*Август 1990 г.* *Том 160, вып. 8*
*УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.12:531.57

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ — ЗНАКОМАЯ И НЕЗНАКОМАЯ

***Л. П. Грищук***

(Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга (ГАИШ) при МГУ)

Общая теория относительности (ОТО) прекрасно согласуется со всеми имеющимися экспериментальными данными. ОТО используется в приложениях, а новые наблюдения только увеличивают точность, с которой подтверждается эта теория. Это свидетельствует о ее практической ценности. Но не случайно подчеркивают и эстетическую красоту ОТО, ее роль образца при построении обобщенных теорий всех физических взаимодействий. Чтобы согласиться с этой точкой зрения, чтобы, осознать красоту ОТО в полной мере, надо глубоко изучить эту теорию. Надо пройти весь путь от первого знакомства, через недоверие и разочарование, к признанию ее гармоничности и глубины. На первый взгляд ОТО обладает существенными изъянами. Кажется, что она отвергла какие-то фундаментальные принципы, которые так дороги и необходимы, которыми невозможно поступиться.

Вероятно, одним из наиболее трудных мест для восприятия является отсутствие в структуре ОТО каких-либо прямых упоминаний о привычном плоском пространстве-времени (четырехмерном мире Минковского). Обычно задают поля (например, классическое электромагнитное поле) на фоне глобального мира Минковского, используют симметрии фонового пространства-времени для традиционной формулировки законов сохранения. В обычных физических теориях присутствует как метрика плоского пространства-времени $\eta_{\mu\nu}$, так и физические поля, заданные на его фоне. А в ОТО (в ее хорошо знакомой, геометрической, формулировке) речь идет только об искривленном мире, причем компоненты метрики этого пространства-времени $g_{\mu\nu}$ играют двойную роль. Они выступают и в качестве величин, определяющих соотношения между промежутками времени и отрезками длины, и в качестве потенциалов гравитационного поля.

Видимо, не слишком широко известно, что А. Пуанкаре еще в 1905 г. пытался дать релятивистское обобщение закону Ньютона, т. е. привести в соответствие принципы специальной теории относительности (преобразования Лоренца) с законом тяготения (см., например, в книге [1]). А. Эйнштейн также начинал построение релятивистской теории тяготения с описания сил тяготения в плоском мире. Он прошел путь от ускоренных (криволинейных) систем координат и однородного поля тяготения, через принцип эквивалентности и анализ процедуры физических измерений, к понятию искривленного мира, в котором мы живем.

Красота и экономность геометрической формулировки ОТО как раз и состоит в том, что все лишнее выпало. Измерения промежутков времени и отрезков длины при наличии гравитационного поля все равно приводят к метрическим соотношениям искривленной геометрии; устаревшее представление о глобальном плоском мире оказывается ненужным. Говорить о том, что на самом деле пространство-время является плоским и только «эффективно» воспринимается нами как искривленное, настолько же искусственно, как утверждать, что на самом деле Земля является плоской (как в ближайшей окрестности Москвы), а таблица расстояний, покрываемых дальними рейсами Аэрофлота, свидетельствует только об эффективной кривизне земной поверхности, вызванной тем, что эталоны длины меняются от точки к точке по мере удаления от Москвы.

Общая теория относительности, использующая представление об искривленном пространственно-временном континууме, служит естественным, верным и непротиворечивым способом описания тяготения и тех явлений, в которых тяготение существенно. Отстаивая правильность ОТО, мы не имеем в виду, что эта теория представляет собой некую абсолютную, ни от чего не зависящую, истину. Как всякая физическая теория, ОТО окажется неправильной в том же смысле, в котором ньютоновская механика оказалась неправильной с позиций квантовой механики и специальной теории относительности, а специальная теория относительности оказалась неправильной с позиций общей теории относительности. Но здесь речь пойдет о конкретных возражениях против ОТО и конкретных теориях, предлагаемых взамен нее, причем в области тех же физических условий, которые охватываются и ОТО.

Геометрическая ОТО, с ее идеей искривленного пространства-времени, пришла на смену представлениям о плоском мире Минковского. Вместе с тем иногда возникает желание вернуться в историческом плане на несколько шагов назад. Хочется начать с традиционных представлений о поле в мире Минковского и «вывести» ОТО, указывая на те решающие повороты, которые приводят именно к ОТО, а не к другим теориям. (А может быть, удастся построить еще лучшую теорию?!) Хочется сравнить теорию гравитационного поля с классической электродинамикой, увидеть в подробностях, куда и почему «исчезает» глобальное плоское пространство-время в последовательно развиваемой теории релятивистского гравитационного поля.

Есть и более конкретные мотивы для такого исследования. Упомянем два из них. Вдали от источников тяготения, там, где гравитационное поле асимптотически исчезает, пространство-время практически плоское. Величины $g_{\mu\nu}$ лишь малыми поправками $h_{\mu\nu}$ отличаются от $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Возникает желание сформулировать точную теорию тяготения именно на фоне плоского пространство-времени, желание ввести математическое соотношение, подобное соотношению (1), не как приближенное, а как точное. В масштабах, характерных для электронов, протонов, нейтронов..., пространство-время тоже с огромной точностью плоское, несмотря на то, что в значительно больших масштабах его кривизна может быть заметной. Возникает желание использовать концепцию плоского мира по аналогии с тем, как это делается в теории элементарных частиц, применить ее к гравитации.

Не будем более интриговать читателя, сразу скажем, что весь этот путь пройден. Хорошо известно, насколько естественным и красивым образом возникают уравнения Эйнштейна, почему исходное глобальное пространство-время Минковского становится вспомогательным, фиктивным, почему концепция плоского мира оказывается ненужной. Список работ [2—5], где обсуждается эта тема, скорее всего, далеко не полон.

С точки зрения «готовой» геометрической ОТО метрика фонового мира представляет собой некоторую дополнительную структуру. Введение дополнительных структур — прием не новый, он часто используется. Например, хорошо известна тетрадная формулировка ОТО (см., например, [6]). Она основана на введении четверки векторов $e^a{}_\mu$ ($a=1, 2, 3, 4$), задаваемых в каждой точке пространства-времени. Метрика $g_{\mu\nu}$ представляется в виде $g_{\mu\nu}=\eta_{ab}e^a{}_\mu e^b{}_\nu$, где $\eta_{00}=1$, $\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=-1$, остальные $\eta_{ab}$ равны нулю. Вместе с введением $e^a{}_\mu$ возникает дополнительная симметрия — возможность подвергать векторы $e^a{}_\mu$ пространственным и лоренцовым поворотам в каждой точке пространства-времени. Известна спино́рная формулировка ОТО [7], основанная на введении дополнительных структур — спиноров. Обсуждается формулировка уравнений Эйнштейна, основанная на симплектическом исчислении Редже (см., например, [8]), и т. д. В этом же ряду стоит «полевая» формулировка ОТО, использующая дополнительную структуру — фоновое пространство-время, причем не обязательно плоское [5].

Каждый из упомянутых подходов полезен для решения тех или иных конкретных задач, позволяет по своему усмотрению распорядиться дополнительными симметриями, дает возможность превратить некоторые выражения из нетензорных в тензорные, служит целям лучшего понимания теории релятивистского гравитационного поля. Конечно, введение дополнительных структур само по себе не изменяет физическое содержание ОТО. Появление этих структур в тех или иных математических соотношениях не означает a priori что речь идет о какой-то другой теории. В этом свете энергичное утверждение типа того, что в ОТО «в принципе не содержится метрический тензор $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского и поэтому говорить о нем в ОТО совершенно бессмысленно», не может звучать убедительно. Пользуясь упомянутым примером с Землей, можно сказать, что подобно тому, как геометрические свойства поверхности Земли можно изучать в проекции на плоскость, так и геометрические свойства искривленного мира можно изучать в его проекции на плоский мир (подробнее см., например, [9]).

Принципиальные основы ОТО, возможные пути обобщения этой теории, сопоставление ОТО с другими теориями гравитации (альтернативными ОТО либо по содержанию, либо лишь по форме), вопросы физических измерений и их интерпретации уже рассматривались в предыдущих статьях [10, 11]. Отмечалось, что полевая формулировка ОТО построена и используется в конкретных исследованиях.

Здесь необходимо подчеркнуть, что сама лишь концепция тензорного гравитационного поля, заданного на фоне мира Минковского, не приводит к ОТО автоматически, безотносительно к конкретной форме лагранжиана теории. Например, до 1984 г. А. А. Логуновым и его сотрудниками развивалась и предлагалась взамен ОТО теория тензорного гравитационного поля, «как классического поля типа Фарадея — Максвелла», заданного в мире Минковского. Эта теория отличается от ОТО и по формальной структуре и по физическим предсказаниям. (Основные черты этой теории резюмированы в работе, упомянутой под номером [2] в статье [12]. Эта теория — вариант ранних построений Дезера и Лорана [13].) Согласно этой теории электромагнитные волны отклоняются тяготеющим телом, а гравитационные волны — нет. Насколько можно судить по дальнейшим публикациям, эта теория оставлена даже ее авторами.

Полевая формулировка ОТО менее знакома, чем обычная, геометрическая, формулировка. В геометрической формулировке ОТО присутствуют только компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ искривленного пространства-времени. В конструкциях полевой формулировки ОТО присутствуют как компоненты метрики $\gamma_{\mu\nu}$ некоторого вспомогательного (фонового) пространства-времени, например пространства Минковского, так и компоненты тензорного гравитационного поля $h_{\mu\nu}$. Как уже отмечалось в [10, 11], полевая формулировка ОТО имеет вид точной и строгой теории поля на заданном фоне. Она обладает всеми необходимыми атрибутами такой теории — действием и уравнениями движения, тензором энергии-импульса гравитационного поля и законами сохранения, отражающими симметрию фонового пространства-времени, обладает координатной и калибровочной инвариантностью и т. д. Неизбежно возникал вопрос и о физическом смысле вспомогательного мира Минковского. Было установлено, что попытки придания метрическим соотношениям мира Минковского смысла наблюдаемых величин приводят только к противоречиям с экспериментом.

Предметом данного обсуждения является случай, когда фоновое пространство-время плоское. Излагая полевую формулировку ОТО, мы будем для определенности следовать работе [5], которая, как там отмечено, находится в русле предыдущих публикаций на эту тему других авторов. Следует подчеркнуть, что в работе [5] общая теория относительности не постулировалась, а выводилась — в том смысле, что построение начиналось с определения фоновых и динамических переменных, указания лагранжиана теории, вариационного вывода уравнений движения и тензора энергии-импульса гравитационного поля, исследования калибровочных симметрии и законов сохранения и т. д. Рассматривалась произвольная фоновая геометрия и в произвольных координатах. Отмечались требования, ведущие в конечном счете именно к ОТО, а не какой-либо другой теории. Эквивалентность построенной «полевой» теории и обычной геометрической ОТО демонстрировалась в конце вывода, путем надлежащих отождествлений.

Работа [5] была опубликована [1] до появления в 1984 г. в статьях А. А. Логунова и его сотрудников первых упоминаний о «релятивистской теории гравитации» (РТГ). Эта работа содержит все необходимое, чтобы в процессе изложения стало яснее, какое место в свете полевой формулировки ОТО занимает совокупность утверждений, объединенных названием РТГ. Ни работа [5], ни сходные предшествующие публикации других авторов не разбивались на секции: положение 1, положение 2 и т. д., как это сделано в статье [12], но для удобства читателя мы здесь также это произведем. Мы будем цитировать статью [5] в обратном русском переводе.

Итак, положение 1. Рассматриваем плоское фоновое пространство-время (пространство Минковского). Этот случай «...является привилегированным, так как при этом ОТО напоминает теории других физических полей в наибольшей степени» [5, с. 381]. Метрика Минковского в лоренцовых (прямолинейных) координатах имеет вид

$$d\sigma^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{2}$$

В произвольных криволинейных координатах, которые также можно ввести в плоском мире, вместо компонент $\eta_{\mu\nu}$ ($\eta_{00}=1$, $\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=-1$, остальные $\eta_{\mu\nu}$ равны нулю) будем иметь набор функций $\gamma_{\mu\nu}$:

$$d\sigma^2=\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{3}$$

но тензор кривизны, построенный из метрических компонент $\gamma_{\mu\nu}$, конечно, тождественно равен нулю.

«Хорошо известно, что в плоском пространстве-времени использование криволинейных координат не препятствует получению интегральных законов сохранения.... Поскольку ОТО всегда может быть сформулирована как теория на плоском фоне..., то число интегральных сохраняющихся величин (для системы с надлежащими условиями на бесконечности) равно 10 — по числу векторов Киллинга» [5, с. 392]. Десять векторов Киллинга отражают наличие 10-параметрической группы движений, действующей в фоновом мире Минковского.

Положение 2. В плоском мире Минковского задаем гравитационное поле в виде симметричного тензора второго ранга $h^{\mu\nu}$ и другие (негравитационные) поля.

Нет никакой необходимости заранее накладывать на компоненты $h^{\mu\nu}$ какие-либо связи. Однако в дальнейшем выяснится (см. ниже), что теория обладает калибровочной симметрией, т. е. возможностью изменять величины $h^{\mu\nu}$ без изменения уравнений поля и без изменения предсказаний о результатах какого-либо физического эксперимента. Эта симметрия вполне подобна градиентной инвариантности в классической электродинамике. Можно воспользоваться калибровочной свободой, чтобы подчинить компоненты $h^{\mu\nu}$ дополнительным условиям. В практических исследованиях часто используется условие

$$h^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0, \tag{4}$$

где точка с запятой обозначает ковариантную производную по фоновой метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Это условие используется, например, в теории гравитационных волн [8] и в квантовой гравитации [14]. Условие (4) не является единственно возможным или обязательным и даже не исчерпывает всю калибровочную свободу. Часто используются и другие калибровочные условия, например, $h_{\mu\nu}u^\nu=0$ (где $u^\nu$—4-вектор, который обычно выбирают в. виде $u^\nu=1, 0, 0, 0$), $h^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}$ и т. д. (О полном наборе калибровочных условий см. в [15, 16].)

По своему происхождению обсуждаемая калибровочная свобода — та же, что и свобода отображать земную поверхность на произвольную плоскость и рисовать на этой плоскости прямые или кривые координатные линии. Ясно, что при этом внутренние свойства земной поверхности не меняются и ни к каким новым физическим эффектам это не приводит.

Поскольку в произвольных криволинейных координатах метрика плоского фонового мира определяется равенством (3), то подробную запись условия (4) можно представить в эквивалентном виде:

$$(-\gamma)^{-1/2}\frac{\partial(-\gamma)^{1/2}h^\nu_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}=0, \tag{5}$$

где $\gamma$ — определитель матрицы $\gamma_{\mu\nu}$. Если же координаты выбираются лоренцевыми, т. е. $\gamma_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ (см. (2)), то условие (4) приводится к совсем простому виду:

$$h^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{6}$$

где запятая обозначает обычную производную.

Аналогичным образом записывается калибровочное условие Лоренца в классической электродинамике:

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu}=0. \tag{7}$$

Это же условие можно записать и в ковариантном (пригодном в произвольной системе координат) виде:

$$A^\nu{}_{;\nu}=0. \tag{7'}$$

Разумеется, уравнения Максвелла и теория электромагнитного поля не перестают быть таковыми, если они снабжаются допустимым калибровочным условием (7) или (7').

В уравнении (5) фигурируют символы $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\gamma$. Глядя на это уравнение, можно было бы подумать, что оно «вводит в теорию метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского» и что само уравнение (4) имеет какое-то фундаментальное значение, и в том числе «приводит к ряду кардинально отличных от следующих из ОТО выводов» [17]. Однако на самом деле это уравнение лишь одно из множества допустимых калибровочных условий, фиксирующих (неполностью) калибровочную свободу, а стоящие в нем символы $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\gamma$ отражают и вовсе несущественный факт,— как нарисованы координатные линии, т. е. мыслятся ли буквы $x^\nu$ как криволинейные или прямолинейные координаты в фоновом плоском мире.

Положение 3. Конкретная теория свободного гравитационного поля $h^{\mu\nu}$ определяется лагранжианом этого поля $L_g$. Если наряду с полем $h^{\mu\nu}$ рассматриваются другие поля $\phi_A$ (их называют полями материи), то нужно указать лагранжиан этих полей $L_m$ и в том числе конкретный вид взаимодействия нолей $h^{\mu\nu}$ и $\phi_A$. Обсудим вопрос о взаимодействии.

Построения (в работе [5] начинались с предположения, что «...лагранжева плотность $L^m$ полей материи, включающая их взаимодействие с гравитацией, имеет общий вид...», зависящий от $\gamma^{\mu\nu}$, $h^{\mu\nu}$, $\phi_A$ и их производных. А далее специально доказывалось, что вид взаимодействия не может быть произвольным, если ставится естественное условие, чтобы источником для линейной части гравитационного поля служил полный тензор энергии-импульса, включающий тензор энергии-импульса самого гравитационного поля. Было показано, что $\gamma^{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ должны входить в $L^m$ в виде суммы. Было подчеркнуто, что «это условие символизирует собой универсальную связь (coupling) гравитационного поля с остальными физическими полями». Другими словами, это условие выражает собой эйнштейновский принцип эквивалентности и имеет решающее значение на пути получения именно ОТО, а не какой-либо другой теории. «Желание иметь полный тензор энергии-импульса в качестве источника для линейной части гравитационного поля ведет к универсальной связи гравитационного поля с другими полями (а также к самодействию) и в конечном счете к эйнштейновской теории» [5, с. 379].

Сумма $\gamma^{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ в работе [5] использовалась в конкретном виде:

$$(-g)^{1/2}\, g^{\mu\nu} = (-\gamma)^{1/2}\, (\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}). \tag{8}$$

Преимущества именно такого представления по сравнению, скажем, с $g^{\mu\nu}=\gamma^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}$ или $g_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$, особенно четко продемонстрированы в знаменитой статье Дезера [2]. Соотношение (8) встречалось и в более ранних работах. В статье [2] разъяснен и физический смысл этой связи (см. также [18]). (Модификации в форме записи теории, связанные с переходом от представления (8) к другим возможным представлениям, проанализированы в [19].)

Таким образом, само соотношение (8), его происхождение и его физический смысл были известны до того, как соотношение (8) появилось в работах по РТГ под названием «принцип геометризации».

Положение 4. Для завершения построения теории необходимо указать лагранжиан свободного гравитационного поля $L_g$ и действие $S=-(1/2c\varkappa)\int d^4x L_g$. В работе (5) для этого использовался скаляр кривизны, составленный из величин $g_{\mu\nu}$ с учетом соотношения (8). Мотивы этого выбора хорошо известны: это — простейший скаляр, приводящий к уравнениям поля с производными второго порядка. Варьирование $L_g$ по полевым переменным $h^{\mu\nu}$ дает уравнения гравитационного поля, а варьирование по фоновой метрике $\gamma_{\mu\nu}$ определяет тензор энергии-импульса гравитационного поля $t_{\mu\nu}$:

$$\varkappa t_{\mu\nu} \equiv -(-\gamma)^{-1/2} \frac{\delta L^g}{\delta \gamma^{\mu\nu}} .$$

Уравнения свободного гравитационного поля, приведенные в [5], имеют вид

$$h_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{;\alpha} + \gamma_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{;\alpha;\beta} - h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{;\mu;\alpha} - h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu;\alpha} = \frac{16\pi G}{c^4} t_{\mu\nu}. \tag{9}$$

Указан и эквивалентный вид этих уравнений:

$$(h_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu} - h_{\mu}{}^{\beta}\delta_{\nu}{}^{\alpha} - h_{\nu}{}^{\beta}\delta_{\mu}{}^{\alpha})_{;\alpha;\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} t_{\mu\nu}.$$

При наличии материальных полей величина $t_{\mu\nu}$ в этих уравнениях заменяется на полный тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}{}^{\text{tot}}$. Очевидным следствием уравнений поля являются дифференциальные законы сохранения

$$t^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

или

$$T^{\mu\nu}{}_{\text{tot};\nu} = 0$$

с вытекающими отсюда интегральными законами сохранения, отражающими тот факт, что плоский мир допускает 10-параметрическую группу движений (группу Пуанкаре).

Фактически мы построили полевую формулировку ОТО (именно общей теории относительности) хотя эквивалентность данной теории и геометрической формулировки ОТО, основанной на метрическом тензоре $g_{\mu\nu}$, быть может еще не очевидна. Решающими моментами в построении теории были: выбор $L_g$ и выбор типа взаимодействия гравитации с другими полями (эйнштейновский принцип эквивалентности). Продолжим изучение теории.

В работе [5] введены и исследованы калибровочные преобразования теории, указано их происхождение. Ясно, что единственной симметрией теории является группа диффеоморфизмов, т. е. возможность отображать пространство-время само на себя произвольным образом, а еще проще — возможность покрывать пространство-время произвольными координатными сетками. Этой симметрии можно придать вид калибровочных преобразований, когда система координат считается фиксированной, а преобразованиям подвергаются тензорные и другие поля, заданные в пространстве-времени. В работе [5] введены два типа калибровочных преобразований: «обычные», при которых преобразуются как фоновые, так и динамические переменные, и «истинные» (внутренние), при которых преобразуются только динамические переменные. В [5] приводится явный вид этих преобразований, причем не только бесконечно малых, но и конечных. Приведем бесконечно-малое истинное калибровочное преобразование для величин $\tilde{h}^{\mu\nu}$:

$$\tilde{h}^{\mu\nu} \to \tilde{h}^{\mu\nu\prime} = \tilde{h}^{\mu\nu} + [\xi^{\alpha}(\tilde{h}^{\mu\nu} + \tilde{\gamma}^{\mu\nu})]_{,\alpha} - \\ - \xi^{\mu}{}_{,\alpha}(\tilde{h}^{\alpha\nu} + \tilde{\gamma}^{\nu\alpha}) - \xi^{\nu}{}_{,\alpha}(\tilde{h}^{\alpha\mu} + \tilde{\gamma}^{\alpha\mu}), \tag{10}$$

где $\tilde{h}^{\mu\nu} \equiv (-\gamma)^{1/2} h^{\mu\nu}$, $\tilde{\gamma}^{\mu\nu} \equiv (-\gamma)^{1/2}\gamma^{\mu\nu}$, а $\xi^{\alpha}$ — произвольный вектор. Подобным же образом преобразуются и динамические поля материи.

Замечательное свойство калибровочной инвариантности теории состоит в том, что подстановка (10) не изменяет уравнений поля (9), т. е., если $h^{\mu\nu}$ служит решением этих уравнений, то и $h^{\mu\nu\prime}$ также решение. Лагранжиан $L_g$ Изменяется на дивергенцию (полную производную) и член, содержащий фоновые уравнения движения (в данном случае — фоновый тензор Риччи).

Используя произвольный вектор $\xi^\alpha$, можно добиться выполнения калибровочных условий. Как отмечалось выше, удобный (но не обязательный) выбор калибровочных условий есть равенство (4). С учетом условий (4) уравнения (9) упрощаются:

$$h_{\mu\nu;\alpha}^{;\alpha}=\frac{16\pi G}{c^4}t_{\mu\nu}. \qquad (11)$$

Указание калибровочных преобразований и их смысла завершает построение теории. Как мы видим, эта теория обладает всеми необходимыми атрибутами полевой теории (см. начало статьи).

Следует еще сказать, что тензор $t_{\mu\nu}$ представляет собой общековариантное обобщение (за счет введения дополнительной структуры — тензора $\gamma_{\mu\nu}$) псевдотензора энергии-импульса, который используется в геометрической формулировке ОТО. Тензор $t_{\mu\nu}$ не сводится к выражению, зависящему только от $g_{\mu\nu}$ и производных от $g_{\mu\nu}$. Сам тензор $t_{\mu\nu}$ калибровочно-неинвариантен, но ровно в той же мере, в которой калибровочно-неинвариантна левая часть уравнений (9).

Эквивалентность построенной полевой теории и геометрической формулировки ОТО устанавливается путем отождествления величин $g^{\mu\nu}$ из соотношения (8) с компонентами метрического тензора искривленного (физического) пространства-времени. Подстановка соотношений (8) в уравнения (9) приводит их к уравнениям Эйнштейна для свободного поля:

$$R_{\mu\nu}=0.$$

При наличии материальных полей тем же способом получаются уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \qquad (12)$$

Лагранжиан $L_g$ превращается в лагранжиан Гильберта. Лагранжиан материальных полей $L^m$ содержит $h^{\mu\nu}$ и $\gamma^{\mu\nu}$ только в виде суммы (8), варьирование $L^m$ по $g^{\mu\nu}$ определяет тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$.

Калибровочная симметрия полевой формулировки теории превращается в координатную симметрию геометрической формулировки. Действительно, объединяя $\gamma^{\mu\nu}$ с $h^{\mu\nu}$ по правилу (8), получим $g^{\mu\nu}$, а объединяя то же самое $\gamma^{\mu\nu}$ с калибровочно-преобразованным $h^{\mu\nu\prime}$, получим $g^{\mu\nu\prime}$, где

$$g^{\mu\nu\prime}=g^{\mu\nu}+\xi^\alpha g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}-\xi^\mu{}_{,\alpha}g^{\alpha\nu}-\xi^\nu{}_{,\alpha}g^{\mu\alpha}. \qquad (13)$$

Но полученные таким путем $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu\prime}$ связаны обычным тензорным законом:

$$g^{\mu\nu\prime}(x^{\alpha\prime})=\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\nu\prime}}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}(x^\alpha) \qquad (14)$$

при преобразованиях координат $x^{\alpha\prime}=x^\alpha-\xi^\alpha$ с тем же самым вектором $\xi^\alpha$. Аргументы у функций $g^{\alpha\beta}$ и $g^{\mu\nu\prime}$ обозначают точки, в которых они берутся. Учитывая это, от формулы (14) возвращаемся к формуле (13).

Как мы многократно подчеркивали, калибровочная свобода и возможность выбора того или иного калибровочного условия предусмотрены в полевой формулировке ОТО. Вместе с калибровочными условиями или без них, теория продолжает оставаться ОТО. Но будем считать, что почему-либо выбрано именно условие (4). Подставляя в него связь (8). можно получить соотношение

$$[(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}]_{;\nu}=0. \tag{15}$$

А если, кроме того, требовать $\gamma_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, то это соотношение записывается в виде

$$\frac{\partial(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0. \tag{16}$$

В терминах компонент метрики $g^{\mu\nu}$ соотношение (15) (или (16)) выглядит как некоторое добавочное условие на величины $g^{\mu\nu}$, определяемые из уравнений Эйнштейна (12). Мы обсудим этот вопрос ниже, а пока подведем некоторые итоги.

Довольно утомительное переписывание формул и определений из работы [5] в данную статью потребовалось для того, чтобы наглядно сравнить теорию, которую автор статьи [12] называет РТГ, с полевой формулировкой ОТО.

Введем новые обозначения: $\Phi^{\mu\nu}$ вместо $h^{\mu\nu}$ и символ ковариантного дифференцирования $D_\mu$ вместо точки с запятой.

Построение полевой формулировки ОТО начиналось с понятия тензорного гравитационного поля $h^{\mu\nu}$, заданного в пространстве Минковского с метрикой $\gamma^{\mu\nu}$. Авторы РТГ исходят из тех же концепций. В работе [5] доказывается, что при определенных естественных требованиях лагранжиан $L^m$ должен содержать $\gamma^{\mu\nu}$ и $h^{\mu\nu}$ в виде суммы и, следуя предшествующим работам, используется конкретное соотношение (8). В работах по РТГ это же соотношение вводится под названием «принцип геометризации» (формула (2) статьи [12]). На пути к полевой формулировке ОТО в работе [5] используется конкретный лагранжиан $L_g$. В точности этот же лагранжиан приводится в работе [12], формула (20) [(2)]. После отбрасывания полной (производной этот лагранжиан (формула (22), [12]) в точности совпадает с хорошо известным лагранжианом Розена [20]. В работе [5], по аналогии с предшествующими работами, вводится тензор энергии-импульса гравитационного поля $t_{\mu\nu}$ и демонстрируется наличие законов сохранения. Точно такой же $t_{\mu\nu}$ фигурирует в статье [12] [(3)]. В работе [5] вводятся калибровочные преобразования теории, доказывается ее калибровочная инвариантность и возможность наложения калибровочных условий [(4)]. Наконец, в работе [5] выводятся уравнения поля, которые в конкретной записи (с учетом калибровочного условия) могут быть представлены в виде (11), (4). В точности эти же уравнения фигурируют в статье [12] (формулы (41), (42)), где они названы уравнениями РТГ.

После проведенного сравнения видно, что, отталкиваясь от положений 1—4, автор статьи [12], вслед за другими авторами, прошел путь, приводящий к гравитационной теории, известной под названием общей теории относительности А. Эйнштейна (в полевой формулировке). Нет никаких оснований изменять авторство общей теории относительности или давать ей другое название.

Статья [12] начинается с сильного утверждения о том, что ОТО ведет «к отказу от законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения вещества и гравитационного поля, вместе взятых». Эта претензия не высказывается в адрес теории, сводящейся к уравнениям (41), (42) статьи [12] (уравнения (11), (4) в данной статье). Не поднимается и вопрос о «зависимости инертной массы от способа арифметизации трехмерного пространства» (см. [17]). Более того, говорится [17], что эта теория «полностью согласуется с фундаментальными физическими принципами».

Такое положение дел можно только приветствовать. Поскольку уравнения (41), (42) статьи [12] и есть конкретная запись уравнений ОТО (в полевой формулировке), то утверждение о том, что «ОТО оказывается лишенной... законов сохранения» [17], автоматически снимается самим автором статьи [12]. С точки зрения полевой формулировки ОТО (как, впрочем, и геометрической), указанные претензии отвергаются и без обязательного выбора калибровочного условия (4) (см. [5]), но нет запрета и на его использование.

Читатель, возможно, устал от многократного обращения к несколько непривычной полевой формулировке ОТО. Он вправе спросить, что все это значит в терминах обычной геометрической ОТО, в терминах (физической) метрики $g^{\mu\nu}$. Обратимся к уравнениям. С уравнениями (12) (уравнения (39) в работе [12]) все ясно: это-уравнения Эйнштейна. Но допустим, что почему-либо выбраны калибровочные условия (4). В терминах $g^{\mu\nu}$ они приобретут вид (15). Авторы РТГ называют эти условия, наряду с уравнениями Эйнштейна, еще четырьмя уравнениями из «полной системы уравнений» РТГ, формула (40) в работе [12]. Именно эти уравнения, по мысли авторов РТГ [17], «делают метрику $\gamma^{\mu\nu}$ пространства Минковского неустранимой из теории». Именно в связи с этими уравнениями говорится [17], что «метрика пространства Минковского... органически входит в теорию. В этом состоит принципиальная разница РТГ и ОТО». Именно из-за этих уравнений РТГ «приводит к качественно отличным от ОТО физическим следствиям» [17].

К какому же потрясению основ ОТО приводят уравнения (40) из работы [12]? Хочется успокоить читателя: ни к какому.

Возьмите произвольное решение уравнений Эйнштейна $g^{\mu\nu}(x)$. Подставьте его в уравнения (15). Найдите из этого уравнения величины $\gamma_{\mu\nu}$. Убедитесь в том, что годятся функции

$$\gamma_{\mu\nu}(x)=\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial x^{\nu}}, \tag{17}$$

где четыре функции $f^{\alpha}(x)$ являются решениями четырех уравнений

$$\frac{\partial(-g)^{1/2}g^{\mu\nu}\partial f^{\alpha}/\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}=0. \tag{18}$$

Ваше решение $g^{\mu\nu}(x)$ автоматически удовлетворяет уравнениям (15) при $\gamma_{\mu\nu}$, выбранных в виде (17), (18). Формула (17) указывает, как именно нарисованы координатные линии в «пристроенном» плоском мире. Для внутренних свойств пространства-времени с физической метрикой $g^{\mu\nu}(x)$ это не имеет никакого значения.

Если же читателю стало почему-либо не безразлично, как нарисованы координатные линии в «пристроенном» плоском мире и он согласился с дополнительным требованием $\gamma_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, т. е. с уравнением (16), то надо действовать следующим образом. Возьмите свое решение $g^{\mu\nu}(x^{\alpha})$. Вначале преобразуйте его по тензорному закону к координатам $x^{\alpha'}=f^{\alpha}(x^{\beta})$, где $f^{\alpha}$ найдены из уравнений (18). В полученной записи своего решения $g^{\mu\nu\prime}(x^{\alpha\prime})$ сотрите штрихи и подставьте в уравнения (16). Они окажутся выполненными. Вернитесь к работе над своим решением.

В уравнениях (16) легко узнать так называемые гармонические координатные условия на функции $g^{\mu\nu}$. Гармонические координаты очень любил В. А. Фок. Подчеркивая их преимущества при решении конкретных задач, но не утверждая, что вместе с их выбором опровергается ОТО, В. А. Фок получил с их помощью важные конкретные результаты [5].

Работая с уравнениями, полностью эквивалентными уравнениям ОТО, авторы РТГ приходят, тем не менее, к ряду нестандартных выводов. В работах автора статьи [12] говорится, что РТГ приводит к предсказанию «исключительной силы» (термин взят из аннотации статьи [21]) и «наносит удар по догматизму и начетничеству, так широко внедрившимся в ОТО» (из аннотации статьи [22]).

Перечислим несколько очень сильных утверждений авторов РТГ.

1. Утверждается [17], что в рассуждения Эйнштейна, а также математика Клейна «вкралась простая, но принципиальная ошибка», из-за чего величина, которой Эйнштейн придавал смысл энергии и импульса изолированной системы, «оказывается при более внимательном рассмотрении величиной, тождественно равной нулю».

В статье [11] показано, что данное утверждение может быть объяснено только математическим недоразумением со стороны его авторов. В статье [12] это утверждение не возобновляется.

2. Утверждается, что «неоднозначность предсказаний для гравитационных эффектов является органической чертой ОТО» [17] и что «ее неспособность давать однозначно определенные предсказания о гравитационных явлениях с необходимостью» ведет «к отказу от ОТО как физической теории» (из аннотации статьи [23]).

В статье [11] показано, что утверждение о «неоднозначности предсказаний ОТО» основано на недоразумении со стороны авторов утверждения. Разъяснено, в чем именно оно состоит. Никаких неоднозначностей в наблюдательных предсказаниях ОТО нет.

В статье [12], в сочетании с характерным упреком «авторы статьи... не поняли, о чем идет речь», утверждение о «неоднозначности предсказаний ОТО» (т. е. слишком много ответов) заменяется на утверждение о «невозможности ОТО ответить на вопрос» (т. е. ни одного ответа). Как видно из текста статьи [12], сам автор сомневается в значимости поставленного им вопроса и в возможности проверки ответа,— ведь для этого надо «включать» и «выключать» гравитационное поле Солнца. Но если говорить о предложенном вычислении самом по себе, которое по мысли автора статьи [12] «дает вполне определенный ответ, поскольку метрический тензор пространства Минковского входит в систему уравнений (39) и (40)», то, разумеется, такое же вычисление можно сделать и в ОТО (см. уравнения (12), (15) данной статьи). Нет вообще никакого вычисления, которое было бы возможно провести в РТГ и невозможно— в ОТО, поскольку уравнения РТГ и есть частная форма записи уравнений ОТО (в полевой формулировке). Таким образом, как видно из [12], тезис «о неоднозначности предсказаний ОТО» снимается самим автором статьи [12], а следовательно, отпадает и тезис о «необходимости отказа от ОТО как физической теории».

3. Утверждается [17], что в силу уравнений РТГ «фридмановская однородная и изотропная Вселенная может быть только... «плоской». Именно это утверждение характеризуется как «предсказание исключительной силы» [21].

Как мы видели выше, весь набор уравнений РТГ в терминах метрики $g^{\mu\nu}$ состоит из уравнений Эйнштейна плюс условие (15), которое вообще не ограничивает $g^{\mu\nu}$. В самом обременительном случае весь набор уравнений РТГ в терминах метрики $g^{\mu\nu}$ сводится к уравнениям Эйнштейна плюс гармоническое координатное условие (16). Поэтому для опровержения тезиса о «плоской Вселенной» достаточно указать метрику пространственно-открытой (а не пространственно-плоской) однородной и изотропной фридмановской Вселенной в гармонических координатах. Такая метрика удовлетворяет всему набору уравнений РТГ. Она в явном виде обсуждается в § 94 книги Фока [24] и была указана в статье [11].

В статье [12] сказано, что «это утверждение неправильно, поскольку легко убедиться, что решение Фока, в частности, не удовлетворяет принципу причинности...». Из этого замечания видно, что попытка спасти третье сильное утверждение авторов РТГ связывается с неким новым принципом причинности, который там же, в работе [12], и формулируется.

К обсуждению этого принципа причинности мы и перейдем.

Напомним, что в статье [11] разъяснялся искусственный, формальный характер метрики Минковского. Подчеркивалось, что конус причинности определяется метрикой искривленного мира, а не плоского. Говорилось о том, что конус причинности и мировые линии реальных тел могут располагаться как внутри, так и вне светового конуса, формально определяемого метрикой Минковского.

В статье [12], после ритуального «это утверждение авторов свидетельствует о том, что они не поняли сути РТГ», говорится, что «такой ситуации... в РТГ не может быть, поскольку любое физическое поле (в том числе гравитационное) ...никогда не должно выводить мировые линии пробных тел за пределы конуса причинности пространства Минковского». А через страницу это формулируется как «принцип причинности, позволяющий отбирать решения системы уравнений (39) и (40), которые имеют физический смысл», и признается, что «принцип причинности не выполняется автоматически».

Следовательно, хотя до сих пор утверждалось, что уравнения (39), (40) есть «полная система уравнений» РТГ и, скажем, в предыдущей статье [17] принцип причинности даже не упоминался, теперь выясняется, что решения РТГ надо еще отбирать по дополнительному признаку, проверять, так сказать, на физический смысл — как он понимается в РТГ. Здесь следует отметить, что взаимное расположение световых конусов $g_{\mu\nu}$-метрики и $\eta_{\mu\nu}$-метрики может быть интересным только в том случае, если делается попытка истолкования метрических соотношений плоского мира как наблюдаемых. Все равно такая попытка обречена на неудачу. Кроме того, взаимное расположение световых конусов калибровочно-неинвариантно: его можно изменить, ничего не меняя в физических свойствах решения. И более того, оно может быть изменено, даже если строго следить за выполнимостью уравнений (15), т. е. в одной и той же калибровке (4), за счет оставшейся калибровочной свободы.

Тем не менее в работе [12] твердо сказано, что «только такие решения уравнений (39) и (40) имеют физический смысл, которые удовлетворяют условию причинности (48) и (49)». Само условие сформулировано так: «...Для любого изотропного в пространстве Мидковского четырехвектора $u^\mu$

$$\gamma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=0 \tag{48}$$

должно выполняться условие причинности

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\leqslant 0. \tag{49}$$

(Так как в остальном тексте статьи [12] именно греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, мы произвели надлежащую замену индексов и здесь.) Немедленно проверим единственное оставшееся (по утверждениям РТГ) фридмановское решение — плоское. Выражение для интервала плоского решения, которое выведено из требований РТГ, приводится, например, в книге [25] (см. также [17]):

$$ds^2=c^2v^3(t)\,dt^2-v(t)\,(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{19}$$

Там же говорится, что $ct$, $x$, $y$, $z$ «являются координатами псевдоевклидова пространства и выбраны согласно значениям (1, —1, —1, —1) метрики Минковского» [6]. Другими словами, подразумевается, что решение (19) рассматривается на фоне мира Минковского с метрикой (2). В книге [25] подчеркивается, что РТГ, в силу уравнений (15), «однозначно приводит к предсказанию — Вселенная... является плоской. Поскольку данное заключение является следствием только уравнений» (15), «этот общий вывод не зависит от значения массы покоя гравитона».

Для проверки условий (48), (49) возьмем вектор с компонентами: $u^0=1$, $u^1=1$, $u^2=0$, $u^3=0$. Этот вектор удовлетворяет равенству (48). Теперь подставим этот вектор в (49). Получим

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=v(v^2-1). \tag{20}$$

Напомним, что функция $v$ должна быть строго положительной и для плоских фридмановских решений монотонно меняется в пределах от 0 до $\infty$. В современную эпоху $v\gg1$, о чем в [25] написано так: «...Естественно положить, что при $\tau=\tau_0$, $R(\tau_0)\gg1$», где $\tau_0$ обозначает настоящий момент времени, а $R^2(\tau)\equiv v(\tau)$. Из соотношения (20) видно, что «условие причинности (49)» для плоской Вселенной (19) не выполняется, причем, как следует из [25], мы вероятно живем в эпоху его особенно сильного нарушения. Таким образам, утверждение РТГ, которое там характеризуется как «предсказание исключительной силы», не выдерживает проверку на «физический смысл», как он определен в той же РТГ.

Есть еще одно замечание в статье [12], мимо которого нельзя пройти. А. А. Логунов считает возможным упрекнуть Я. Б. Зельдовича следующим образом: «Академик Я. Б. Зельдович не критически отнесся к работе своего соавтора, в противном случае он мог бы легко увидеть, что метрика пространства Минковского в уравнениях движения гравитационного поля... просто сокращается». Со своей стороны я только замечу, что этот вопрос специально обсужден в нашей первой же совместной работе на эту тему [10]. Разумеется, метрика Минковского «сокращается» в уравнениях движения гравитационного поля и они сводятся к уравнениям Эйнштейна. Точно в том же смысле она «сокращается» и в РТГ, вне зависимости от того, узнали ли авторы РТГ в своих уравнениях уравнения общей теории относительности или нет.

Подводя итог, следует сказать, что многократно повторявшиеся автором статьи [12] надуманные обвинения ОТО в «отсутствии законов сохранения», в «неоднозначности предсказаний», в «невозможности описать в духе полей Фарадея — Максвелла» и т. п. опровергаются, в конечном счете, им самим.

Мне хочется закончить эту статью словами признательности и уважения к Я. Б. Зельдовичу.

## ПРИМЕЧАНИЯ К ТЕКСТУ

[1] Любопытна история публикации статьи [5]. В письме редакции ЖЭТФ от 16 августа 1983 г. сказано, что бюро редколлегии «ЖЭТФ» рассмотрело статью и признало, что «...по характеру своего содержания эта статья не соответствует установившемуся к настоящему времени профилю «ЖЭТФ»; мы стремимся публиковать статьи ...менее формального характера. Между тем испытываемая нами в настоящее время чрезвычайная перегрузка портфеля... заставляет нас в особенности строго подходить к отбору принимаемых к публикации работ, в том числе по их тематике. В этах условиях мы... вынуждены были признать ее публикацию в ЖЭТФ нецелесообразной. Статью следует, вероятно, направить в какой-либо журнал более математического направления, например «ТМФ»...». В письме редколлегии журнала ТМФ от 10 ноября 1983 г. сказано, что она отклонила статью «на основании отзыва рецензента». В самом отзыве говорится: «Данная статья по своему профилю не подходит к утвердившейся тематике журнала «ТМФ», и ее следовало бы направить в «ЖЭТФ». По существу же содержания следует отметить, что в работе изложена хорошо известная... двуметрическая формулировка теории Эйнштейна, когда фоном для гравитационного взаимодействия берется метрика $\gamma_{ik}$ и уравнения Гильберта — Эйнштейна записываются в виде... [;] известно, что такой подход не способен решить проблему энергии-импульса в теории Эйнштейна... [;] в зависимости от способа арифметизации трехмерного пространства в данной формулировке теории для инертной массы, например, можно получить любое значение. Поэтому рассуждения авторов являются ошибочными...». Пользуясь случаем, хочу поблагодарить С. П. Новикова и Я. Г. Синая, поддержавших публикацию этой статьи в журнале «Commun Math. Phys.»

[2] Здесь и ниже полагаем параметр $m^2=0$. Хорошо известно, что попытка введения массы гравитона сталкивается с серьезными трудностями. Но мы намеренно оставляем этот вопрос совершенно в стороне, чтобы обсуждение РТГ не превратилось в непрерывный переход от одной модификации к другой.

[3] Автор статьи [12] называет величину, определяемую формулой (26) его статьи, тензором энергии-импульса. Тогда основное уравнение (41) статьи [12] является математически противоречивым: справа стоит тензор, а слева — плотность тензора. В действительности формула (26) [12] определяет не тензор, а плотность тензора, т. е. величину, отличающуюся множителем $(-\gamma)^{1/2}$. После исправления этой неточности достигается полное совпадение с формулами работы [5].

[4] *Не делая* различий между «обычными» и «истинными» калибровочными преобразованиями, введенными в [5], автор статьи [12] обсуждает «калибровочный принцип» на основе соотношения (9) работы [12], которое математически противоречиво: оба равенства в (9) не выполняются одновременно.

[5] Как всегда, теоремы о выборе координатных или калибровочных условий непосредственно справедливы в «малом», их применимость «в целом» требует отдельного рассмотрения. Этот вопрос освещен в литературе, но мы на нем не будем останавливаться.

[6] Мы сохраняем здесь обозначения и стиль работ авторов РТГ. Функция $v(t)$ в (19) связана простым преобразованием с космологическим масштабным фактором $a(t)$, фигурирующим в более употребительных записях метрики плоской фридмановской Вселенной (в негармонических координатах): $ds^2=c^2dt^2-a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2)$ или $ds^2=a^2(\eta)(d\eta^2-dx^2-dy^2-dz^2)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] А. Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей.— М.: Мир, 1979.
2. *Deser S.*//*Gen.* Relat. and Gravit. 1970. V. 1. P. 9.
3. *Rosen N.*/Phys. Rev. 1940. V. 57. P. 147; Ann. of Phys. 1963. V. 22. P. 1.
*Papapetrou A.*//Proc. Roy. Irish Acad. Ser. A. 1948. V. 52. P. 11.
*Kraichnan R. H.*//Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 1118.
*Gupta S. N.*//Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 334.
*Thirring W.*// *Ann.* of Phys. 1961. V. 16. P. 96.
*Feynman R. P.*//Acta Phys. Polon. 1963. V. 24. P. 697.
*Halpern L.*//Bull Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. 1963. V. 49. P. 226.
*Бурланков Д. Е.*//ЖЭТФ. 1963. Т. 44, с. 1941.
*Ogievetsky V. I., Polubarinov I. V.*//Ann. of Phys. 1965. V. 35. P. 167.
*Weinberg S.*//Phys. Rev. Ser. B. 1965. V. 138. P. 988.
4. *Вейнберг С.* Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.
*Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд.— М.: Наука,. 1971.—С. 87.
5. *Grishchuh L. P., et al.*//Commun. Math. Phys. 1984. V. 94. P. 379.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1973.
7. *Пенроуз Р.* Структура пространства — времени.— М.: Мир, 1972.
8. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д.* Гравитация.— М.: Мир, 1976.
9. *Бурланков Д. Е.*//ЯФ. 1989. Т. 50. С. 278.
10. *Зельдович Я. Б., Грищук Л. П.*//УФН. 1986. Т. 139. С. 695.
[11] *Зельдович Я. Б., Грищук Л. П.*//УФН. 1988. Т. 155. С. 517.
12 *Логунов А. А.*//УФК 1990. Т. 160, вып. 8. С. 135 (в этом номере).
13. *Desep S., Laurent B. Б.*//Ann. of Phys. 1968. V. 50. P. 76,.
14 *Коноплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля.— М.: Атомиздат, 1980.
15. *Грищук Л. П., Попова А. Д.*//ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 3; J. Phys. Ser. A. 1982. V. 15. P. 3525.
16. *Грищук Л. П.*//УФН. 1977. Т. 121. С. 629.
17 *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Местверишвили М. А.*//УФН. 1988. Т. 155. С. 369.
18. *Thorne K. S., Lee D. L., Lightman A. P.*//Phys. Rev. Ser. D. 1973. V. 7. P. 3563.
19. *Петров А. Н., Попова А. Д.*//Вестн. МГУ. Сер. 3 «Физика, астрономия». 1987. Т. 28. Вып. 6. С. 13; Intern. J. Mod. Phys. Ser. A. 1988. V. 3. P. 2651.
20. *Rosen N.*//Cosmology and Gravitation/Eds. P. Bergman, V. DeSabbata.— New York; London, Plenum Press, 1980.— P. 383.— (NATO Ser. B. V. 58).
[21] *Логунов А. А., Местверишвили М. А.* Релятивистская теория гравитации.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
22. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации и новые представления о пространстве-времени.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
23. *Логунов А. А., Лоскутов Ю. М.* Неоднозначность предсказаний общей теории относительности и релятивистская теория гравитации.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
24. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения.— М.: Гостехиздат, 1955.
25. *Логунов А. А., Местверишвили М. А.* Основы релятивистской теории гравитации, М.: Изд-во Моск. ун-та, 3985.