

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЦЕПЦИИ ФРАКТАЛА В ФИЗИКЕ КОНДЕНСИРОВАННОЙ СРЕДЫ

А.И. Олемской, А.Я. Флат

(Сумский государственный университет, Украина;
Научно-производственное предприятие РЭТО, Томск, Россия)

(Статья поступила 16.06.93 г., после доработки 24.09.93 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение (1).
2. Монофракталы (3). 2.1. Геометрические модели фракталов. 2.2. Определение фрактальной размерности. 2.3. Экспериментальные методы определения фрактальной размерности. 2.4. Примеры использования концепции фрактала.
3. Мультифракталы (19). 3.1. Геометрический подход. 3.2. Термодинамическое описание мультифракталов. 3.3. Примеры использования концепции мультифрактала.
4. Заключение (46).
- Примечания (49).
- Список литературы (49).

1. Введение. Понятие фрактала, осознанное уже в начале века и популяризуемое Мандельбротом с 60-х годов [1], получило широкое распространение в различных областях знания (см. [2–25]). К настоящему моменту вышло несколько книг и обзоров [2–9]. Однако использованию концепции фрактала в физике конденсированной среды (и особенно твердого тела) уделяется, на наш взгляд, недостаточное внимание. По-видимому, это связано с необычностью геометрического образа фрактала, для представления которого требуется использовать весьма непривычные, на первый взгляд абстрактные понятия. Кроме того, в физике твердого тела реальные фрактальные образования типа дислокационных структур [12] и фрактальных скоплений микротрещин [13] стали объектом внимания исследователей только в самое последнее время — после введения концепции масштабных (структурных) уровней деформации и разрушения [14].

Характерная особенность таких образований состоит в том, что фрактальная структура проявляется только при совместном разрешении нескольких уровней, разница масштабов которых затрудняет представление наглядного геометрического образа типа изрезанной береговой линии. Однако, хотя наблюдение самих многомасштабных структур затруднительно, их последовательное описание может быть достигнуто только в рамках фрактальной идеологии. Это связано с тем, что такие неравновесные системы представляются как суперансамбли, состоящие из иерархически соподчиненных статистических ансамблей, которые в свою очередь состоят из набора подансамблей и т.д. [15]. Поэтому, говоря о фракталах в конденсированной среде, следует иметь в виду скорее использование концепции, а не описание наблюдаемого геометрического образа. Это обстоятельство, представляющее центральную идею нашего изложения, отражено в названии.

Вместе с тем не следует забывать, что первоначально фрактал был введен как геометрический объект в обычном физическом пространстве [1, 2]. Поэтому с методической точки зрения целесообразно начать рассмотрение с наглядных построений: Коха и Кантора (раздел 2.1.1). Их выбор обусловлен тем, что в первом случае фрактальная размерность D больше топологической d , а во втором $D < d$. Постепенным усложнением процедуры построения

фрактала удастся найти общее выражение для фрактальной размерности произвольного монофрактала, характеризуемого единственным значением D . Сама схема построения наглядно представляется иерархическим деревом Кейли, рассмотрению которого посвящен раздел 2.1.2. Оказывается, что введение метрики на этом дереве позволяет найти расстояние между любыми точками множества. Поскольку его величина задается ветвистостью дерева, то это означает, что она определяет размерность соответствующего фрактала. Данный результат оказывается верным как для регулярного дерева с постоянной ветвистостью, так и для фрактального, где ее величина изменяется от узла к узлу, и можно говорить лишь о средней ветвистости. Вопросы, связанные с ее определением, рассматриваются в конце раздела 2.1.2 и в разделе 3.3.2.

Центральное место в теории фракталов занимает вопрос об определении их размерности D . Для простейших образований в разделах 2.1.1, 2.1.2 используются наглядные методы. Однако при переходе к общему случаю они отказывают, и встает вопрос о нахождении алгоритма определения фрактальной размерности произвольного множества. Для его построения в разделе 2.2 излагается формальная процедура определения длины, площади и объема обычной поверхности. Показано, что ее обобщение на произвольное множество позволяет ввести производящую функцию, условие конечности которой и задает фрактальную размерность D . Основные методы экспериментального определения последней представлены в разделе 2.3.

Изложение материала раздела 2, посвященного монофракталам, завершается в разделе 2.4 рассмотрением конкретных физических ситуаций. Исследование простейшей модели неидеальной памяти в разделе 2.4.1 показывает, что ее описание требует обобщения понятия степени интеграла и производной на дробные числа. С физической точки зрения такое понижение порядка интегрирования/дифференцирования связано с выключением части параллельно действующих каналов памяти. Подобная ситуация наблюдается также, если параллельно действуют бездиссипативные динамические и диссипативные термодинамические каналы. В этом случае увеличение доли первых приводит к постепенной трансформации уравнения типа теплопроводности в волновое уравнение. Характер временной эволюции таких неравновесных систем описан в разделе 2.4.2.

Как показывает опыт исследования турбулентности (см., например, [8,9]), фрактальные множе-

ства, представляющие реальные физические образования и процессы, характеризуются не одним значением размерности D , а целым их спектром. Это приводит к необходимости введения концепции мультифрактала, который можно представить как суперпозицию монофракталов с разными величинами D . Раздел 3 посвящен исследованию таких множеств. В силу существенного усложнения самого понятия мультифрактала в сравнении с монофракталом (первый в отличие от второго нельзя изобразить в виде регулярного дерева Кейли) уровень изложения в разделе 3 оказывается с неизбежностью выше, чем в разделе 2. Поэтому было сочтено удобным автономное изложение материала по моно- и мультифракталам.

При изложении концепции мультифрактала мы исходили из того факта, что возможны два пути его генерации: 1) геометрическое построение, в процессе которого исходный фрагмент делится на несколько блоков, число и взаимное положение которых затем изменяются, и процесс многократно повторяется; 2) метод свертывания, где в отличие от предыдущего построения остаются постоянными как число блоков, так и полная величина их физической меры (например, масса); сам же процесс построения сводится к сжатию блоков (свертыванию). В соответствии с этим имеются также два метода описания мультифрактальных множеств: геометрический, изложению которого посвящен раздел 3.1, и термодинамический (раздел 3.2). В рамках первого основное внимание сосредотачивается на исследовании распределения расстояний между точками множества, а во втором — на распределении меры на этих точках.

Так же как и при рассмотрении монофракталов, мы начинаем изложение раздела 3 с исследования простейшего двухмасштабного мультифрактала Кантора (раздел 3.1.1). Это позволяет в рамках аналитического подхода исследовать спектр размерностей, проследить, каким образом происходит формирование мультифрактала из набора монофракталов, а также наглядно определить необходимый набор характеристик мультифрактального множества. Раздел 3.1.2 посвящен обобщению результатов, полученных для канторовского множества, на произвольный случай. Показано, что при этом возможны два способа определения меры: один обобщает на мультифрактальные множества понятие производящей функции, введенной в разделе 2.2, второй учитывает, что после сколь угодно мелкого дробления несущего пространства в некоторые блоки может попадать более одной точки

фрактального множества (последнее приводит к появлению дополнительного свободного параметра τ). В разделе 3.1.2 устанавливаются основные соотношения между спектральными характеристиками мультифрактала, а в разделе 3.1.3 исследуются их характерные особенности.

Термодинамический формализм, изложенный в разделе 3.2, позволяет описать мультифрактальное множество по аналогии со статистическим ансамблем многих частиц. Для реализации такого подхода достаточно предположить, что набору элементарных расстояний между точками множества отвечает спектр эффективных энергий, а свободный параметр мультифрактала, определяющий "координату" одного из формирующих его монофракталов, сводится к термодинамическому параметру состояния. Как и в обычной термодинамике, здесь оказываются возможными два взаимно дополнительных подхода, связанных преобразованием Лежандра. В разделе 3.2.1 изложен формализм, отвечающий выбору температуры в качестве независимого параметра. Оказывается, такой подход описывает множество с постоянной вероятностью реализации меры. Если в качестве свободного параметра взять эффективную энергию, то реализуется дополнительный подход, описывающий распределение меры, обеспечиваемое процедурой свертывания (раздел 3.2.2). Разумеется, термодинамический формализм позволяет восстановить весь набор параметров и спектральных распределений геометрического метода. Однако использование термодинамических представлений дает не только удобный и привычный язык описания, но и открывает возможность для применения плодотворных концепций термодинамики. Так, например, из раздела 3.3.2 видно, что трансформацию длиннопериодической структуры в квазикристаллическую можно представить как фазовый переход между монофракталами, принадлежащими противоположным краям спектра мультифрактала, отвечающего наложению двух несоизмеримых структур.

Как и в разделе 2, последний раздел 3.3 посвящен рассмотрению конкретных примеров использования концепции мультифрактала. Поскольку его свойства во многом определяются симметрией функции, генерирующей множество, то в разделе 3.3.1 рассматривается симметричное отображение, задаваемое параболой (логистическая последовательность), а в разделе 3.3.2 исследуются несоизмеримые структуры, порождаемые антисимметричной функцией. Наиболее важная из них реализуется в

квазикристаллах, чередование атомов которых описывается последовательностью Фибоначчи. В разделе 3.3.3 показано, каким образом использование геометрических характеристик мультифрактала позволяет описать стохастическую систему, состоящую из иерархически соподчиненных статистических ансамблей.

В заключении излагаются основные идеи и обсуждаются перспективы.

2. Монофракталы.

На спинах блох блошата есть,
Кусают блох они там.
Блошонок у блошат не счесть,
И так indefinite...

Даниэль Дефо

Начнем изложение с оригинального определения фрактала, данного Мандельбротом [2]: фрактал представляет самоподобное (в смысле изменения масштаба) множество, размерность которого отличается от топологической.

Поскольку данное определение является скорее математическим, чем физическим, то приведем наглядные соображения, демонстрирующие понятие фрактала. С этой целью рассмотрим конденсацию микрочастиц в выделение новой фазы. Обычно такое образование является компактным, и число частиц, заключенных в выделении размера R , определяется соотношением

$$N \propto R^d, \quad (2.1)$$

где d — размерность пространства. Такой же

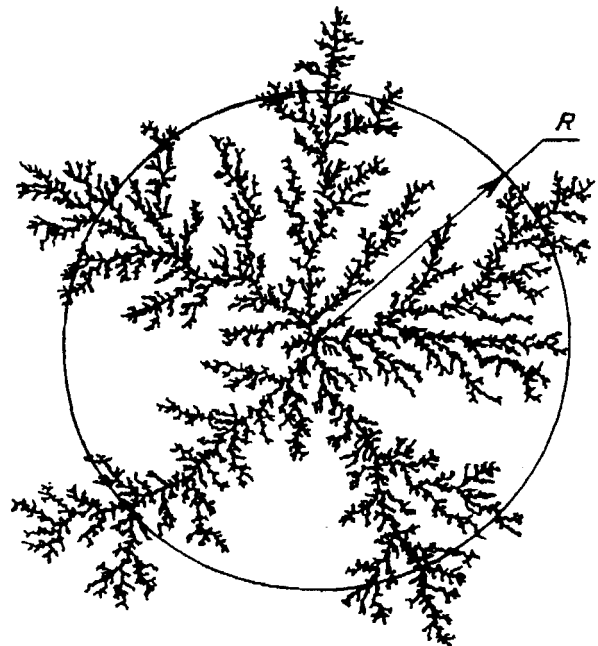


Рис. 1. Кластер с размерностью $D = 1,71$, возникающий в результате двумерной агрегации, ограниченной диффузией [3]

$$V = A_d R^d \quad (2.2)$$

имеет объем выделения V , где A_d — геометрический фактор, учитывающий его форму (при равноосной $A_1 = 2\pi$, $A_2 = 4\pi$, $A_3 = 4\pi/3$). Соответственно, плотность частиц компактного выделения $\rho = N/V$ оказывается величиной, не зависящей от его размера.

Совершенно отличная ситуация наблюдается для фракталов, которые не являются компактными образованиями (рис. 1). Видно, что с ростом размера выделения R число частиц

$$N \propto R^D \quad (2.3)$$

растет более медленным образом. Показатель D является основной количественной характеристикой фрактала и называется фрактальной (хаусдорфовой) размерностью. Аномальный характер зависимости

(2.3) обусловлен несовпадением фрактальной размерности D по сравнению с размерностью физического пространства d в соотношении (2.1) для плотного выделения. В соответствии с этим плотность

$$\rho \propto R^{-(d-D)}, \quad d > D \quad (2.4)$$

становится убывающей функцией размера, что и отражает некомпактный характер фрактала. Очевидно, чем больше различаются топологическая d и фрактальная D размерности, тем более рыхлым является фрактальный объект.

Впервые с понятием фрактала столкнулись при измерении длины береговой линии. Хотя интуитивно казалось бы ясно, что ее длина L не должна зависеть от выбора масштаба измерения $l \rightarrow 0$, проведенные измерения показали, что в действительности выполняется соотношение

$$L \propto l^{1-D}, \quad (2.5)$$

где фрактальная размерность $D > 1$ (например, для Британских островов $D \approx 1,3$, а для Норвегии $D \approx 1,5$). Это указывает на то, что береговая линия является множеством, занимающим промежуточное положение между обычной линией ($d = 1$) и поверхностью ($d = 2$), причем величина $1 < D < 2$ тем больше, чем более изрезанным является берег. Данное обстоятельство наглядно демонстрирует рис. 2, где приведена береговая линия Норвегии.

Физическим примером фрактала могут служить кластеры гелей, образуемые при слиянии золь (см. рис. 1). В твердом теле фрактальные структуры дефектов возникают, например, в процессе прохождения тяжелых частиц через кристалл (рис. 3). Принципиально важным примером являются дефектные структуры в твердых телах, подверженных интенсивной внешней нагрузке, приводящей к значительным плотностям дефектов. В результате проявляются коллективные эффекты, которые приводят к включению новых структурных уровней пластической деформации. Ее носители образуют сначала фрактальные кластеры, компактизация которых приводит затем к оформлению супердефектов, являющихся структурными элементами на новом уровне [15]. Так, на рис. 4 показаны основные стадии эволюции ансамбля дислокаций высокой плотности: сначала их распределение является однородным, затем образуются скопления в виде клубков и рыхлых стенок ячеек и в завершение формируется четко выраженная ячеистая структура [12]. Очевидно, скопления дислокаций, формирующие стенки ячеек, и представляют фракталы,

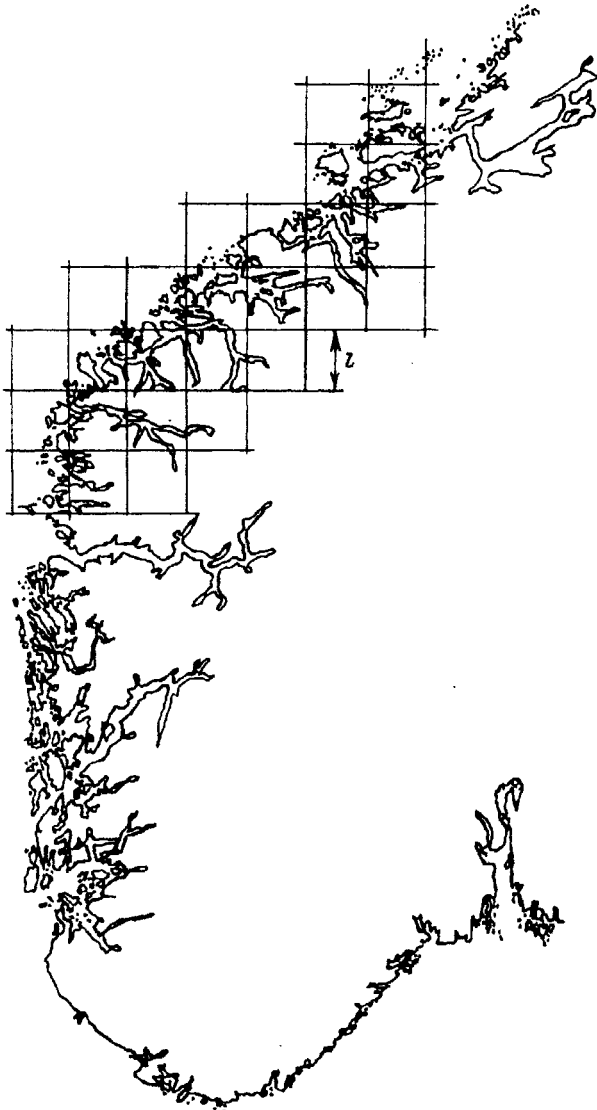


Рис. 2. Побережье южной части Норвегии (изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $l \sim 50$ км) [3]

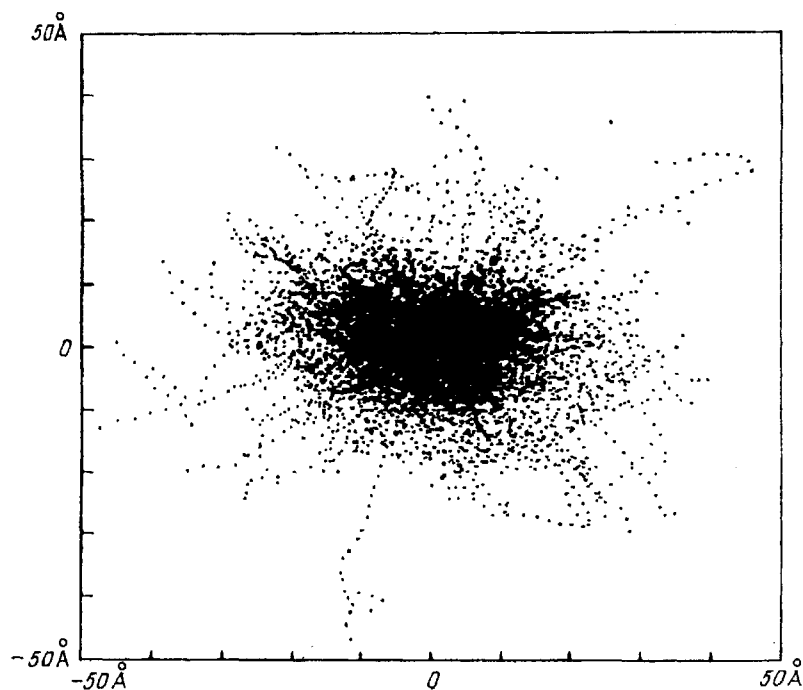


Рис. 3. Двумерная картина распределения точечных дефектов, возникающих в кристалле бериллия после прохождения 20 ионов урана с энергией 5 МэВ в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка (данные А.И. Кульментаева)

размерность которых сначала увеличивается от $d = 1$ (равномерное распределение дислокаций) до $1 < D < 2$ (рыхлые скопления) и затем достигает $d = 2$ (геометрическая стенка ячейки).

Как видно из приведенных примеров, основной характеристикой фрактала является его размерность D . В разделе 2 мы рассмотрим идеализированный случай монофрактала, который характеризуется единственным значением D . Сначала будут приведены наглядные геометрические модели, позволяющие интуитивным образом найти величину D . Затем формулируется алгоритм, позволяющий аналитическим образом определить D для произвольного монофрактала. Изложение завершается рассмотрением конкретных ситуаций, возникающих в физике конденсированной среды.

2.1. Геометрические модели фракталов. Рассмотрим сначала наглядные модели простейших фрактальных множеств Коха и Кантора (раздел 2.1.1). Это позволит найти общее выражение для размерности фрактального геометрического объекта, изображенного в обычном физическом пространстве. В разделе 2.1.2 будет проведено обобщение на гипотетическое пространство с ультраметрической топологией [17, 18]. Его использование позволило в последнее время объяснить поведение иерархически соподчиненных структур, возникающих в спиновых [18, 19] и структурных [20] стеклах, в процессе пластической деформации [21] и разрушения [22], при структурных [23] и, в

частности, мартенситных [24] превращениях, в ВТСП-оксидах [25, 26] и т.д.

2.1.1. Фрактальные множества Коха и Кантора.

Рассмотрим сначала триадную фигуру Коха. Как видно из рис. 5, для ее построения на шаге $n = 0$ берется отрезок единичной длины. На следующем шаге $n = 1$ посередине отрезка вырезается интервал длиной $1/3$, на котором затем строится равносторонний треугольник без основания. На следующем шаге на каждом из четырех полученных отрезков вырезается интервал длиной $(1/3)^2$ и проводится то же построение, что и выше. Далее указанная процедура повторяется $n \rightarrow \infty$ раз.

Определим длину L полученного фрактала. Так как после каждого шага она увеличивается в $4/3$ раза, то на n -м шаге получаем $L_n = (4/3)^n$. Поскольку длина каждого звена составляет $l_n = (1/3)^n$, то $n = -\ln l_n / \ln 3$, и можно видеть, что между полной L_n и элементарной l_n длинами выполняется соотношение (2.5), где фрактальная размерность

$$D = \ln 4 / \ln 3 = 1,263. \quad (2.6)$$

При этом число отрезков $N_n = L_n / l_n$, составляющих фигуру Коха, определяется соотношением (индекс n временно опускаем)

$$N(l) \propto l^{-D}. \quad (2.7)$$

Как видно из рис. 5, при $n \rightarrow \infty$ кривая Коха представляет образование, промежуточное между обычными линией и поверхностью. Поэтому ее

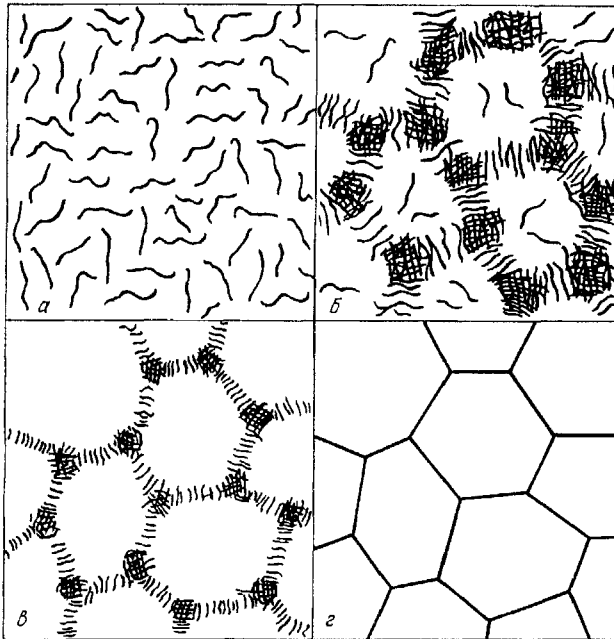


Рис. 4. Схематическое представление перестройки однородной дислокационной структуры в ячеистую. *а* — Хаотическое распределение дислокаций. *б, в* — Образование дислокационных клубков и рыхлых стенок. *з* — Ячеистая структура [12]

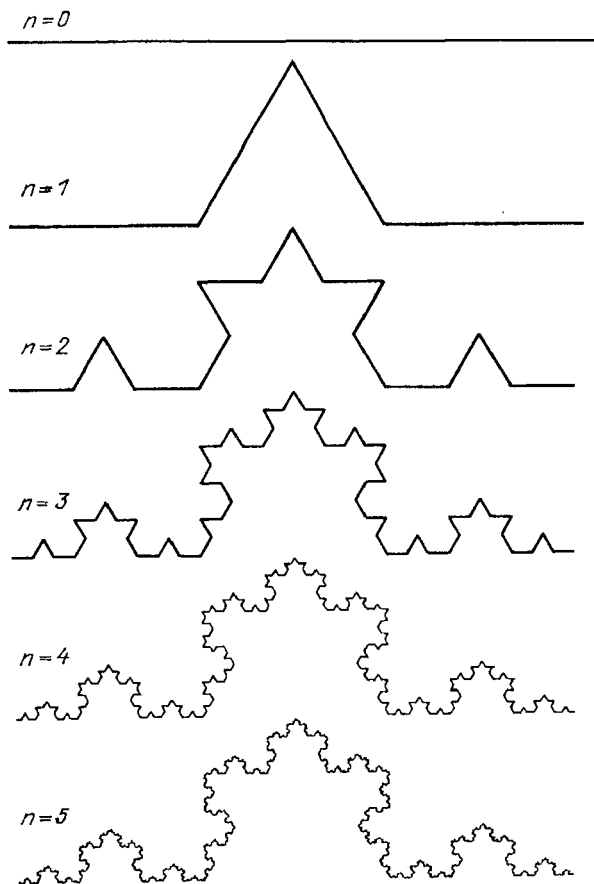


Рис. 5. Построение триадной фигуры Коха [3]

фрактальная размерность (2.6) лежит в интервале $1 < D < 2$.

Согласно данному выше определению фрактал является самоподобным множеством. Это обстоятельство легко усмотреть из рис. 5, замечая, что на каждом шаге n воспроизводится одно и то же построение в уменьшенном масштабе. Поэтому если взять какой-либо фрагмент фигуры Коха, то он может быть получен простым увеличением любой его составляющей до нужного масштаба. Формально данное обстоятельство отражается равенством типа (2.7). Действительно, если уменьшить в ξ^{-1} раз длину элементарного отрезка l , то должно увеличиться и число отрезков $N(l)$. Тогда из (2.7) имеем

$$N(\xi l) = \xi^{-D} N(l), \quad \xi < 1. \quad (2.8)$$

Согласно определению зависимость $N(l)$, удовлетворяющая равенству типа (2.8), является однородной функцией порядка D , величина которого совпадает с фрактальной размерностью. Характерное свойство однородных функций $N(l)$ состоит в том, что уменьшение в ξ^{-1} раз масштаба измерения аргумента l эквивалентно ξ^{-D} -кратному увеличению функции N .

Указанное свойство самоподобия присуще не только фигуре Коха, но и всем фрактальным образованиям. Само соотношение подобия (2.8) имеет более общий характер, чем выражения (2.6), (2.7) для триадной фигуры Коха. Действительно, фиксируя в (2.8) параметр подобия ξ условием $\xi l = 1$, немедленно получаем соотношение (2.7). С другой стороны, отсюда видно, что при произвольном масштабе ξ элементарная длина $l_n = \xi^n$ не сводится к $(1/3)^n$, и формулу (2.6) нужно обобщить следующим образом

$$D = \ln 4 / \ln \xi^{-1}, \quad (2.9)$$

где параметр подобия $\xi < 1$ показывает, насколько укорачивается длина каждого из четырех сегментов образующих блок фигуры Коха.

Рассмотрим теперь пример фрактального множества с размерностью $D < 1$ — "канторову пыль". Как видно из рис. 6, ее построение отличается от кривой Коха только тем обстоятельством, что на n -м шаге осуществляется не добавление, а удаление n интервалов длиной $l_n = (1/3)^n$. В соответствии с этим длина оставшегося множества составляет $L_n = (2/3)^n$, а каждое звено l_n остается тем же, что и в фигуре Коха. В результате связь $L_n(l_n)$ выражается прежней зависимостью (2.5), где, однако, фрактальная размерность составляет

$$D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631. \quad (2.10)$$

Условие $D < 1$, как видно из рис. 6, означает, что

"канторова пыль" представляет образование, промежуточное между точкой и линией. Нетрудно видеть, что число $N_n = L_n/l_n$ отрезков длиной l_n определяется той же формулой (2.7), что и в случае кривой Коха.

Равенство (2.10) отвечает простейшему случаю симметричного канторовского множества, показанного на рис. 5. Как и для фигуры Коха, можно видеть, что если после каждого шага n построения длину отрезков l_n брать не $1/3$, а ξ , то в знаменателе равенства (2.10) $\ln 3$ заменится на $\ln \xi^{-1}$. С другой стороны, сравнение числителей выражений (2.6), (2.10) показывает, что в общем случае там должен стоять, по-видимому, $\ln j$, где j — число блоков, участвующих в построении элементарной фигуры фрактала (для кривой Коха и канторовой пыли, показанных на рис. 5 и 6, имеем соответственно $j = 4$ и 2). Таким образом, можно полагать, что выражение для фрактальной размерности, обобщающее формулы (2.6), (2.9), (2.10), представляется в виде

$$D = \ln j / \ln \xi^{-1}, \quad (2.11)$$

где j — число блоков, представляющих элементарный фрагмент фрактала, ξ — показатель подобия, определяющий, насколько уменьшается величина блока на каждом шаге построения. Поскольку для канторовского множества размер получающегося фрагмента не должен превышать величину исходного блока, то значение параметра подобия ограничено условием $\xi j \leq 1$, которое в свою очередь приводит к результату $D \leq 1$. Как было выяснено выше, он отвечает фрактальным множествам, для которых на каждом шаге построения производится удаление отдельных блоков. При их добавлении, как в фигуре Коха, имеем $D > 1$, и согласно (2.11) параметр подобия принимает значения $\xi > j^{-1}$.

2.1.2. Иерархическое дерево Кейли. Нетрудно видеть, что описанная выше процедура построения канторовского множества (см. рис. 6) может быть представлена иерархическим деревом Кейли, показанным на рис. 7,а. Покажем, что топологическая эквивалентность^(*) фигур, приведенных на рис. 6 и 7,а, позволяет каждому элементу фрактального множества сопоставить точку ультраметрического пространства, геометрический образ которого представляется деревом Кейли. С этой целью следует ввести параметризацию иерархического дерева, т.е. построить способ его аналитического описания [17].

Начнем рассмотрение с простейшего примера одномерного дерева, приведенного на рис. 7,б. Оно характеризуется числом уровней $n = 2$ и ветвистостью $j = 3$. Из рисунка видно, что каждый узел

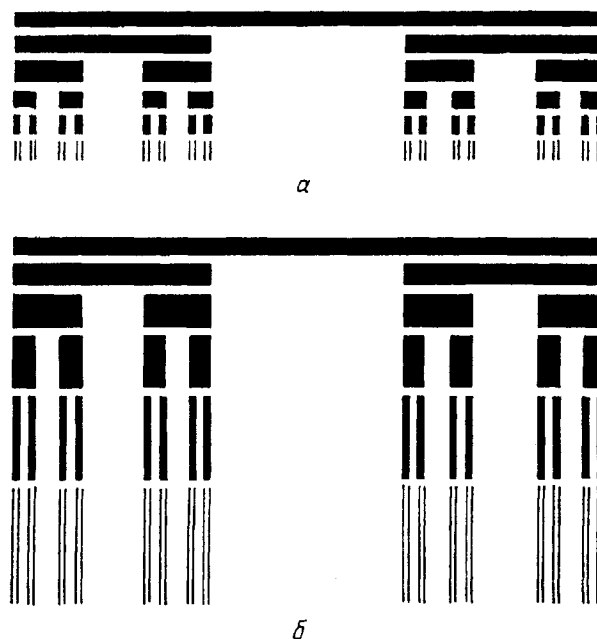


Рис. 6. Построение триадного канторовского множества. а — Геометрический способ. б — Метод свертывания [3]

дерева на нижнем уровне $n = 2$ может быть задан n числами a_l , где индекс l пробегает значения от 0 до $n-1$, а сами числа a_l изменяются от 0 до $j-1$. Иными словами, координаты узлов уровня n

$$\{a_l\}_n^j = a_0 a_1 \cdots a_l \cdots a_{n-1}, \quad a_l = 0, 1, \dots, j-1 \quad (2.12)$$

представляет n -значные числа в j -ричной системе счисления. Они и задают пространство с ультраметрической топологией, характерная черта которого состоит в том, что его точки не могут образовывать треугольники со всеми разными сторонами [17]. В этом свойстве нетрудно убедиться, если принять, что расстояние l между любыми узлами дерева Кейли, принадлежащими данному уровню n , определяется числом шагов до общего предка, расположенного на уровне $n-l$. Например,

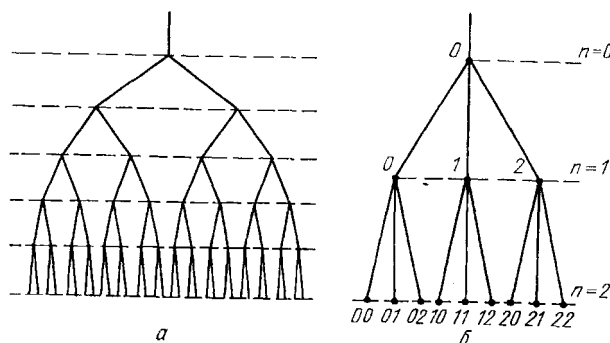


Рис. 7. Простейшие регулярные деревья Кейли. а — Дерево, описывающее цепь бифуркаций (ветвистость $j = 2$). б — Параметризация дерева Кейли с числом иерархических уровней $n = 2$ и ветвистостью $j = 3$

расстояние между узлами 10 и 12 на рис. 7,б равно единице, а между 01 и 12 — двум; точки 01, 12, 20 образуют равносторонний треугольник, а 01, 11, 12 — равнобедренный. Из приведенных примеров следует, что если два узла нумеруются наборами (2.12) чисел a_i и b_i , то расстояние между ними зависит только от того, какие из них первыми отличаются друг от друга. Так, для дерева, приведенного на рис. 7,б, расстояние равно двум, если $a_0 \neq b_0$, и единице, если $a_0 = b_0$, но $a_1 \neq b_1$. При произвольном сочетании чисел n, j расстояние между данными точками равно $l = 0, 1, \dots, n + 1$, если выполняются равенства $a_m = b_m$, $m = 0, 1, \dots, n - l - 1$, но $a_{n-l} \neq b_{n-l}$.

Важность концепции ультраметрического пространства обусловлена тем обстоятельством, что отражая иерархическую структуру системы, оно реализует так называемую логарифмическую метрику для физически наблюдаемых величин. Это означает, что в таком пространстве расстояние l оказывается линейной функцией логарифма наблюдаемой величины ρ . Поскольку манипулирование с $\ln \rho$ менее удобно, чем с линейной зависимостью от l , то вместо обычной оси значений ρ удобно ввести соответствующее ультраметрическое пространство, характеризуемое расстоянием l , и все выкладки проводить в этом пространстве [17–19].

Для определения зависимости $\rho(l)$ представим величину ρ в j -ричной системе счисления (2.12). Это осуществляется разложением в степенной ряд

$$\rho(a - b) = (a_0 - b_0)j^n + (a_1 - b_1)j^{n-1} + \dots + (a_{n-l} - b_{n-l})j^l + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})j + (a_n - b_n), \quad (2.13)$$

первые n коэффициентов которого даются n -значными числами (2.12), а последний определяет начало отсчета величины ρ . Из рис. 7,б нетрудно

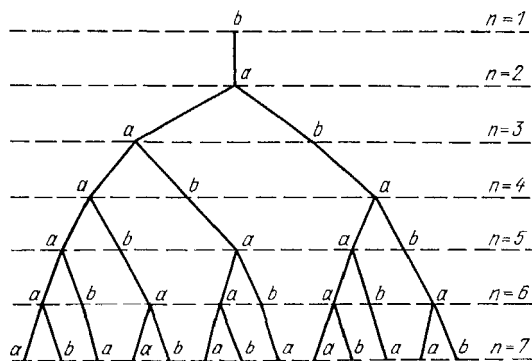


Рис. 8. Нерегулярное дерево Фибоначчи с переменной ветвистостью

видеть, что представление (2.13) отвечает разбиению j^n узлов дерева Кейли на $n + 1$ группу, каждая из которых состоит из кластеров узлов, характеризующихся одинаковыми значениями l максимального расстояния между ними. Так, первому слагаемому ряда (2.13) отвечает группа, состоящая из j^n одиночных узлов, для которых $l = 0$. Второй член (2.13) описывает вклад кластеров, узлы которых разделены расстоянием $l = 1$ (на рис. 7,б можно выделить три таких кластера: 00, 01, 02; 10, 11, 12 и 20, 21, 22). Поскольку каждый из этих кластеров порождается узлом, лежащим на предшествующем иерархическом уровне $n - 1$, то нетрудно видеть, что в общем случае любой такой кластер состоит из j узлов, а их число равно j^{n-1} . Произвольному расстоянию l отвечает группа кластеров, порождаемых иерархическим уровнем $n - l$. Поэтому число таких кластеров составляет j^{n-l} , а каждый из них содержит j^l узлов. Эти узлы сгруппированы в j субкластеров, отвечающих меньшему расстоянию $l - 1$. Таким образом, можно заключить, что степень множителя j^{n-l} произвольного члена ряда (2.13) задается числом кластеров узлов, максимальное расстояние между которыми равно l , а величины коэффициентов $a_i - b_i$ ограничены числом j , содержащихся в них субкластеров, отвечающих расстоянию $l - 1$.

Замечательное свойство разложения (2.13) состоит в том, что при $j \gg 1$ в нем доминирует только одно слагаемое. Действительно, если расстояние между точками ультраметрического пространства равно l , то первые $n - l$ слагаемых, содержащих максимальные степени большого числа j , равны нулю, так как по определению $a_m = b_m$ при $m = 0, 1, \dots, n - l - 1$. Последние l членов ряда содержат степени j^k , $k = l - 1, l - 2, \dots, 0$, величины которых пренебрежимо малы в сравнении с j^l . Таким образом, остается единственное слагаемое $(a_{n-l} - b_{n-l})j^l \leq j^{l+1}$, и с логарифмической точностью ряд (2.13) сводится к виду

$$\ln \rho \approx (l + 1) \ln j \approx l \ln j, \quad n, j, l \gg 1. \quad (2.14)$$

Данное равенство и означает логарифмическую метрику ультраметрического пространства.

Выше мы рассмотрели дискретное ультраметрическое пространство, поскольку только в таком случае ему можно сопоставить определенное дерево Кейли. Однако точно так же, как и в обычном пространстве, можно совершить переход к соответствующему континуальному пределу (визуально такой переход ассоциируется с размазыванием множества точек, равномерно заполняющих лист

бумаги по всей его площади). В представлении дерева Кейли указанная размазка достигается бесконечным возрастанием числа уровней n и/или ветвистости j . При это число узлов

$$N_n = j^n, \quad (2.15)$$

приходящихся на уровень n , становится настолько большим, что интервал $l_n = N_n^{-1} = j^{-n}$, разделяющий ближайшие точки дискретного пространства, становится бесконечно малым, а само ультраметрическое пространство — континуальным. Соответственно расстояние l в формуле (2.14) приобретает непрерывный характер. На дереве Кейли переход к континууму означает бесконечное сгущение иерархических уровней.

Везде выше имелось в виду однородное дерево Кейли, ветвистость которого во всех узлах одинакова. Очевидно, соответствующее ультраметрическое пространство будет иметь размерность $d = 1$. Действительно, учитывая, что здесь параметр подобия $\xi = j^{-1}$, получаем элементарную длину $l_n = \xi^n = j^{-n}$, и формула (2.15) приобретает вид (2.7), где $D = 1$. Нетрудно заметить, что дробная размерность $D < 1$ получается лишь в том случае, если на каждом уровне n для части узлов ветвистость будет пропадать. Такая ситуация реализуется, например, для последовательности Фибоначчи, рассмотренной в разделе 3.3.2. Из отвечающего ей дерева Кейли, показанного на рис. 8, видно, что наблюдается непериодическое (но вполне закономерное!) чередование узлов с ветвистостями $j = 1, 2$. В разделе 3.3.2 будет показано, что здесь на каждый неветвящийся узел приходится число двукратно ветвящихся узлов, равное так называемому золотому сечению $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618$. Оказывается, что это приводит к понижению размерности ультраметрического пространства, отвечающего дереву Фибоначчи, до значения $D = \ln \tau / \ln 2 \approx 0,694$. В общем случае получаем

$$D = \ln \rho / \ln j, \quad (2.16)$$

где ρ — число узлов с ветвистостью $j = 2, 3, \dots$, приходящихся на один неветвящийся узел.

Разумеется, как и для обычного пространства, размерность ультраметрического может принимать и значения $D > 1$. Так, на рис. 9,а приведен пример двумерного однородного дерева Кейли, обладающего размерностью $d = 2$. Его характерная черта состоит в том, что во все узлы нижних иерархических уровней входят ветви как от вертикальной составляющей дерева, так и от горизонтальной. При нарушении этого правила (рис. 9,б) размерность пространства понижается до значения

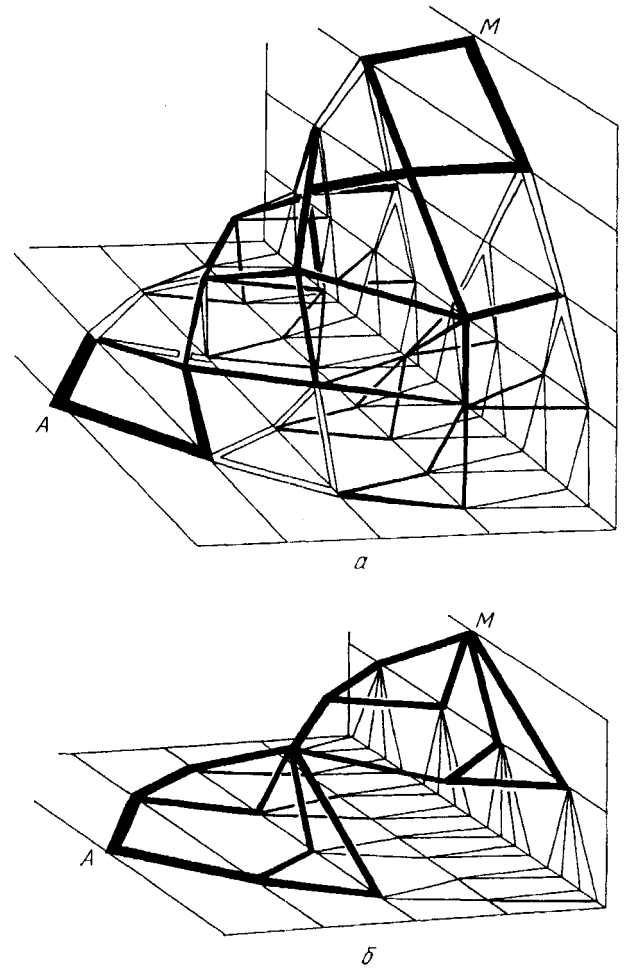


Рис. 9. Регулярное (а) и нерегулярное (б) двумерные деревья Кейли

$D = \ln(j\sigma) / \ln j$, где параметр $\sigma \leq j$ определяет долю узлов, где сходятся ветви обеих составляющих двумерного дерева. При увеличении топологической размерности до значений $d > 2$ параметр сопряжения различных составляющих σ приобретает степень $d - 1$. Если же кроме неполного сращения составляющих они сами имеют фрактальный характер типа дерева Фибоначчи на рис. 8, то в согласии с (2.16) вместо $j\sigma^{d-1}$ следует взять $\rho\sigma^{d-1}$, где параметр ρ определяет долю ветвящихся узлов.

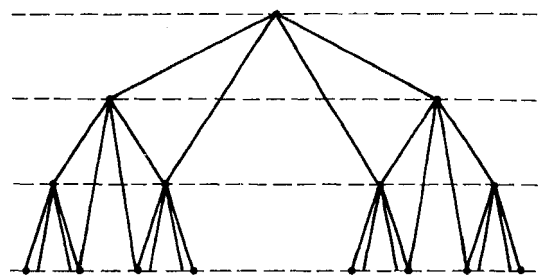


Рис. 10. Дерево Кейли, отвечающее немарковской генерации масштабных уровней

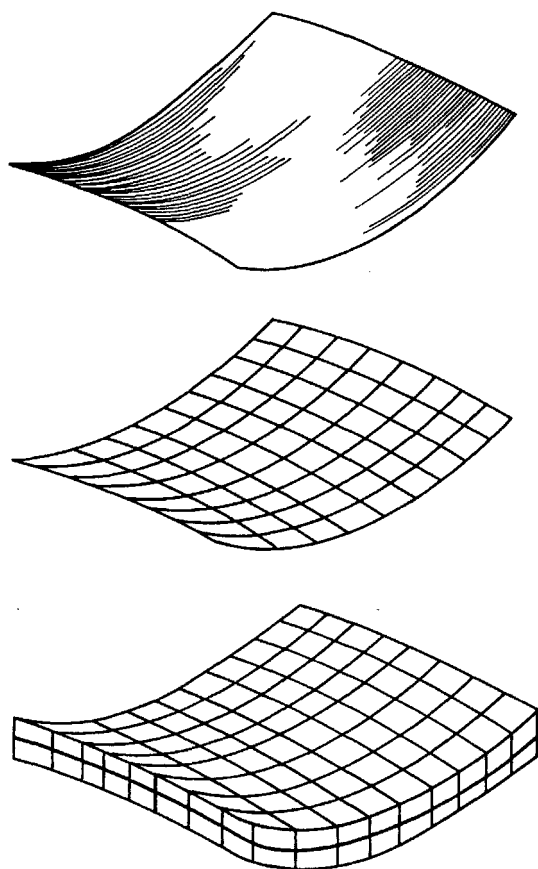


Рис. 11. Определение меры поверхности [3]

В результате фрактальная размерность ультраметрического пространства, отвечающего узлам d -мерного дерева Кейли, принимает вид

$$D = \frac{\ln \rho}{\ln j} + (d - 1) \frac{\ln \sigma}{\ln j}. \quad (2.17)$$

Проведенное рассмотрение относится к разреженному ультраметрическому пространству, для которого фрактальная размерность D меньше топологической d . Обратный случай $D > d$ имеет место, если связаны не только ближайшие иерархические уровни, но и отдаленные (рис. 10). Иными словами, условие $D > d$ реализуется для немарковских иерархических систем, обладающих памятью. Очевидно, что формулы (2.16), (2.17) применимы и к этой ситуации, если считать, что параметры ρ , σ принимают значения $\rho, \sigma > j$.

2.2. Определение фрактальной размерности. В приведенных примерах фрактальная размерность определялась из наглядных соображений. Однако в общем случае ситуация настолько усложняется, что они становятся неочевидными и требуется произвести обобщение указанных построений. Их суть сводится к тому, что фрактальное множество покрывается элементарны-

ми d -мерными кубиками с длиной ребра $l \rightarrow 0$ и производится подсчет их числа $N(l)$. Фрактальная размерность определяется затем из соотношения типа (2.7). Формальным приемом, позволяющим реализовать эту процедуру, является введение некоторой производящей функции, смысл которой можно выяснить из следующего примера.

Рассмотрим обычную (нефрактальную) поверхность размерностью $d = 2$ и площадью S_0 (рис. 11). Покроем ее сначала квадратами со стороной $l \rightarrow 0$, число которых составляет

$$N(l) = S_0 / l^2. \quad (2.18)$$

Их суммарная площадь определяется формулой

$$S(l) = N(l)l^2. \quad (2.19)$$

Хотя с алгебраической точки зрения равенства (2.18), (2.19) могут показаться тождественными, следует иметь в виду, что если первое применимо только к обычной поверхности, то второе и к фрактальной. Естественно, что при подстановке (2.18) в (2.19) получаем

$$S(l) = S_0. \quad (2.20)$$

Использование элементарного квадрата при определении площади поверхности представляется наиболее естественным, но не является единственно возможным. Так, можно покрыть нашу поверхность и элементарными кубиками, как это показано на рис. 11. Их суммарный объем выражается очевидным равенством типа (2.19)

$$V(l) = N(l)l^3. \quad (2.21)$$

Подставляя сюда число кубиков (2.18), получаем

$$V(l) = S_0 l. \quad (2.22)$$

Продолжая перебор элементарных фигур, с помощью которых покрывается рассматриваемая поверхность, можно, в принципе, воспользоваться и ломаной линией, состоящей из $N(l)$ отрезков длиной $l \rightarrow 0$. Ее полная длина определяется формулой

$$L(l) = N(l)l, \quad (2.23)$$

приводящей после подстановки равенства (2.18) к соотношению

$$L(l) = S_0 l^{-1}. \quad (2.24)$$

Полученные формулы (2.24), (2.20), (2.22) объединяются в том смысле, что они выражают меру χ_q множеств с размерностями $q = 1, 2, 3$, покрывающих рассматриваемое множество — поверхность с размерностью $d = 2$. Ее можно представить в общем виде

$$\chi_q(l) = S_0 l^{q-d}. \quad (2.25)$$

Характерная особенность этого равенства состоит в

екая через нее световой пучок толщиной r и измеряя интенсивность I прошедшего света, можно вместо (2.29) использовать формулу

$$D = \frac{\text{const} - \ln I}{\ln r}. \quad (2.31)$$

Она применима не только для равномерного распределения одинаковых фрактальных кластеров, но и при исследовании одиночного фрактала. При этом центры пучка и кластера должны совпадать, а величина диафрагмы r не должна превышать его размер R .

В реальном эксперименте наиболее надежные структурные данные получаются при определении корреляционной функции, пространственный фурье-образ которой пропорционален интенсивности рассеяния проникающего излучения. Поэтому и при измерении фрактальной размерности следует отдавать предпочтение методу малоуглового рассеяния проникающего излучения (для больших кластеров можно использовать обычный свет, а с уменьшением их размера приходится переходить к рентгеновским лучам, электронам или тепловым нейтронам). Если значение вектора рассеяния q лежит в интервале $R^{-1} \ll q \ll a^{-1}$, где R — размер кластера, a — размер образующих его частиц, то интенсивность малоуглового рассеяния I определяется формулой [27]

$$I(q) = I_0 q^{-D}, \quad q = (4\pi/\lambda)\sin(\theta/2), \quad (2.32)$$

где I_0 — интенсивность падающего пучка, λ — длина волны, θ — угол рассеяния. Строя зависимость $I(q)$ в логарифмических координатах, по углу наклона полученной прямой находим фрактальную размерность

$$D = \frac{\ln I_0 - \ln I(q)}{\ln q}. \quad (2.33)$$

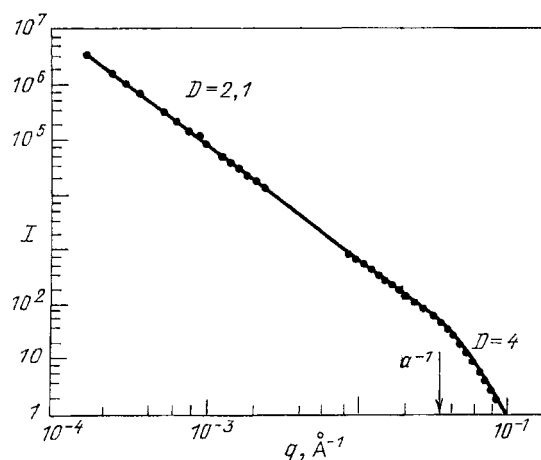


Рис. 13. Зависимость интенсивности рассеяния света (малые q) и малоуглового рассеяния рентгеновских лучей (большие q) от величины q вектора рассеяния [3]

При этом важно работать в той области векторов рассеяния q , которая отображает фрактальную структуру. С их ростом до значений $qa \sim 1$, при которых реализуется режим Порода [28]

$$I(q) = I_0 q^{-(d+1)}, \quad (2.34)$$

проведенные измерения будут давать топологическую размерность кластера d (рис. 13).

2.4. Примеры использования концепции фрактала. Обычно при описании фракталов имеются в виду реальные образования (фрактальные гели, шаровая молния, смесь жидкостей с различной вязкостью, фрактальная поверхность излома, фрактальные образования, получаемые при спекании порошков, дефектные структуры и т.д.) [3—7]. В настоящем разделе мы не будем описывать их структуру, а рассмотрим теоретические аспекты, основанные на фрактальных представлениях.

2.4.1. Дробный интеграл и дробная производная. Рассмотрим среду, обладающую памятью. Такая ситуация возникает при описании структуры твердого тела, находящегося вдали от термодинамического равновесия: в аморфных материалах [18—20], при описании структурной релаксации ВТСП-оксидов [25], в процессе пластической деформации [15] и при разрушении твердого тела [13], при описании твердых растворов [23] и макроструктуры мартенсита [24] и т.д. Наличие памяти означает, что если в момент времени t' на систему действует сила $f(t')$, то возникает поток J , величина которого в последующий момент $t > t'$ задается равенством

$$J(t) = \int_0^t M(t - t') f(t') dt'. \quad (2.35)$$

Для системы, не обладающей памятью, временная зависимость функции памяти $M(t - t')$ имеет вид

$$M(t - t') = \gamma \delta(t - t'), \quad (2.36)$$

где γ — положительная постоянная, $\delta(t - t')$ — функция Дирака. Подставляя (2.36) в (2.35), получаем связь

$$J(t) = \gamma f(t), \quad (2.37)$$

согласно которой в отсутствие памяти на поток $J(t)$ влияет только значение силы $f(t)$, действующей в тот же момент t . При включении памяти δ -функция в (2.36) размывается в колоколообразную зависимость, ширина которой определяет интервал времени τ , в течение которого действие силы f сказывается на величине потока J . Для систем с идеальной памятью имеем $\tau \rightarrow \infty$, т.е. поток $J(t)$ формируется на всем протяжении действия силы

том, что в пределе $l \rightarrow 0$ функция $\chi_q(l) \rightarrow \infty$ при $q < d$ (формула (2.24)) и $\chi_q(l) \rightarrow 0$ при $q > d$ (формула (2.22)). Конечное значение $\chi_q(l) = S_0$ мера (2.25) принимает лишь при условии $q = d$, которое и задает размерность исследуемой поверхности.

Рассмотренный наглядный пример показывает, каким образом следует строить производящую функцию, позволяющую найти фрактальную размерность D произвольного множества (в рассмотренном примере оно сводилось к обычной поверхности с $d = 2$). Очевидно, общий вид этой функции может быть представлен равенством

$$\chi_q = \sum_i l_i^q, \quad (2.26)$$

где суммирование производится по элементарным образованиям, характеризуемым размером l_i и размерностью q . В отличие от ранее рассмотренных примеров, где $l_i = \text{const} \equiv l$; $q = 1, 2, 3$, здесь, во-первых, подразумевается неоднородное разбиение на элементарные множества (l_i не является постоянной величиной) и, во-вторых, параметр q принимается непрерывным. Если использовать однородное разбиение, то определение (2.26) принимает более простой вид

$$\chi_q(l) = N(l)l^q. \quad (2.27)$$

С учетом (2.7) отсюда получаем соотношение

$$\chi_q(l) \propto l^{q-D}, \quad (2.28)$$

обобщающее результат (2.25) для фрактальных объектов. Формула (2.5) для длины береговой линии представляет пример такого соотношения при $q = 1$.

Таким образом, для аналитического определения фрактальной размерности следует покрыть фрактал элементарными q -мерными блоками с длиной ребра l_i и по формуле (2.26) найти производящую функцию. Изменяя величину показателя q , далее следует найти такое значение $q = D$, которое дает конечную величину производящей функции. Это и будет фрактальная размерность D . При этом сама производящая функция $\chi_q(l)$ представляет основную характеристику фрактала типа длины береговой линии.

2.3. Экспериментальные методы определения фрактальной размерности. Наиболее наглядный способ определения величины D основывается на прямом вычислении производящей функции (2.26). Например, при определении длины береговой линии ее покрывают набором квадратов со стороной $l \rightarrow 0$ и при различных

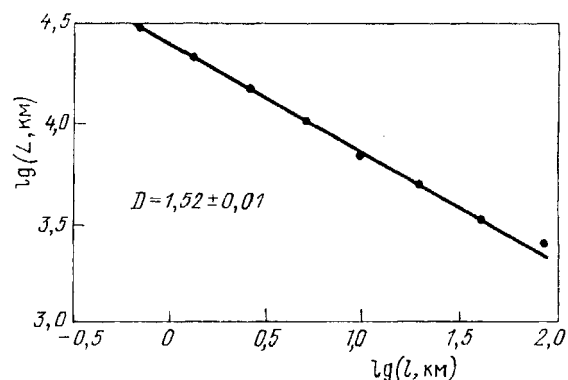


Рис. 12. График зависимости длины береговой линии Норвегии от шага покрывающей квадратной решетки [3]

значениях l подсчитывают их число $N(l)$. Далее, в двойных логарифмических координатах строится зависимость $N(l)$ (рис. 12), из которой, используя формулу (2.7), по углу наклона определяется фрактальная размерность

$$D = \frac{\text{const} - \ln N}{\ln l}. \quad (2.29)$$

Другой разновидностью геометрического метода является определение D из соотношения между характеристиками множеств разной топологической размерности. Например, если для фигуры, ограниченной фрактальной границей, измерить площадь $S \propto R^2$ и длину периметра $L \propto R^D$, где R — характерный размер, то из соотношений $S^{1/2} \propto R \propto L^{1/D}$ следует формула

$$D = \frac{\text{const} + \ln L^2}{\ln S}, \quad (2.30)$$

согласно которой фрактальная размерность границы D определяется как тангенс угла наклона зависимости квадрата периметра L^2 от площади S , построенной в двойных логарифмических координатах^(2*). При этом длина периметра измеряется либо непосредственно (например, курвиметром), либо тем же образом, что и в задаче о береговой линии.

При всей своей наглядности представленные методы обладают тем недостатком, что приходится эмпирическим путем подбирать величину l : с одной стороны, она должна быть не настолько мала, чтобы стал невозможным подсчет числа элементов, а с другой, не настолько велика, чтобы выйти за область применимости зависимости (2.7). Поэтому более надежными являются методы, основанные на прямом экспериментальном определении величины $N(l)$. Так, если имеется большое число одинаковых фрактальных кластеров, изображение которых фиксировано на прозрачной фотопластинке, то пропу-

$f(t')$ до момента t . Формально это выражается заданием ядра интегральной связи (2.35) в виде

$$M(t - t') = \gamma / t. \quad (2.38)$$

Здесь отсутствует зависимость от момента t' действия силы f , а зависимость функции памяти от времени измерения t потока J взята в таком виде, чтобы удовлетворить условию нормировки

$$\int_0^t M(t - t') dt' = \gamma. \quad (2.39)$$

Связь (2.35), записанная во временном представлении, неудобна из-за наличия свертки (интеграл по t'). От нее можно избавиться, воспользовавшись преобразованием Лапласа

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\lambda) e^{-\lambda t} \frac{d\lambda}{2\pi i}, \\ f(\lambda) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{\lambda t} dt, \end{aligned} \quad (2.40)$$

позволяющим перейти от времени t к комплексной частоте λ . Применяя его к обеим сторонам определения (2.35), приводим последнее к алгебраической форме

$$J(\lambda) = M(\lambda) f(\lambda). \quad (2.41)$$

Нетрудно видеть, что лапласовский образ ядра (2.36), отвечающего отсутствию памяти, сводится к постоянной:

$$M(\lambda) = \gamma. \quad (2.42)$$

При идеальной памяти в пределе $|\lambda|t \gg 1$ из (2.38) соответственно получаем

$$M(\lambda) = \gamma / \lambda t. \quad (2.43)$$

Таким образом, включение памяти приводит к трансформации постоянного ядра (2.42) в гиперболическую зависимость (2.43).

В связи с этим можно поставить следующий вопрос: как будет выглядеть функция $M(\lambda)$, если память является полной, но неидеальной? Это означает, что она проявляется на бесконечном интервале, предшествующем времени t , но не во все моменты времени t' . Предположим, например, что память сохраняется только в точках множества Кантора. Тогда можно ожидать, что его фрактальная размерность D будет связана с мерой сохранения памяти.

Если определение лапласовских образов простейших временных зависимостей (2.36), (2.38) представляет элементарную задачу, то для памяти, действующей в точках множества Кантора, вычи-

сления намного сложнее. Они были проведены в работе [16] и приводят к результату

$$M(\lambda) \propto z^{-D}, \quad z = (1 - \xi)\lambda t, \quad (2.44)$$

где фрактальная размерность D определяется равенством (2.11), ξ — параметр подобия, определенный в разделе 2.1.1.

Нетрудно видеть, что полученная функция памяти (2.44) удовлетворяет условию подобия (2.8) с показателем D . Сводясь к фрактальной размерности множества Кантора, в точках которого включается память, этот показатель представляет, таким образом, количественную меру проявления эффектов памяти. Для пустого множества Кантора ($\xi = 0$) равенство (2.11) дает $D = 0$, и зависимость (2.44) сводится к константе (2.42), отвечающей полному отсутствию памяти. С увеличением параметра подобия $\xi > 0$ показатель (2.11) возрастает, и лапласовский образ (2.44) функции памяти становится все более быстро изменяющейся функцией. Предельное значение $\xi = f^{-1}$ параметра подобия дает размерность $D = 1$, отвечающую идеальной памяти, описываемой функцией (2.43).

Таким образом, системы, обладающие остаточной памятью, описываются лапласовским образом (2.44), где величина показателя $0 \leq D \leq 1$ определяет меру ее сохранения. Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа (2.40), для временной зависимости функции памяти находим [16]

$$M(t - t') \propto [\sqrt{2}(1 - \xi)t]^{-D} (\Gamma(D))^{-1} (t - t')^{D-1}, \quad (2.45)$$

где $\Gamma(D)$ — гамма-функция. Подставляя это выражение в равенство (2.35), приводим его к виду

$$J(t) = [\sqrt{2}(1 - \xi)]^{-D} \hat{D}^{-D} f(t), \quad (2.46)$$

где введен интеграл

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-D} f(t) &= (\Gamma(D))^{-1} \int_0^1 (1 - u)^{D-1} f(ut) du = \\ &= (D\Gamma(D))^{-1} \int_0^1 f((1 - u)t) du^D, \end{aligned} \quad (2.47)$$

дробный характер которого отражается наличием показателя D в дифференциале аргумента u [29].

Выше мы использовали интегральное представление эффектов памяти. Однако легко показать, что ему можно сопоставить эквивалентное дифференциальное. Так, если имеется некоторая сохраняющаяся величина n (типа плотности атомов данного сорта), то ее пространственно-временная

зависимость $n(r, t)$ определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla J, \quad (2.48)$$

где поток J задается выражением (2.35). В отсутствие эффектов памяти выполняется равенство (2.37), где сила f определяется соотношением

$$f = -\nabla\mu, \quad (2.49)$$

μ — химпотенциал, и выражение (2.48) приводит к обычному уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla(\gamma\nabla\mu) \quad (2.50)$$

диффузионного типа [30]. Согласно проведенному выше рассмотрению включение памяти приведет к появлению в правой части (2.50) дробного интеграла. Анализ получающегося интегро-дифференциального уравнения в частных производных, имеющего к тому же дробный порядок, представляет весьма трудную задачу.

Ее однако можно упростить, если учесть, что зануление функции памяти $M(t - t')$ в течение некоторых интервалов времени будет приводить к фиксации потока J в равенстве (2.48), что обуславливает зануление скорости $\partial n/\partial t$. Поэтому естественно сделать предположение, что потеря памяти может быть учтена дробным характером не только для интеграла потока (2.35), но и для производной по времени в равенстве (2.48). Поскольку запись (2.50) отвечает полному отсутствию памяти ($D = 0$), а при ее включении, отражаемом ростом показателя D , скорость изменения величины n должна уменьшаться, то естественно постулировать дробно-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^\nu n}{\partial t^\nu} = \nabla(\gamma\nabla\mu), \quad \nu = 1 - D. \quad (2.51)$$

Как и следовало, рост параметра памяти D приводит к понижению порядка этого уравнения ν . В системах с идеальной памятью ($D = 1$) производная в левой части (2.51) пропадает, и следует рассматривать поведение самого потока (2.35), что и проведено выше.

Указанные соображения в пользу конкретного вида $\nu = 1 - D$ дробной степени уравнения (2.51) носят только наводящий характер. Для их подтверждения покажем, что выражение (2.46) для потока, определенного в виде дробного интеграла (2.41), согласуется с решением дифференциального уравнения (2.51) дробного порядка. Действительно, заменой переменной u на $(1 - u)t$ в подынтегральном выражении второго интеграла (2.47) легко

показать, что временная зависимость потока имеет вид $J \propto t^{-D}$. Подставляя эту зависимость в уравнение (2.48), находим решение

$$n \propto t^{1-D}, \quad (2.52)$$

удовлетворяющее тестируемому уравнению (2.51). Это окончательно подтверждает эквивалентность взаимно дополнительных концепций дробного интеграла (2.47) и дробно-дифференциального уравнения (2.51). Обратим внимание на одинаковый вид геометрического соотношения (2.5) для длины береговой линии $L(l)$ и полученной физической зависимости $n(t)$. Отсюда, в частности, следует, что время t играет роль размера отрезков, покрывающих в пространстве состояний D -мерное фрактальное множество, точки которого определяют память системы.

Касаясь трактовки уравнения (2.51) в дробных производных, будем исходить из того обстоятельства, что в обычном случае $D = 0$ оно описывает необратимые процессы типа диффузии, теплопроводности и т.п. [30]. Их особенность состоит в полной потере микроскопической памяти относительно обращения времени: если уравнения механики одиночного объекта обладают идеальной памятью, отражающейся в инвариантности замены $t \rightarrow -t$, то в термодинамическом уравнении (2.50) такая инвариантность полностью нарушается. Отсюда можно заключить, что понижение степени $\nu = 1 - D$ производной уравнения (2.51) отражает факт включения каналов памяти, доля которых определяется фрактальной размерностью D . Оставшаяся часть $\nu = 1 - D$ каналов обеспечивает необратимость системы. В изначальной форме остаточную необратимость можно учесть, записывая уравнение Лиувилля в дробном виде [16]

$$\frac{i\hbar}{t} \frac{\partial^D \rho}{\partial u^D} = [H, \rho], \quad (2.53)$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, H — гамильтониан, ρ — неравновесный статистический оператор, t — время эволюции макроскопической системы, $u = t'/t$ — безразмерное микроскопическое время, ограниченное условием $u < 1$. Очевидно, условие $D < 1$ позволяет в рамках записи (2.53) учесть эффекты необратимости на интервале $[0, t]$, связанные с потерей $\nu = 1 - D$ детерминистических каналов. Такой сценарий учета необратимости является, очевидно, более предпочтительным, чем феноменологическое добавление к правой части (2.53) релаксационного члена $-\rho/\tau$, где τ — время релаксации, [30] или введение бесконечно малого источника [31].

Кроме уравнений диффузионного типа, появления дробных производных можно ожидать при описании движения частиц, неупруго сталкивающихся друг с другом. Проводя вычисления типа тех, что привели к выражению для потока (2.46), можно показать [16], что если при каждом столкновении на частицу массой m , действует сила F , то изменение ее скорости

$$\Delta v = [\sqrt{2}(1 - \xi)]^{-D} (t/m) \hat{D}^{-D} F \quad (2.54)$$

определяется дробным интегралом вида (2.47). Из приведенного выше примера диффузионного уравнения можно видеть, что для перехода к соответствующему дробно-дифференциальному уравнению достаточно подействовать на уравнение (2.54) оператором $\hat{D}^D = \partial^D / \partial u^D$, обратным дробному интегралу $\hat{D}^{-D}$. Тогда в случае упругой силы $\mathbf{F} = -\lambda \Omega \nabla^2 \mathbf{r}$, где λ — упругая постоянная, Ω — атомный объем, для координаты частицы $\mathbf{r}$ получаем [16] обобщенное уравнение переноса

$$\frac{d^{1+D} \mathbf{r}}{du^{1+D}} + (ct)^2 \nabla^2 \mathbf{r} = 0, \quad (2.55)$$

где использовано безразмерное время $u = t'/t < 1$ и введена скорость, определяемая равенством

$$c^2 = (\lambda \Omega / m) [\sqrt{2}(1 - \xi)]^{-D}. \quad (2.56)$$

Найденное уравнение (2.55) описывает новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией ($D = 0$) и классическими волнами ($D = 1$). Соответственно выражение (2.56) определяет коэффициент диффузии $D = c^2 t$ в первом случае и волновую скорость c во втором.

Дробно-дифференциальные уравнения вида (2.51), (2.55) записаны применительно к исследованию пространственно-временного поведения сохраняющихся величин. Как известно [32], это отражается в наличии второй производной по координате в правых частях этих уравнений. Для несохраняющейся величины η эта производная пропадает, и уравнение диффузии (2.51) переходит в уравнение релаксации типа Ландау — Халатникова

$$\frac{d^{1-D} \eta}{du^{1-D}} = -(\gamma_D t) \eta, \quad (2.57)$$

а волновое уравнение (2.49) — в уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^{1+D} \eta}{du^{1+D}} + (\omega_D t)^2 \eta = 0; \quad (2.58)$$

здесь, как и выше, $u = t'/t$ — безразмерное время, параметры $\gamma_D, \omega_D \propto [\sqrt{2}(1 - \xi)]^{-D}$ определяют время релаксации $\tau_D = \gamma_D^{-1}$ и частоту осциллятора ω_D . Величина фрактальной размерности D задает меру остаточной памяти системы: в ее отсутствии ($D = 0$) оба уравнения (2.57), (2.58) сводятся к уравнению дебаевской релаксации, описывающему поведение простейших термодинамических систем (при этом выполняется соотношение $\gamma_0 = \omega_0^2 t$), а при идеальной памяти ($D = 1$) уравнение (2.57) вырождается в тождество, а (2.58) — в обычное осцилляторное соотношение.

Экзотичность концепции дробного интегрирования и дифференцирования может привести к ложному заключению, что проведенные построения носят чисто теоретический характер и не отражают экспериментальную ситуацию. Покажем, что это не так. С этой целью определим частотную зависимость восприимчивости $\chi = \partial \eta / \partial h$ системы к действию внешнего поля h . При его включении в правой части уравнения регрессии (2.57) добавляется слагаемое $\chi_0(\gamma t)h$, где χ_0 — изотермическая восприимчивость, и после фурье-преобразования находим

$$\chi(\omega) = \frac{\chi_0}{1 + (-i\omega / \omega_\nu)^\nu}, \quad (2.59)$$

где введены характерная частота $\omega_\nu = (\gamma t)^{1/\nu} / t$ и дробный показатель $\nu = 1 - D$. Зависимость (2.53), известная как эмпирическое выражение Коула—Коула, наблюдалась в процессе замедленной (по сравнению с дебаевской экспонентой) релаксации поляризации диэлектриков [33], в спиновых [18] и структурных [20] стеклах, в процессе пластической деформации [15], усталостного разрушения [13] и т.д.

2.4.2. Фрактальная кинетика иерархически соподчиненных систем. Если имеются две термодинамические фазы, одна из которых определяется параметром порядка η_i (обычно принимается $\eta_i = 0$), а другая — значением η_f , то с изменением параметров состояния (например, температуры T) для свободной энергии $U(\eta)$ может выполняться условие $U(\eta_i) \geq U(\eta_f)$, и в точке $T = T_c$ произойдет фазовый переход. Если состояния η_i, η_f не разделены энергетическим барьером, то реализуется механизм превращения второго рода со временем релаксации неравновесной фазы

$$\tau_0 = \tau_{00} [1 - (T / T_c)]^{-1}, \quad (2.60)$$

где τ_{00} — микроскопическое (дебаевское) время, имеющее порядок 10^{-12} с. При переходе первого

рода между состояниями η_i, η_f имеется барьер Q , приводящий к возрастанию величины (2.60) согласно формуле Аррениуса

$$\tau = \tau_0 \exp(Q/T), \quad (2.61)$$

где экспоненциальный множитель учитывает вероятность флуктуационного преодоления барьера Q [34]. Временная зависимость параметра порядка $\eta(t)$, отражающая кинетику перехода $\eta_i \rightarrow \eta_f$ описывается простейшим уравнением регрессии

$$d\eta/dt = -\eta/\tau, \quad (2.62)$$

решение которого приводит к дебаевской зависимости

$$S(t) = e^{-t/\tau}, \quad (2.63)$$

для вероятности перехода

$$\frac{\eta_f - \eta(t)}{\eta_f - \eta_i} = S(t) \quad (2.64)$$

из начального состояния η_i в произвольное $\eta(t)$.

Представленная картина реализуется в простейшем случае, когда зависимость $U(\eta)$ обладает только двумя минимумами, отвечающими фазам η_i, η_f . Зачастую между ними имеется, как показано на рис. 14, множество более мелких минимумов, отвечающих метастабильным фазам, несоизмерным структурам и т.д. [35]. Поэтому, если начальное состояние определяется параметром η_i , то прежде чем попасть в конечное η_f , система совершает последовательную цепочку переходов $\eta_i \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_l \rightarrow \dots \rightarrow \eta_f$ между соседними минимумами. Каждый из них описывается вероятностью $S_l(t)$ перехода из l -го минимума в $(l+1)$ -й. Ее выражение определяется экспонентой (2.63) со временем релаксации τ_l , задаваемым соотношением Аррениуса (2.61) с высотой барьера

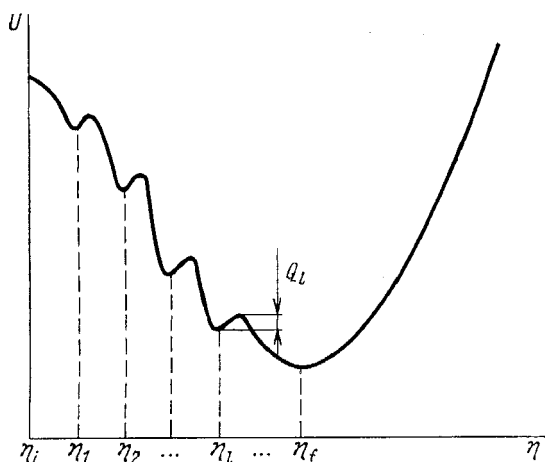


Рис. 14. Схема зависимости термодинамического потенциала от параметра порядка для последовательной цепи фазовых превращений

Q_l (см. рис. 14). Характерная черта такой цепочки переходов состоит в том, что все высоты барьеров Q_l имеют одинаковый порядок, в связи с чем времена $\Delta t_l = t_{l+1} - t_l$ их преодоления будут соизмеримыми. Поэтому за время $t \gg n\tau_l$ система с вероятностью $1 - S(t)$ преодолит n барьеров, причем

$$S(t) = \prod_{l=1}^n S_l, \quad (2.65)$$

$$S_l = \exp(-\Delta t_l/\tau_l), \quad \Delta t_n = t - t_n.$$

При $n \gg 1$ разбросом интервалов Δt_l можно пренебречь, принимая $\Delta t_l = t/n$. Тогда (2.65) примет дебаевский вид (2.63) со средним временем релаксации $\langle \tau \rangle$, задаваемым равенством

$$\langle \tau \rangle^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \tau_l^{-1}. \quad (2.66)$$

Таким образом, цепочка переходов между метастабильными состояниями системы свелась к дебаевской релаксации со средним временем $\langle \tau \rangle$. Последовательный характер этого процесса отражается в мультипликативности элементарных вероятностей $S_l(t)$ и аддитивности обратных времен релаксации τ_l^{-1} . Поскольку согласно (2.61) величина τ_l^{-1} пропорциональна вероятности термофлуктуационного преодоления межфазного барьера Q_l , то указанная аддитивность означает независимость флуктуаций микроскопических величин (например, энергий фаз).

Если такая ситуация реализуется на макроскопическом уровне, то складываются уже сами вероятности (2.63), а не микроскопические величины τ_l^{-1} . Это означает, что независимым образом действует набор параллельных каналов релаксации, на наличие которого указывалось в конце раздела 2.4.1. Каждый такой канал отвечает статистическому ансамблю α , реализуемому с вероятностью ω_α . Вероятность перехода между каналами α, β имеет в соответствии с (2.63), (2.61) следующий вид:

$$S_{\alpha\beta}(t) = \exp(-t/\tau_{\alpha\beta}), \quad (2.67)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_0 \exp(Q_{\alpha\beta}/T),$$

где $Q_{\alpha\beta}$ — высота барьера, разделяющего каналы α, β . Суммарная вероятность

$$S(t) = \sum_{\alpha, \beta} \omega_\alpha \omega_\beta S_{\alpha\beta}(t) \quad (2.68)$$

описывает релаксацию, обеспечиваемую всем набором каналов.

Очевидно, их параллельное включение имеет место, если вероятности релаксации различных каналов

$$\omega_\alpha \propto \exp(-E_\alpha/T) \quad (2.69)$$

окажутся соизмеримыми величинами. Такая ситуация требует вырождения относительно уровней энергии

$$E_\alpha = \int U(\mathbf{r})\rho_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.70)$$

где $\rho_\alpha(\mathbf{r})$ — распределение структурных единиц (например, атомов) в α -м канале релаксации, $U(\mathbf{r})$ — потенциальный рельеф системы. Поскольку куполообразная функция $\rho_\alpha(\mathbf{r})$ выделяет в интеграле (2.70) область пространства, отвечающую α -му каналу, то из условия соизмеримости энергии E_α следует, что различным каналам α должны сопоставляться минимумы потенциального рельефа $U(\mathbf{r})$, лишь незначительным образом отличающиеся друг от друга. С другой стороны, наличие спектра времен релаксации $\tau_{\alpha\beta}$ в (2.67) может быть обеспечено только при условии, что барьеры, разделяющие различные минимумы α, β , существенно отличаются по высоте $Q_{\alpha\beta}$. Очевидно, указанные условия могут быть выполнены лишь при иерархической структуре потенциального рельефа (рис. 15,а): на крупномасштабные минимумы зависимости $U(\mathbf{r})$ накладываются более мелкие, на них еще мельче и т.д. В результате получается фрактальная зависимость $U(\mathbf{r})$, сильно напоминающая береговую линию на рис. 2. Из рис. 15 видно, что статистические ансамбли α, β могут объединяться в кластеры, каждый из которых характеризуется максимальной высотой $Q_{\alpha\beta}$ барьера, отделяющего данный кластер от других. С другой стороны, поскольку ансамбли α, β отвечают узлам дерева Кейли (рис. 15,б), то им можно сопоставить точки α, β ультраметрического пространства, разделяемые расстоянием $l_{\alpha\beta}$ (см. раздел 2.1.2). Таким образом, высоты барьеров $Q_{\alpha\beta}$, а вместе с ними и

времена релаксации $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются функциями расстояния $l_{\alpha\beta}$ в ультраметрическом пространстве состояний. Поскольку удаление кластеров^(*) обеспечивается ростом высот разделяющих их барьеров, то можно заключить, что функция $Q(l)$ должна быть монотонно возрастающей (см. ниже).

Таким образом, параллельное действие различных каналов релаксации обеспечивается только в условиях иерархического соподчинения соответствующего набора статистических ансамблей. Такая ситуация реализуется в сильно неравновесных термодинамических системах типа спиновых и структурных стекол [18 — 20], сильно деформированных материалов [12 — 15, 21, 22], политипных и мартенситных структур [23 — 26] и т.д. В иерархической системе сначала протекают наиболее быстрые процессы, отвечающие преодолению барьеров минимальной высоты $Q_{\alpha\beta}$. При этом происходит слияние наименьших статистических ансамблей, и система переходит на более высокий иерархический уровень дерева Кейли (рис. 15,б). Затем преодолеваются барьеры большей высоты $Q_{\alpha\beta}$, в результате чего получившиеся суперкластеры сливаются в более крупные образования, отвечающие следующему иерархическому уровню. Далее, этот процесс может продолжаться неограниченно. Его иерархический характер выражается в том, что пока не сработают каналы с заданным временем релаксации τ , не включится параллельная сеть каналов следующего уровня, обладающего временем $\tau_{i+1} \gg \tau_i$. Такое иерархическое соподчинение является причиной критического замедления релаксации, приводящего, как будет показано ниже, к трансформации дебаевской экспоненты (2.63) в более медленно спадающие зависимости.

Как уже указывалось, фрактальный характер иерархически соподчиненной системы проявляется в координатной зависимости $U(r)$ потенциальной энергии системы. Это означает, по-видимому, что фрактальными свойствами будет обладать также множество кластеров статистических ансамблей, представляемых точками ультраметрического пространства состояний. Как видно из рис. 16, описанное выше поэтапное объединение кластеров приводит к росту параметра перекрытия [36]

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle x_i \rangle_\alpha \langle x_i \rangle_\beta, \quad (2.71)$$

где x_i — гидродинамическая переменная в точке r_i , дающая при усреднении по α -му кластеру параметр порядка $\eta_\alpha = \langle x \rangle_\alpha$, N — число структурных единиц. Наглядный образ иерархического объединения кластеров отвечает постепенному слиянию лагун.

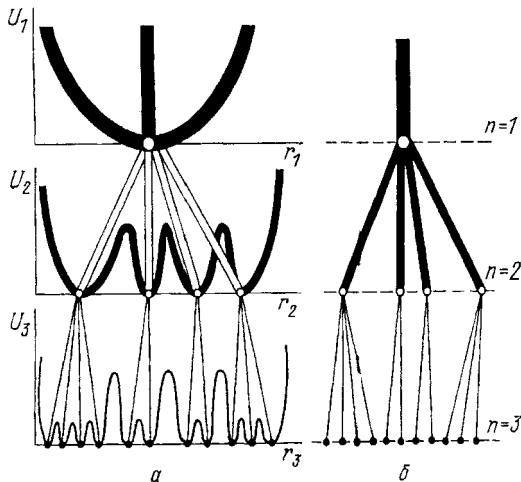


Рис. 15. а — Вид потенциального рельефа на различных структурных уровнях. б — Соответствующее иерархическое дерево [15]

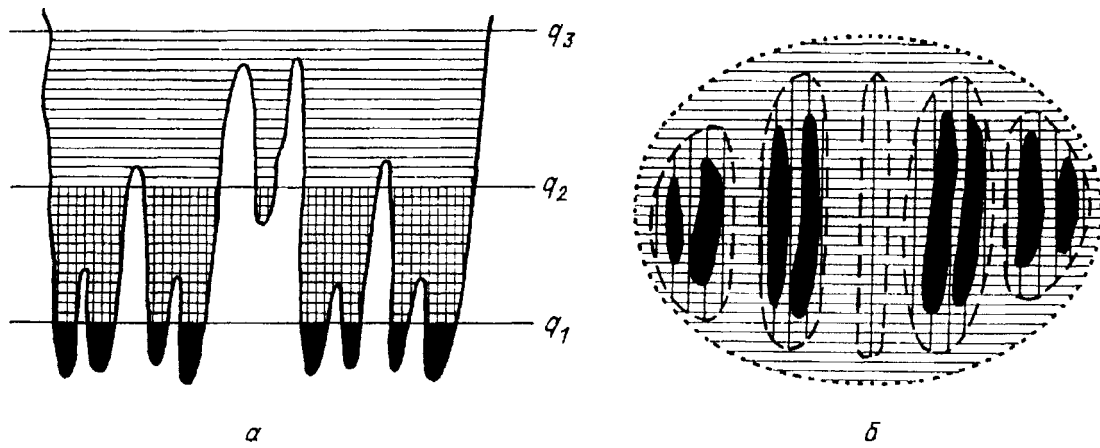


Рис. 16. Схема объединения статистических ансамблей в процессе структурной релаксации иерархической системы в представлении потенциального рельефа (а), в пространстве состояний (б)

заполненных жидкостью с возрастающим уровнем $q_{\alpha\beta}$ в сосуде с рельефом дна, определяемым зависимостью $U(r)$. Очевидно, при последовательном действии каналов релаксации (см. рис. 14) кластеры совсем не перекрываются, и жидкость последовательно переливается во все более низкие впадины.

В разделе 3.3.3 мы покажем, что множество кластеров, образуемых в пространстве состояний иерархической системы, имеет стохастический характер. Это означает, в частности, что параметр (2.71) перекрытия кластеров будет случайной величиной, распределение которой задается функцией

$$P(q) = \sum_{\alpha, \beta} w_{\alpha} w_{\beta} \delta(q - q_{\alpha\beta}). \quad (2.72)$$

Тогда из определения (2.68) нетрудно видеть, что вероятность $S(t)$ остаться системе в исходном состоянии выражается через первый момент параметра перекрытия (2.71) следующим образом:

$$S(t) = 1 - \int_0^1 q P(q) dq = 1 - \int_0^1 q(Y) dY. \quad (2.73)$$

Здесь во втором равенстве введена вероятность

$$Y(q) = \int_q^1 P(q') dq' \quad (2.74)$$

реализации перекрытий q' , превышающих заданный порог q .

Для определения явного вида зависимости (2.68) требуется найти распределения $w_{\alpha} = w_{\alpha}(l)$, $Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}(l)$ вероятности реализации ансамблей α, β и барьеров между ними в зависимости от расстояния l в ультраметрическом пространстве. В рамках феноменологического подхода ограничимся исследованием возможных видов временной зависимости $S(t)$ при различных мажорантах распределений $w(l)$ и $Q(l)$. Спадающее

распределение вероятности будем аппроксимировать зависимостями

$$w_w(l) \propto \exp(-l/l_0), \quad w_s(l) \propto l^{-D}, \quad (2.75)$$

первая из которых описывает слабо иерархические системы, а вторая — сильно иерархические (l_0 , D — положительные параметры). Это связано с тем, что экспонента $w_w(l)$, спадая на расстояниях $l \sim l_0$, связывает только малое число иерархических уровней, а медленно изменяющаяся степенная зависимость $w_s(l)$ учитывает практически весь их набор. Что касается зависимости $Q(l)$ высот барьеров, то будем аппроксимировать ее тремя основными видами нарастающих функций:

$$Q_l(l) = Q \ln l, \quad Q_p(l) = Q l^a, \quad Q_e(l) = Q e^l, \quad (2.76)$$

где Q — характерная высота, $a > 0$ — показатель.

Подставляя зависимости (2.76) в (2.67), а полученный результат и формулы (2.75) в определение (2.68), методом перевала находим асимптотики $t \rightarrow \infty$, представленные в табл. I. Из нее видно, что при любом сочетании аппроксимации (2.75), (2.76) закон релаксации $S(t)$ теряет дебаевский вид. Наиболее слабое замедление наблюдается при логарифмическом нарастании высот фрактального рельефа в слабо иерархических системах (так называемый закон Колерауша, представляющий экспоненту, растянутую за счет показателя $\beta < 1$). При усилении иерархической связи или переходе к степенному нарастанию высот рельефов закон спада $S(t)$ приобретает степенной характер. Если же реализуется экспоненциальное нарастание барьеров в слабо иерархических системах или степенное в сильно иерархических, то релаксация принимает логарифмический характер. И наконец, для сильно иерархических систем с экспоненциальным нарастанием высот барьеров получаем двойное логарифмическое замедление, т.е. процесс релаксации практически останавливается.

Таблица I. Возможные асимптотики $t \rightarrow \infty$ коррелятора $S(t)$

$S(t)$	$Q_l(l)$	$Q_p(l)$	$Q_e(l)$
$w_w(l)$	$\exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^\beta\right], \quad \beta = \left[1 + \left(\frac{Q}{T}\right)\right]^{-1}$	$\exp\left[-\left(\frac{T}{Q} \ln \frac{t}{\tau_0}\right)^{1/a}\right]$	$\left(\frac{T}{Q} \ln \frac{t}{\tau_0}\right)^{-1/b}$
$w_s(l)$	$t^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{DT}{Q}$	$\left(\frac{T}{Q} \ln \frac{t}{\tau_0}\right)^{-D/a}$	$\left[\ln\left(\frac{T}{Q} \ln \frac{t}{\tau_0}\right)\right]^{-D}$

3. Мультифракталы. Отличительная черта рассмотренных выше многообразий состоит в том, что они представляются масштабным фактором ξ и ветвистостью j , набор величин которых характеризуется средними значениями $\langle \xi \rangle$, $\langle j \rangle$, присущими данному фракталу. Соответственно, равенство (2.11) приводит к единственному значению фрактальной размерности D , в связи с чем и использован термин монофрактал. В настоящем разделе будет рассмотрен более общий случай мультифрактала, представляющего суперпозицию нескольких монофракталов, характеризующихся различными значениями вероятностного фактора $p = j^{-1}$ и геометрического ξ . В основу подхода, используемого в разделе 3.1, положен геометрический аспект, связанный с распределением величины ξ . В разделе 3.2 излагается термодинамический метод, основанный на рассмотрении вероятностного фактора p . Их связь описана в конце разделов 3.2.1, 3.2.2.

Разницу геометрического и термодинамического подходов легко видеть, сравнивая метод построения фрактала, изложенный в разделе 2, и так называемый метод свертывания, представленный ниже. Первый из них носит чисто геометрический характер — все построение сводится к последовательности из $n \rightarrow \infty$ циклов разделения исходного фрагмента на i блоков, последующего отбрасывания $i - j$ из них и деформации ξ оставшихся j блоков. Методу свертывания, напоминающему реальный процесс свертывания молока, присущ физический аспект, связанный с изменением вероятностей реализации различных фрагментов множества.

Суть метода свертывания легче всего представить следующим образом [3]. Берем стержень единичной длины $l_0 = 1$ и массы $m_0 = 1$. Соответственно, плотность $\rho = m/l$ также будет единичной ($\rho_0 = 1$). Далее разрезаем стержень пополам, так что массы отрезков составляют $m_1 = m_1^{(1)} = m_1^{(2)} = 1/2$. Не меняя их, произведем пластическую деформацию (ковку) полученных кусков, укорачивая стержни до одинаковой длины

$l_1 = l_1^{(1)} = l_1^{(2)} = 1/3$. В результате плотность возрастает до значения $\rho_1 = m_1/l_1 = 3/2$. Повторяя процедуру n раз, получаем $N_n = 2^n$ стержней длиной $l_n = 3^{-n}$ и массой $m_n = 2^{-n}$, причем их суммарная масса $N_n m_n = 1$ оказывается неизменной. Зависимость физических характеристик m , ρ элементарного стержня от его длины l (индекс n опускаем)

$$m = l^\alpha, \quad \rho = l^{\alpha-1} \quad (3.1)$$

определяется величиной показателя $\alpha = \ln 2 / \ln 3$.

Нетрудно видеть, что произведенное построение напоминает образование канторовской пыли, рассмотренное в разделе 2.1.1. Их различие можно отразить наглядно, если модифицировать канторовское построение (см. рис. 6,а), увеличивая высоты фрагментов стержня таким образом, чтобы на каждом шаге n суммарная площадь оставалась постоянной (см. рис. 6,б). Кроме этого обстоятельства, отвечающего условию сохранения массы, переход к процедуре свертывания отражается и формальным образом: вместо соотношений (2.7), (2.5), определяющих геометрические характери-

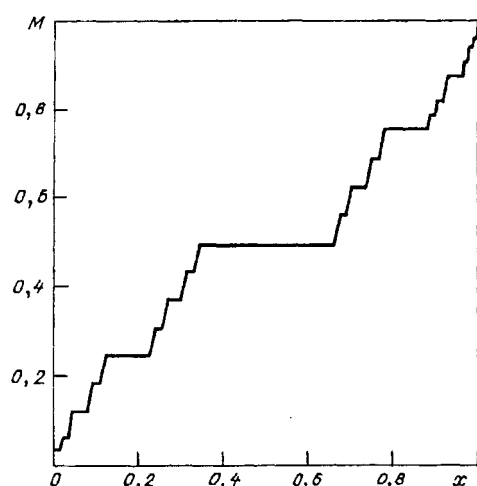


Рис. 17. Зависимость массы M канторовского стержня, изображенного на рис. 6,б, от координаты x , отсчитанной от его левого края [3]



Рис. 18. Построение канторовского множества с масштабами $\xi_1 = 1/4$ и $\xi_2 = 2/5$ [3]

ки фрактала, мы получаем скейлингование зависимости (3.1) физических величин, характер которых определяется показателем α , отвечающим фрактальной размерности (2.10)^(4*).

Описанная процедура свертывания позволяет построить так называемую чертову лестницу, вид которой показан на рис. 17. Она представляет график зависимости массы

$$m(x) = \int_0^x \rho(x') dx' \quad (3.2)$$

элементарных стержней, расположенных в интервале $[0, x]$, от его длины x . Поскольку плотность $\rho = 0$ вне стержней и $\rho = \infty$ в точках канторовского множества, отвечающих их расположению, то интеграл (3.2) возрастает только в этих точках, а вне их остается постоянным. Особенность чертовой лестницы состоит в том, что функции $m(x)$, оставаясь постоянной в большинстве точек континуального множества $[0, 1]$, возрастает от 0 до 1 за счет резких скачков в точках счетного канторовского множества, мощность которого пренебрежимо мала по сравнению с континуумом.

3.1. Геометрический подход. Прежде чем излагать формальную схему представления мультифрактальных множеств (раздел 3.1.2), рассмотрим простейшие примеры канторовских последовательностей, которые позволяют наглядным образом продемонстрировать эту схему.

3.1.1. Мультифракталы Кантора. Отличительная особенность монофрактальной канторовой пыли, рассмотренной в разделе 2.1.1, состоит в том, что отрезки, получаемые на каждом шаге $n \rightarrow \infty$ деления исходного фрагмента, имеют одинаковые длины $l_n = 3^{-n}$ и реализуются с одинаковой вероятностью $p = 1$ (о последнем обстоятельстве говорят, что они имеют одинаковую меру p). Рассмотрим, к каким изменениям приведет отказ от этих ограничений.

Если предположить, что становятся разными длины ξ_1, ξ_2 левого и правого отрезков, то канторовское множество приобретает двухмасштабный характер типа, показанного на рис. 18. Для опреде-

ления фрактальной размерности следует определить производящую функцию (2.26). Поскольку после n шагов получается набор из $\leq n$ отрезков длины ξ_1 и $n - i$ отрезков ξ_2 , то под величиной l_i^q следует понимать произведение $l_n^q = \xi_1^{iq} \xi_2^{(n-i)q}$, содержащее в сумме (2.26) число раз, равное числу сочетаний

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Получающееся выражение

$$x_n(q) = \sum_{i=0}^n C_n^i \xi_1^{iq} \xi_2^{(n-i)q} = (\xi_1^q + \xi_2^q)^n \quad (3.4)$$

сводится к биному Ньютона. В пределе $n \rightarrow \infty$ он принимает конечное значение при условии

$$\xi_1^q + \xi_2^q = 1. \quad (3.5)$$

При заданных длинах ξ_1, ξ_2 оно определяет единственное значение $q = D$ фрактальной размерности (например, при величинах $\xi_1 = 1/4, \xi_2 = 2/5$, отвечающих рис. 18, получаем значение $D = 0,611$ меньшее, чем $D = 0,631$ для одномасштабного множества). Таким образом, можно заключить, что неоднородность в распределении масштабов ξ лишь уменьшает фрактальную размерность, оставляя ее единственной и не приводя, таким образом, к трансформации монофрактала в мультифрактал.

Рассмотрим теперь, к чему приведет отказ от условия постоянства меры p_i реализации различных отрезков множества. С этой целью рассмотрим биномиальный мультипликативный процесс. Суть его сводится к тому, что после каждого деления исходного отрезка на две части левой приписывается мера $p < 1$, а правой $q = 1 - p$. Иными словами, мультиплицируется указанный выше процесс свертывания, однако каждый из полустержней, полученных после разрезания исходного, деформируется с различными степенями p и $q = 1 - p$. Легко видеть, что после второго шага распределение P_n^i меры, отвечающей физической величине типа массы, будет иметь вид

$$P_2^i : pp; pq, qp; qq; \quad i = 1, 2, \dots, 2^n, \quad n = 2, \quad (3.6)$$

где запятые отделяют значения мер разных отрез-

ков. Соответственно, после третьего шага получаем

$$P_3^i: ppp; prq, pqp, qrp; qrp, qqp, rqq; qqq; \quad (3.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, 2^n, \quad n = 3.$$

На рис. 19 для $p = 1/4$ и $q = 3/4$ показано распределение мер P_n^i после $n = 11$ шагов и отвечающая ему интегральная мера

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^{2^n x} P_n^i \quad (3.8)$$

на отрезке $[0, x]$, $x \leq 1$. Аналогично выводу формулы (3.4) нетрудно видеть, что в явном виде отсюда имеем

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^{nx} C_n^i p^i q^{n-i}. \quad (3.9)$$

С учетом условия $p + q = 1$ для полной длины $x = 1$, как и следовало, получаем

$$M_n(1) = (p + q)^n = 1. \quad (3.10)$$

Из соотношений типа (3.6), (3.7) легко видеть, что после $n \rightarrow \infty$ шагов получается набор из 2^n чисел, записанных в двоичной системе счисления со значениями p, q . Эти числа удобно разбить на группы, каждая из которых содержит C_n^i чисел, имеющих i значений p и $n - i$ значений q (в последовательностях (3.6), (3.7) эти группы разделены точкой с запятой). Принимая, что отрезок длиной $l_i \rightarrow 0$ покрывает только одну группу n -значных чисел, содержащих i значений p , из (2.26) получаем производящую функцию

$$x_n^i(q) = C_n^i \xi_n^q, \quad \xi_n = (1/2)^n. \quad (3.11)$$

Используя в (3.3) формулу Стирлинга

$$n! \approx \exp[-n(1 - \ln n)], \quad (3.12)$$

находим, что выражение (3.11) принимает конечное значение при условии $q = f(s)$, где функция $f(s)$ от аргумента $s = i/n$, определяющего долю значений p в данной группе i , имеет вид

$$f(s) = -\frac{s \ln s + (1 - s) \ln(1 - s)}{\ln 2}. \quad (3.13)$$

Таким образом, фрактальная размерность биномиального множества Кантора, отвечающего конечному значению производящей функции, имеет вид

$$D(s) = f(s). \quad (3.14)$$

Поскольку данное значение отвечает только одной группе n -значных последовательностей, фиксированной выбором величины $0 \leq s \leq 1$, то весь набор этих последовательностей характеризуется множеством величин $D(s)$, соответствующих различным значениям s . Иными словами, биномиальное множество Кантора представляет суперпозицию монофракталов, отвечающую полно-

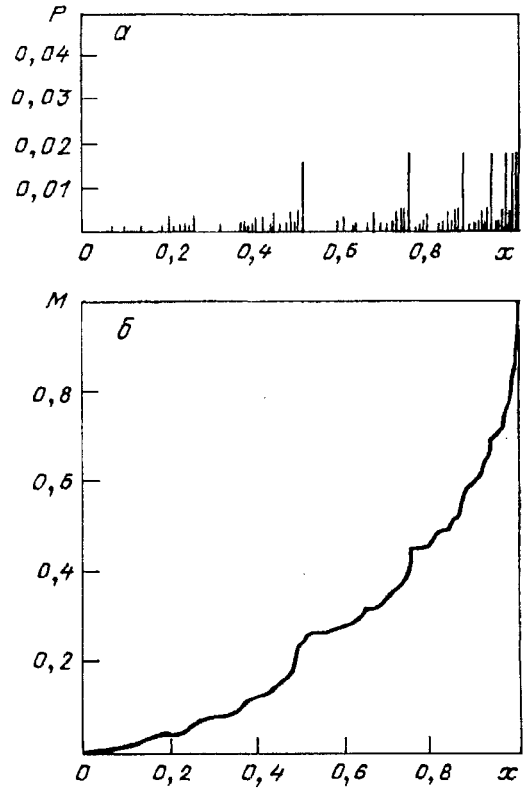


Рис. 19. Распределение плотности меры (а) и полной меры (б) для биномиального мультипликативного процесса (число итераций $n = 11$, вероятности $p = 1/4$, $q = 3/4$) [3]

му спектру размерностей (3.14). Именно по этой причине используется термин мультифрактал. При этом каждый из формирующих его монофракталов входит с весом

$$N_n^s = C_n^{sn} = \exp(\ln 2 \cdot n f(s)). \quad (3.15)$$

Определяющая его функция $f(s)$ представляет, очевидно, спектральное распределение монофракталов по данному мультифракталу. Из графика зависимости $f(s)$, приведенного на рис. 20, видно, что максимальные значения $D = 1$, $N_n = 2^n$ достигаются для группы последовательностей, отвечающей топологической размерности $d = 1$, т.е. для обычного, нефрактального множества одинаковых отрезков длиной $l_n = 2^{-n}$.

Неудобство изложенной схемы состоит в том, что параметр s не является наблюдаемой величиной. Поэтому следует перейти к показателю α , определяемому равенством

$$P(l) = l^\alpha, \quad (3.16)$$

напоминающим скейлинговые соотношения (3.1) для физических величин. Оно получается из цепочки соотношений

$$P(s) = M(x(s) + l) - M(x(s)) = l^\alpha, \quad (3.17)$$

следующей из определения (3.8). Для рассматриваемого

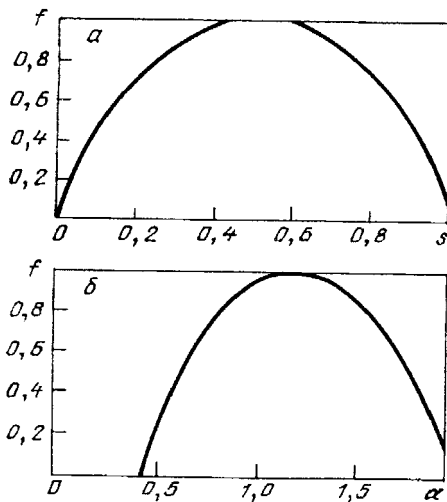


Рис. 20. Спектральная функция мультифрактала, порождаемого биномиальным мультипликативным процессом, представленным на рис. 19 в зависимости от параметра s , определяющего долю чисел p в двоичном представлении точек множества (а), и в зависимости от показателя α , определенного равенством (3.17) (б) [3]

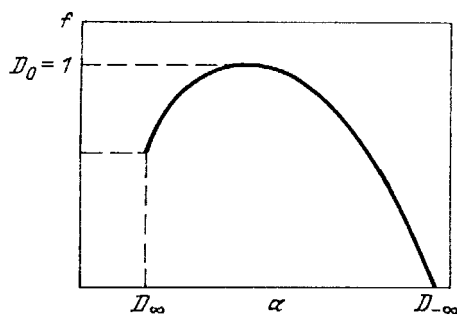


Рис. 21. Спектральная функция для двухмасштабного множества Кантора с сохраняющейся длиной [10]

мого случая биномиального канторовского множества переход от параметра s к α может быть проведен явным образом, если воспользоваться выражением меры биномиального распределения (см. (3.8), (3.9))

$$P_n(s) = (p^s q^{1-s})^n \quad (3.18)$$

и равенством $l_n = (1/2)^n$. В результате выражение (3.16) дает линейную зависимость

$$\alpha = - \frac{s \ln p + (1-s) \ln (1-p)}{\ln 2} \quad (3.19)$$

Благодаря этому вид функции $f(\alpha)$ имеет тот же характер, что и для $f(s)$ (см. рис. 20). Ненулевые значения f сосредоточены в интервале от $\alpha_{\min} = -\ln(1-p)/\ln 2$ до $\alpha_{\max} = -\ln p/\ln 2$, где $p \leq 1/2$. Нижняя граница отвечает случаю $s = 0$ — биномиальная последовательность состоит только из чисел q , а верхняя — противоположному случаю

$s = 1$, при котором последовательность сводится к набору чисел p . В предельных точках имеем $df/d\alpha = \pm \infty$, а максимальное значение $f = 1$, соответствующее $df/d\alpha = 0$, достигается при $\alpha = -[\ln p + \ln(1-p)]/\ln 2$.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что верхняя граница $\alpha_{\max}$ отвечает последовательности, состоящей только из чисел p , и поэтому на ней всегда $f = 0$. Согласно (3.14), (3.15) это означает, что имеется единственное нульмерное множество, которое и принято за исходное. На нижней границе $\alpha_{\min}$ реализуется последовательность, состоящая из одних чисел q . Для биномиального канторовского множества эта последовательность также сводится к точке ($D(\alpha_{\min}) = 0$) и является единственной ($N(\alpha_{\min}) = 1$). Однако, если на верхней границе, отвечающей исходной последовательности, такая ситуация представляется естественной, то на нижней это не всегда так.

Для доказательства рассмотрим случай, когда исходный отрезок делится на два длиной ξ_2 и один длиной ξ_1 , причем ни один из них не выбрасывается. Первым двум отрезкам сопоставляется вероятность p_2 , оставшемуся — p_1 . В силу условий нормировки $\xi_1 + 2\xi_2 = 1$, $p_1 + 2p_2 = 1$. Кроме того, принимается $\xi_2 < \xi_1$ и $p_2/\xi_2 > p_1/\xi_1$. Расчет [10], проведенный в рамках указанных предположений, приводит к спектральному распределению $f(\alpha)$, показанному на рис. 21. Его характерная особенность состоит в том, что на нижней границе имеем $f \neq 0$. Это означает, что последовательность, отвечающая условию $s = 0$, сводящему ее к бесконечному ряду одних только чисел p_2 , не является единственно возможной. Очевидно, данное обстоятельство связано с тем, что в отличие от одномасштабного множества Кантора, здесь можно переставлять между собой не только числа p_1 , p_2 , но и отрезки различной длины ξ_1 , ξ_2 . Именно последнее обстоятельство обуславливает тот факт, что предельное множество не сводится к точке и согласно (3.14) $f(\alpha_{\min}) \neq 0$.

3.1.2. Формализм геометрического описания мультифракталов. Имея в виду рассмотренные примеры простейших мультифракталов Кантора, изложим теперь общую схему геометрического описания произвольного фрактального множества [3, 8, 10]. Оно образуется в результате $n \rightarrow \infty$ шагов деления исходного множества, приводящего к образованию N_n фрагментов длиной $l_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, N_n$. Вероятность реализации каждого фрагмента определяется формулой (ср. с (3.17))

$$P_i = l_i^\alpha, \quad (3.20)$$

где α — скейлинговый параметр. Как и в случае монофрактала, исходной конструкцией является производящая функция меры типа (2.26):

$$M(q) = \sum_{i=1}^{N_n} P_i^q. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.20) в (3.21), получаем определение

$$M(q) = \sum_i l_i^{q\alpha}, \quad (3.22)$$

отличающееся от производящей функции (2.26) монофрактала наличием переменного множителя α . Из всего множества N_n фрагментов данное значение α реализуется для

$$N_n(\alpha) = l_n^{-f(\alpha)} \quad (3.23)$$

фрагментов, где функция $f(\alpha)$, определяющая спектр значений α , задает размерность геометрического множества (набора сегментов l_i), на котором реализуется распределение меры (3.20). Используя (3.23), из (3.22) получаем

$$M_n(q) = \sum_n l_n^{q\alpha - f(\alpha)}. \quad (3.24)$$

Учитывая равномерность распределения значений α , равенство (3.24) удобно переписать в виде интеграла

$$M_n(q) = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} l_n^{q\alpha - f(\alpha)} \rho(\alpha) d\alpha, \quad (3.25)$$

где функция $\rho(\alpha)$ описывает плотность распределения фрагментов l_n по параметру α .

Поскольку длина l_n очень мала, то наибольший вклад в интеграл (3.25) будут давать значения α , отвечающие минимуму показателя в подынтегральном выражении. Отсюда следуют соотношения

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(q)} = q, \quad \left. \frac{d^2f}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha(q)} < 0, \quad (3.26)$$

позволяющие по заданному спектру $f(\alpha)$ найти связь $\alpha(q)$ скейлинговых показателей. Сам интеграл (3.25) с помощью метода наибыстрейшего спуска сводится к виду

$$M_n(q) \approx l_n^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}. \quad (3.27)$$

Полученная величина меры $M(q)$ позволяет найти спектр размерностей мультифрактала $D(q)$. Для отыскания соотношения, связывающего эти величины, рассмотрим монофрактальную меру $P = l^d$, определенную на евклидовом пространстве размерностью d . Разбивая его на $N = l^{-d}$

ячеек объемом $l^d \rightarrow 0$, из определения (3.21) получаем

$$M(q) = \sum_{i=1}^N l^{qd} = N l^{qd} = l^{(q-1)d}. \quad (3.28)$$

Поскольку для рассматриваемого простого случая фрактальная размерность $D(q)$ сводится к топологической d , то полученный результат (3.28) позволяет ввести следующее определение:

$$D(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{1}{q-1} \frac{\ln M(q)}{\ln l} \right). \quad (3.29)$$

В экспоненциальной форме оно имеет вид типа (3.28)

$$M(q) \approx l^{(q-1)D(q)}, \quad l \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Сравнивая этот результат с (3.27), получаем выражение фрактальной размерности через спектральные зависимости $\alpha(q)$, $f(\alpha(q))$:

$$D(q) = (q-1)^{-1} (q\alpha(q) - f(\alpha(q))). \quad (3.31)$$

С другой стороны, если известен спектр размерностей $D(q)$, то с помощью (3.26), (3.31) легко найти спектральную зависимость

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} \left[(q-1) D(q) \right]. \quad (3.32)$$

Введенное выше определение меры (3.21) обладает тем недостатком, что учитывает только вероятностный аспект, основанный на процедуре свертывания, и полностью игнорирует геометрические особенности мультифрактала. Действительно, подсчет меры по формуле (3.21) подразумевает разбиение несущего пространства на блоки i , каждому из которых сопоставляется вероятность P_i . Однако, как видно из примера с береговой линией (см. рис. 2), некоторые фрагменты фрактала могут входить в i -й блок по N_i раз, и вместо P_i в равенстве (3.21) следовало бы брать $N_i P_i$. Поэтому, если предположить скейлинговую зависимость $N_i \propto l_i^{-\tau}$, где τ — соответствующий показатель, то определения (3.21), (3.22) принимают вид

$$M(q, \tau) = \sum_i (P_i^q / l_i^\tau) = \sum_i l_i^{q\alpha - \tau}, \quad l_i \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

Аналогично тому, как это делалось при переходе от (3.22) к (3.27), отсюда получаем оценку

$$M_n(q, \tau) \approx l_n^{q\alpha - f(\alpha) - \tau}. \quad (3.34)$$

С уменьшением фрагментов $l_n \rightarrow 0$ мера (3.34) принимает конечные значения при условии, что показатель τ сводится к величине $\tau(q)$, задаваемой условием

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)), \quad (3.35)$$

где зависимость $\alpha(q)$ определяется соотношениями

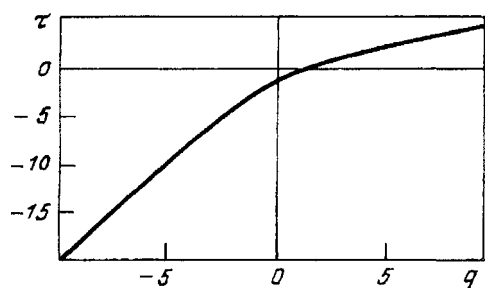


Рис. 22. Распределение показателя меры (3.33), соответствующее спектру биномиального мультипликативного процесса (см. рис. 20) [3]

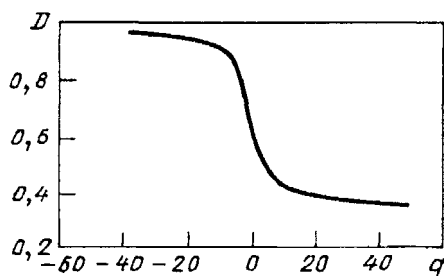


Рис. 23. Спектр фрактальных размерностей для двухмасштабного канторовского множества, показанного на рис. 18 [3]

(3.26). Используя равенство (3.31), отсюда находим связь с фрактальной размерностью

$$\tau(q) = (q - 1)D(q). \quad (3.36)$$

В свою очередь подстановка (3.36) в (3.32) приводит к соотношению

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (3.37)$$

Систему уравнений (3.35), (3.37) можно рассматривать как преобразование Лежандра, позволяющее перейти от одной пары независимых переменных α , f к другой q , τ (или наоборот). Произвольный мультифрактал полностью представляется спектральной функцией $f(\alpha)$ или эквивалентной ей зависимостью $\tau(q)$, определяющей согласно (3.36) спектр фрактальных размерностей $D(q)$. В термодинамике функциям $f(\alpha)$, $\tau(q)$ отвечает уравнение состояния системы.

3.1.3. Характерные особенности зависимостей $f(q)$, $\tau(q)$, $D(q)$. В разделе 2.1.1 на примере бимодальной канторовской последовательности рассматривались особенности куполообразной зависимости $f(\alpha)$. Как видно из рис. 20, 21, зависимость $f(\alpha)$ принимает положительные конечные значения в ограниченном интервале $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, на границах которого ее производная бесконечна, а внутри интервала зануляется, определяя таким

образом максимум зависимости $f(\alpha)$. Для наглядности на рис. 22, 23 приведен вид зависимостей $\tau(q)$, $D(q)$, отвечающих спектральной кривой $f(\alpha)$ на рис. 20 для канторовского мультифрактала. Видно, что показатель $\tau(q)$ линейно нарастает при больших $|q|$, принимая отрицательные значения при $q \rightarrow -\infty$ и положительные при $q \rightarrow +\infty$. Поскольку фрактальная размерность $0 < D(q) < \infty$, то из (3.36) видно, что в точке $q = 1$ показатель $\tau(q)$ меняет знак. Что касается зависимости $D(q)$, то из рис. 23 можно видеть, что она монотонно спадает от максимального значения $D_{-\infty}$, отвечающего $q = -\infty$, до минимального $D_{\infty} \equiv D(q = +\infty)$, причем область наиболее быстрого изменения функции $D(q)$ сосредоточена вблизи значения $q = 0$.

Проведем теперь более подробное аналитическое описание указанных зависимостей. Начнем со спектральной функции $f(\alpha)$. Как видно из уравнения (3.26), на границах $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ области определения функции $f(\alpha)$, где параметр q принимает предельные значения $q = \pm\infty$, производная $df(\alpha)/d\alpha = \pm\infty$. При этом правая граница, где эта производная отрицательна, отвечает исходному значению $q = -\infty$, а левая, где производная положительна, — конечному $q = +\infty$. Тогда, используя соотношение (3.31), нетрудно видеть, что значение $\alpha_{\max}$ сводится к максимальной размерности $D_{-\infty}$, отвечающей начальному значению параметра q , а величина $\alpha_{\min}$ — минимальной размерности $D_{+\infty}$, соответствующей конечному значению q :

$D_{-\infty} = \alpha_{\max}$, $D_{+\infty} = \alpha_{\min}$. (3.38) еление $f(\alpha)$ дает ряд физических значений $D(q)$ внутри интервала. Так, если в определении (3.22) положить $q = 0$, то суммирование по всем сегментам i приводит к значению $M(0) = N_n$. Сравнивая его с результатом (3.30) при $q = 0$, приходим к соотношению

$$N_n = l_n^{-D_0}, \quad D_0 \equiv D(q = 0), \quad (3.39)$$

определяющему подобно формуле (2.7) полное число сегментов l_i , на которых задается мера P_i . Таким образом, при нулевом значении параметра q распределение $D(q)$ дает фрактальную размерность геометрического множества, являющегося носителем (областью определения) физических величин P_i . Согласно определению (3.31) в точке $q = 0$ имеем $D(q = 0) = f(\alpha_0)$, где значение $\alpha_0 \equiv \alpha(q = 0)$ фиксируется условием $df/d\alpha = 0$, следующим из уравнения (3.26). Это означает, что фрактальная размерность D_0 отвечает ординате точки максимума спектральной зависимости $f(\alpha)$ (рис. 24).

Определим теперь смысл значения $D_1 \equiv D(q = 1)$. Поскольку в знаменателе формулы (3.29) стоит множитель $q - 1$, то при вычислении необходимо проявить определенную осторожность, поскольку нельзя сразу полагать $q = 1$. Принимая $q = 1 + \delta$, $\delta \rightarrow 0$, перепишем определение (3.29) в виде

$$D(1) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{\delta} \left(\ln \sum_i P_i^{1+\delta} \right) (\ln l)^{-1} \right]. \quad (3.40)$$

Записывая цепочку очевидных соотношений

$$\begin{aligned} \ln \sum_i P_i^{1+\delta} &= \ln \left[\left(\sum_i P_i^{1+\delta} - 1 \right) + 1 \right] \approx \\ &\approx \sum_i P_i^{1+\delta} - 1 = \sum_i P_i e^{\delta \ln P_i} - 1 \approx \\ &= \sum_i P_i (1 + \delta \ln P_i) - 1 = \delta \sum_i P_i \ln P_i, \end{aligned}$$

где учтено условие нормировки

$$\sum_i P_i = 1,$$

приходим к выражению

$$D_1 = -S(l) / \ln l, \quad (3.41)$$

где введена величина

$$S = - \sum_i P_i \ln P_i, \quad (3.42)$$

представляющая обычную энтропию [34]. Если процесс итерации рассматриваемого множества сводится к поэтапному делению сегментов пополам, то элементарная длина составляет $l_n = (1/2)^n$, и формула (3.41) принимает вид

$$D_1 = s / \ln 2, \quad (3.43)$$

где $s = S/n$ — энтропия, приходящаяся на одну итерацию. Поскольку знаменатель представляет единицу информации 1 бит $\equiv \ln 2$, то можно заключить, что фрактальная размерность D_1 , отвечающая параметру $q = 1$, сводится к информационной энтропии,

Для геометрической интерпретации размерности D_1 положим $q = 1 + \delta$, $\delta \rightarrow 0$ в определении (3.31):

$$\begin{aligned} D_1 &\approx (1 + \delta)(\alpha + \alpha'\delta) - (f(\alpha) + f'(\alpha)\alpha'\delta) \approx \\ &\approx \alpha + \alpha'(1 - f'(\alpha)) + \delta^{-1}(\alpha - f(\alpha)), \end{aligned} \quad (3.44)$$

где приняты обозначения $\alpha = \alpha(q = 1)$, $\alpha' = d\alpha/dq|_{q=1}$, $f'(\alpha) = df/d\alpha|_{\alpha=\alpha(q=1)}$. Во избежание расхожести выражения (3.44) в пределе $\delta \rightarrow 0$ следует принять

$$\alpha(q = 1) = f(\alpha(q = 1)). \quad (3.45)$$

С другой стороны, второе слагаемое (3.44) также пропадает, поскольку в силу (3.26)

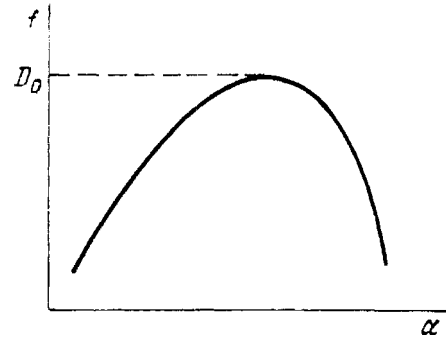


Рис. 24. Схема определения размерности D_0 несущего геометрического множества по спектру мультифрактала [8]

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(q=1)} = 1. \quad (3.46)$$

В результате получаем

$$D_1 = \alpha(q = 1). \quad (3.47)$$

Согласно (3.45) — (3.47) для определения размерности D_1 следует провести касательную к графику $f(\alpha)$, проходящую через начало координат (рис. 25). Тогда абсцисса и ордината точки касания определяют величину D_1 .

Важное значение имеет фрактальная размерность $D_2 \equiv D(q = 2)$, определяющая поведение корреляционной функции ^(5*)

$$S(\mathbf{r}) = \frac{\langle \rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \rangle}{\langle \rho^2(\mathbf{r}') \rangle} \propto r^{-(D_0 - D_2)}, \quad (3.48)$$

где учтено, что размерность физического пространства d сводится к фрактальной размерности D_0 , $\rho(r)$ — координатное распределение плотности частиц, угловые скобки означают усреднение по фрактальному множеству. Физический смысл функции (3.48) состоит в том, что она определяет условную вероятность иметь данной частице координату $\mathbf{r}' + \mathbf{r}$, если другая частица находится в точке $\mathbf{r}'$. Нетрудно показать, что фурье-образ зависимости (3.48) имеет вид $S(\mathbf{r}) \propto r^{-D_2}$ и, таким образом, сводится к распределению (2.32) интенсивности порицающего излучения.

Для определения показателя D_2 проинтегрируем зависимость (3.48) по сфере радиуса l с центром в точке $\mathbf{r}'$. Получающаяся мера

$$M_2(l) \propto l^{D_2} \quad (3.49)$$

определяет совместную вероятность попадания обеих частиц в данную сферу. Ее можно вычислить независимым образом, разбивая все пространство на N сфер радиусом l и учитывая, что вероятность совместного попадания двух частиц в i -ю сферу составляет P_i^2 . Тогда суммирование по всем сферам

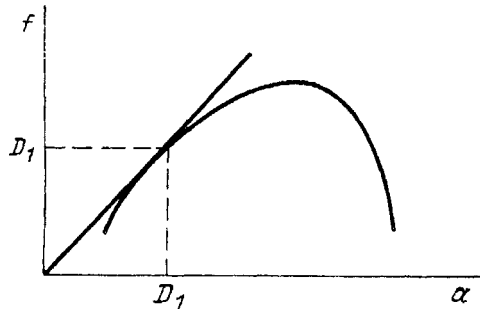


Рис. 25. Схема определения информационной энтропии D_1 по спектру мультифрактала [8]

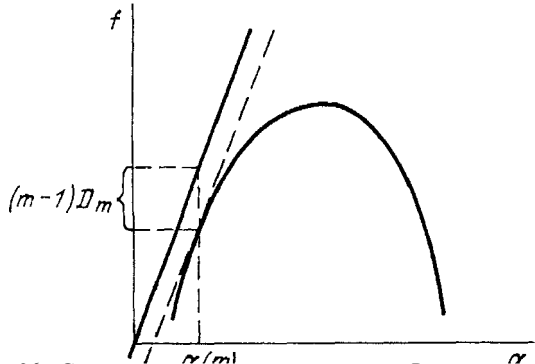


Рис. 26. Схема определения размерности D_m показателя m -частичного коррелятора

дает искомую величину $M_2(l)$, которая, очевидно, сводится к общему определению меры (3.21) при $q = 2$. Сравнение полученного результата (3.49) с выражением (3.30) приводит к равенству $D_2 = D(q = 2)$, означающему, что корреляционный показатель D_2 отвечает значению $q = 2$ в спектральном распределении $D(q)$.

Очевидно, проведенную процедуру можно обобщить на коррелятор произвольного порядка $m \geq 2$, если под $\mathbf{r}$ в равенстве типа (3.48) понимать максимальное расстояние между m частицами:

$$S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m) \propto \left\langle \prod_{i=1}^m \rho(\mathbf{r}_i) \right\rangle \propto r^{-(D_0 - D_m)}, \quad (3.50)$$

где $r = \max |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, $i, j = 1, \dots, m$. Таким образом, набор показателей D_m , отвечающих целочисленным значениям $q = m$, $m = 2, 3, \dots$, определяет скорость спадания m -частичных пространственных корреляций.

При графическом определении величин D_m будем исходить из равенства (3.31), записанного при $q = m$:

$$(m - 1)D_m = m\alpha(m) - f(\alpha(m)). \quad (3.51)$$

С учетом условия

$$m = df/d\alpha|_{\alpha=\alpha(m)}, \quad (3.52)$$

следующего из (3.26), видим, что для определения D_m нужно провести прямую $f = m\alpha$, затем сместить ее параллельно самой себе до касания с

куполom спектральной зависимости $f(\alpha)$. Согласно (3.52) точка касания дает значение $\alpha(m)$, зная которое, по (3.51) определяем показатель D_m (рис. 26). Спадающий характер зависимости $D(q)$ (см. ниже) указывает на то, что с повышением порядка m коррелятора (3.50) скорость его спадания нарастает. В пределе $m \rightarrow \infty$ корреляционный показатель (3.50) достигает конечного значения $D_0 - D_\infty$, величина которого, как и следует, не превышает размерность D_0 самого пространства, в котором наблюдаются корреляции.

Опишем теперь поведение функции $\tau(q)$. Поскольку значения параметра α ограничены положительными величинами (3.38), то из уравнения (3.37) следует, что зависимость $\tau(q)$ является монотонно возрастающей (см. рис. 22). При $|q| \gg 1$ можно принять $\alpha(q) \approx D_{\pm\infty}$, и интегрирование выражения (3.37) дает линейную зависимость

$$\tau(q) \approx C_{\pm} + D_{\pm\infty}q, \quad q \rightarrow \pm\infty, \quad (3.53)$$

где $C_{\pm}$ — константы. Характерная особенность поведения $\tau(q)$ при малых значениях q состоит в занулении τ при $q = 1$. Этот результат следует из равенства (3.36), если учесть, что размерность $D(q)$ всегда принимает конечные значения. В точке $q = 0$ имеем $\tau = -D_0$.

Опишем, наконец, спектр размерностей $D(q)$. Подставляя связь (3.36) в уравнение (3.37) и проводя дифференцирование, с учетом (3.31) получаем

$$\frac{dD}{dq} = -\frac{\alpha - f(\alpha)}{(q - 1)^2}. \quad (3.54)$$

Как видно из рис. 25, с изменением параметра α первое слагаемое в числителе (3.54) больше второго во всех точках, кроме $\alpha = \alpha(q = 1)$, где они сравниваются. Однако при этом зануляется и знаменатель (3.54), так что всегда $dD/dq \leq 0$, и функция $D(q)$ является монотонно спадающей. Согласно (3.36), (3.53) при больших $|q|$ размерность D стремится к предельным значениям $D_{\pm\infty}$ согласно соотношению

$$D \approx D_{\pm\infty} + (C_{\pm} + 1)q^{-1}, \quad |q| \gg 1. \quad (3.55)$$

Соответственно при $|q| \ll 1$ равенство (3.31) приводит к линейной зависимости

$$D \approx D_0 - (\alpha_0 - 1)q, \quad \alpha_0 \equiv \alpha(q = 0). \quad (3.56)$$

Пример зависимости $D(q)$ показан на рис. 23.

3.2. Термодинамическое описание мультифракталов. В этом разделе мы покажем, что развитый выше формализм может быть изложен по аналогии со стандартным аппара-

том термодинамики [34]. В разделе 3.2.1 будет рассмотрен случай, когда вероятность P_i в формуле (3.33) постоянна. Использование сопряженного метода свертывания в разделе 3.2.2 позволяет провести обобщение на произвольное распределение P_i по фрагментам множества.

3.2.1, Мультифрактал с постоянной вероятностью распределения меры. Учитывая условие нормировки

$$\sum_i^{N_n} P_i = 1,$$

положим в (3.33)

$$P_i = \text{const} \equiv N_n^{-1}, \quad (3.57)$$

где N_n — полное число фрагментов множества, получаемое после $n \rightarrow \infty$ шагов деления. Тогда условие $M_n(q, \tau) = 1$ дает

$$N_n^q = \sum_i l_i^{-\tau}. \quad (3.58)$$

Этому равенству можно придать канонический вид, вводя параметр типа обратной температуры

$$\beta = -\tau \quad (3.59)$$

и аналог статистической суммы

$$Z = \sum_i l_i^\beta \equiv \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i}, \quad (3.60)$$

где эффективные уровни энергии

$$\varepsilon_i = -\ln l_i \quad (3.61)$$

задаются распределением длин l_i сегментов множества. Термодинамический потенциал $g = g(\beta)$, приходящийся на одну из n итераций, имеет вид

$$g \equiv -\frac{1}{n} \ln Z = -\frac{1}{n} \ln \sum_i l_i^\beta, \quad (3.62)$$

где величина g измерена в единицах температуры β^{-1} . Введем, кроме того, параметр μ согласно равенству

$$N_n = \mu^n. \quad (3.63)$$

Тогда с учетом (3.62) условие (3.58) дает выражение

$$g = -q \ln \mu, \quad (3.64)$$

где наличие логарифма указывает на энтропийный характер параметра μ .

Для дальнейшего выяснения примем, что все сегменты множества на n -м шаге итерирования имеют одинаковые длины

$$l_i = \xi^n, \quad (3.65)$$

определяемые масштабом

$$\xi = e^{-\lambda}, \quad (3.66)$$

величина которого задается показателем Ляпунова λ . Для выяснения его термодинамического смысла определим статистическую сумму (3.60):

$$Z_n = N_n l_n^\beta = \mu^n e^{-\beta \lambda} = \exp[n(\ln \mu - \beta \lambda)], \quad (3.67)$$

где учтены равенства (3.63), (3.65), (3.66). Подставляя (3.67) в (3.62), для удельной свободной энергии получаем выражение

$$g = \beta \lambda - \ln \mu. \quad (3.68)$$

Оно сводится к обычному определению $G = E - TS$, если под свободной энергией G понимать величину $(n/\beta)g$, под энергией — величину $E = n\lambda$ и, наконец, ввести энтропию

$$S = ns, \quad s = \ln \mu. \quad (3.69)$$

Таким образом, фрактальное множество можно описать на термодинамическом языке, если принять, что число итераций $n \rightarrow \infty$ играет роль числа частиц, параметр β представляет обратную температуру, множитель Лагранжа λ — удельную энергию, а s — энтропию. Их величины определяются равенствами (3.59), (3.66), (3.69), а энергетический спектр ε_i задается распределением длин сегментов (3.61). В рамках использованного подхода роль свободного параметра играет величина β , а уравнение состояния устанавливает зависимость $g(\beta)$. Используя термодинамическое тождество

$$\lambda = dg/d\beta, \quad (3.70)$$

от параметра β можно перейти к сопряженному полю λ [34]. Тогда равенства (3.68), (3.69) дают выражение

$$s = \beta g'(\beta) - g(\beta), \quad g' \equiv dg/d\beta \quad (3.71)$$

для энтропии, величина которой определяется энергией λ .

Для установления связи между геометрическим и термодинамическим подходами требуется выразить величины τ, q, α, f, D , введенные в разделе 3.1, через использованные здесь параметры β, g . Определение первой из них τ дается тождеством (3.59). Выражение для второй

$$q = \left(1 - \frac{d \ln g(\beta)}{d \ln \beta}\right)^{-1} \quad (3.72)$$

следует из (3.64), (3.69), (3.71).

Для показателя α из равенства (3.57) с учетом (3.63), (3.69), (3.65), (3.66) получаем $P_n = l_n^{s/\lambda}$. Сравнивая этот результат с определением (3.20), приходим к искомому равенству

$$\alpha = \beta - g(\beta)/g'(\beta), \quad (3.73)$$

где учтены (3.70), (3.71). Используя определения (3.20), (3.23), нетрудно заметить, что условие (3.57) означает

$$\alpha = f, \quad (3.74)$$

так что равенство (3.73) задает и величину f . С другой стороны, подставляя (3.74) в определение (3.31), находим последнюю из требуемых геометрических характеристик:

$$D = f = \alpha = \beta - (g(\beta) / g'(\beta)), \quad (3.75)$$

где учтено (3.73).

3.2.2. Термодинамическое описание мультифрактала в рамках метода свертывания. Известная особенность термодинамической схемы состоит в возможности дуального представления системы — в зависимости от характера внешних условий в рамках одного подхода можно исследовать температурную зависимость, а в рамках сопряженного — энтропийную (в первом случае роль термодинамического потенциала играет свободная энергия Гиббса или Гельмгольца, во втором — внутренняя энергия или энтальпия) [34]. Очевидно, подобную ситуацию можно ожидать и в нашем случае: если в разделе 3.2.1 независимый параметр сводился к обратной температуре β , то здесь его роль должна играть энергия λ , которая представляет согласно (3.70) поле, сопряженное параметру β . Само уравнение (3.70) позволяет по заданному значению λ найти параметр $\beta = \beta(\lambda)$, подстановка которого в соотношения (3.71) — (3.75) будет приводить к их выражению через энергию λ . При этом зависимость $s(\lambda)$ энтропии от энергии должна играть роль уравнения состояния, заменяющего использованную выше связь $g(\beta)$.

Касаясь геометрического аспекта излагаемого подхода, следует отметить, что в разделе 3.2.1 вероятность заполнения фрагментов P_i принималась постоянной и исследовалась зависимость меры (3.67) от характера распределения фрагментов, задаваемого обратной температурой β . При этом величина меры определяла свободную энергию (3.62). В настоящем разделе используется сопряженный метод свертывания, в рамках которого наложение условия $\tau = 0$ в (3.33) приводит к однородному распределению фрагментов, а распределение вероятности постулируется в виде

$$P_i = Z^{-1} l_i^\beta, \quad (3.76)$$

где условие нормировки дает статистическую сумму (3.60). Очевидно, при этом роль меры играет величина (3.21).

Используя равенства (3.20), (3.65), (3.66), (3.62), из определения вероятности (3.76) получаем основное термодинамическое соотношение используемого подхода

$$g = \lambda\beta - s(\lambda), \quad (3.77)$$

заменяющее связь (3.71). Из этого равенства легко получить весь набор τ, q, α, f, D геометрических характеристик мультифрактала. Поскольку используемые при этом выкладки полностью повторяют изложенные в предыдущем разделе, то приведем только результаты:

$$\begin{aligned} \tau &= -\beta, \\ q &= 1 - (\lambda\beta / s(\lambda)), \\ \alpha &= f = D = s(\lambda) / \lambda. \end{aligned} \quad (3.78)$$

С учетом замены аргумента λ на β и связи (3.70) соотношения (3.78) сводятся к равенствам (3.59), (3.72)—(3.75). Последнее из выражений (3.78) указывает, что в рамках термодинамического подхода купол спектральной зависимости $f(\alpha)$, присущей геометрической картине, распрямляется (см. рис. 25). Однако согласно второму равенству (3.78) параметр q становится при этом зависимым от одной из термодинамических величин λ, β .

3.3. Примеры использования концепции мультифрактала. В этом параграфе будет показано, что концепция мультифрактала позволяет дать единую картину таких явлений, как турбулентное течение жидкости и усталостное разрушение материалов (раздел 3.3.1), образование несоизмерных структур и квазикристаллов (раздел 3.3.2), фазовые переходы (с учетом критических флуктуаций) и образование иерархически соподчиненных структур (раздел 3.3.3). При изложении материала мы исходим из соображений симметрии функции отображения, последовательное действие которой генерирует набор точек мультифрактального множества. Так, раздел 3.3.1 основывается на использовании параболической зависимости, представляющей простейший пример симметричной функции. Соответственно, в разделе 3.3.2 рассматриваются квазипериодические последовательности, порождаемые антисимметричными функциями. Характерная особенность отображений, использованных в разделах 3.3.1, 3.3.2, состоит в том, что на каждом шаге генерирования фрактального множества связываются только два ближайших уровня. В отличие от этого в разделе 3.3.3 используется немарковская цепь линейных отображений, связывающая три ближайших уровня. Очевидно, марковская последовательность отвечает дифференциальным уравнениям первого порядка, отражающим процессы диссипации, тогда как немарковские цепи соответствуют уравнениям второго порядка типа уравнения Шрёдингера.

3.3.1. Логистическая последовательность. Настоящий раздел посвящен описанию процессов,

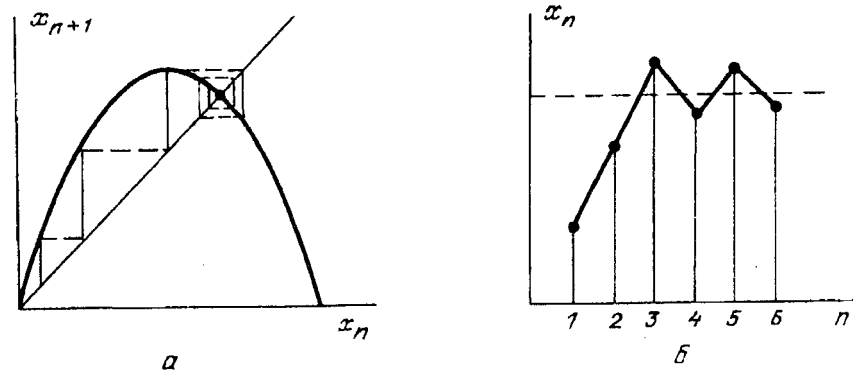


Рис. 27. а — Схема построения логистической последовательности (3.79). б — Значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ координат логистической последовательности, даваемые пересечением перпендикуляров к осям x_n, x_{n+1} с параболой (штриховая линия указывает точку пересечения параболы с биссектрисой) [40]

которые могут быть представлены цепью бифуркаций, каждая из которых, обеспечивая разделение исходного фрагмента надвое (см. рис. 7,а), представляет простейший механизм образования фрактального множества. Известным примером физического процесса, который может быть описан с помощью цепи бифуркаций, является переход к турбулентному течению жидкости путем удвоения периода [37]. Обратный процесс попарного слияния микротрещин может рассматриваться как возможный механизм усталостного разрушения твердого тела [13].

Наиболее простым соотношением, моделирующим бифуркацию координаты x_{n+1} в пару значений $x_n^{(\pm)}$, является квадратичная зависимость

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2, \quad (3.79)$$

генерирующая логистическую последовательность, характеризуемую параметром a . Итерируя ее с помощью графической процедуры, показанной на рис. 27,а, получаем предельную координату

$$x_\infty = [(1 + 4a)^{1/2} - 1]/2a. \quad (3.80)$$

График процесса итерирования показан на рис. 27,б. Величина параметра a выбирается таким образом, чтобы обеспечить подобие процесса итерации. Это означает, что вид зависимости (3.79) не должен изменяться при переходе от $n + 1$ к $m > n + 1$.

Для определения значения a укажем, что исходное уравнение (3.79) имеет действительные решения $x_{n+1} = x_n$ при $a \geq A_1$, где величина A_1 задается условием $dx_{n+1}/dx_n = -1$. Отсюда находим $A_1 = 3/4$. Для определения следующего значения A_2 проведем отображение (3.79) дважды. Нетрудно видеть, что с точностью до квадратичных членов по x_n получающейся зависимости $x_{n+2}(x_n)$ можно придать вид (3.79), если провести масштабное преобразование

$$x_n \rightarrow (1 - a)x_n, \quad a \rightarrow \varphi(a) \equiv 2a^2(a - 1). \quad (3.81)$$

Повторяя эту операцию l раз, приходим к ряду последовательных отображений вида (3.79):

$$x_{n+2^l} = 1 - a_l x_n^2, \quad a_l = \varphi(a_{l-1}). \quad (3.82)$$

В результате получаем цепочку уравнений

$$A_1 = \varphi(A_2), \quad A_2 = \varphi(A_3), \quad \dots, \quad A_{l-1} = \varphi(A_l) \quad (3.83)$$

для определения предельного параметра A_∞ . Графическое решение этой цепочки дается построением, указанным на рис. 28. С учетом определения (3.81) находим предельное значение $A_\infty = (1 + \sqrt{3})/2 \approx 1,37$. Из цепочки уравнений (3.83) видно, что при $l \rightarrow \infty$ можно записать

$$\frac{A_{l+2} - A_{l+1}}{A_{l+1} - A_l} = \frac{1}{\delta_l}, \quad \delta_l = \left. \frac{d\varphi}{da} \right|_{a=A_l}. \quad (3.84)$$

Используя равенство (3.81), отсюда получаем предельное значение $\delta \equiv \delta_\infty = 4 + \sqrt{3} \approx 5,73$. Таким образом, условие самоподобия логистической последовательности требует, чтобы ее параметр при-

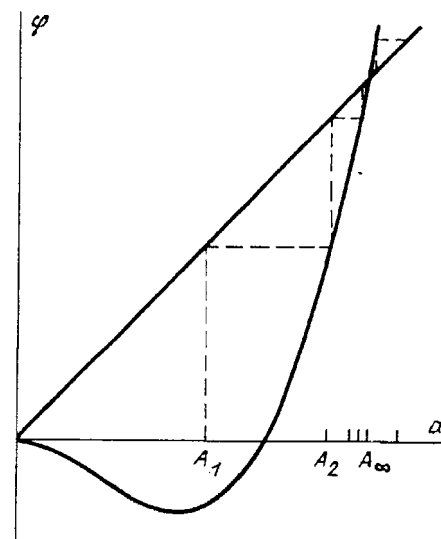


Рис. 28. Графическое решение цепочки уравнений (3.83) для параметра логистической последовательности a (функция $\varphi(a)$ дается равенством (3.81)) [37]

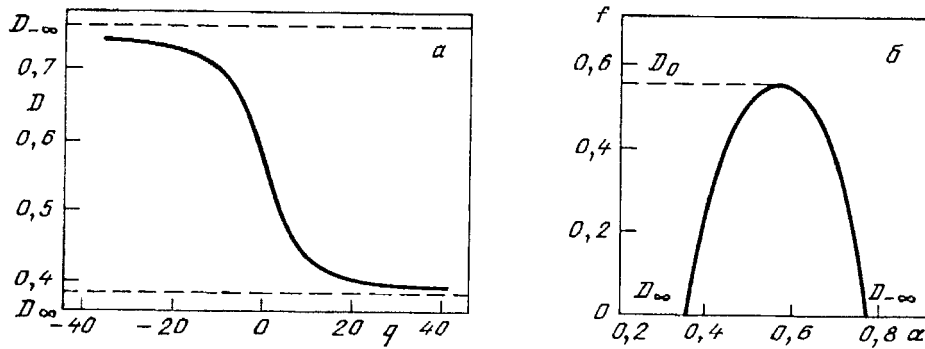


Рис. 29. Спектр фрактальных размерностей (а) и спектральная функция (б) для мультифрактального множества, порождаемого логистической последовательностью [10]

нимал на шаге $l \rightarrow \infty$ значение a не ниже величины A_l , изменяющейся по закону

$$A_\infty - A_l \propto \delta^l = e^{l \ln \delta}. \quad (3.85)$$

Приведенная аналитическая процедура исследования логистической последовательности отражает основные закономерности процесса — наличие цепи бифуркаций, происходящих при различных значениях A_l , и свойство подобия, характеризуемое показателем $\ln \delta$. Однако при всей своей наглядности эта процедура дает лишь приближенные значения величин δ , A_∞ , что, очевидно, связано с отбрасыванием слагаемых x_n^k , $k > 2$ при итерировании отображения (3.79). Точные значения, получаемые многократным компьютерным итерированием, составляют [38]

$$\delta = 4,669, \quad A_\infty = 1,401. \quad (3.86)$$

В работе [10] проводилось численное исследование множества значений x_l , получаемого в результате 11-кратного итерирования логистической последовательности (3.79) с параметром $a = A_\infty$. С этой целью вычислялась мера (3.33), а затем из

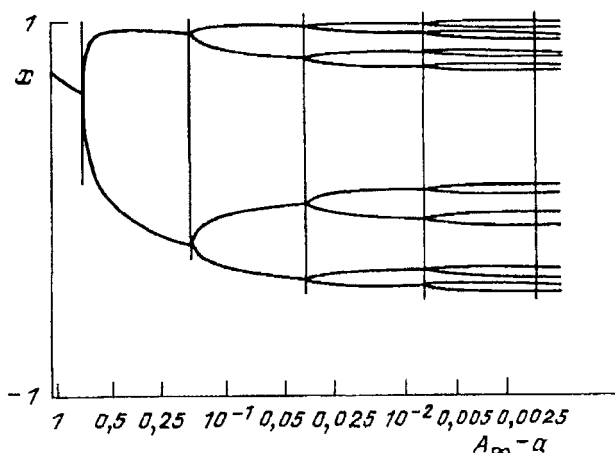


Рис. 30. Цепочка бифуркаций, порождаемых логистической последовательностью (3.79) (по оси абсцисс отложены значения управляющего параметра a , вертикальные линии отвечают критическим значениям A_n) [40]

условия $M_{11}(\tau, q) = 1$ находилась зависимость $\tau(q)$. Отсюда, используя соотношения (3.35)–(3.37), были получены зависимости $D(q)$, $f(\alpha)$, приведенные на рис. 29. Оказалось, что спектр фрактальных размерностей ограничен значениями

$$D_\infty = 0,378, \quad D_0 = 0,756, \quad (3.87)$$

связанными соотношением $D_\infty/D_0 = 2$. Учитывая определение (2.11), где для бифуркации параметр $j = 2$, видим, что при $q = \pm\infty$ масштабный фактор $\xi_\infty = A_\infty - 1$, $\xi_0 = (A_\infty - 1)^2$. Иными словами, если при делении исходного фрагмента получается масштаб l , то логистическая последовательность генерирует мультифрактал, содержащий также масштаб $l^{1/2}$. Первый из них отвечает наиболее густой области фрактального множества, расположенной вблизи вершины параболы (3.79). При смещении к разреженным областям вблизи точек $x_n = 0; 1$ происходит трансформация квадратичной зависимости $x_{n+1}(x_n)$ в линейную, что и приводит к появлению квадратного корня $\xi^{1/2}$. Далее мы существенно используем это обстоятельство.

Приведенное выше описание носило геометрический характер. Изложим теперь соответствующий формализм. С этой целью, как и в разделе 3.2.1, примем, что вероятность P_i реализации меры на i -м фрагменте является постоянной величиной. Тогда нетрудно видеть, что для логистической последовательности (3.79) плотность вероятности должна иметь вид

$$p(x) = \pi^{-1}[x(1-x)]^{-1/2}, \quad (3.88)$$

где множитель π^{-1} учитывает условие нормировки. На качественном уровне это видно уже из рис. 30, представляющего распределение координат x — в соответствии с принятым распределением (3.88) сгущение ветвей бифуркационной цепи происходит на границах интервала $[0, 1]$. Если здесь выделить фрагменты $[0, l]$, $[1-l, 1]$ длиной $l \rightarrow 0$, то соглас-

но (3.88) вероятность реализации каждого из них составит

$$P_0 = \int_0^l p(x) dx \approx \pi^{-1} \int_0^l x^{-1/2} dx = (2/\pi) l^{1/2}. \quad (3.89)$$

Для сегмента l_i , лежащего внутри интервала $[l, 1 - l]$, соответственно имеем

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{x_i}^{x_i+l_i} p(x) dx \approx p(x_i) l_i = \\ &= \frac{l_i}{\pi} [x_i(1 - x_i)]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

В силу равновероятностного характера распределения $P_i = P_0$ и равенства (3.89), (3.90) приводят к распределению длин сегментов

$$l_i = 2l^{1/2} [x_i(1 - x_i)]^{1/2}, \quad (3.91)$$

согласно которому минимальные значения l_i реализуются на границах интервала $[0, 1]$, а максимальные — в его центре.

Этот результат легко представить, если под значениями x_i понимать координаты узлов дерева Кейли, отвечающего логистической цепи бифуркаций (см. рис. 30). Тогда длины l_i сводятся к расстоянию между узлами $i, i + 1^{(6*)}$. Из рис. 7 видно, что, если соседние узлы дерева Кейли расположены на его периферии, то их ближайший предок незначительно удален от них, а в центральной части он приближается к вершине дерева. Это означает, что расстояния l_i растут при смещении координаты узла x_i к центральной части отрезка ультраметрического пространства, отвечающего исходному интервалу $[0, 1]$ в обычном пространстве. Именно такое поведение обеспечивается распределением длин (3.91). Поскольку оно следует из распределения вероятности $p(x)$, то указанное совпадение оправдывает выбор зависимости (3.88). С другой стороны — и это более важно — можно сделать следующий вывод: для перехода от аналитического описания последовательности отражений типа (3.79), которая дает координаты x_i получаемого множества в обычном пространстве, к геометрическому представлению, определяемому распределением l_i длин элементарных фрагментов, следует совершить переход из обычного пространства в ультраметрическое. Как показано в разделе 2.1.2, формально такой переход обеспечивается, если от обычного представления чисел x_i в 10-ричной системе счисления перейти (с помощью разложения в ряд (2.13)) к j -ричной системе, где в континуальном пространстве x полагается $j \rightarrow \infty$. Поскольку на таком переходе основана система компьютерно-

го счисления, где $j = 2$, то легко понять, почему машинное моделирование представляет основной инструмент исследования различных отображений.

Для всестороннего представления логистической последовательности (3.79) следует провести термодинамическое описание, схема которого развита в разделе 3.2. Используем сначала подход (см. раздел 3.2.1), в рамках которого свободным параметром является обратная температура β . Ее величина определяет термодинамический потенциал $g = g(\beta)$, а энтропия s и энергия λ принимаются заданными.

Для определения зависимости $g(\beta)$ следует подставить распределение длин (3.91) в определение (3.62). Получающееся при этом выражение сводится к отношению Γ -функций $\Gamma(1 + \beta/2)/\Gamma(3/2 + \beta/2)$ [39]. Более наглядным представляется использование упрощенной схемы, в рамках которой плавное распределение длин сегментов (3.91) заменяется двухмасштабной аппроксимацией. Учитывая аргументы, приведенные после равенств (3.87), будем считать, что на n -м шаге логистического отображения (3.79) все множество разбивается на два класса фрагментов, длины которых составляют $l_n = \xi^n$ и $l_n^{1/2} = \xi^{n/2}$, а число фрагментов в каждом классе равно $2^{n-1} \sim 2^n$, $n \rightarrow \infty$. Тогда статистическая сумма (3.60) имеет оценку

$$Z = \sum_i l_i^\beta \sim 2^{n-1} l_n^{\beta/2} + 2^{n-1} l_n^\beta, \quad (3.92)$$

где первое слагаемое обеспечивается вкладом малых длин l_i , отвечающих краям интервала $[0, 1]$, а второе — его внутренней частью. Подстановка точного распределения (3.91) в (3.60) показывает, что края интервала могут внести определяющий вклад только при значительных отрицательных величинах параметра β . Поэтому оценке (3.92) более естественно придать вид

$$\begin{aligned} Z_n &\sim 2^n \cdot 2^{-n\beta\lambda} \quad \text{при } \beta < -2, \\ &\sim 2^n \cdot 2^{-n\beta\lambda/2} \quad \text{при } \beta > -2, \end{aligned} \quad (3.93)$$

где использованы соотношения (3.65), (3.66), а критическая температура $\beta_c = -2$ определена условием расходимости точного выражения $Z(\beta) \propto (\Gamma(1 + \beta/2))^n$. Подставляя (3.93) в (3.62), находим оценку термодинамического потенциала:

$$\begin{aligned} g &\sim \lambda\beta - \ln 2 \quad \text{при } \beta < -2, \\ &\sim (\lambda/2)\beta - \ln 2 \quad \text{при } \beta > -2. \end{aligned} \quad (3.94)$$

При этом энтропия (3.71) принимает характерное значение $s = \ln 2$, а определение (3.75) приводит к

следующим геометрическим характеристикам:

$$D = f = \alpha \sim \ln 2/\lambda \quad \text{при } \beta < -2, \\ \sim \ln 2/(\lambda/2) \quad \text{при } \beta > -2. \quad (3.95)$$

Таким образом, двухмасштабная аппроксимация распределения (3.91) дает вместо непрерывного набора величин D , f , α два дискретных значения, отвечающих пределам $q = \pm\infty$. Учитывая наличие излома в температурной зависимости (3.94) потенциала $g(\beta)$, скачок фрактальной размерности (3.95) можно трактовать как своеобразный фазовый переход первого рода, означающий сгущение фрактала в точке $\beta = -2$. Как показывают зависимости $D(q)$, $f(\alpha)$ на рис. 29, в действительности такой переход является не резким, а размазанным. Этот факт означает, что реальный мультифрактал сводится к непрерывному набору монофракталов, а не к паре (3.95), отвечающей границам спектра $f(\alpha)$.

Определим наконец величины f , α , D в рамках сопряженного подхода, где энергия λ принимается независимым параметром, определяющим энтропию $s(\lambda)$, а величины β , $g(\beta)$ заданы (см. раздел 3.2.2). Интегрируя соотношение (3.70), получаем результат $g = \beta\lambda + \text{const}$, подстановка которого в (3.77) дает, как и выше, постоянное значение $s(\lambda) = -\text{const} \equiv \ln 2$. С другой стороны, принятая двухмасштабная модель означает, что область определения энергии исчерпывается значениями λ и $\lambda/2$. Тогда последнее равенство (3.78) приводит, как и следовало, к спектру (3.95). В свою очередь второе равенство (3.78) задает величину параметра q в зависимости от энергии λ :

$$q = 1 - (\beta/\ln 2)\lambda \quad \text{при } \beta < -2, \\ = 1 - (\beta/\ln 4)\lambda \quad \text{при } \beta > -2. \quad (3.96)$$

3.3.2. Квазипериодические последовательности. В предыдущем разделе на примере простейшей параболической зависимости был рассмотрен класс симметричных отображений

$$x_{n+1} = \alpha + x_n + f(x_n), \quad (3.97)$$

производящая функция которых обладает свойством $f(x) = f(-x)$, $\alpha = \text{const}$. Настоящий раздел посвящен исследованию последовательностей, обладающих свойством антисимметрии: $f(x) = -f(-x)$. Поскольку произвольная функция сводится к суперпозиции симметричной и антисимметричной составляющих, то можно ожидать, что наряду с результатами раздела 3.3.1 такое рассмотрение исчерпывает описание возможных особенностей мультифрактальных множеств, порождаемых цепями бифуркаций.

Другой особенностью производящей функции $f(x)$, обеспечивающей ее исключительную важность в приложении к физике конденсированной среды, является условие иррациональности отношения $\Omega = 1/b < 1$ длины интервала $[0, 1]$, на котором определены значения x , к периоду $b > 1$ функции $f(x) = f(x + b)$. Физически это означает, что характерный масштаб b функции отклика $f(x)$ несоизмерим с исходным масштабом 1 воздействия x на данную систему^(7*). Классическим примером такой ситуации является механизм возникновения турбулентности, при котором каждая бифуркация отвечает трансформации круговой траектории течения жидкости в квазипериодическое движение по поверхности тора, образующегося за счет "распухания" исходной окружности [37].

В физике твердого тела указанная ситуация возникает при исследовании длиннопериодических структур, период которых b несоизмерим с периодом исходной решетки a . В рамках простейшей модели Френкеля — Конторовой отображение (3.97), учитывающее основные особенности поведения несоизмеримых структур [41], принимает вид

$$x_n = (n + \alpha)a - (K/2\pi) \sin [2\pi n(a/b) + \beta], \quad (3.98)$$

где $n = 0, 1, \dots$ — ряд целых чисел, a, b — периоды, отношение которых $\Omega = a/b < 1$ представляет иррациональное число, постоянные α, β играют роль начальных фаз короткопериодического распределения и его длиннопериодической составляющей, K — константа связи.

Нетривиальное обобщение периодической последовательности $x_n = (n + \alpha)a$, обладающей периодом a , получается, если в качестве производящей функции $f(x)$ в отображении (3.97) взять целую часть $[x]$ переменной x (либо ее дробную часть $\{x\} = x - [x]$). Получающаяся квазипериодическая последовательность имеет вид [11]

$$x_n = (n + \alpha)a + [(n/\sigma) + \beta](a/\rho), \quad (3.99)$$

где α, β — начальные фазы, ρ, σ — положительные иррациональные числа. Ее характерная особенность состоит в том, что расстояния $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ между ближайшими соседями могут принимать только два значения

$$\Delta x_n = a \quad \text{при } [(n/\sigma) + \beta] - [(n-1)/\sigma + \beta] = 0, \\ = b \quad \text{при } [(n/\sigma) + \beta] - [(n-1)/\sigma + \beta] = 1, \quad (3.100)$$

где период b , иррациональный исходному a , задается параметром ρ согласно равенству $b = (1 + \rho^{-1})a$. С другой стороны, прямым подсчетом нетрудно

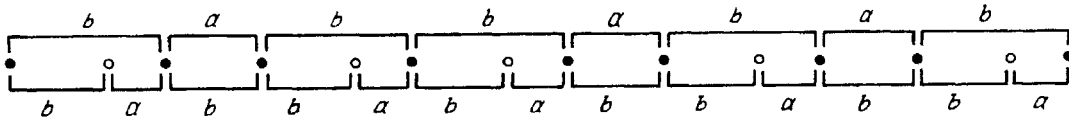


Рис. 31. Масштабное преобразование для квазипериодической последовательности атомов двух сортов (сверху указаны исходные периоды a, b , снизу их значения, уменьшенные в τ раз) [11]

убедиться, что на каждое значение n , при котором выполняется верхнее условие (3.100), приходится в среднем σ^{-1} значение n , удовлетворяющее нижнему условию. Таким образом, величина $1 - \sigma^{-1}$ определяет частоту следования периода b .

Задавая произвольные иррациональные значения параметров σ, ρ , легко построить последовательность отрезков a, b , отвечающую (3.99). Ее важная особенность состоит в том, что, не обладая свойством периодичности, она по определению (3.99) не является случайной. Меняя величины параметров ρ, σ , можно добиться любых иррациональных значений отношения периодов $b/a = 1 + \rho^{-1}$ и частоты следования длинного периода $1 - \sigma^{-1}$. Из всего набора, отвечающего различным значениям ρ, σ , можно выделить последовательность Фибоначчи, обладающую свойством самоподобия. Как выяснено в разделе 2.1.1, только такое множество обладает фрактальными свойствами, и далее следует определить значения ρ, σ , обеспечивающие указанные условия.

Они означают, во-первых, что простым изменением масштаба последовательность Фибоначчи может быть переведена в себе подобную. Например, уменьшая периоды a, b , можно достичь такой ситуации, когда длинный период b исходной последовательности переходит в набор отрезков $a + b$, а короткий $a - b$ (рис. 31). Это достигается при условии

$$\frac{b}{a+b} = \frac{a}{b},$$

принимая при учете связи $b = (1 + \rho^{-1})a$ вид квадратичного уравнения

$$\rho^2 - \rho - 1 = 0. \quad (3.101)$$

Таким образом, локальное самоподобие достигается при значениях масштабного фактора ρ , равных так называемому золотому сечению^(8*)

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618. \quad (3.102)$$

Кроме того, следует обеспечить одинаковый вклад отрезков a, b в суммарную длину последовательности. Очевидно, для этого должны совпадать средние длины a/σ и $b(1 - \sigma^{-1})$ этих отрезков, чередующихся с частотами σ^{-1} и $1 - \sigma^{-1}$. С учетом (3.101) видим, что и это условие обеспечивается при

частотном факторе $\sigma = \tau$. В результате последовательность Фибоначчи, следующая из (3.99), принимает вид

$$x_n = (n + \alpha)a + [(n/\tau) + \beta](a/\tau). \quad (3.103)$$

Впервые данная последовательность была получена пизанским математиком Леонардо Фибоначчи, рассмотревшим следующую наглядную ситуацию. Пусть взрослый кролик a каждый год приносит по крольчонку b , который в течение года достигает репродуктивного возраста, трансформируясь из b в a , и далее сам приносит потомство подобно его предку. Тогда цепь размножения кроликов изобразится деревом Кейли, приведенным на рис. 8. Из него видно, что на каждом уровне n наблюдается непериодическая последовательность

$$abaababababab \dots, \quad (3.104)$$

длина которой N_n определяется числами Фибоначчи F_n . Первые из этих чисел имеют значения $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, \dots$. Нетрудно заметить, что весь набор $\{F_n\}$ может быть получен из правила

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (3.105)$$

С другой стороны, пара ближайших чисел Фибоначчи связана отношением

$$F_{n+1}/F_n \rightarrow \rho \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (3.106)$$

подстановка которого в (3.105) приводит к уравнению (3.101), дающему золотое сечение (3.102). Выписывая последовательность отношений (3.106) от данного значения $n \gg 1$ до $n = 1$ и исключая числа $F_{n-1}, F_{n-2}, \dots$, легко получить равенство

$$F_n \approx \tau^n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.107)$$

определяющее фрактальную размерность последовательности Фибоначчи. В самом деле, поскольку F_n представляет число точек множества N_n , то с учетом определения (3.63) для энтропии $s = \ln \mu$ получаем $s = \ln \tau$. Подставляя это значение в последнее равенство (3.78), и принимая во внимание определение (3.66) энергии λ , находим

$$D = \ln \tau / \ln \xi^{-1}. \quad (3.108)$$

Поскольку длина ξ фактически сводится к масштабному фактору в формуле (2.11), то полученное равенство (3.108) и эта формула должны совпа-

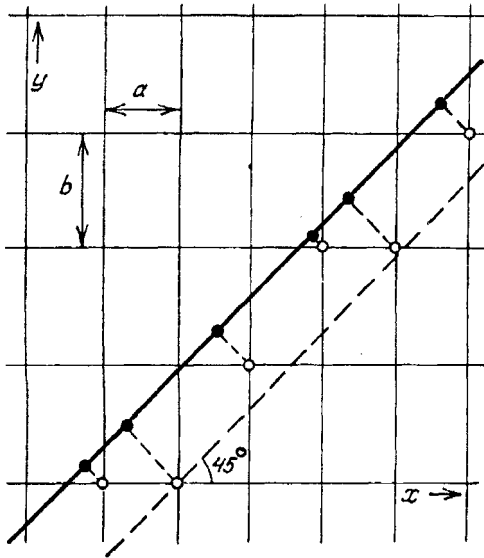


Рис. 32. Схема построения одномерной квазипериодической последовательности методом проектирования узлов прямоугольной решетки (проектируются узлы, расположенные между параллельными линиями, разделенными вдоль оси y периодом b)[11]

дать. Следовательно, золотое сечение (3.102) определяет эффективную ветвистость $j = \tau$ дерева Фибоначчи (см. рис. 8).

Прямым перебором значений $n = 0, 1, \dots$ в соотношении (3.103) можно убедиться, что оно генерирует последовательность Фибоначчи (3.104) чередования отрезков длин a, b . Вид соответствующего иерархического дерева, приведенного на рис. 8, подсказывает, что на n -м шаге последовательность (3.103) может быть получена n -кратным действием оператора

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

на вектор-столбец, составленный из отрезков a, b , как из проекций:

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_n \end{pmatrix} = \hat{S}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (3.110)$$

Очевидно, оператор (3.109) является генератором нового уровня иерархического дерева Фибоначчи,

В последнее десятилетие обнаружилось, что последовательность (3.103) представляет не только забавную математическую конструкцию, но и реализуется в природе при чередовании атомов квазикристалла вдоль выделенного направления [11]. Наиболее просто такой ряд можно моделировать как проекцию ближайших узлов прямоугольной решетки со сторонами $a, b = \tau a$ на прямую, проходящую под углом 45° к ее осям (рис. 32). Из этого построения, в частности, видно, что в обратном пространстве последовательность (3.103) представляется суперпозицией волновых векторов,

кратных периодам $2\pi/a$ и $2\pi/b$, $b/a = \tau$, каждый из которых отвечает проекции одной из осей решетки на выбранное направление. Таким образом, точки обратного пространства одномерного квазикристалла даются равенством

$$g_{lm} = \frac{2\pi/\alpha}{1 + \tau^{-2}} \left(l + \frac{m}{\tau} \right), \quad (3.111)$$

где l, m — целые числа. Покажем, что из их набора выделены значения $l = F_n$, $m = F_{n-1}$, определяемые числами Фибоначчи.

С этой целью перепишем равенство (3.103) в виде

$$x_n = (1 + \tau^{-2}) na - \{ (1 + \tau^{-2}) n / \sqrt{5} \} (a/\tau); \quad (3.112)$$

здесь введена дробная часть $\{x\} = x - [x]$ числа x , фазы α, β приняты нулевыми и учтено, что $\tau(1 + \tau^{-2}) = \sqrt{5}$. Запись (3.112) удобнее (3.103) в том смысле, что координата x_n представлена в виде суммы последовательности $(1 + \tau^{-2}) na = \sqrt{5} n(a/\tau)$ с периодом a/τ и периодической функции (вычитаемое) с периодом a . Поскольку фурье-представления периодических функций сводятся к набору δ -образных функций, взятых в точках обратного пространства (3.111), то для амплитуды f рассеяния квазикристаллом проникающего излучения с волновым числом k можно записать

$$f(k) = \sum_{l,m} f_{lm} \delta(k - g_{lm}), \quad (3.113)$$

$$f_{lm} = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=0}^N \exp(-i g_{lm} x_n). \quad (3.114)$$

Для вычисления формфактора f_{lm} перепишем показатель экспоненты (3.114), перегруппировав слагаемые ряда (3.112) и учитывая определение (3.111):

$$g_{lm} x_n = 2\pi(l n + m[n/\tau]) + (2\pi m - (g_{lm}/\tau))\{n/\tau\}. \quad (3.115)$$

Поскольку первое слагаемое кратно 2π , то его можно опустить, а при вычислении вклада (3.114), отвечающего второму члену (3.115), следует учесть, что с изменением n дробная функция $\{n/\tau\}$ равномерно заполняет интервал $[0, 1]$. Поэтому сумму $N^{-1} \sum_n$ в (3.114) можно заменить на интеграл по этому интервалу, в результате чего получаем

$$\begin{aligned} f_{lm} &= \int_0^1 \exp(-i \varphi_{lm} x) dx = \\ &= \frac{\sin(\varphi_{lm}/2)}{\varphi_{lm}/2} \exp(-i \varphi_{lm}/2), \end{aligned} \quad (3.116)$$

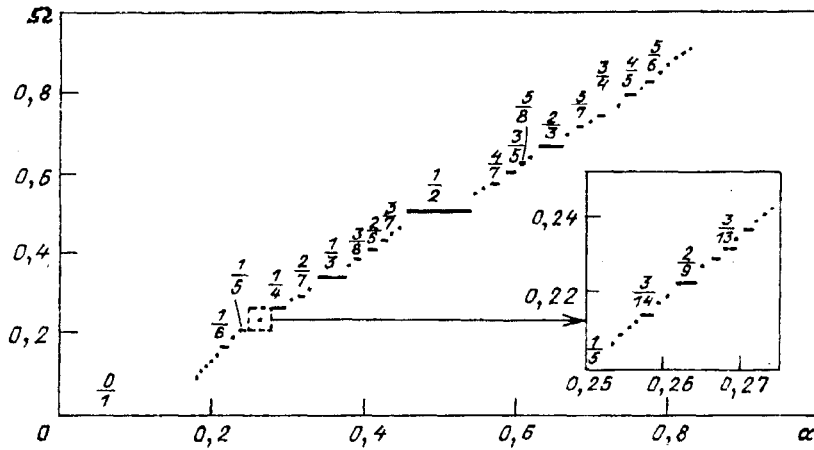


Рис. 33. Чертова лестница, отражающая синхронизацию частот для квазипериодической последовательности (3.119) (вдоль оси ординат отложено отношение собственной частоты системы к частоте отклика, вдоль оси абсцисс — к частоте внешнего поля) [10]

где введена характерная фаза

$$\begin{aligned} \varphi_{lm} &\equiv 2\pi m - g_{lm}(a/\tau) = \\ &= (2\pi/\sqrt{5})(m\tau - l). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Интерференционная функция (3.116) принимает максимальные значения вблизи фазы $\varphi_{lm} = 0$. Тогда из выражения (3.117) следует, что индексы l, m , определяющие координаты (3.111) точек обратного пространства, должны быть связаны соотношением $l/m = \tau$, сводящимся к (3.106). Таким образом, можно заключить, что максимумы дифракционной картины квазикристалла отвечают точкам обратного пространства

$$g_n = \frac{2\pi/a}{1 + \tau^{-2}} \left(F_n + \frac{F_{n-1}}{\tau} \right) \approx \frac{2\pi}{a} F_n, \quad (3.118)$$

где второе равенство выписано для больших значений n . В отличие от дифракционной картины обычного кристалла, где рефлексы расположены строго периодически, здесь их положение совершенно непериодично, хотя и закономерно.

Перейдем теперь к обсуждению отображения более общего вида

$$x_{n+1} = x_n + \alpha - (K/2\pi) \sin(2\pi x_n), \quad (3.119)$$

где период a принят для простоты единичным. В сравнении с подобным соотношением (3.98), представляющим отображение периодической последовательности na в квазипериодическую x_n , здесь фигурирует только стохастическая переменная $0 \leq x \leq 1$, значения которой x_n, x_{n+1} на ближайших уровнях связаны равенством (3.119). При закритических величинах параметра связи $K > 1$ правая часть (3.119) становится немонотонной функцией от x_n , что означает появление бифуркаций, а следовательно, и возможность хаотизации. Имея в виду это обстоятельство, будем далее

полагать, что константа связи имеет критическое значение $K_c = 1$.

Рассмотрим сначала явление синхронизации частот (по английской терминологии — mode-locking) [37], отвечающее отображению (3.119). Оно состоит в том, что если на систему, обладающую собственной частотой ω_0 , подействовать полем с частотой ω_1 , то с изменением отношения $\alpha = \omega_0/\omega_1 \leq 1$ частота отклика ω будет изменяться не непрерывно, а таким образом, чтобы отношение $\Omega = \omega_0/\omega \leq 1$ принимало ряд рациональных значений^(9*). Как видно из соответствующей чертовой лестницы на рис. 33, интервал изменения затравочной частоты ω_1 , в котором частота отклика ω синхронизирована с собственной ω_0 фиксацией рационального числа $\Omega = \omega_0/\omega$, будет тем шире, чем "лучше" это число: самые широкие ступеньки отвечают значениям $\Omega = 0; 1$, далее следует ступенька при $\Omega = 1/2$, затем пара при $\Omega = 1/3, 2/3$ и т.д. Согласно [10] чертова лестница на рис. 33 устроена таким образом, что наиболее редко ее ступени распределены вблизи значений Ω , отвечающих обратным числам Фибоначчи F_n^{-1} (см. (3.107)), а наиболее густо — вблизи значений $\Omega = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, соответствующих гармонической последовательности. Применительно к пространственным структурам, где параметр $\Omega \equiv k/k_0 = a/b \leq 1$ определяет отношение короткого периода a к длинному b ^(10*) данный факт объясняет, почему, с одной стороны, так редко реализуются квазикристаллы, характерные значения волновых чисел k которых задаются значениями (3.118), пропорциональными числам Фибоначчи, а с другой — почему так часто встречаются n -кратные длиннопериодные структуры с волновыми числами

$$k_n = k_0/n = 2\pi/na, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.120)$$

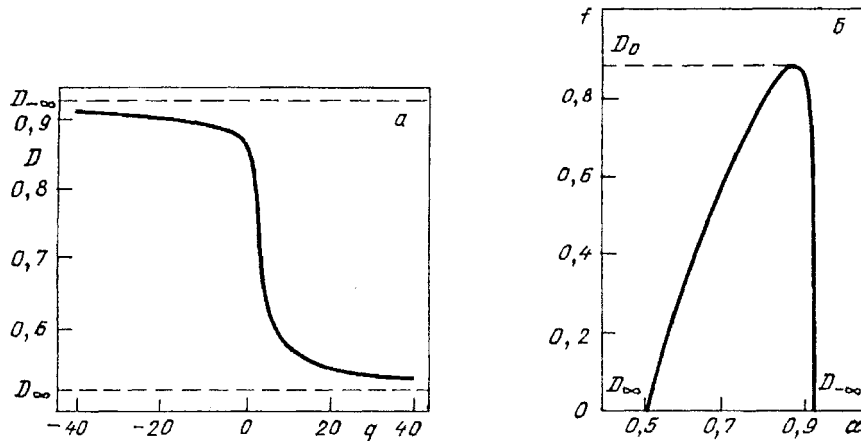


Рис. 34. Спектр фрактальных размерностей (а) и спектральная функция (б) для мультифрактального множества синхронизованных частот, отвечающих последовательности (3.119) [10]

Иными словами, пространственно-временная структура, получающаяся в результате внешнего воздействия, задаваемого параметрами ω_1, k , на исходную структуру, характеризуемую масштабами ω_0, k_0 , представляет $(d + 1)$ -мерный мультифрактал, свободные параметры которого сводятся к набору отношений $\Omega = \omega_0/\omega$; $\Omega_i = k_i/k_0$, $i = 1, \dots, d$. Рассмотренная выше последовательность Фибоначчи и гармоническая последовательность представляют предельные множества из полного набора монофракталов, формирующих данный мультифрактал.

Рассмотрение последнего проводилось в рамках численного исследования чертовой лестницы на множестве, содержащем 2^n , $n = 10$ значений параметров α, Ω . Для каждой пары γ ближайших точек измерялись разности $\Delta\alpha_i, \Delta\Omega_i$. Поскольку первые определяют расстояния l_i между точками множества, а вторые — вероятности P_i реализации на них меры, то подставив $\Delta\alpha_i, \Delta\Omega_i$ в определение (3.33), из условия $M_n(\tau, q) = 1$ находим спектр фрактальных размерностей $D(q)$, приведенный на рис. 34. ЕГО верхнее значение $D_{-\infty} = 0,924$ отвечает последовательности Фибоначчи, для которой согласно [42, 43] элементарная длина $l_n \approx F_n^{-\delta} \approx \tau^{-n\delta}$ определяется параметром $\delta \approx 2,164$, а вероятность имеет вид

$$P_n \approx \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \approx \tau^{-2n}, \quad (3.121)$$

где учтена оценка (3.107). Последнее равенство (3.78) показывает, что для данного монофрактала размерность $D_{-\infty}$ сводится к показателю α в определении (3.20):

$$P_n = l_n^D. \quad (3.122)$$

Используя это соотношение, находим

$$D_{-\infty} = 2/\delta \approx 0,924. \quad (3.123)$$

Что касается нижнего значения D_{∞} , то оно отвечает гармонической последовательности, для которой согласно [44] реализуется связь $P_n \approx l_n^{1/2}$. Тогда равенство (3.122) означает

$$D_{\infty} = 1/2. \quad (3.124)$$

Спектральная функция $f(\alpha)$, определенная из условия $M_n(q) = 1$ для меры (3.22), имеет вид, показанный на рис. 34. В сравнении с соответствующей зависимостью на рис. 29 для логистической последовательности (см. раздел 3.3.1) обращает на себя внимание сильная асимметрия спектра $f(\alpha)$. Пологий склон, ограниченный значением D_{∞} , отвечающим гармонической последовательности, указывает на уже отмечавшийся факт большего содержания длиннопериодических структур в сравнении с квазипериодическими, которые соответствуют разреженному верхнему краю спектра $D_{-\infty}$.

Рассмотрим в заключение мультифрактальное множество, порожаемое отображением (3.119) при критическом уровне связи $K = 1$ и частоте отклика ω , отвечающей золотому сечению $\omega_0/\omega \equiv \Omega = \tau^{-1}$ (11*). В рамках численной процедуры [10] выбиралось некоторое начальное значение фазы x_1 , а затем из равенства (3.119) определялся ряд значений $x_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \dots, F_{17}$ исходного уровня $n = 1$ на множестве точек i , число которых равно числу Фибоначчи $F_{17} = 2584$. Вероятности реализации этих точек полагались одинаковыми: $P_i = F_{17}^{-1}$. Что касается элементарных длин l_i , то поскольку частота появления нового уровня итерации n ограничена условием $\omega = \tau$ (принимая собственную частоту $\omega_0 = 1$), то для ближайших уровней имеем $x_i^{(n+1)} = x_{i+\tau}^{(n)}$, и при итерировании расстояние l_i^n должно определяться равенством $l_i^n = x_{i+F_n}^{(1)} - x_i^{(1)}$, $F_n \approx \tau^n$, $n \rightarrow \infty$ (в работе [10] было достигнуто значение $n = 16$). На основе полученных

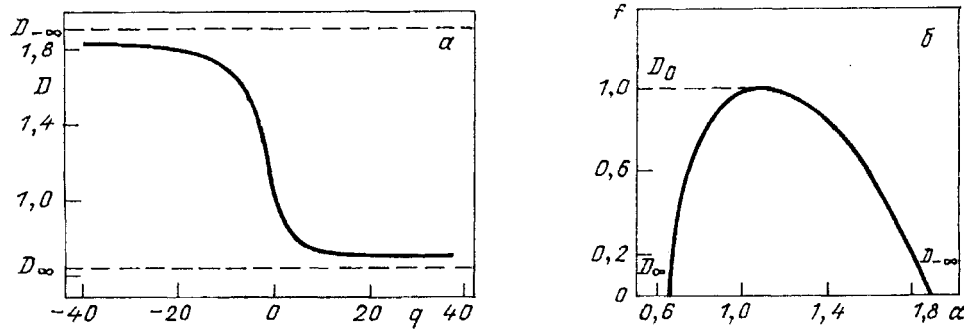


Рис. 35. Спектр фрактальных размерностей (а) и спектральная функция (б) для мультифрактального множества синхронизованных фаз, отвечающих последовательности (3.119) [10]

распределений P_i , l_i^n были найдены величины мер (3.22), (3.33) и из условия их равенства единице вычислялись зависимости $D(q)$, $f(\alpha)$, характеризующие мультифрактальное множество. Их вид показан на рис. 35.

На качественном уровне основные особенности функций $D(q)$, $f(\alpha)$ могут быть определены по аналогии с описанием логистической последовательности (3.79) в начале раздела 3.3.1. Из графика зависимости (3.119), приведенного на рис. 36, видно, что область наибольшего разрежения значений x_{n+1} сосредоточена вблизи точки $x_n = 1/4$, где $x_{n+1} \approx \approx \alpha + (2\pi^2/3)x_n^3$. Таким образом, переход от предельно разреженного фрактала к предельно сгущенному отвечает трансформации линейной зависимости $x_{n+1}(x_n)$ в кубическую, в связи с чем роль масштабного фактора переходит от ξ к ξ^3 . Согласно соотношению (3.108) это приведет к троекратно уменьшению минимальной размерности $D_\infty = 0,633$ по сравнению с максимальной $D_{-\infty} = 1,898$. Из графика спектральной зависимости

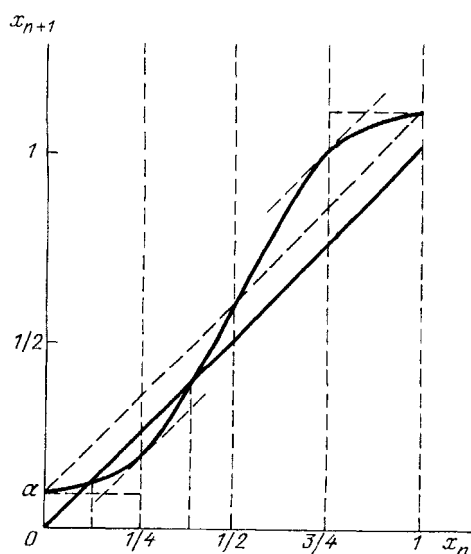


Рис. 36. График зависимости (3.119), отвечающей квазипериодической последовательности (начальная фаза $\alpha = 0,1$, параметр связи $K = 0, \pi$)

сти на рис. 35 видно, что противоположно картине синхронизации частот больший вклад в формирование мультифрактала дают разреженные последовательности Фибоначчи. Этот факт получает тривиальное объяснение, если предположить, что плотность распределения точек мультифрактального множества является приблизительно постоянной: чем реже распределены точки монофракталов, тем большее их число требуется для формирования результирующего мультифрактала.

3.3.3. Мультифрактальное представление неэргодических систем. Как известно, измеряемые на эксперименте макроскопические величины представляют средние по времени, тогда как теория дает средние по статистическому ансамблю микросостояний, имитирующих реальные состояния в различные моменты времени. Поскольку в эргодических системах все микросостояния в принципе достижимы, то оба типа указанных средних можно отождествить, что собственно и позволяет сопоставлять экспериментально наблюдаемые и теоретически определяемые макровеличины.

В последние несколько десятилетий, однако, повысился интерес к неупорядоченным системам, типичными представителями которых являются модель Андерсона [45] для перехода носителя заряда из локализованного в делокализованное состояние и модель закаленного беспорядка для систем типа спинового стекла (см. [18]). Характерная черта неупорядоченных систем состоит в иерархическом разделении микроскопических переменных: так, например, в спиновом стекле, с одной стороны, реализуется набор обычных (горячих) переменных, роль которых играют спины $\sigma_i = \pm 1$, распределенные по узлам i в соответствии с температурой T ; с другой стороны, на это распределение накладывается суперансамбль холодных переменных, описывающий замороженные распределения $\{J\}$, $\{h\}$ интегралов перекрытия J волновых функций ближайших узлов и полей h , действующ-

щих со стороны внешней среды. Разная природа горячих и холодных переменных выражается в том, что изменение температуры T сказывается на распределении первых и совершенно не влияет на величины вторых. Очевидно, такая ситуация может быть реализована только для случая сильно неравновесных систем, в пространстве состояний которых области, отвечающие различным наборам $\{J\}$, $\{h\}$ холодных переменных, отделены барьерами высотой $Q \gg T$.

Таким образом, можно заключить, что разделение переменных неупорядоченной системы на горячие и холодные приводит, с одной стороны, к неравновесности, а с другой — к неэргодичности. Естественнo, что при этом сопоставление физически наблюдаемых величин с данными статистической теории является весьма нетривиальной задачей. Эта нетривиальность связана со сложным характером разделения пространства состояний на множество областей, в которых сосредоточены реальные значения микроскопических переменных. Ниже будет показано, что суперансамбль этих областей образует мультифрактальное множество.

Относительная простота модели Андерсона связана с тем, что каждая область отвечает набору чистых квантовых состояний электрона, реализующихся при нулевой температуре T . Таким образом, все горячие степени свободы выморожены, и полный набор микроскопических переменных сводится к ансамблю $\{h\}$ полей, действующих на электрон. При этом фрактальное множество носит вполне детерминистический характер. В случае $T \neq 0$, реализующемся, например, в спиновых стеклах, включение горячих переменных переводит чистые состояния, отвечающие данной области разрешенных значений, в смешанные [34]. Это означает, в частности, что составленное этими областями мультифрактальное множество становится стохастическим — в силу вырожденности системы различные области α реализуются с разными вероятностями w_α , а усреднение по отвечающим им состояниям приводит к случайному набору η_α параметров порядка (см. раздел 2.4.2).

Имея в виду это обстоятельство, рассмотрим сначала мультифрактальное множество, отвечающее модели Андерсона [45]. С этой целью запишем уравнение Шрёдингера для системы невзаимодействующих электронов с перекрытием J узельных волновых функций:

$$-(zJ/2)\psi'' + h\psi = E\psi; \quad (3.125)$$

здесь ψ , E — волновая функция и энергия электрона, h — действующий на него потенциал, величина

которого случайным образом разбросана в интервале $[-W/2, W/2]$, z — координационное число, штрих означает дифференцирование по координате r , принята система единиц Хартри, в которой $\hbar = m = 1$. Многочисленные исследования уравнения (3.125) показали [45 — 49], что в центре зоны ($E = 0$) при разбросе потенциала $W < W_c$, где $W_c \lesssim zJ$ — критическое значение, электронное состояние является делокализованным и волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ сводится к блоховской волне. Соответственно, при $W > W_c$ она имеет локализованный вид

$$\psi \sim \exp(-r/\xi), \quad (3.126)$$

где ξ — корреляционная длина, характеризуемая значением $\xi^{-1} = 0$ в делокализованном состоянии и $0 < \xi^{-1} < \infty$ в локализованном. Таким образом, переход в локализованное состояние можно ассоциировать с появлением конечных значений обратной корреляционной длины:

$$\xi^{-1} \propto w^\nu, \quad w = W/W_c - 1 > 0, \quad (3.127)$$

где ν — соответствующий показатель. При смещении $E \neq 0$ из центра зоны порог локализации W_c спадает, принимая значение $W_c = 0$ на границах $E_c = \pm zJ$. Согласно [49] в приближении среднего поля переход Андерсона можно представить как фазовое превращение $(2 + \delta)$ -го рода, где $\delta \rightarrow 0$ — добавка, отвечающая логарифмическому множителю. В рамках такого подхода ширина W разброса потенциала играет роль температуры холодной переменной h , а смещение E из центра зоны представляет поле, сопряженное параметру делокализации. Значение критического показателя ν в (3.127) оказывается равным $1/2$.

Таким образом, в рамках приближения среднего поля при $W > W_c$ система представляется набором одинаковых кластеров локализованных состояний размером $\sim \xi \propto w^{-1/2}$. В действительности, разумеется, ситуация не столь проста, поскольку даже при $w = \text{const}$ реализуется набор кластеров самых различных размеров. Это означает, что поведение системы задается не единственным значением критического показателя ν , а целым их набором. Иными словами, мы предполагаем, что кластеры локализованных состояний образуют мультифрактальное множество, спектр которого задает ряд возможных значений ν .

Для выяснения ситуации запишем уравнение (3.125) применительно к одномерной решеточной модели, в рамках которой $z = 2$, а вторая производная волновой функции ψ_i в узле i определяется равенством $\psi_i'' = (\psi_{i+1} - \psi_i) - (\psi_i - \psi_{i-1})$. Под-

ставляя его в (3.125) и вводя случайную переменную $v_i = -2h_i/zJ$, изменяющуюся в интервале $[-W/zJ, W/zJ]$, и эффективную энергию $\varepsilon = 2[1 - (E/zJ)]$, определенную в зоне $0 \leq \varepsilon \leq 4$, приводим уравнение Шрёдингера к виду отображения второго порядка:

$$\psi_{i+1} + \psi_{i-1} + v_i \psi_i = \varepsilon \psi_i. \quad (3.128)$$

В отличие от ранее исследованных нелинейных последовательностей первого порядка (см. (3.79), (3.97) — (3.99), (3.103), (3.112), (3.119)) линейное уравнение (3.128) подобно последовательности Фибоначчи (3.105) связывает не два, а три ближайших узла. Вводя оператор $\hat{S}_i$ и вектор Ψ_i согласно определениям

$$\hat{S}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon - v_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_i = \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix}, \quad (3.129)$$

уравнению (3.128) можно придать вид рекурсивного соотношения

$$\Psi_{i+1} = \hat{S}_i \Psi_i. \quad (3.130)$$

Введем также отклик на n -кратное действие оператора $\hat{S}$ на исходную функцию Ψ_i

$$R_i^n \equiv |\Psi_{i+n}|/|\Psi_i| = \text{Sp } \hat{S}_i^n, \quad (3.131)$$

где Sp — знак взятия следа. Будучи случайным числом, он характеризуется моментом q -го порядка

$$\begin{aligned} Z_n(q) &\equiv \langle (R_i^n)^q \rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N (\text{Sp } \hat{S}_i^n)^q \right]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Допустим, что собственным значениям матрицы (3.129)

$$s_{\pm} = [(\varepsilon - v)/2] \pm \{[(\varepsilon - v)^2/4] - 1\}^{1/2} \quad (3.133)$$

после усреднения (3.132) будут отвечать величины $\exp(-\lambda_{1,2})$. Пусть максимальная из них составляет $e^{-\lambda_1}$. Тогда определению (3.132) можно придать вид

$$Z_n(q) \approx \exp(-\lambda_1 q n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.134)$$

Поскольку выражение (3.131) определяет характер спада волновой функции ψ_{i+n} при удалении $n \rightarrow \infty$ от исходного узла i , то полученный результат (3.134) означает, что при $q = -1$ реализуется экспоненциальный режим (3.126) с длиной корреляции

$$\xi = |\lambda_1|^{-1} \propto w^{-\nu}, \quad (3.135)$$

где учтены соотношение (3.127) и условие $\lambda_1 < 0$ (см. ниже).

С теоретико-множественной точки зрения определение (3.132) дает меру типа (3.60), величина которой Z_n определяет аналог термодинамического потенциала

$$g = - \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} \ln Z_n). \quad (3.136)$$

Простейшая аппроксимация (3.134) отвечает линейной зависимости

$$g = g_0 + \lambda_1 q, \quad g_0 > 0, \quad (3.137)$$

сравнение которой с (3.64), (3.69) показывает, что с точностью до знака показатель $\lambda_1 = -s < 0$ сводится к энтропии s , определяющей приращение информации на каждом шаге отображения (3.130). В общем случае мера (3.132) может быть определена выражением (3.30), сравнение которого с (3.136) приводит с учетом формул (3.65), (3.66) к связи

$$g(q) = \lambda(q - 1)D(q), \quad (3.138)$$

где параметр $\lambda < 0$ определяет эффективную энергию множества (см. раздел 3.2.1). Равенство (3.138) переходит в линейное соотношение (3.137) только при больших значениях $|q|$, когда $D(q) \approx D_{\pm\infty} = \lambda_1/\lambda \propto \xi^{-1}$. Поскольку в делокализованном состоянии $\xi^{-1} = 0$, то приходим к важному заключению: нижнее значение размерности фрактального множества кластеров локализованных состояний

$$D_{\infty} = 0. \quad (3.139)$$

Подстановка верхнего $0 < D_{-\infty} < d$, как и следовало, переводит (3.138) в линейное соотношение (3.137), где $\lambda_1 = \lambda D_{-\infty}$.

Для определения зависимости $g(q)$ при умеренных значениях параметра q аппроксимируем монотонно спадающую функцию $D(q)$ линейной зависимостью

$$D = a - bq, \quad (3.140)$$

где a, b — положительные параметры. Подстановка (3.140) в (3.138) дает параболу с минимумом в точке $q_0 = (a + b)/2b$ и кривизной $2b$. Очевидно, именно этому минимуму отвечает делокализованное состояние, в котором $D = 0$. Следовательно, можно полагать, что минимум $q_0 = (a + b)/2b$ и точка $q^0 = a/b$ зануления зависимости (3.140) будут совпадать, так что $a = b$, $q_0 = q^0 = 1$. В результате зависимость (3.138) принимает окончательный вид

$$g = -a\lambda(q - 1)^2, \quad \lambda < 0, \quad a > 0. \quad (3.141)$$

Таким образом, эффективный термодинамический потенциал $g(q)$, представляющий мультифрактальное множество локализованных состояний электрона, имеет вид, показанный на рис. 37,а. В

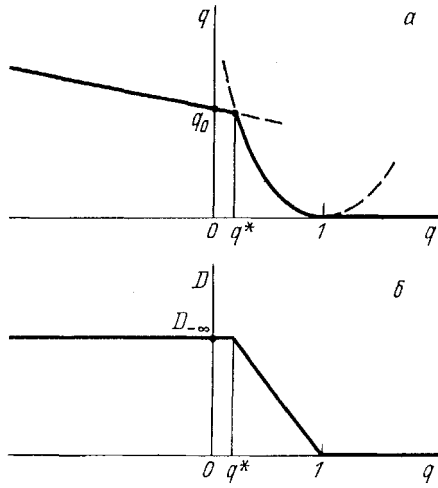


Рис. 37. Вид зависимости эффективного потенциала (а) и спектра фрактальных размерностей (б) для множества кластеров локализованных состояний в модели Андерсона

интервале $(-\infty, q^*)$ зависимость $g(q)$ имеет линейный участок (3.137), а в точке

$$q^* = \left(1 - \frac{D_{-\infty}}{2a}\right) \times \left[1 - \left\{1 - \frac{1 + (g_0/a\lambda)}{[1 - (D_{-\infty}/2a)]^2}\right\}^{1/2}\right] \quad (3.142)$$

наблюдается излом, после которого в интервале $(q^*, 1)$ реализуется параболический закон (3.141). И, наконец, отрезок $(1, \infty)$ отвечает делокализованному состоянию, в котором по определению $D(q) = 0$, так что в согласии с (3.138) и $g(q) = 0$. Спектр фрактальных размерностей $D(q)$, отвечающий описанной зависимости $g(q)$, представлен на рис. 37,б.

С уменьшением параметра $w = W/W_c - 1$ происходит смещение системы к делокализованному состоянию, отражаемое уменьшением размерности $D(q)$. Согласно данным расчетов [47, 48], проведенных для края зоны $\varepsilon = 4$, при этом параметры зависимостей (3.137), (3.141) изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\propto w^{1/2}, \quad g_0 \propto w^{2/3}, \\ a &\propto w^{2/3}, \quad \lambda = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.143)$$

Соответственно, максимальная размерность

$$D_{-\infty} = \lambda_1/\lambda \propto w^{1/2}, \quad (3.144)$$

а характерное значение показателя q

$$q^* \propto w^{1/6}. \quad (3.145)$$

Это выражается в уменьшении высоты и скорости изменения зависимостей $g(q)$, $D(q)$ на рис. 37 с приближением системы к делокализованному состоянию. Согласно (3.144) при больших значениях $|q|$ зависимость $D_w(q)$ характеризуется корневой

особенностью, которая в интервале $(q^*, 1)$ трансформируется в соотношение

$$D(q) = a(1 - q) \propto w^{2/3}(1 - q), \quad (3.146)$$

следующее из (3.138), (3.141), (3.143).

Используя формулы (3.136), (3.138), нетрудно видеть, что при $q \rightarrow 0$ отклику (3.132) можно придать вид экспоненциальной зависимости (3.126), где роль координаты r играет номер узла $n \rightarrow \infty$, а корреляционная длина ξ определяется равенством

$$\xi^{-1} = \lambda D_0, \quad D_0 = D(q = 0). \quad (3.147)$$

В результате формулы (3.144), (3.146) приводят к следующим значениям критического показателя ν в выражении (3.135):

$$\nu_{-\infty} = 1/2, \quad \nu_{\infty} = 2/3. \quad (3.148)$$

Таким образом, мультифрактальное представление перехода Андерсона показывает, что с изменением "температуры" W у нижнего края размерностей $D_{+\infty} = 0$ реализуется показатель $2/3$, присущий скейлинговой области фазового превращения, а на верхнем крае $D_{-\infty}$ — значение $1/2$, характерное для приближения среднего поля, используемого вдали от точки превращения [34]. Очевидно, использование аппроксимации (3.137), (3.141) дают только крайние значения (3.148) показателя ν . Полный же спектр описывается зависимостью $\nu(q)$, монотонно нарастающей между этими значениями, причем основное изменение ν приходится на довольно узкий интервал q , сосредоточенный в области малых значений q .

Выше мы имели в виду только поведение критического показателя ν , определяющего температурную зависимость (3.135) корреляционной длины. Было показано, что разрежение фрактального множества локализованных состояний, отражаемое спаданием его размерности D при росте параметра q , приводит к усилению флуктуаций делокализованной фазы, которое и означает увеличение показателя ν , приводящее к аномальному нарастанию корреляционной длины (3.135). Очевидно, указанное усиление флуктуаций будет сказываться и на значениях других критических показателей, набор которых определяется следующими температурно-полевыми зависимостями [34]

$$\begin{aligned} c &\propto |w|^{-\alpha}, \quad \eta \propto |w|^{\beta}, \quad \chi \propto |w|^{-\gamma}, \\ \eta &\propto \varepsilon^{1/\delta}, \quad c \propto \varepsilon^{-\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.149)$$

$$\xi \propto \varepsilon^{-\mu}, \quad \xi \propto |w|^{-\nu}, \quad S(r) \propto r^{-(d-2+\zeta)} \quad \text{при } w = 0;$$

здесь w — безразмерная температура, отсчитанная от критической точки, ε — поле, сопряженное

Таблица II. Значения критических индексов при фазовых переходах

Критические индексы Метод определения	α	β	γ	δ	ϵ	μ	ν	ζ	Размерность фрактального множества
Теория среднего поля	0	1/2	1	3	0	1/3	1/2	0	$D_{-\infty} \equiv D_{\max}$
Метод Вильсона	0,08	0,33	1,26	4,80	0,05	0,40	0,64	0,04	$D_{\infty} < D < D_{-\infty}$
Аппроксимация $\alpha, \zeta = 0$	0	1/3	4/3	5	0	2/5	2/3	0	$D_{\infty} \equiv D_{\min}$

параметру локализации η ; c, χ — восприимчивости к температуре w и полю ϵ ; ξ — корреляционная длина, $S(r)$ — коррелятор поля $\eta(r)$, d — размерность физического пространства. Величины критических показателей $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \mu, \nu, \zeta$ даны в табл. II. Видно, что весь их набор разбивается на три группы. Первая состоит из показателей γ, μ, ν (сюда же относятся и динамический показатель z [50]), значения которых с увеличением параметра q монотонно нарастают между пределами, указанными в первой и третьей строках табл. II. Как уже упоминалось, это нарастание обусловлено аномальным усилением флуктуаций неупорядоченной (делокализованной) фазы, которое выражается в спадании размерности $D(q)$ мультифрактального множества локализованных состояний. Однако совершенно ясно, что такие флуктуации должны приводить к уменьшению параметра локализации η , благодаря чему понижаются значения отвечающих ему показателей $\beta, 1/\delta$, которые и образуют вторую группу. Третью составляют малые показатели α, ϵ, ζ . Их расчет методом ренормализационной группы Вильсона [51] показывает, что критические флуктуации, отражаемые спаданием функции $D(q)$ приводят лишь к незначительному росту $\alpha(q), \epsilon(q), \zeta(q)$. Если отвлечься от конкретных значений, то первая и третья группы показателей, характеризующие монотонно нарастающими зависимостями $\gamma(q), \mu(q), \nu(q); \alpha(q), \epsilon(q), \zeta(q)$, могут быть объединены.

Очевидно, приведенные выводы можно обобщить на произвольную систему, испытывающую непрерывный фазовый переход. Действительно, хотя наше рассмотрение относилось к модели Андерсона, нетрудно видеть, что выводы, касающиеся поведения критических показателей, основываются только на свойствах фрактального множества кластеров разрешенных состояний системы вблизи точки превращения. Иными словами, описанная картина реализуется для неэргодической системы, кластеры состояний которой образуют самоподобное множество, где реализуется масштабная инвариантность [52]. Как было показано в работе [53], даже для переходов типа смещения

вблизи точки превращения происходит потеря эргодичности (для систем типа порядок—беспорядок она нарушается изначально [35]). Поэтому в критической области, где и реализуется масштабная инвариантность, все системы неэргодичны и, таким образом, выполнимы все условия, на которых основывается приведенная картина.

Перейдем теперь к описанию более сложного случая, реализуемого в иерархически соподчиненных системах типа спинового стекла (см. [18]). Простейший гамильтониан такой системы имеет вид

$$H_N = - \sum_{i,j}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i^N h_i \sigma_i, \quad (3.150)$$

где спины $\sigma_i = \pm 1$ представляют набор из $N \rightarrow \infty$ горячих переменных, а случайно разбросанные значения J_{ij} интегралов перекрытия узлов i, j и поля h_i холодные. Роль меры (3.21) играет здесь статистическая сумма

$$Z_N(T; \{J\}, \{h\}) = \langle \exp [-H_N(\{J\}, \{h\})/T] \rangle, \quad (3.151)$$

где усреднение проводится по набору $\{\sigma\}$ горячих переменных при заданных значениях $\{J\}, \{h\}$ холодных. Приходящаяся на спин свободная энергия имеет вид

$$f(T) = -T \lim_{N \rightarrow \infty} (N^{-1} \overline{\ln Z_N(T; \{J\}, \{h\})}), \quad (3.152)$$

где черта означает усреднение по наборам $\{J\}, \{h\}$.

Характерная особенность выражения (3.152) состоит в том, что приходится усреднять логарифмическую функцию $\ln Z$, что очень неудобно. Поэтому, используя предел

$$\ln Z = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{Z^q - 1}{q}, \quad (3.153)$$

обычно переписывают (3.152) в виде

$$f(T) = T \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow 0} \left[\frac{1}{Nq} \left(1 - \overline{Z_N^q(T; \{J\}, \{h\})} \right) \right], \quad (3.154)$$

где среднее берется уже от степени q статсуммы Z . Это означает, что при наличии закаленного бес-

порядка вместо одного статистического ансамбля рассматривается набор из q одинаковых реплик этого ансамбля, по которому затем и производится усреднение. Оставляя в стороне вопросы, связанные с нарушением симметрии репличного пространства в пределе $q \rightarrow 0$ (см. [18]), укажем, что физически наличие реплик отвечает обусловленному неэргодичностью разбиению пространства состояний на изолированные области разрешенных значений переменных (эти области называют состояниями [54], долинами [19], или компонентами [55]). Как уже указывалось в начале этого раздела и в разделе 2.4.2, они образуют стохастическую иерархически соподчиненную систему статистических ансамблей, реализуемых в каждой из долин.

Покажем сначала, каким образом можно генерировать множество таких ансамблей. С этой целью воспользуемся одномерной моделью с перекрытием ближайших узлов, для которой гамильтониан (3.150) принимает вид

$$H_N(\{J\}, \{h\}) = - \sum_{i=1}^N (J_i \sigma_i \sigma_{i+1} + h_i \sigma_i). \quad (3.155)$$

Соответственно, статистическая сумма (3.151) может быть выражена в виде рекурсивного соотношения типа (3.132)

$$Z_N(T, q; \{J\}, \{h\}) = \left\langle \prod_{i=1}^N \hat{S}^q(T; J_i, h_i) \right\rangle, \quad (3.156)$$

генератор которого имеет вид

$$\hat{S}_i = \begin{pmatrix} \exp[(J_i + h_i)/T], & \exp[-(J_i - h_i)/T] \\ \exp[-(J_i + h_i)/T], & \exp[(J_i - h_i)/T] \end{pmatrix}. \quad (3.157)$$

Произведение N матриц (3.157), стоящее под знаком усреднения в (3.156) как раз и порождает мультифрактальное множество статистических ансамблей, отвечающих различным значениям N . Поскольку его точки зависят от выбора холодных переменных $\{J\}, \{h\}$, то это множество будет носить в отличие от обычных систем типа модели Андерсона стохастический характер. Важной его чертой является свойство самоусредняемости. Оно состоит в том, что если в духе (3.152) определить случайную величину

$$f_N(T, q; \{J\}, \{h\}) = - (T/N) \ln Z_n(T, q; \{J\}, \{h\}), \quad (3.158)$$

то ее предельное значение

$$f(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(T, q = 1; \{J\}, \{h\}) \quad (3.159)$$

будет сводиться к свободной энергии (3.154), получаемой в результате усреднения по холодным

переменным. Иными словами, система ансамблей является эргодической относительно этих переменных.

С другой стороны, величину f можно определить и на основе термодинамического представления полученного множества статистических ансамблей (см. раздел 3.2). С этой целью введем эффективный потенциал типа (3.136)

$$g(T, q) = - \lim_{N \rightarrow \infty} [(T/N) \ln Z_n(T, q; \{J\}, \{h\})]. \quad (3.160)$$

Тогда из формул (3.158), (3.159) следует

$$f(T) = \left. \frac{\partial g(T, q)}{\partial q} \right|_{q=0}. \quad (3.161)$$

С учетом (3.138) отсюда видно, что с точностью до множителя свободная энергия f сводится к значению D_0 спектра фрактальных размерностей $D(q)$ при $q = 0$. Поскольку согласно анализу, проведенному в разделе 3.1.3, значение D_0 отвечает максимуму спектральной зависимости $f(\alpha)$, то это означает, что наблюдаемое значение свободной энергии отвечает той составляющей мультифрактала статистических ансамблей, содержание которой является максимальным. Очевидно, данный факт является выражением свойства самоусреднения, выраженного во фрактальном представлении.

Приведенный метод указывает на возможность описания иерархически соподчиненных систем, в рамках которого отпадает необходимость использования репличного трюка, а следовательно, и не возникает сложностей, связанных с нарушением симметрии репличного пространства (см. [18]). Суть метода [56] состоит в том, что вместо истинной свободной энергии (3.152) сначала определяем величину

$$\tilde{f}(T, q) = - \lim_{N \rightarrow \infty} [(T/N) \ln \overline{Z_n(T, q; \{C\}_a)}], \quad (3.162)$$

где $\{C\}_a$ обозначают нумеруемые индексом a наборы холодных переменных (в (3.160) они сводятся к $\{J\}, \{h\}$). Усреднение по этим переменным производится под знаком логарифма и потому не представляет затруднений. Далее вводим эффективный потенциал

$$g(T, q, \{\mu_a\}) = \tilde{f}(T, q) + \sum_a \bar{C}_a \mu_a, \quad (3.163)$$

$$\bar{C}_a = N^{-1} \sum_{i=1}^N C_i^a,$$

зависящий от полей μ_a , сопряженных холодным переменным C_i^a . Подобно (3.161) их стационарные

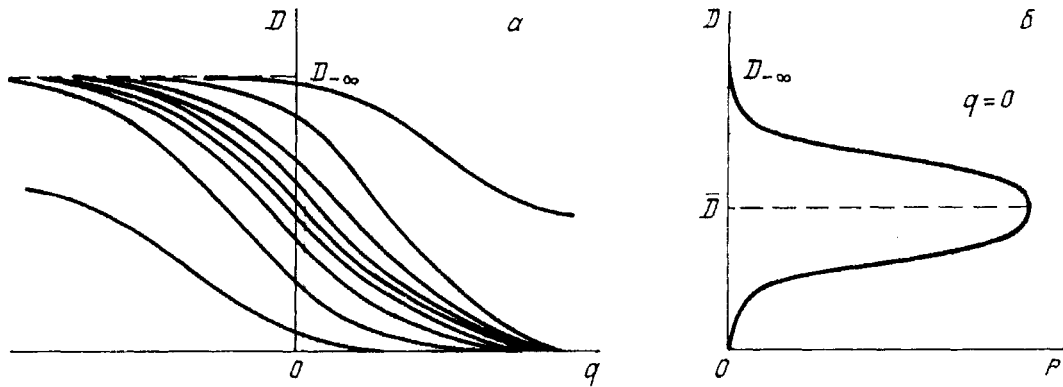


Рис. 38. *a* — Распределение спектров фрактальных размерностей иерархически соподчиненной системы статистических ансамблей спинного стекла. *б* — Сечение, описывающее вероятность флуктуации монофрактала с $q = 0$

значения $\bar{\mu}_a$ определяются условием

$$\left. \frac{\partial g(T, q; \{\mu_a\})}{\partial \mu_a} \right|_{\mu_a = \bar{\mu}_a} = \bar{C}_a, \quad (3.164)$$

где эффективный потенциал задается равенством (ср. с (3.162))

$$g(T, q; \{\mu_a\}) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \left[(T/N) \times \overline{\ln Z_n(T, q; \{C_a\}) \exp \left(-N \sum_a \bar{C}_a \mu_a \right)} \right]. \quad (3.165)$$

Подставляя найденные из (3.164) поля $\bar{\mu}_a = \bar{\mu}_a(T, q)$ в (3.163), получаем стационарное значение

$$g(T, q; \{\bar{\mu}_a(T, q)\}) \equiv g(T, q), \quad (3.166)$$

величина которого совпадает с потенциалом (3.160). Наконец, (3.166), (3.161) дают свободную энергию (3.152). В работе [56] было показано, что использование этого перехода для модели Изинга (3.150) со случайным полем h_i приводит к результатам, совпадающим с точным расчетом. Применительно к модели Андерсона эффективный потенциал (3.165) был найден в работе [49], где условие (3.164) определяло смещение $\bar{\mu}$ из центра зоны локализованных состояний в зависимости от концентрации примеси $\bar{C}$.

Эффективный потенциал (3.165) при заданной температуре T полностью описывает стохастическое мультифрактальное множество статистических ансамблей иерархически соподчиненной системы. Действительно, подставляя (3.165) в (3.75), с учетом (3.72) получаем спектр фрактальных размерностей $D(T, q; \{\mu_a\})$, определяемый зависимостью от параметра q . Согласно (3.164) с максимальной вероятностью реализуется составляющая $\bar{D}_T(q) = D(T, q; \{\bar{\mu}_a\})$, отвечающая стационарным значениям $\{\bar{\mu}_a\}$ холодных полей. Распределение спектров

$D(q)$ вблизи этой составляющей описывается функционалом вероятностей

$$P\{D(q)\} \propto \exp(-g(T, q; \{\mu_a\})), \quad (3.167)$$

где зависимость $D(q)$ выражается равенствами (3.72), (3.75). На рис. 38 показан вид такого распределения.

Описание стохастического мультифрактального множества статистических ансамблей на основе соотношений (3.162) — (3.167), хотя и представляется, на наш взгляд, наиболее естественным, к настоящему моменту не реализовано. Это связано с тем, что впервые описание такого множества было достигнуто Паризи с помощью репличного представления [57]. Приведем соответствующую схему.

Как уже указывалось, стохастичность, обусловленная разбросом холодных переменных, выражается в случайном характере вероятности w_α реализации α -го ансамбля и параметра перекрытия $q_{\alpha\beta}$ ансамблей α, β (см. определения (2.69), (2.71)). Вследствие этого являются случайными функция (2.72) распределения вероятности $P(q)$ параметров перекрытия q и задаваемая равенством (2.74) вероятность $Y(q)$ иметь перекрытия q' , превышающие заданный уровень q . Случайный характер носит также суммарная вероятность

$$W = \sum_\alpha w_\alpha \quad (3.168)$$

реализации статистических ансамблей с перекрытием $q_{\alpha\beta} > q$. Метод Паризи позволил найти соответствующие функции распределения $\Pi_q(Y)$, $f_q(W)$ величин (2.74), (3.168) при заданном значении q . Их вид определяется средним значением

$$y(q) = \overline{Y(q)} \equiv \int Y(q) \Pi_q(Y) dY \quad (3.169)$$

вероятности иметь перекрытие ансамблей $q^{\alpha\beta} \equiv q(y)$ не меньше значения q . Распределение $\Pi_q(Y)$ имеет бимодальный характер с максимумами при

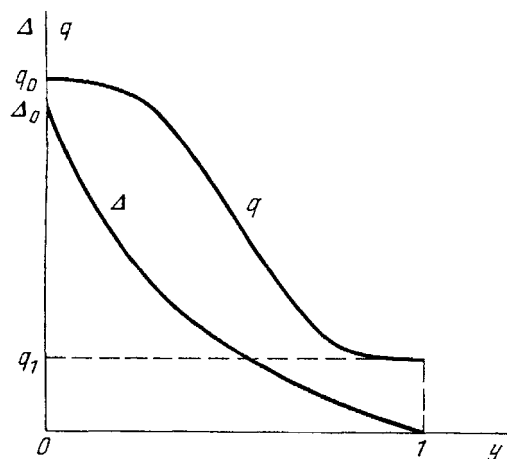


Рис. 39. Распределение вероятности параметра перекрытия q и параметра неэргодичности Δ

$Y \approx 0,5$ и $Y = 1$. Наличие особенности $\Pi_q(Y) \propto (1 - Y)^{-y}$ вблизи второго из них приводит к различию наиболее вероятного значения $Y = 1$ и средней вероятности $y < 1$. Среднее распределение $\overline{f_q(W)}$ по кластерам ансамблей с ограниченным уровнем перекрытия также имеет бимодальный вид:

$$\overline{f_q(W)} = \frac{W^{y-2}(1 - W)^{-y}}{\Gamma(y)\Gamma(1 - y)}, \quad y = y(q). \quad (3.170)$$

Согласно (3.170) наибольшее число кластеров сосредоточено вблизи значений $W = 0$, $W = 1$, особенно первого. С ростом степени перекрытия q вероятность $y(q)$ монотонно спадает, приводя к сосредоточению числа кластеров с нулевой вероятностью W их реализации. Вид обратной зависимости $q(y)$ для параметра перекрытия q и параметра неэргодичности Δ , представляющего разность статической и динамической восприимчивостей (см. [15]), приведен на рис. 39. Зависимость $q(y)$ характеризуется наличием двух плато, расположенных вблизи предельных значений вероятности $y = 0$ и $y = 1$, и монотонным спаданием в промежуточной области. Параметр неэргодичности монотонно спадает от значения $\Delta_0 \equiv \Delta(y = 0)$ до $\Delta_1 \equiv \Delta(y = 1) = 0$. Физически максимальные значения q_0 , Δ_0 обусловлены процессами, протекающими в минимальных областях разрешенных значений переменных. Это означает, что при этом точки фрактального множества отвечают чистым статическим ансамблям, набор которых характеризуется максимальной размерностью $D_{-\infty}$. Минимальные значения q_1 , Δ_1 перекрытия ансамблей и неэргодичности отвечают статическому пределу, в котором все ансамбли объединены, так что фрактальное множество сводится к точке и имеет минимальную размерность $D_{\infty} = 0$. Таким образом, в

рамках метода Паризи [57] монотонно спадающие зависимости $q(y)$, $\Delta(y)$ отвечают спектру фрактальных размерностей $D(q)$, также имеющему спадающий вид. Поскольку $\Delta_1 = 0$, $D_{\infty} = 0$, но не всегда $q_1 = 0$ (см. [15]), то соответствие зависимостей $\Delta(y)$, $D(q)$ является более полным, чем для пары $q(y)$, $D(q)$, и фрактальную размерность множества статических ансамблей можно трактовать как параметр неэргодичности.

Физический смысл представленной стохастической схемы состоит в том, что иерархическую систему следует представлять не одним статистическим ансамблем, а их набором. Особенность этого набора состоит в том, что ансамбли не являются независимыми, а перекрываются друг с другом со степенью $q_{\alpha\beta}$, характеризуемой параметром Паризи (2.71). В иерархической системе стохастичность проявляется не только в поведении структурных единиц, принадлежащих данному ансамблю, но и в поведении самих ансамблей, вероятность реализации которых задается распределением w_{α} . Однако, если распределение структурных единиц в ансамбле носит обычный, канонический характер [34], то распределение ансамблей определяется случайным характером их объединения в иерархические кластеры — с наибольшей вероятностью объединяются ансамбли с максимальным перекрытием q , а с уменьшением q она спадает. Характер иерархической стохастизации отражается распределением $P(q)$, задаваемым равенством (2.72). Поскольку последнее само содержит случайные величины w_{α} , w_{β} , то функция распределения $P(q)$ по кластерам ансамблей также оказывается случайной. Таким образом, иерархичность в поведении структурных единиц приводит к иерархичности стохастичностей. Конечной причиной такой ситуации является нарушение эргодичности в поведении ансамбля структурных единиц [55].

Развитый Паризи [57] метод, основывающийся на отмеченном выше факте, что ансамбли отвечают точкам ультраметрического пространства [17], позволил полностью описать иерархическую стохастичность. Она характеризуется обрезанными (по параметру перекрытия q) моментами $Y(q)$, W низшего порядка (см. (2.74), (3.168)) для распределений $P(q)$ и w_{α} соответственно. Первый из них дает вероятность перекрытия ансамблей с уровнем, не ниже заданного q , второй — суммарную вероятность реализации таких ансамблей. Выделение кластеров с большим перекрытием q обусловлено тем, что обычные эргодические системы отвечают предельному случаю реализации единственного

ансамбля с максимальным перекрытием $q = 1$. Особенность иерархической стохастичности состоит в том, что в неэргодической системе наиболее вероятным будет не только максимальное значение $Y(q) = 1$ вероятности перекрытия ансамблей, но и промежуточное $Y(q) \approx 0,5$. Иными словами, распределение $\Pi_q(Y)$ носит бимодальный характер, определяемый средним значением вероятности (3.169). Физически это означает значительную вероятность реализации ансамблей, слабо зависящих друг от друга даже в статистическом смысле (например, дислокации, принадлежащие различным малоугловым стенкам, принадлежат практически разным, непересекающимся статансамблям). С другой стороны, если говорить о числе различных кластеров ансамблей, характеризуемом распределением (3.170), то факт расходимости интеграла от (3.170) по всем значениям W означает, что полное число возможных вариантов объединения ансамблей в иерархические кластеры является бесконечным. Однако они образуются в основном из ансамблей с малой вероятностью реализации W . Это означает, что к иерархическому соподчинению наиболее склонны редко реализуемые структуры, принадлежащие крупномасштабным уровням (границы разориентации, блоки, зерна и т.д.). С другой стороны, основной вклад в среднее значение величины W с весом $f_q(W)$ дает область больших W . Таким образом, хотя основная часть структурных единиц входит в статансамбли, характеризующиеся значительными вероятностями W , иерархические структуры образуют лишь наиболее редко реализуемые из них.

Касаясь распределения энергий E кластеров состояний отметим, что оно носит квазигиббсовский вид, отражающий независимость в разбросе значений E . Однако, если для минимального кластера, отвечающего максимальному перекрытию $q = 1$, имеем чисто гиббсовское распределение $n_1(E) = \exp [-(E - \Phi)/T]$, где энергия E отсчитывается от термодинамического потенциала Φ , то с ростом кластера при уменьшении перекрытия $q < 1$ приходим к неравновесному распределению

$$n_q(E) = \exp [-(1 - y(q))(E - E_q)/T]; \quad (3.171)$$

здесь минимальная энергия кластера E_q превышает ее термодинамическое значение $E_1 = \Phi$.

Охарактеризовав распределение кластеров статансамблей, возвратимся теперь к описанию распределения самих структурных единиц, образующих эти ансамбли. Это означает, что требуется, с одной стороны, найти распределение $F(\eta)$ параметра

порядка η , а с другой — распределение $N_q(h)$ сопряженного поля h , действующего в кластере с перекрытием, превышающим q [54]. Узлы i , в которых поле h_i принимает значения в интервале от h до $h + \Delta h$, образуют ячейку C_h , объем которой при заданном уровне перекрытия q составляет $|C_h| = NN_q(h)\Delta h$. В этой ячейке ансамбли с перекрытием, превышающим заданную величину q , ведут себя независимым образом и характеризуются одинаковыми распределениями

$$F_q(\eta, h) = \frac{1}{|C_h|} \sum_{i \in C_h} \delta(\eta - \langle x_i \rangle_\alpha), \quad (3.172)$$

где x_i — переменные типа спина (см. (2.71)). Тогда искомое распределение величины параметра порядка имеет вид

$$F(\eta) = \int N_q(h) F_q(\eta, h) dh. \quad (3.173)$$

Средняя величина $\bar{\eta}$ и параметр перекрытия q выражаются через значение $\eta_q(h)$ параметра порядка в кластере с перекрытием q и полем h :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \int F(\eta) \eta d\eta = \int N_q(h) \eta_q(h) dh, \\ q &= \int N_q(h) \eta_q^2(h) dh; \\ \eta_q(h) &= \int F_q(\eta, h) \eta d\eta. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Как уже отмечалось, условное распределение (3.172) представляет вклад, даваемый структурными единицами, находящимися под действием поля h в кластерах состояний с перекрытием не ниже уровня q . Выделение таких кластеров связано с тем обстоятельством, что в них можно использовать обычные эргодические представления. Равенство (3.173) позволяет, зная распределение $N_q(h)$ кластеров по значениям поля h , перейти от условного распределения $F_q(\eta, h)$ к полному $F(\eta)$. Их различие состоит в том, что последнее в качестве момента первого порядка (3.174) дает среднее значение параметра порядка $\bar{\eta}$, тогда как первое — вклад $\eta_q(h)$, обусловленный кластерами в поле h с перекрытием q (см. последнюю формулу (3.174)). При известном распределении поля $N_q(h)$ удельное значение $\eta_q(h)$ позволяет найти величины $\bar{\eta}$, q согласно первым соотношениям (3.174).

Что касается самой функции $N_q(h)$, то при заданном разбросе во взаимодействии структурных единиц она может быть определена методом [58], развитым для аморфных твердых растворов. Суть метода, являющегося естественным обобщением стандартной теории среднего поля, состоит в

том, что устанавливается связь не между самим полем h и параметром взаимодействия структурных единиц, а между их функциями распределения [20].

Опишем в заключение эволюцию иерархического ансамбля структурных единиц. С этой целью учтем, что при переходе к более высокому уровню перекрытия $q' > q$ ячейка C_h дробится на части $C_{hh'}$. Вероятность попадания узла i в подячейку $C_{hh'}$

$$\frac{|C_{hh'}|}{|C_h|} = G_{qq'}(h, h') \Delta h' \quad (3.175)$$

задает связь распределений параметра порядка в ячейке и подячейке

$$F_q(\eta, h) = \int G_{qq'}(h, h') F_{q'}(\eta, h') dh', \quad (3.176)$$

объем которой составляет

$$|C'_h| = N \Delta h' \cdot \int N_q(h) G_{qq'}(h, h') dh. \quad (3.177)$$

Знание оператора $G_{qq'}(h, h')$ эволюции иерархизованной структуры дает полную информацию о распределении кластеров состояний:

$$N_q(h) = G_{0q}(0, h), \quad (3.178)$$

$$F_q(\eta, h) = \int G_{q1}(h, h') \delta(\eta - \text{th}(h'/T)) dh', \quad (3.179)$$

$$\eta_q(h) = \int G_{q1}(h, h') \text{th}(h'/T) dh'. \quad (3.180)$$

Согласно (3.178) задание функции $N_q(h)$ распределения поля в кластерах эквивалентно определению эволюции из набора изолированных ансамблей в кластер, характеризуемый перекрытием q и полем h . Наличие присущего обычной теории среднего поля множителя $\text{th}(h/T)$ в (3.179), (3.180) означает, что в кластере с максимальным перекрытием $q = 1$ реализуется чистый статистический ансамбль, в котором параметр порядка определяется стандартным условием самосогласования [35]

$$\eta = \text{th}[(\eta + h)/T]. \quad (3.181)$$

Соотношение (3.179) означает, что удельная функция распределения $F_q(\eta, h)$ получается размытием δ -образного распределения, отвечающего условию (3.181), при переходе от чистого статансамбля к набору кластеров, характеризуемому уровнем перекрытия не ниже q . Согласно (3.180) при этом параметр порядка трансформируется из величины (3.181) в удельное значение $\eta_q(h)$, обеспечиваемое вкладом указанного набора кластеров.

Таким образом, знание оператора $G_{qq'}(h, h')$, представляющего эволюцию иерархизованной структуры, позволяет полностью описать обеспечи-

ваемый этой эволюцией процесс упорядочения. При этом сама перестройка структуры представляется как марковский процесс диффузии на дереве Кейли [54]. Это означает в частности, что бинарный оператор эволюции дает распределение по числу $n \geq 2$ кластеров, содержащих $m \geq n$ ансамблей

$$F_{q_1 q_2 \dots q_n}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \prod_{\alpha=1}^m \int dh_{\alpha} G_{q_{\alpha-1} q_{\alpha}}(h_{\alpha-1}, h_{\alpha}) F_{q_{\alpha}}(\eta_{\alpha}, h_{\alpha}), \quad (3.182)$$

где $q_0 = 0$, $G_{qq}(h, h') = \delta(h - h')$, параметр q_{α} задает перекрытие состояний α , $\alpha + 1$ (поскольку некоторые пары состояний могут иметь одинаковые перекрытия q_{α} , то их число n может быть меньше числа ансамблей m).

Если структура является многоуровневой, то отвечающее ей дискретное ультраметрическое пространство можно считать континуальным, а переходы между уровнями непрерывными. Тогда оператор эволюции определяется уравнением Фоккера—Планка [54]

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial h^2} + \frac{\partial \ln Z}{\partial h} \frac{\partial G}{\partial h}, \quad (3.183)$$

где роль времени и координаты играют параметр перекрытия q и поле h , вспомогательная функция $Z = Z_q(h)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} + \frac{N_q(h)}{1 - y(q)} Z \ln Z \quad (3.184)$$

с начальным условием $Z_1(h) = \text{th} h$. Однако, если число структурных уровней невелико, то переходы между ними приобретают дискретный характер, и вместо дифференциального уравнения (3.183) следует использовать более сложное кинетическое уравнение [59]

$$\frac{\partial G_{q_0 q}(h_0, h)}{\partial q} = \int (G_{q_0 q}(h_0, h') w(h', h) - G_{q_0 q}(h_0, h) w(h, h')) dh', \quad (3.185)$$

где $w(h, h')$ — вероятность изменения поля от значения h до h' при единичном изменении перекрытия q . Определение зависимости $w(h, h')$ требует рассмотрения конкретных моделей формирования макроструктуры упорядоченной фазы.

4. Заключение. Учитывая складывающуюся ситуацию с научной литературой, мы построили обзор таким образом, чтобы он содержал все необходимые сведения по фракталам. Это, естественно, привело к его "распуханию". Из оглавления может сложиться ложное представление, что

общеобразовательные сведения, которым посвящены все разделы, исключая 2.4, 3.3, занимают основное место. Однако в действительности это не так: только третья часть работы содержит материал, изложение которого можно найти в труднодоступных обзорах [8, 9] и книге [3], сразу ставшей библиографической редкостью; основной же объем занимает обзор оригинального материала по использованию концепции фрактала в теории конденсированной среды. При изложении общих вопросов теории мы, имея в виду абстрактность понятия фрактала, стремились, прежде чем вводить новое понятие, продемонстрировать его каким-либо зрительным образом или наглядным физическим примером. За это, естественно, пришлось расплатиться обилием рисунков, но, учитывая характер самого объекта описания, было бы, наверное, наивным ожидать ясности представления геометрического образа фрактала без его наглядного изображения.

Исходя из такой посылки, мы достаточно подробно описали схему построения простейших фрактальных множеств Коха и Кантора. На протяжении всего обзора последнее из них играет роль исходного геометрического образа, обобщение которого позволяет ввести основные характеристики мультифрактала (см. раздел 3.1.1). Другим центральным понятием, представляющим метрику фрактального множества, является описанное в разделе 1.1.2 дерево Кейли, дающее наглядный образ ультраметрического пространства. Отметим, что в известной нам литературе по фрактальным множествам их связь с пространством ультраметрической топологии не обсуждалась вообще. Мы же не только подробно описываем эту связь, но и вводим понятия фрактального и многомерного иерархических деревьев. Задача определения основной характеристики множества — его фрактальной размерности — рассматривается как с теоретической (раздел 2.2), так и с экспериментальной (раздел 2.3) точек зрения. При описании первого аспекта мы исходили из наглядного примера определения площади обычной поверхности: покрывая ее ломаной линией, квадратами или кубиками и подсчитывая отвечающие им суммарные величины длины, площади и объема, мы ввели важное понятие меры фрактального множества. Что касается представления экспериментальных методов определения фрактальной размерности, то здесь мы ограничились лишь перечислением наиболее известных из них, приводя каждый раз основную расчетную формулу. Описание мультифракталов дается как в рамках геометрического метода (раздел 3.1), где распределение

меры по точкам множества принимается постоянным, так и в рамках термодинамического формализма (раздел 3.2), формально совпадающего с аппаратом обычной термодинамики. Использование последнего, кроме привычной картины описания, открывает возможность представления эволюции множества как фрактального фазового перехода. Данное наблюдение позволяет, в частности, решить известную проблему, возникающую при описании эволюции дефектной структуры твердого тела в процессе пластической деформации (см. [12]): из наблюдения картины перестройки одного типа распределения дефектов в другой (см., например, рис. 4) было совершенно ясно, что происходит своеобразный фазовый переход, однако стандартное определение, отвечающих ему параметра порядка, термодинамических особенностей, критических показателей и т.д. [35], не представлялось возможным. Изложенный же в разделе 2.2 формализм показывает, что перестройка дефектной структуры представляет трансформацию одного монофрактала в другой, отличный от первого величиной D .

Как уже упоминалось, основное внимание в своем изложении мы уделили использованию концепции фрактала в задачах теории конденсированной среды, рассматриваемых в последнее время. Так, в разделе 2.4.1 было показано, что если среда обладает частичной памятью, то ее можно представить цепью параллельных процессов, одни из которых протекают в соответствии с принципом механической обратимости и поэтому сохраняют память системы, а другие реализуются по термодинамическому сценарию, где наличие диссипации приводит к полной потере памяти. Оказалось, что такая система представляется фрактальным множеством статистических ансамблей, описание которых приводит к концепции дробного интеграла (производной). Изменение соотношения между долями механических и термодинамических каналов приводит к трансформации уравнений диффузионного типа в волновые. Раздел 2.4.2 посвящен исследованию временного поведения наблюдаемых величин в указанных системах. Их характерная особенность состоит в иерархическом соподчинении статистических ансамблей: пока равновесие не достигается в кластерах с максимальным перекрытием, в процесс структурной релаксации не включаются группы ансамблей, обладающие более низким уровнем перекрытия. Показано, что такая иерархичность приводит к трансформации дебаевского закона релаксации в более медленно спадающие зависимо-

сти типа растянутой экспоненты Колерауша, степенной, логарифмической и двойной логарифмической зависимостей.

Описание указанных систем достигается в рамках монофрактального представления. В разделе 3.3 рассматриваются более сложные примеры, требующие использования концепции мультифрактального множества. Так, в разделе 3.3.1 рассматривается сценарий возникновения турбулентного течения жидкости посредством удвоения периода. Показано, что соответствующее множество порождается логистической цепью бифуркаций, функция отображения которой имеет простейший параболический вид. Простейшее аналитическое исследование этого отображения позволяет установить характерные значения спектра фрактальных размерностей. Оказывается, что основная его особенность обусловливается наличием двух характерных масштабов подобия, связанных корневым образом. Точный вид спектра фрактальных размерностей $D(q)$ и спектральной функции $f(\alpha)$ устанавливается на основе численных методов моделирования отображения. Термодинамический метод описания данного мультифрактора позволяет представить переход от одного масштаба к другому как фазовое превращение первого рода, сопровождаемое скачком информационной энтропии.

В разделе 3.3.2 рассмотрены квазипериодические последовательности, порождаемые антисимметричной функцией отображения. Физическими примерами таких множеств являются несоразмерные и длиннопериодические структуры, а также важный случай квазикристаллов. Показано, что длиннопериодические структуры отвечают точкам монофрактального множества, которое максимальным образом содержится в данном мультифрактале. Квазикристаллическая последовательность, напротив, является наиболее редко реализуемой и представляется известной последовательностью Фибоначчи. Описан регулярный метод построения этой последовательности и найдено распределение волновых векторов, в которых излучение, проникающее через квазикристаллы, дает максимумы дифракционной картины. В заключение найдены характерные значения фрактальных размерностей и построены спектральные функции $D(q)$ и $f(\alpha)$. При этом рассматривается как случай синхронизации фаз, представляющий спектр частот одного из сценариев возникновения турбулентности, так и случай отображения самих фаз.

Заключительный раздел 3.3.3 посвящен мультифрактальному представлению неэргодических си-

стем. Рассмотрение проводится на примерах модели Андерсона и спинового стекла. Относительная простота первой связана с тем, что мультифрактальное множество кластеров локализованных состояний, хотя и является неэргодическим, но не возникает иерархического соподчинения. Наличие нетривиального спектра фрактальных размерностей означает, что вдали от точки перехода ансамбль кластеров, обладающий минимальной размерностью, ведет себя в соответствии с приближением среднего поля. С приближением к точке перехода происходит критическое возрастание флуктуаций делокализованной фазы, означающее спадание фрактальной размерности. В соответствии с этим изменяются значения критических показателей. Описанная картина, очевидно, отвечает не только переходу Андерсона, но и любому фазовому превращению. Таким образом, несовпадение критических показателей со значениями, даваемыми теорией Ландау, представляется как наличие спектра фрактальных размерностей множества флуктуаций новой фазы. Характерная черта спинового стекла состоит в разделении ансамбля переменных на набор горячих (спинов) и холодных (интеграл перекрытия и локальные значения поля, сопряженного спину). В соответствии с этим система становится не только неэргодической, но и иерархически соподчиненной. Оказалось, что при этом однозначно определен спектр фрактальных размерностей размывается в стохастический набор таких спектров. Разработан оригинальный метод описания ансамбля спектров, обобщающий термодинамическое представление мультифрактала. Проводится сопоставление этого метода с известным репличным представлением Паризи. В заключение излагается стохастическая картина описания системы, основанная на уравнении Фоккера — Планка.

Разумеется, рассмотренные примеры не исчерпывают всего многообразия статистических систем, понимание которых может быть достигнуто на основе концепции фрактала. К таковым относятся, очевидно, разрабатываемые сейчас модели ассоциативной памяти (см. [60]). Нетрудно привести и другие возможные приложения, но мы надеемся, что и описанного в обзоре вполне достаточно, чтобы утвердить читателя в мысли, что концепция фрактала приобретает центральную роль при объяснении коллективного поведения сложных систем.

Считаем своим приятным долгом поблагодарить В.Г. Барьяхтара, поддержавшего работу, и А.В. Пауль, чья инициатива привела нас к мысли о

необходимости обзора такого рода для твердотельщиков. Важную роль сыграло также обсуждение обзора на XI школе-семинаре "Спектроскопия молекул и кристаллов" (Харьков, май 1993 г.), участникам и оргкомитету которой мы благодарны за проявленный интерес. И, наконец, выражаем признательность Д.О. Харченко и О.П. Журке за помощь в оформлении работы.

ПРИМЕЧАНИЯ

⁽¹⁾ Под топологической эквивалентностью двух фигур понимается, что одна из них переводится в другую плавным изменением присущих размеров. Так, например, при уменьшении толщины кольца оно переходит в топологически эквивалентную окружность.

⁽²⁾ На этот метод нам указала А.В. Пауль.

⁽³⁾ Отметим во избежание недоразумений, что имеются в виду кластеры статистических ансамблей в ультраметрическом пространстве. Им не обязательно отвечают кластеры структурных единиц в r -пространстве.

⁽⁴⁾ Очевидно, при свертывании выполняется соотношение $j = \xi^{-1}$, и формула (2.11) дает $D = 1$. Аналогичным образом для монофракта в рамках геометрического подхода принималась $\alpha = 1$ (см. (2.27)).

⁽⁵⁾ Обычно в теории подобия используется показатель ζ , определяемый соотношением $C(r) \propto r^{-(d-2-\zeta)}$ [34]. Сравнивая его с (3.48), находим связь $D_2 = 2 - \zeta$. Как правило, значение ζ невелико: так, для термодинамических систем, испытывающих фазовый переход (см. табл. II и раздел 3.3.3), имеем $\zeta < 0,1$ и, следовательно, $D_2 \approx 2$.

⁽⁶⁾ Как выяснено в разделе 2.1.2, они представляют расстояния между различными точками x ультраметрического пространства.

⁽⁷⁾ Роль такого воздействия не обязательно сводится к внешнему полю, это может быть и самосогласованное поле, возникающее в результате присущих самой системе процессов самоорганизации [40].

⁽⁸⁾ По английской терминологии gold mean. Известно, что величины золотого сечения определяла пропорции эллиптических храмов.

⁽⁹⁾ В рамках синергетической идеологии синхронизация частот связана с попаданием неравновесной системы в метастабильные минимумы зависимости $V(\omega)$ синергетического потенциала от частоты [40]. Соответствующее аналитическое рассмотрение можно найти, например, в § 30 книги [37]. Приведенная на рис. 33 чертова лестница, наглядным образом отражающая синхронизацию, получена численно [10].

⁽¹⁰⁾ Обратим внимание на тот факт, что параметры α , Ω для временных и пространственных последовательностей (3.119) определяются по-разному (в первом случае индекс n определяет дискретные точки временной оси, во втором — пространственной). Для временной последовательности величины α , Ω представляют отношения собственной частоты ω_0 к частотам ω_1 , ω внешнего воздействия и отклика соответственно. Для пространственной же структуры эти отношения следует перевернуть, и величины α , Ω оказываются пропорциональными волновым числам k_1 , k внешнего воздействия и отклика (в самоорганизующейся длиннопериодической структуре масштаб k_1 может, естественно, не проявляться),

⁽¹¹⁾ Поскольку ранее мы исследовали то же самое отображение (3.119), то во избежание недоразумений следует отметить, что представленное выше множество характеризовало

спектр пространственно-временной структуры, тогда как ниже будет исследоваться распределение фаз x , реализуемых на этом спектре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot B.B. Science. 1967, **155**, 636.
2. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York, Freeman, 1982.
3. Федер Е. Фракталы. М., Мир, 1991.
4. Фракталы в физике. М., Мир, 1988.
5. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М., Наука, 1991.
6. Смирнов Б.М. УФН. 1986, **149**, 177.
7. Жюльен Р. УФН. 1989, **157**, 339.
8. McCauley J.L. Phys. Rep. 1990, **189**, 225.
9. Paladin G., Vulpiani A. Phys. Rep. 1987, **156**, 147.
10. Halsey T.C., Jensen M.N., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Phys. Rev. A. 1986, **33**, 1141.
11. Levine D., Steinhardt P.J. Phys. Rev. B. 1986, **34**, 596.
12. Socolar J.E.S., Steinhardt P.J. Ibidem, 617.
13. Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск, Наука, 1990.
14. Синергетика и усталостное разрушение металлов. М., Наука, 1989.
15. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. Новосибирск, Наука, 1985.
16. Олемской А.И., Скляр И.А. УФН. 1992, **162**, 6, 29.
17. Нугматуллин Р.Р. ТМФ. 1992, **90**, 354.
18. Rammal R., Toulouse G., Virasoro M.A. Rev. Mod. Phys. 1986, **58**, 765.
19. Binder K., Joung A.P. Rev. Mod. Phys. 1986, **58**, 801.
20. Гинзбург С.Л. Необратимые явления в спиновых стеклах. М., Наука, 1989.
21. Олемской А.И., Торопов Е.А. ФММ. 1991, № 9, 5.
22. Олемской А.И. ФТТ. 1988, **30**, 3384.
23. Олемской А.И., Наумов И.И. — [13], с. 200.
24. Олемской А.И. ФММ. 1989, **68**, 56.
25. Олемской А.И., Паскаль Ю.И. Препринт ИФПМ ТФ СО № 30. АН СССР. Томск, 1988.
26. Олемской А.И., Торопов Е.А. ФММ. 1991, № 7, 32.
27. Adeiman D., Burmester C.P., Wille L.T., Sterne P.A., Gronsky R. J. Phys.: Condense. Matter. 1992, **4**, L585.
28. Kjems J., Freltoft T. Scaling Phenomena in Disordered Systems. New York, Plenum Press, 1985.
29. Porod G. — Small Angle X-Ray Scattering. New York, Academic, 1983.
30. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987.
31. Форстер Д. Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции. М., Атомиздат, 1980.
32. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М., Наука, 1971.
33. Олемской А.И., Коплык И.В., Скляр И.А., Торопов Е.А., Флат А.Я. Изв. вузов. Физика. 1993, № 1, 90.
34. Jonscher A.K. Dielectric Relaxation in Solids. London, Chelsea Dielectric Press, 1983.
35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч. 1. М., Наука, 1976.
36. Кацнельсон А.А., Олемской А.И. Микроскопическая теория неоднородных структур. М., Изд-во МГУ, 1987.
37. Parisi G. Phys. Rev. Lett. 1983, **50**, 1496.
38. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., Наука, 1988.
39. Feigenbaum M.J. J. Stat. Phys. 1978, **19**, 25; 1979, **21**, 668.
40. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., Наука, 1979.
41. Хакен Г. Синергетика. М., Мир, 1980; Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М., Мир, 1985.

41. *Bak P.* Rep. Prog. Phys. 1981, **45**, 587.
42. *Jensen M.H., Bak P.* Phys. Rev. A, 1984, **30**, 1960, 1970.
43. *Cvitanovic P., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I.* Phys. Rev. Lett. 1985, **55**, 343.
44. *Shenker S.J.* Physica D. 1982, **5**, 405.
45. *Anderson P.W.* Phys. Rev. 1958, **109**, 1492.
46. Disordered Systems and Localization. — Lecture Notes in Physics. V. 149, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1981,
47. *Derrida B., Gardner E. J.* de Phys., Paris. 1984, **45**, 1283.
48. *Parisi G., Vulpiani A. J.* Phys. A. 1986, **19**, L425.
49. *Olemskoi A.L.* Phys. Stat. Sol. b. 1990, **160**, 569.
50. *Луфшиц Е.М., Путаевский Л.П.* Физическая кинетика. М., Наука, 1979.
51. *Wilson K.G., Kogut J.* Phys. Rep. C. 1974, **12**, 75.
52. *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М., Наука, 1982.
53. *Aksenov V.L., Bobeth M., Plakida N.M., Schreiber J. J.* Phys. C. 1987, **20**, 375.
54. *Mezard M., Virasoro M.A. J.* de Phys., Paris. 1985, **46**: 8, 1293.
55. *Palmer R.G.* Adv. Phys. 1982, **31**, 669.
56. *Serva M., Paladin G.* Phys. Rev. Lett. 1993, **70**, 105.
57. *Parisi G. J.* Phys. A. 1980, **13**, 1101.
58. *Bell J.M., Frankel N.E., Inawashiro S.* Phys. Rev. B. 1986, **33**, 476, 487.
59. *Гнеденко В.В.* Курс теории вероятностей. М., Наука, 1988.
60. *Amit D.J., Gutfreund H., Sompolinsky H.* Ann. of Phys. 1987, **173**, 30.