{3} (1+z_2)^3 \left(\frac{r}{R'_2} \right)^{-\alpha},$$

где

$$C(R_1, R_2) = \frac{3}{4\pi n_1 n_2 R_2^3} \int_{|\bar{y}_1| < R_2} P^2(\bar{y}_1, \bar{y}_2, R_1, R_2) d\bar{y}_1$$

— не зависящий от r фактор, учитывающий начальные корреляции. Таким образом, и в самом общем случае главный вклад в вероятность имеет вид (155) с точностью до не зависящего от r множителя C .

Отметим, что наблюдаемые объекты (такие, как скопления определенного богатства и т.п.) в действительности отвечают целому интервалу размеров от R_{i1} до R_{i2} (или, соответственно, масс от M_{i1} до M_{i2}) а, возможно, также и моментов образования. Поэтому более правильным, т.е. более соответствующим реальным наблюдениям, выражением, например для парной автокорреляционной функции, будет

$$\xi_i(r) = \frac{1}{n_i^2} \int_{R_{i1}}^{R_{i2}} \int_{R_{i1}}^{R_{i2}} P(r, R_1, R_2) dR_1 dR_2 - 1,$$

$$n_i = \int_{R_{i1}}^{R_{i2}} n(R) dR. \quad (154)$$

Для лидирующего члена в области сильных корреляций ($\xi_i \gg 1$) из (151), (154) получаем

$$\xi_i(r) = \left(\frac{ad_i}{r} \right)^\alpha, \quad (155)$$

где

$$a = \beta^{1/3} \left(1 - \frac{M_{i1}}{M_{i2}} \right)^{1/3} (3-\alpha)^{1/\alpha} (1+z_i)^{(3-\alpha)/\alpha}, \quad (156)$$

при условии, что диапазоны масс $M_{i2} - M_{i1}$ и времен образования $z_{i1} - z_{i2}$ достаточно узки. Здесь $d_i = n_i^{-1/3}$ — среднее расстояние между объектами,

$$d_i = R_{i1} \beta^{-1/3} \left(1 - \frac{M_{i1}}{M_{i2}} \right)^{-1/3}. \quad (157)$$

Через z_i обозначен средний момент образования рассматриваемых объектов: $M_{i1,2} = (4/3)\pi\rho_0 R_{i1,2}^3$. Отметим, что отношение барионных и темных компонент масс объектов в среднем одинаково, так что в (156) и (157) можно подставлять барионные массы M_{i1} и M_{i2} .

11. Заключение

В заключение остановимся кратко на некоторых астрофизических проявлениях обсуждавшихся процессов.

11.1. Гигантское гало галактик

Выше рассмотрены нелинейные структуры, возникающие в распределении темной материи. Наблюдающей же является барионная материя. Естественно предполагать, что в однородной Вселенной барионная и темная компоненты размешаны равномерно. Отношение их плотностей определяется параметром

$$P = \frac{\rho_b}{\rho_d}, \quad (158)$$

который является универсальной постоянной.

Заметим, что параметр P связан с другими универсальными константами соотношением

$$P = \frac{8\pi}{3} \frac{G\rho_b}{\Omega H^2}. \quad (159)$$

При $\Omega = 1$ и $50 \leq H \leq 100$ км с⁻¹ Мпк⁻¹ с учетом того, что $\rho_b \approx 3 \cdot 10^{-31}$ г см⁻³, получаем отсюда

$$0,02 \leq P \leq 0,08, \quad (160)$$

что находится в соответствии с современными представлениями [2].

В линейной стадии развития неоднородных структур во Вселенной после рекомбинации соотношение плотностей барионной и темной материи (158) сохраняется. В нелинейной стадии в распределении бездиссипативной материи формируются устойчивые сферически-симметричные образования БГС. При этом возникают и гравитационные потенциальные ямы. Барионный газ на нелинейной стадии разогревается вследствие сжатия и взрывов сверхновых. При этом он высвечивается, теряя энергию, и постепенно опускается на дно потенциальной ямы, формируя галактическую систему.

Таким образом, светящиеся галактики располагаются в центральной области сферически-симметричных структур из темной материи (БГС), которые образуют гигантское гало галактической системы. Гигантское гало темной материи было предсказано в работах [25, 41].

Определим размер гигантского гало [42]. Учтем, что, согласно (123), закон распределения плотности бездисси-

пативной материи в БГС имеет вид

$$\rho = Kr^{-\alpha}, \quad \alpha \approx 1,8.$$

Следовательно, полная масса темной материи в галактической БГС

$$M = \frac{4\pi}{3-\alpha} KR_g^{3-\alpha}, \quad (161)$$

где R_g — эффективный размер гало темной материи. Отсюда

$$R_g = \left[\frac{(3-\alpha)M}{4\pi K} \right]^{1/(3-\alpha)} = \left[\frac{(3-\alpha)M_G}{4\pi K P} \right]^{1/(3-\alpha)}. \quad (162)$$

Здесь M_G — наблюдаемая барийонная масса галактики, P — универсальный параметр (см. (159), (160)), константа K — характерный параметр, который может быть различным для разных галактик: он определяется масштабом галактик и моментом возникновения БГС.

Для определения константы K можно воспользоваться кривыми вращения, наблюдение которых позволило установить наличие скрытой массы в окрестности галактик. В частности, кривая вращения нашей Галактики показана на рис. 14. Штриховой кривой изображена теоретическая зависимость $V(r)$, построенная, согласно теореме вириала, при распределении плотности (123):

$$V^2 = (2-\alpha)\psi = \frac{4\pi}{3-\alpha} KG r^{2-\alpha}.$$

Постоянная K оказалась при этом равной

$$K \approx 1,7 \cdot 10^{16} \text{ г см}^{-1,2}. \quad (163)$$

Из (163) следует, что на расстоянии Солнца от центра Галактики $r_\odot = 8$ кпк плотность темной материи порядка $0,5 \text{ ГэВ см}^{-3}$. Это значение находится в соответствии с данными других авторов [43]. Подставляя (163) в (162), определим размер гигантского гало нашей Галактики:

$$R_g = R_G \left(\frac{5\%}{P} \frac{M_G}{3 \cdot 10^{44} g} \right)^{1/(3-\alpha)}, \quad R_G \approx 200 \text{ кпк}. \quad (164)$$

Отсюда видно, что размер гало нашей Галактики порядка 200 кпк.

Следует подчеркнуть, что закон распределения плотности темной материи в БГС (123) хорошо подтверждается кривыми вращения и других спиральных галактик (рис. 15). Определение же размеров гигантского гало приводит к значениям, аналогичным (164), однако с большим разбросом, связанным, главным образом, с различием в массах галактик [44].

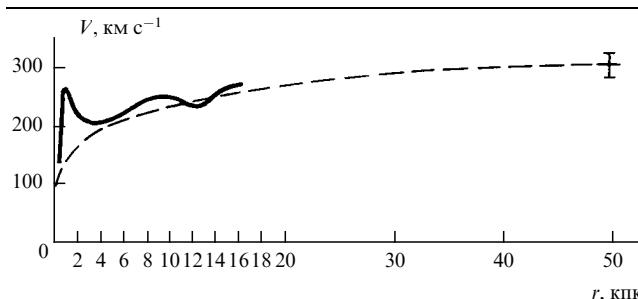


Рис. 14. Кривая вращения нашей Галактики. Штриховая кривая — теоретическая зависимость $V(r)$

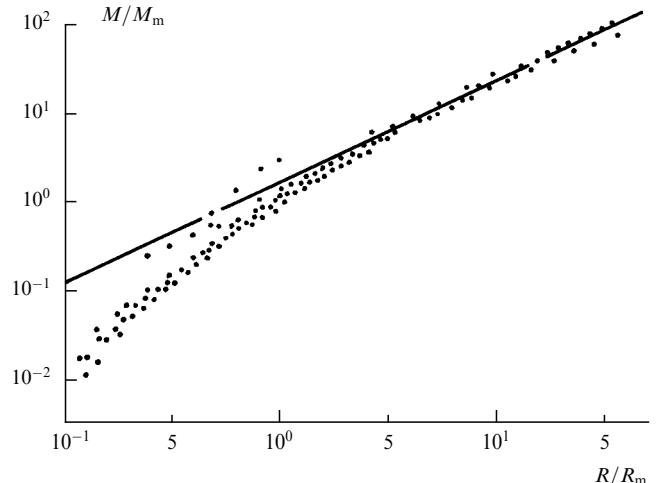


Рис. 15. Распределение динамической массы в окрестности спиральных галактик [39]. Сплошная кривая — теоретическая зависимость

Аналогичным образом определяется и момент рождения галактик z . Учитывая возрастание масштабов из-за хаббловского расширения от момента z до настоящего времени и принимая во внимание, что масштаб данной галактической системы в момент ее рождения z был равен $R_0 = R_g$, находим, что в настоящее время он равен

$$R = R_g (1+z).$$

С другой стороны, масштаб R можно легко выразить через барийонную массу галактики M_G :

$$M_G = \frac{4\pi}{3} \rho_b R^3, \quad R = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{M_G}{\rho_b} \right)^{1/3},$$

где $\rho_b \approx 3 \cdot 10^{-31} \text{ г см}^{-3}$ — средняя плотность барийонной материи в настоящее время. Отсюда следует, что

$$z = \frac{R}{R_g} - 1.$$

Для нашей Галактики это соотношение дает $z \approx 9$.

Отметим, что существование гигантского гало галактик размером (164) с распределением темной материи по закону (123) характерно лишь для объектов с полностью сформировавшимися БГС. Это условие отнюдь не всегда выполняется. Например, структура БГС нарушается во время столкновения галактик (подчеркнем, что столкновения галактик — это в первую очередь столкновения их БГС), в условиях сильного градиента гравитационного поля, а также для не полностью сформировавшихся объектов.

Последние могут наблюдаться в настоящее время, во-первых, в силу разброса по временам рождения галактик, а во-вторых, из-за того, что время установления БГС сильно зависит от структуры начальных флюктуаций: для возмущений, обладающих большим ε , т.е. сильно вытянутых или плоских, время установления БГС значительно больше, чем для начальных флюктуаций с малым ε (см. разделы 4, 6). Показателем установления БГС может служить, например, форма галактики: наиболее вероятно, что БГС еще не установилась в случае неправильных галактик. Поэтому соображения о структуре образований темной материи, высказанные в [45] на базе анализа динамики нескольких неправильных галактик, представляются недостаточно основательными.

В последнее время стали появляться наблюдательные подтверждения существования гигантского гало темной материи [46]. Кроме того, определенные указания на существование гигантского гало следуют из наблюдений гамма-всплесков. Этот вопрос кратко рассматривается в следующем разделе.

11.2. Гигантское гало нейтронных звезд (модель происхождения гамма-всплесков)

Хорошо известно, что в процессе формирования галактики изначальное барионное вещество, содержащее водород, гелий и небольшое количество легких элементов (см. раздел 1), обогащается тяжелыми элементами, рождающимися в ядерных реакциях в звездах. Весьма важно, что значительное обогащение происходит уже на очень ранней стадии протогалактики [47]. Обычно считается, что оно является результатом взрыва большого количества сверхновых.

Кроме изменения химического состава и разогрева первичного газа, сверхновые должны порождать реликтовые нейтронные звезды [48]. Эти нейтронные звезды практически не испытывают соударений. Следовательно, их динамика в процессе формирования галактической структуры совпадает с динамикой бездиссиликативной материи. А именно, они занимают область масштаба R_g , а их плотность ρ_N распределена по закону

$$\rho_N = \rho_{N_0} \left(\frac{r}{R_g} \right)^{-\alpha}, \quad \rho_{N_0} = \frac{3-\alpha}{4\pi R_g^3} N, \quad (165)$$

где N — полное число реликтовых нейтронных звезд.

В [42] указано на существование такого гало и высказано предположение о том, что реликтовые нейтронные звезды являются источником гамма-всплесков. Это позволяет объяснить основные статистические свойства гамма-всплесков: их высокую сферическую симметрию и значительную концентрацию к центру Галактики — так называемую $\log N - \log S$ -кривую. На рис. 16а данные наблюдений [49] сопоставлены с результатами расчета гамма-всплесков на основе распределения (165). Согласие в области ближних всплесков может быть улучшено, если принять во внимание рождение и разлет нейтронных звезд после взрывов сверхновых в Галактике в более позднее время (штриховая линия) [42].

Весьма важными для модели являются малые асимметрии в распределении гамма-всплесков, обусловленные двумя факторами. Во-первых, Солнце находится не в центре нашей Галактики, а сдвинуто относительно центра в галактической плоскости на расстояние $r_\odot = 8$ кпк. Во-вторых, асимметрия должна быть вызвана взаимодействием между гигантскими гало нашей Галактики и галактики M 34 (Андромеды), расположенной на расстоянии 600 кпк и движущейся по направлению к нам со скоростью 200 км s^{-1} . С учетом размеров гигантских гало обеих галактик их периферийная структура должна быть искажена вследствие взаимодействия.

Анализ современных данных, полученных на обсерватории COMPTON [50], показывает, что чувствительность BATSE позволяет наблюдать гамма-всплески с расстояний до 150–200 кпк. В наблюдательных данных видны как дипольные, так и локальные малые асимметрии, причем явно проявляется взаимодействие с гигантским гало Андромеды, так что они находятся в достаточно хорошем соответствии с моделью гигантского гало (рис. 16б) [51].

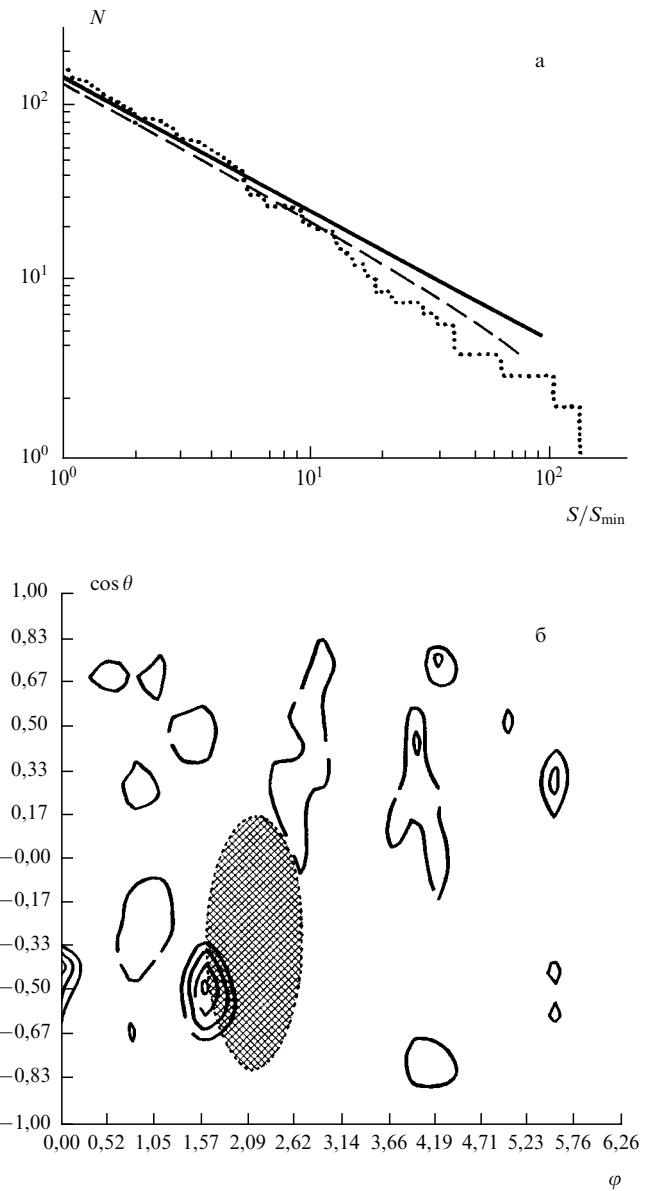


Рис. 16. (а) $\log N - \log S$ -кривая, вычисленная в соответствии с (165) в предположении "стандартной свечи"; точками показаны данные наблюдений [49]; (б) контуры флуктуаций числа источников гамма-всплесков, соответствующие 1, 2 и 3 σ ; точками показано гигантское гало темной материи Андromеды [50]

Таким образом, модель гигантского гало реликтовых нейтронных звезд, в основе которой лежит теория гигантского гало темной материи, позволяет достаточно хорошо описать не только сферическую симметрию и пространственное распределение гамма-всплесков, но и их малую асимметрию. Модель находится в достаточно хорошем соответствии с современными данными наблюдений.

11.3. Парная корреляционная функция

В разделе 10 было показано, что основной вклад в парную корреляционную функцию в области сильных корреляций ($\zeta \gg 1$) вносят двойные системы. Их вклад не только является главным по параметру β , но и наиболее быстро растет с уменьшением расстояния r .

Из (155) вытекает, что установившаяся парная корреляционная функция галактик, скоплений, сверхскоплений и т.д. должна расти с уменьшением расстояния как

$r^{-\alpha}$, где $\alpha \approx 1,8$ — универсальный скейлинговый параметр, определяющийся законами трехмерного нелинейного сжатия самозахваченной бездиссипативной темной материи. Как хорошо известно, такая зависимость полностью согласуется с данными наблюдений парных корреляционных функций галактик и скоплений [52]. Из примеров, приведенных на рис. 17, видно хорошее согласие теории и наблюдений.

В последние годы такая же зависимость парной корреляционной функции обнаружена и у других объектов: групп галактик, квазаров, разного вида скоплений. Можно, следовательно, утверждать, что излагавшаяся выше теория нелинейного сжатия [26–30] находит свое подтверждение в наблюдательных данных. Кроме того, поскольку при выводе закона (123) существенно использовалась малость тепловых скоростей частиц темной материи, можно считать, что наблюдения косвенным образом свидетельствуют о том, что темная материя является холодной.

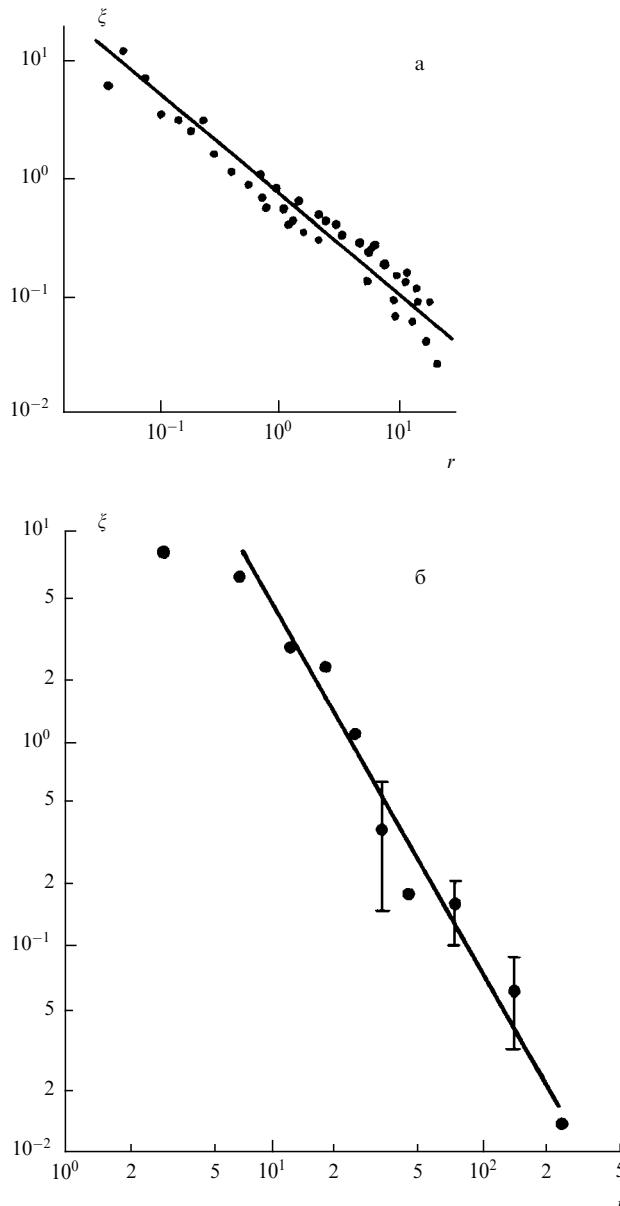


Рис. 17. Корреляционные функции галактик (а) и скоплений галактик (б)

В области больших значений корреляционной функции, кроме скейлингового закона (155), наблюдается зависимость ее амплитуды от среднего расстояния между объектами. На рис. 18 приведены данные наблюдений, взятые из [53]. В диапазоне масштабов $20h^{-1} < d_i < 80h^{-1}$ Мпк наблюдается рост амплитуды корреляционной функции A_i по закону

$$A_i = \xi_i(1 \text{ Мпк}) = (0,4d_i)^{1.8}. \quad (166)$$

Как указывалось выше, объекты этих размеров еще не прошли до конца (или прошли совсем недавно) нелинейную стадию эволюции, т.е. красное смещение в момент их образования невелико и лежит где-то в интервале $0 < z_i < 0,5$. В этом случае разброс z_i несуществен, и зависимость A_i от d_i , следующая из теоретических формул (155), (156), находится в соответствии с наблюдаемой зависимостью (166).

Из закона (166), как видно из рис. 18, выпадают галактики: амплитуда их корреляционной функции оказывается заметно выше. Тот же эффект, но в меньшей степени заметен для квазаров. Однако галактики возникают существенно раньше остальных объектов, приведенных на рис. 18. Полагая в (156) среднее красное смещение в момент образования галактик $z_g \approx 5 - 8$, а для квазаров $z_q \approx 1,5 - 2$, мы получаем соответствие с наблюдениями. Отметим вместе с тем, что константа 0,4 в экспериментальном законе (166) оказывается примерно в два раза выше полученной из (155), (156) при $z_i < 0,5$.

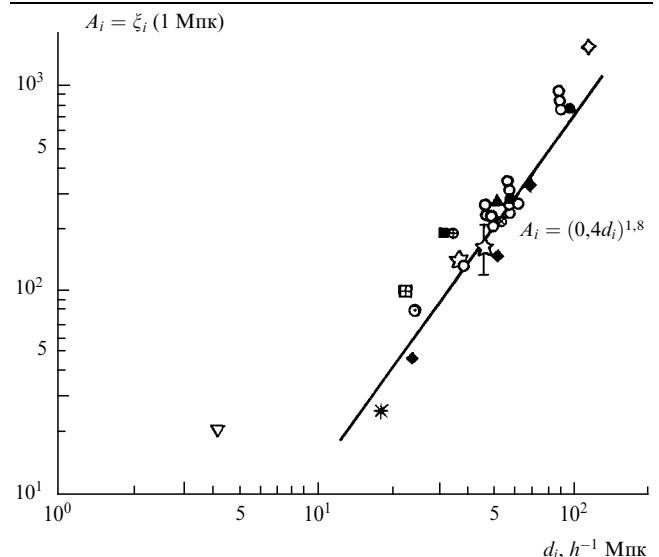


Рис. 18. Зависимость амплитуды парной корреляционной функции от среднего расстояния между объектами, взятая из работы [53]

До сих пор мы обсуждали лишь главный вклад в корреляционную функцию в области ее больших значений ($\xi \gg 1$), где и справедлива полученная выше формула (155). Этот вклад связан только с двойными системами.

Следующий по параметру β вклад в ξ зависит от расстояния как $r^{3-2\beta}$. Этот вклад мал, если корреляционная функция вычисляется усреднением по достаточно большой области пространства. Однако он может стать сравнимым по величине с главным вкладом, если рассматривается, например, только корреляция объектов

одного типа в близкой окрестности их крупного скопления. В этом случае зависимость $r^{-\alpha}$ при уменьшении ζ должна меняться на $r^{3-2\alpha}$.

Любопытно, что похожее изменение наклона действительно наблюдается в корреляционных функциях галактик, входящих в скопления [54]. Однако для достоверного сравнения необходимо как увеличение количества наблюдательных данных, так и дальнейшее развитие изложенной здесь теории. В частности, для вычисления корреляционной функции в области значений $\zeta \sim 1$ требуется точный учет начальных корреляций и распределения объектов по временам их образования.

Важно подчеркнуть, что в парной корреляционной функции ярко проявляются именно свойства БГС не только в силу того, что они имеют наиболее высокую особенность в сжатии плотности, но и в силу их сферической симметрии. Вклад других крупномасштабных структурных особенностей — "нитей", "блинов" (см. раздел 7) в парной корреляционной функции много слабее в силу усреднения по направлениям.

Существенный интерес представляет поэтому исследование высших корреляций. Так, тройная корреляционная функция зависит уже от двух векторов: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$. Наличие структур типа "нитей" или "блинов" должно выделяться в ней в виде особенности в тройной корреляционной функции $\xi^{(3)}$ в зависимости от угла θ между векторами \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 : расходимость в $\xi^{(3)}$ возникает при $\theta \rightarrow 0$.

Аналогичные особенности, разумеется, будут проявляться и при более высоких корреляциях. Следует надеяться, что развитие техники наблюдений и обработки позволит выделить указанные особенности высших корреляционных функций в наблюдательных данных.

11.4. Центр БГС

Наряду с гигантским гало сформировавшаяся БГС имеет и четко выделенный центр — сингулярность плотности (123). Наличие сингулярности имеет важное значение для диагностики темной материи [55]. Действительно, хотя сечение взаимодействия частиц темной материи друг с другом крайне мало, но, независимо от природы темного вещества, поток излучения, наблюдаемый при этом взаимодействии,

$$F \propto \int \sigma \rho^2 d^3 r, \quad (167)$$

где σ — сечение взаимодействия частиц. Подставляя в (167) выражение (123) для плотности, мы видим, что интеграл (167) расходится при $r = 0$, т.е. в центре БГС.

Таким образом, основной поток излучения, по которому можно диагностировать темную материю, связан с центром БГС. Именно в центре следует ожидать наибольшего эффекта. Поток излучения определяется обрезанием закона роста плотности БГС (123). Сам факт обрезания расходимости плотности (123) зависит прежде всего от того, на какой стадии иерархии возникла данная БГС.

Так, если БГС успела развиться из максимумов масштаба $k = k_{\max}$, то область обрезания крайне мала: она определяется затухающей модой в начальном спектре флуктуаций (см. Приложение). Если же БГС еще не успела сформироваться, то радиус обрезания особенности определяется настоящим моментом времени, уменьшаясь с течением времени.

В [54] в предположении, что БГС нашей Галактики успела развиться, были проведены вычисления ожидаемого потока излучения от центра. При этом в качестве кандидатов на темную материю рассматривались слабовзаимодействующие суперсимметричные частицы. Было показано, что наиболее сильное обрезание сингулярности БГС в нашей Галактике может дать массивная черная дыра. Из сопоставления предсказываемого потока излучения с наблюдениями получены ограничения на массу суперсимметричных частиц.

Наличие сингулярности имеет важное значение и для динамики протогалактического барионного газа. Как указывалось выше, плотность барионного вещества составляет лишь несколько процентов от плотности темного. Поэтому на первоначальном этапе барионный газ движется в заданном поле БГС, опускаясь на дно потенциальной ямы.

При этом его плотность вблизи особенности сильно возрастает и его движение носит здесь всегда потенциальный характер. Вследствие этого в области вблизи центра образуется массивная протозвезды. Ядерные процессы в таких объектах, как известно [56], протекают очень быстро, приводя к образованию гигантской черной дыры. Оценка массы возникающей черной дыры дана в [28].

Можно отметить и другие предсказания теории, заслуживающие детальной проверки путем сопоставления с наблюдательными данными. Это, во-первых, гигантское гало у установившихся скоплений с распределением плотности темной материи согласно закону (123). Существование такого гало должно проявляться в "кривых вращения" галактик или других объектов, захваченных в гравитационном поле гало. Масштаб этого гало оценивается в 2–5 Мпк. Во-вторых, это описанные в разделе структуры типа "блинов", "нитей", "узлов", а также структура наиболее крупномасштабных объектов, еще не достигших первичных особенностей (объекты типа гигантского аттрактора [40]).

Укажем также на существование качественных различий областей пространства, входящих или не входящих в гигантское гало галактик. В силу хаббловского расширения плотность темной материи, а следовательно, и средняя плотность барионной материи сильно различаются в этих областях. Это различие способно проявиться в образовании конденсированных объектов, например малых галактик. Оно может быть исследовано, в частности, на примере ближнего космического пространства нашей Галактики и ее ближайших соседей¹. Возможны, в принципе, и прямые экспериментальные наблюдения взаимодействия планет с темной материи [57]².

В заключение подчеркнем, что аналитическая теория крупномасштабной структуры вещества, изложенная в этом обзоре, развита в настоящее время далеко не полностью. Среди многих вопросов, ждущих дальнейшего рассмотрения можно упомянуть следующие.

1. Нужно расширить решение динамической задачи об образовании БГС на случай произвольного значения параметра ε , подробнее учесть влияние анизотропии

¹ На это обстоятельство указал Г.В. Чубисов.

² Отметим, что при оценке константы в [57] допущена численная ошибка. Несмотря на это понижение константы, эффект остается в пределах возможности наблюдений.

начальных данных, детально рассмотреть процесс трехмерного размешивания. Для решения этих задач требуется более эффективное использование численных методов.

2. Целесообразно изучить процесс столкновительной релаксации. Подчеркнем, что речь идет о столкновениях галактических систем: в первую очередь о столкновениях гигантских гало темной материи. Влияние барионной материи и, в частности, барионного газа при этом может быть весьма существенным: барионная материя, определяя диссипацию, не может не оказаться и на общей динамике процесса.

3. Необходимо расширить статистическую теорию как с учетом начальных корреляций, так и с учетом корреляций высшего порядка, выделив особенности корреляционных функций третьего и четвертого порядков, соответствующие динамическим структурам типа "нити", "блины" (см. раздел 9). Не менее важно, разумеется, выделить эти же особенности высших корреляционных функций и в данных наблюдений.

Можно указать и другие интересные проблемы. Но, по-видимому, наиболее важно найти возможность правильного соединения аналитической теории с методами прямого численного моделирования. Именно на этом пути можно ожидать наибольшего успеха в дальнейшем развитии теории.

Авторы выражают признательность В.Л. Гинзбургу за полезное обсуждение и постоянный интерес к работе, Д.А. Киржицу, М.И. Зельникову, Ю.В. Медведеву за полезное обсуждение и В.А. Сирота за помощь при подготовке работы к печати.

Работа финансировалась грантом № 93-02-17065 Российского фонда фундаментальных исследований.

Приложение. Влияние затухающей моды на формирование БГС

Рассматривая нелинейную теорию растущей моды возмущения, мы полностью исключили из рассмотрения затухающую моду, существенно сужив, таким образом, класс начальных условий. Действительно, произвольные начальные условия определяются четырьмя скалярными функциями $\delta_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$, в то время как для растущей моды — всего одной. Однако, поскольку разделение на растущую и затухающую моды возможно лишь на линейной стадии, необходимо рассмотреть влияние всевозможных неучтенных нами возмущений на решение (123).

Скорость частиц в затухающей моде имеет вид

$$\mathbf{v} = -\dot{D}_2(t) \frac{a(t)}{E} \left\{ \dot{D}_1(i) \int d^3x' \delta_i(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} - D_1(i) \frac{\mathbf{v}_i^d}{a(t)} \right\} + \mathbf{v}_i^r \frac{a_i}{a(t)}. \quad (\text{П.1})$$

Ограничимся сначала безвихревым движением, т.е. положим $\mathbf{v}_i^r = 0$. Будем интересоваться решением (П.1) в малой окрестности рассмотренного ранее эффективного максимума плотности. Тогда в общем случае скорость \mathbf{v} можно разложить в ряд Тейлора. Ограничиваюсь линейными членами, получаем

$$u_x = U_{z,\beta} x_\beta,$$

где скорость u_x и координата x_z обезразмерены аналогично (46).

Соотношение (П.1) справедливо лишь до тех пор, пока $\delta < 1$. При $\delta \geq 1$ необходимо рассматривать сжимающееся решение, описываемое соотношениями (51). Характерный тензор $U_{z,\beta}$ на момент, когда $\delta = 1$, обозначим через ϵ . Он зависит от темпа расширения Вселенной и от амплитуды флуктуаций δ_i . Для $\Omega = 1$ имеем

$$\epsilon \approx \delta_i^{3/2} \ll 1. \quad (\text{П.2})$$

Из анализа решения (П.1) следует, что без ограничения общности можно рассматривать такие начальные значения поля скоростей затухающей моды, для которых $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Тогда, приводя матрицу $U_{z,\beta}$ к диагональному виду (учитывая, что $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$), получаем

$$u_x = \frac{\epsilon}{3} x, \quad u_y = -\frac{2}{3} \epsilon y, \quad u_z = \frac{\epsilon}{3} z. \quad (\text{П.3})$$

Выписывая соотношения (П.3), мы направили по оси z градиент поля скоростей вблизи точки максимума плотности $r = 0$. Исследуем теперь, как влияет задание в момент $t = t^*$ ($\delta = 1$) начальной скорости (П.3) на процесс сжатия сгустка, обусловленный нарастающей модой. Поскольку нас интересует окрестность $r = 0$, разложим на стадии сжатия решение (51) вблизи этой точки:

$$\mathbf{v} = -\frac{2}{3} \frac{\mathbf{r}}{1 - \tau}, \quad \rho = \frac{2}{3(1 - \tau)^2}. \quad (\text{П.4})$$

Здесь величина r нормирована на a, τ — на t_c .

Вычитая (П.4) из полной гидродинамической системы (28) и обозначая разницу как $\delta \mathbf{v}, \delta \rho, \delta \psi$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \mathbf{v} - \frac{2}{3(1 - \tau)} (\mathbf{r} \nabla) \delta \mathbf{v} + \frac{2}{3(1 - \tau)} \delta \mathbf{v} + \nabla \delta \psi + \\ + (\delta \mathbf{v} \nabla) \delta \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \rho + \frac{2}{3(1 - \tau)^2} (\nabla \delta \mathbf{v}) - \frac{2}{3(1 - \tau)} \nabla (\mathbf{r} \delta \rho) + \\ + \nabla (\delta \rho \delta \mathbf{v}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Начальные условия к (П.5) заданы в (П.3). Будем искать решение системы (П.5) в виде

$$\delta v_k = r_k h_k \eta^4, \quad \delta \rho = q(\eta) \eta^4, \quad \nabla \delta \psi = \frac{1}{3} \mathbf{r} \delta \rho, \quad (\text{П.6})$$

где $\eta = (1 - \tau)^{-1/3}$, а суммирования по k нет.

Подставляя (П.6) в (П.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} h_k + h_k^2 + \frac{1}{3} q \eta^{-4} = 0, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} q - \frac{2q}{3\eta} + q \sum_k h_k + \frac{2}{3} \eta^2 \sum_k h_k = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Так как, согласно (П.2), $\epsilon \ll 1$, достаточно рассмотреть линейное решение системы (П.7). Опуская в (П.7) нелинейные члены и подставляя начальные условия (П.3), имеем

$$\begin{aligned} \delta \rho = 0, \quad \delta v_k = g_k r_k (1 - \tau)^{-4/3}, \\ g_1 = \frac{\epsilon}{3}, \quad g_2 = -\frac{2}{3\epsilon}, \quad g_3 = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Таким образом, как видно из (П.8), в линейном приближении плотность не нарастает, $q = 0$, но скорость

растет быстрее, чем скорость основного потока (П.4), и вблизи особенности значительно превышает ее.

Рассмотрим, поэтому, нелинейное решение системы (П.5), полагая $\eta \rightarrow \infty$. Из первого уравнения системы (П.7) в асимптотике получаем

$$\frac{1}{3} \frac{\partial h_k}{\partial \eta} + h_k^2 = 0. \quad (\text{П.9})$$

Уравнение (П.9) описывает кинематическое движение частиц. Его решение имеет вид

$$h_k(\eta) = \frac{h_k(0)}{1 + 3h_k(0)(\eta - 1)}. \quad (\text{П.10})$$

Для нас существенно, что по координате u возмущения нарастают быстрее, чем по двум другим координатам. При $\eta = 1 + \epsilon/2$, как видно из начальных условий (П.3), в решении (П.10) возникает особенность. Эта особенность (см. (П.9)) обусловлена нелинейным кинематическим опрокидыванием. Она является одной из возможных лагранжевых особенностей [25]. Это означает, что рассмотренная нами центральная особенность (123) размывается в некоторой малой окрестности $r = 0$ в результате кинетического размешивания. Энергетическая оценка показывает, однако, что характерный размер δr размытой области крайне мал:

$$\delta r \approx \epsilon^2 = \delta_i^3. \quad (\text{П.11})$$

Следовательно, в реальных физических условиях этот процесс мало существен.

В заключение заметим, что учет малых роторных скоростей v_i^r приводит к аналогичной малой области сглаживания центра БГС.

Список литературы

1. Zwicky F *Helv. Phys. Acta* **6** 110 (1933)
2. Walker T, Steigman G, Shramm D N, Olive K A, Kang H S *Astrophys. J.* **376** 54 (1991)
3. Peebles P J E *Nature* **321** 27 (1986)
4. White S D M, Davis M, Efstathiou G, Frenk C S *Nature* **330** 451 (1987)
5. Smoot G F, et al. *Astrophys. J. Lett.* **396** 1 (1992)
6. Шандарин С Ф, Дорошкевич А Г, Зельдович Я Б УФН **24** 46 (1983)
7. Peebles P J E *Astrophys. J.* **263** 1 (1982)
8. Primack J R, Blumenthal G R *Formation and evolution of galaxies and large structures in the universe* (Ed. Tran J T V) (Dordrecht: Reidel, 1983) p. 163
9. Bond J R, Efstathiou G *Astrophys. J.* **285** L.1 (1984)
10. Zel'dovich Ya B *Adv. Astron. Astrophys.* **3** 241 (1965)
11. Harrison E R *Rev. Mod. Phys.* **39** 862 (1967)
12. Линде А Д *Физика элементарных частиц и инфляционная космология* (М.: Наука, 1990)
13. Davis M, Efstathiou G, Frenk C S, White S D M *Astrophys. J.* **292** 371 (1985)
14. Bertschinger E, Gelb J M *Comput. Phys.* **5** 164 (1991)
15. Park C, Gott J R *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **249** 288 (1991)
16. Cen R *Astrophys. J. Suppl.* **78** 341 (1992)
17. Ostriker J P, in *Ann. Rev. of Astron. Astrophys.* (N.Y.: Pergamon Press, 1992) p. 689
18. Myers S T, Readhead A C S, Lawrence C R *Astrophys. J.* **405** 8 (1993)
19. Primack J R, Holtzman J, Klypin A, Caldwell D O, Submitted to *Phys. Rev. Lett.*
20. Chandrasekar S, Munch G *Astrophys. J.* **115** 103 (1952)
21. Пийблс Ф Дж Э *Структура Вселенной в больших масштабах* (М.: Мир, 1983)
22. Sirovich L, Smith L, Yakot V *Phys. Rev. Lett.* **72** 334 (1994)
23. Зельдович Я Б *Астрофизика* **6** 319 (1970)
24. Арнольд В И *Труды семинара им. И.Г.Петровского* **8** 21 (1982)
25. Arnold V I, Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **20** 111 (1982)
26. Гуревич А В, Зыбин К П *ЖЭТФ* **94** (1) 3 (1988)
27. Гуревич А В, Зыбин К П *ЖЭТФ* **94** (10) 5 (1988)
28. Гуревич А В, Зыбин К П *ЖЭТФ* **97** (1) 20 (1990)
29. Гуревич А В, Зыбин К П, Медведев Ю В *ЖЭТФ* **104** (4) 3369 (1993)
30. Гуревич А В, Зельников М И, Зыбин К П *ЖЭТФ* [в печати]
31. Durrer R *Astron. Astrophys.* **208** 1 (1989)
32. Ландау Л Д, Лишин Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986)
33. Хокинг Р, Иствуд Дж *Численное моделирование методом частиц* (М.: Мир, 1987)
34. O'Neil T *Phys. Fluids* **8** 2285 (1965)
35. Лишинец Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1976)
36. Гуревич А В, Зыбин К П, Медведев Ю В *Препринт*, № 35 (М.: ФИАН, 1994).
37. Bahcall N A, Cen R *Astrophys. J.* **407** L49 (1993)
38. Bardeen J M, Bond J R, Kaiser N, Szalay A S *Astrophys. J.* **304** 15 (1986)
39. Burstein D, Rubin V C *Astrophys. J.* **297** 423 (1985)
40. Dressler A *Scientif. American* **257** (3) 12 (1987)
41. Gurevich A V, Zybin K P, in *IAU Symp. "The Disk — Halo Connection in Galaxies"* (Ed. Bloeman) (June, Netherland, 1990)
42. Гуревич А В, Бескин В С, Зыбин К П, Птицын М О *ЖЭТФ* **103** (6) 1873 (1993)
43. Flores R A *Phys. Lett. B* **215** 73 (1988)
44. Gurevich A V, Zybin K P, Sirota V A *Phys. Lett. A* [in press]
45. Flores R A, Primack J R *Astrophys. J.* **427** L1 (1994)
46. Zaritsky D, White S D M *Astrophys. J.* **435** 599 (1994)
47. Марочник Л С, Сучков А А *Галактика* (М.: Наука, 1984)
48. Имшеник В С, Надежин Д И *Современные проблемы физики и эволюции звезд* (Ред. А Г Масевич) (М.: Наука, 1989)
49. Meegan C A, Fishman G J et al. *Nature* **355** 143 (1992)
50. Bhat P N, Fishman G J et al. *Nature* **359** 217 (1992)
51. Gurevich A V, Zharkov G F, Zybin K P, Ptitsyn M O *Phys. Lett. A* **192** 305 (1994)
52. Bahcall N A, Soneira R M *Astrophys. J.* **270** 20 (1983)
53. Bahcall N A, West M J *Astrophys. J.* **392** 419 (1992)
54. Einasto M *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **258** 571 (1992)
55. Berezinsky V S, Gurevich A V, Zybin K P *Phys. Lett. B* **294** 221 (1992)
56. Bond J R, Arnett W D, Carr B J *Astrophys. J.* **280** 825 (1984)
57. Braginskii V B, Gurevich A V, Zybin K P *Phys. Lett. A* **171** 275 (1992)
58. Moutarde F, Alimi J M, Bouchet F R, Pellat R *Astrophys. J.* **441** 10 (1995)

LARGE SCALE STRUCTURE OF THE UNIVERSE. ANALYTICAL THEORY

A.V. Gurevich, K.P. Zybin

P.N. Lebedev Institute of Physics, Russian Academy of Sciences

Leninskii prosp. 53, 117924 Moscow

Tel. (7-095) 132-64 14, 132-60 50, 132-61 71; E-mail: alex@td.lpi.ac.ru; zybin@td.lpi.ac.ru

The analytical theory of the nonlinear stage of Jeans instability in a cold nondissipative gas in an expanding Universe is developed. It is shown that the development of this instability leads to giant dark matter halo formation (on a scale of 200 kpc). This halo has a singularity of density $\rho \propto r^{-\alpha}$, $\alpha \approx 1, 7-1, 9$. A comparison of analytical theory with numerical simulations is made, and a good agreement is established. On the basis of analytical dynamical solution the statistical method for calculation of galaxies and clusters correlation functions is developed. The comparison with observational data is achieved. The astrophysical consequence of the developed theory is discussed.

PACS numbers: **98.65.-r**, 98.80.Bp, 98.80.Hw, **98.90.+s**

Bibliography — 58 references

Received 14 March 1995