

Январь 1989 г.

Том 157, вып. 1

УСПЕХИ И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

ОТ РЕДАКЦИИ

Отдавая дань памяти Р. Ф. Фейнмана (11.05.1918—15.02.1988), одного из замечательных физиков нашего столетия, мы печатаем перевод последней, опубликованной при его жизни лекции. Р. Фейнман прочел ее в 1986 г. в Кембриджском университете в качестве первой ежегодной мемориальной Дираковской лекции.

539.12.01

ПОЧЕМУ СУЩЕСТВУЮТ АНТИЧАСТИЦЫ*)

Р. Ф. Фейнман

Название этой лекции не совсем точно. На самом деле я хочу рассказать о двух вещах: во-первых, почему существуют античастицы, и, во-вторых, о связи спина со статистикой. Дирак был героем моей молодости. Он произвел переворот, показал новый метод получать физические результаты. Дирак рискнул — он просто угадал, как выглядит то уравнение, которое мы теперь называем уравнением Дирака, а потом уж попытался его проинтерпретировать. Максвелл в свое время вывел свои уравнения, но он использовал при этом огромное число «шестеренок» и т. п.

Быть здесь для меня большая честь. Я не мог не принять приглашения — ведь Дирак был моим героем всегда, и есть что-то замечательное в том, чтобы читать лекцию в его честь.

Дирак своим релятивистским уравнением электрона первым, как он выражался, поженил квантовую механику с релятивизмом. Сначала он думал, что ключевую роль играет требуемый уравнением спин (или внутренний угловой момент) и что спин является фундаментальным следствием релятивистской квантовой механики. Однако впоследствии, когда была решена преподнесенная уравнением загадка отрицательных энергий, самым главным для объединения квантовой механики с относительностью оказалось существование античастиц. Исходя из этой идеи, вы можете обобщить теорию на любой спин, как показали Паули и Вайскопф. Поэтому я хочу начать по-другому и попытаюсь объяснить, почему при попытке объединить относительность с квантовой механикой обязательно возникают античастицы.

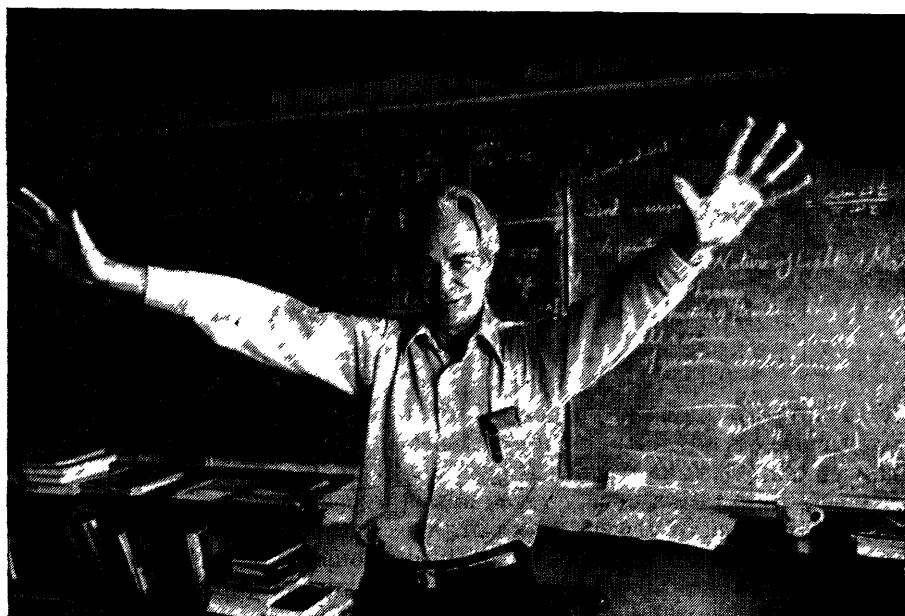
*) Feynman R. P. The Reason for Antiparticles//Elementary Particles and the Laws of Physics: the 1986 Dirac Memorial Lectures/With Foreword by J. C. Taylor. — Cambridge; New York; New Rochelle; Melbourne; Sydney: Cambridge University Press, 1987. — Pp. 1—59. — Перевод С. Г. Тиходеева.

Редакция журнала «УФН» благодарна проф. В. Телегди и секретарю Р. Фейнмана миссис Элен Так, любезно предоставившим оригиналы фотографий.

© Cambridge University Press 1987

© Перевод на русский язык,
издательство «Наука». Главная редакция
физико-математической литературы,
«Успехи физических наук», 1989

Двигаясь по этому пути, мы сможем объяснить еще одну великую тайну мира, а именно, принцип запрета Паули. Принцип запрета Паули гласит, что если вы берете волновую функцию пары частиц со спином $1/2$ и меняете местами частицы, то, чтобы получить новую волновую функцию из старой, вы должны поставить знак минус. Легко доказать, что в нерелятивистской квантовой механике это свойство сохраняется во времени. Поэтому, если оно имелось с самого начала, то имеется и всегда. Так что проблема переадресовывается к моменту Сотворения мира, а об этом знает один только Бог. Если же существуют античастицы, то становится возможным рождение пар частица — античастица, например электронов и позитронов. Теперь загадка



Ричард Ф. Фейнман

состоит в том, почему при рождении электрон-позитронной пары новый, только что рожденный электрон должен быть антисимметризован со всеми уже имевшимися электронами? То есть, почему он не может находиться в том же состоянии, что и один из уже имевшихся электронов? Таким образом, существование частиц и античастиц позволяет нам задать очень простой вопрос: если я создаю две пары электронов и позитронов и сравниваю амплитуды их прямой аннигиляции и аннигиляции после обмена — почему имеется знак минус?

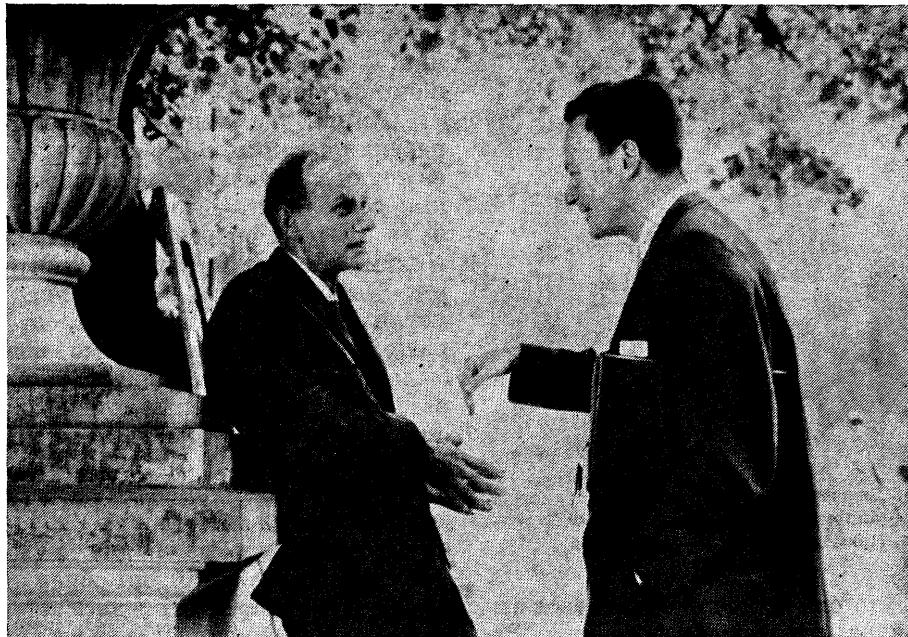
Все эти проблемы были решены много лет назад очень красивым способом, простейшим использующим в духе Дирака, множество символов и операторов. Я же собираюсь вернуться к Максвелловским «шестеренкам» и постараюсь научить вас смотреть на эти вещи так, чтобы они не выглядели столь таинственно. Я не добавляю ничего нового к тому, что уже известно: то, что последует — просто рассказ об уже известном. Итак, приступим к выяснению того, как все устроено — прежде всего, разберемся, почему должны существовать античастицы.

Относительность и античастицы. В обычной нерелятивистской квантовой механике, если подействовать возмещающим потенциалом U на частицу в начальном состоянии Φ_0 , то ее состояние изменится. В системе единиц с $\hbar = 1$ амплитуда попадания в состояние X с точностью до фазового мно-

жителя равна проекции X на $U\Phi_0$. Действительно, мы имеем

$$\text{Amp}_{\Phi_0 \rightarrow X} = -i \int d^3x X^* U \Phi_0 = -i \langle X | U | \Phi_0 \rangle. \quad (1)$$

В выражении $\{X | U | \Phi_0\}$ использованы элегантные дираковские обозначения бра-и кэт-амплитуд, хотя я не буду ими особенно пользоваться. Я предположу, однако, что формула выполняется и в релятивистской квантовой механике. Теперь предположим имеются два возмущения: одно в момент t_1 , а другое в более поздний момент t_2 , и мы хотим определить амплитуду того, что второе возмущение вернет частицу в начальное состояние Φ_0 . Обозначим первое возмущение (в момент t_1) U_1 , второе (в момент t_2) — U_2 . Нам



Поль Дирак и Ричард Фейнман

нужно будет выразить последовательное воздействие возмущения U_1 , эволюции от момента t_1 до момента t_2 и возмущения U_2 — мы это сделаем, используя теорию возмущений. Конечно, может случиться простейшая вещь: частица попадет прямо из Φ_0 в Φ_0 , с амплитудой $\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = 1$. Это ведущий член ряда теории возмущений. Следующий за ведущим членом отвечает переходу под действием возмущения U_1 из состояния Φ_0 в некоторое промежуточное состояние Ψ_m с энергией E_m , которое сохраняется в течение времени $t_1 - t_2$, пока другое возмущение U_2 не вернет частицу назад в Φ_0 , причем необходимо взять сумму по всем возможным промежуточным состояниям. Тогда полная амплитуда попадания из состояния Φ_0 в то же самое состояние Φ_0 равна

$$\text{Amp}_{\Phi_0 \rightarrow \Phi_0} = 1 - \sum_m \langle \Phi_0 | U_2(x_2) | \Psi_m \rangle \exp(-iE_m(t_2 - t_1)) \langle \Psi_m | U_1(x_1) | \Phi_0 \rangle \quad (2)$$

(я предположил, для простоты, что в первом порядке амплитуда перехода из Φ_0 в Φ_0 отсутствует, т. е. $\langle \Phi_0 | U_1 | \Phi_0 \rangle = 0$ и $\langle \Phi_0 | U_2 | \Phi_0 \rangle = 0$). Если в качестве промежуточных состояний использовать плоские волны и разложить амплитуды $\langle \Phi_0 | U_2 | \Psi_m \rangle$ и $\langle \Psi_m | U_1 | \Phi_0 \rangle$, то

$$\begin{aligned} \text{Amp}_{\Phi_0 \rightarrow \Phi_0} = 1 - \int d^3x_1 d^3x_2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} b^*(\mathbf{x}_2) \times \\ \times \exp\{-i[E_p(t_2 - t_1) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\} a(\mathbf{x}_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$a(x_1) = U_1(x_1) \Phi_0(x_1) (2E_p)^{1/2},$$

$$b(x_2) = U_2(x_2) \Phi_0(x_2) (2E_p)^{1/2}$$

и $E_p = (p^2 + m^2)^{1/2}$, где m — масса частицы. Множители E_p введены для того, чтобы отчетливее выявить релятивистские свойства этого выражения — так как величина $d^3p/(2\pi)^3 2E_p$ представляет собой релятивистски инвариантную плотность импульса. Этот процесс может быть изображен графически (рис. 1).

Мы будем рассматривать некоторые частные случаи полученной выше формулы. Я хочу сделать это так: сначала разобрать некоторые очень простые примеры, а потом продолжить несколько более общим образом. Надеюсь, простые примеры вы поймете, а, поняв их, поймете сразу и обобщения, — во всяком случае, именно так понимаю вещи я.

Амплитуда непрямого распространения частицы содержит рассеяние из точки x_1 в точку x_2 , а промежуточные состояния — это частицы с импульсом p и энергией E_p . Предположим, что все энергии положительны. Мы знаем, что если бы энергии могли быть отрицательными, то все наши проблемы с энергиями можно было бы решить, заполнив частицами резервуар отрицательных энергий и описывая природу при помощи избыточной энергии.

Но вот неожиданность: вычисляя амплитуду для любых $a(x_1)$ и $b(x_2)$ (это справедливо даже для $a(x_1)$ и $b(x_2)$, зависящих от p), мы обнаруживаем, что она не может обратиться в нуль, если точка x_2 находится вне светового конуса, исходящего из точки x_1 . Это совершенно неожиданно: если вы испускаете последовательность волн из определенной точки и все энергии положительны, то волны нельзя удержать внутри светового конуса. Это вытекает из следующей математической теоремы:

Если Fourier-образ функции $f(t)$ содержит только положительные энергии, т. е. f может быть представлена в виде

$$f(t) = \int_0^\infty \exp(-i\omega t) F(\omega) d\omega, \quad (4)$$

то f не может ни при каких t обратиться в нуль за исключением тривиального равенства нулю всюду. Чтобы теорема выполнялась, $F(\omega)$ должна удовлетворять некоторым требованиям, которые я предпочел бы не обсуждать подробно.

Эта теорема может показаться вам неожиданной, потому что вы знаете, что функция, равная нулю всюду за исключением ограниченного интервала, может быть разложена в ряд Fourier. Но при этом возникают положительные и отрицательные частоты. А я требую, чтобы частоты были только положительными.

Чтобы применить эту теорему к рассматриваемому случаю, зафиксируем x_1 и x_2 и перейдем от интегрирования по p к интегрированию по переменной $\omega = E_p$. Тогда интеграл принимает вид (4), причем $F(\omega)$ равна нулю при $\omega < m$, $F(\omega)$ зависит от x_1 и x_2 . Теорема применима непосредственно — мы видим, что амплитуда не может обратиться в нуль при любом конечном

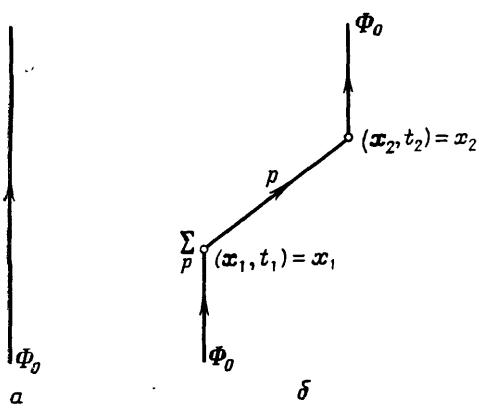


Рис. 1. Диаграммное представление двух вкладов в амплитуду перехода $\Phi_0 \rightarrow \Phi_0$. а — Прямой переход, б — Непрямой

значении времени. В частности, она не равна нулю и вне светового конуса, исходящего из точки x_1 . Другими словами, имеется амплитуда распространения частиц со сверхсветовыми скоростями, и с этим ничего не поделаешь — какую бы суперпозицию (состояний только с положительными энергиями) мы ни взяли.

Следовательно, если t_2 больше t_1 , в амплитуду вносят вклад частицы, распространяющиеся со сверхсветовой скоростью, для которых x_1 и x_2 разделены пространственно-подобным интервалом. В случае же пространственно-подобного интервала порядок следования возмущений U_1 и U_2 зависит от системы отсчета: если мы смотрим на процесс из достаточно быстро движущейся системы отсчета (относительно исходной), второе возмущение (при t_2) происходит раньше первого (при t_1) (рис. 2).

Как выглядит этот процесс в новой системе отсчета? До момента t'_2 имеется одна благополучно движущаяся частица, но в момент t'_1 происходит нечто внешне совершенно непостижимое: в точке x_2 , на конечном расстоянии от исходной частицы, возмущение создает пару частиц, одна из которых движется явно вспять во времени. В момент t'_1 исходная частица и частица, движущаяся вспять во времени, исчезают. Итак, положительность энергии и относительность заставляют нас допустить рождение и аннигиляцию пар частиц, одна из которых движется вспять во времени частицы легче всего понять, временно снабдив нашу частицу зарядом. На рис. 2, a частица, распространяясь из x_1 в x_2 , переносит из x_1 в x_2 , скажем, положительный заряд. Однако поскольку возмущение в точке x_2 происходит раньше, это выглядит как движение отрицательного заряда из x_2 в x_1 .

Другими словами, должны существовать античастицы. На самом деле, вследствие того, что последовательность событий зависит от системы отсчета, можно сказать, что виртуальная частица для одного наблюдателя является виртуальной античастицей для другого наблюдателя.

Подводя итоги, мы можем высказать следующие утверждения:

1) Должны существовать античастицы, а также парное рождение и уничтожение частиц.

2) Поведение античастицы полностью определяется поведением частицы.

Ниже мы подробнее рассмотрим второй пункт, пока же ограничимся следующим. При обращении знаков x , y , z и t частица, исходно двигавшаяся вперед во времени, будет двигаться вспять во времени. Определим P — оператор пространственной инверсии, изменяющий знаки трех пространственных координат, T — оператор обращения времени, изменяющий направление течения времени, и, наконец, C — оператор зарядового сопряжения, меняющий частицы на античастицы и наоборот. Тогда P и T оказывают такое же действие на любое состояние, что и C , т. е. $PT = C$.

Частицы со спином нуль и бозе-статистика. Теперь я хотел бы рассмотреть величину амплитуд различных процессов. Это поведет нас по новому пути, на котором мы подберем ключи к нашей второй теме, связи спина со статистикой. Основная идея состоит в том, что если начать из любого состояния и действовать на него любой совокупностью возмущений, то суммарная вероятность оказаться в каждом из всех возможных окончательных состояний должна равняться единице.

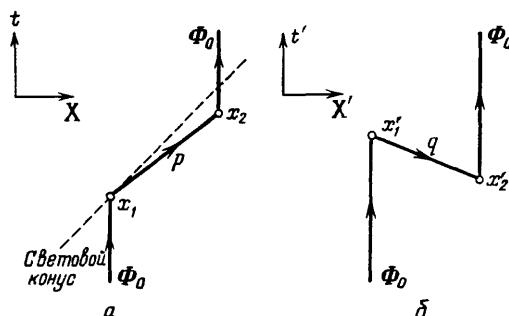


Рис. 2. Один и тот же процесс, наблюдаемый из двух различных систем отсчета — из исходной ($t_1 < t_2$) (a) и из движущейся ($t'_2 < t'_1$) (b)

Сначала мы рассмотрим нерелятивистский пример, а затем сравним его с релятивистским случаем. Предположим, что частица первоначально находится в состоянии Φ_0 и на нее действует возмущение. Мы хотим найти вероятность попадания в определенное конечное состояние, вычисленную по теории возмущений. Амплитуда попадания частицы в состояние Φ_0 после возмущения задается соотношением (3); отсюда вероятность того, что ничего не изменится, равна

$$\text{Prob}_{\Phi_0 \rightarrow \Phi_0} = 1 - 2 \operatorname{Re} \int d^3x_1 d^3x_2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} b^*(\mathbf{x}_2) \times \\ \times \exp \{-i [E_p(t_2 - t_1) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\} a(\mathbf{x}_1). \quad (5)$$

Мы воспользовались тем, что

$$|1 + \alpha|^2 = 1 + \alpha + \alpha^* + \dots = 1 + 2 \operatorname{Re} \alpha + \dots$$

Амплитуда попадания частицы в состояние Ψ_p после возмущения равна

$$\text{Amp}_{\Phi_0 \rightarrow p} = -i \int d^3x \Psi_p^*(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}) \Phi_0(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Заметьте, что в $\text{Amp}(\Phi_0 \rightarrow \Phi_0)$ мы учитывали члены порядка U^0 и U^2 и пренебрегали членами высших порядков. Здесь же мы учитываем только член порядка U^1 , пренебрегая членами порядка U^2 и выше — в результате мы получим для $\text{Prob}(\Phi_0 \rightarrow p)$ выражение порядка U^1 . Вероятность равна

$$\text{Prob}_{\Phi_0 \rightarrow p} = \left| -i \int d^3x \Psi_p^*(\mathbf{x}) U(\mathbf{x}) \Phi_0(\mathbf{x}) \right|^2. \quad (7)$$

Полная вероятность должна равняться единице:

$$\text{Prob}_{\Phi_0 \rightarrow \Phi_0} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \text{Prob}_{\Phi_0 \rightarrow p} = 1. \quad (8)$$

Отсюда мы получаем соотношение между двумя процессами: процессом расщепления в другое состояние и процессом двойного рассеяния, приводящим к возвращению в начальное состояние. Графически это соотношение показано на рис. 3. Не слишком трудно показать, что оно действительно выполняется для произвольного потенциала $U(\mathbf{x}, t)$.

Давайте обратимся к релятивистскому случаю, для спина нуль. Тут возникает проблема. В дополнение к рассмотренным выше диаграммам, мы должны учитывать тот факт, что промежуточное состояние может быть античастицей; другими словами, мы должны добавить диаграммы типа рис. 2, б. К полной вероятности мы должны добавить

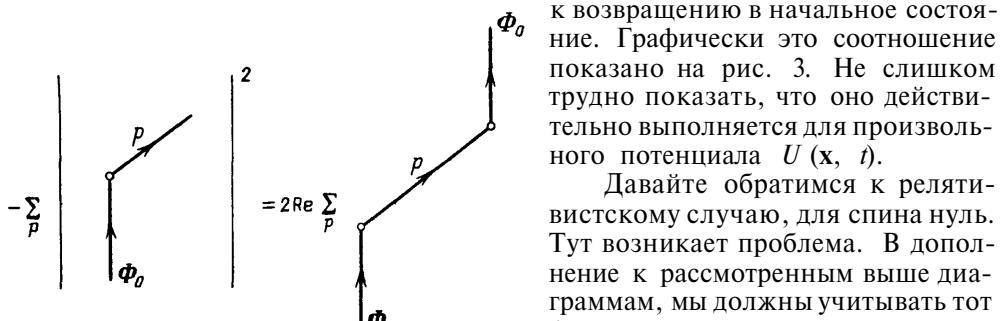


Рис. 3. Диаграммное тождество, которое должно иметь место, чтобы полная вероятность равнялась единице

удвоенную действительную часть этой диаграммы. Чтобы полная вероятность осталась равной единице, нам нужно отыскать что-то другое, компенсирующее вклад новой диаграммы.

Ключ к этой тайне состоит в соотношении, показанном на рис. 4 (и аналогичном рис. 3). Это соотношение не очевидно, но если мы рассчитаем обе амплитуды, мы убедимся в том, что оно верно.

Новая, обусловленная релятивизмом диаграмма в левой части рис. 4 отвечает рождению пары с частицей в состоянии Φ_0 . Заметьте, что эта диаграмма вносит отрицательный вклад в полную вероятность. Следовательно,

если бы мы могли ввести диаграмму в левой части рис. 4 в выражение для полной вероятности, полная вероятность могла бы стать равной единице, и проблема была бы решена.

Однако простое добавление этой диаграммы бессмысленно по двум причинам. Во-первых, диаграмма в левой части рис. 4 начинается из иного начального состояния (из вакуума, а не Φ_0); во-вторых, нет оснований ограничиваться созданием пары с частицей только в состоянии Φ_0 — возможно любое состояние частицы. Мы получили правильный ответ, неправильно рассуждая.

То, что я говорил до сих пор — это правда, но не вся правда. Мы пренебрегли некоторыми диаграммами, а если учесть их все, то мы получим важ-

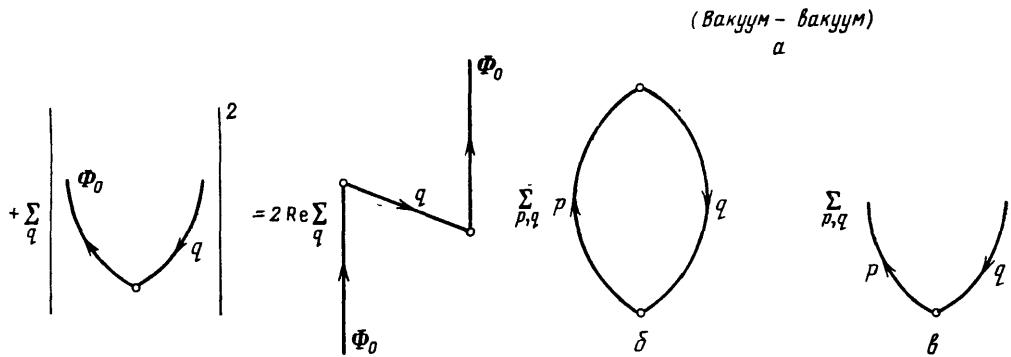


Рис. 4. Диаграммное тождество для частиц со спином нуль, содержащее античастицы

Рис. 5. Процесс, начинающийся из состояния без частиц, т. е. из вакуума

ное свойство бозе-статистики: если частица находится в определенном состоянии, то вероятность рождения другой частицы в этом же состоянии *возрастает*.

Давайте вернемся на шаг назад: вместо того, чтобы начинать с частицы в состоянии Φ_0 , начнем с вакуума V (т. е. с состояния без частиц) и проанализируем наше обычное утверждение, что полная вероятность должна равняться единице. В нерелятивистском случае это было бы простейшим упражнением: если у нас нет частиц исходно, то ничего и не произойдет, и вероятность того, что ничего не произойдет, будет равна единице. С другой стороны, мы видели, что в релятивистском случае нужно учесть рождение и аннигиляцию пар. Возмущение может создавать и уничтожать пары частиц. Нетрудно увидеть, что в низшем порядке теории возмущений важны три диаграммы, показанные на рис. 5. Первая диаграмма отвечает тому, что ничего не происходит: вакуум после действия возмущения остается вакуумом. Вторая диаграмма — это сумма переходов из вакуума в вакуум, взятая по всем возможным промежуточным частицам. В третьей диаграмме рождается пара.

Как обычно, полная вероятность всего происшедшего равна единице. Поэтому для диаграмм на рис. 5

$$1 = |5, a + 5, b + \dots|^2 + |5, c + \dots|^2 + \dots,$$

что дает соотношение, показанное на рис. 6.

Возвращаясь к процессам с частицей в начальном состоянии Φ_0 , мы должны учесть рождение и аннигиляцию пар. Всего мы получаем, как по-

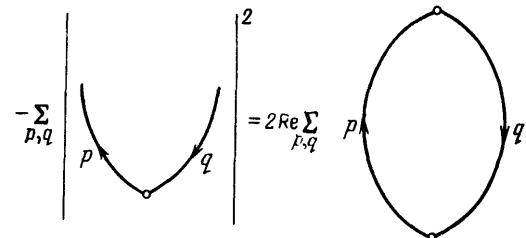


Рис. 6. Диаграммное тождество для вакуумного начального состояния

казано на рис. 7, шесть диаграмм. В первых четырех диаграммах система возвращается в исходное состояние, а в оставшихся двух состояния системы изменяется,

В нерелятивистском случае мы видели, что вероятности для диаграмм рис. 7, *b* и *d* гасят друг друга (см. рис. 3), следовательно, должны гасить друг друга и вероятности для рис. 7, *v*, *g* и *e*. Если сравнить эти диаграммы с изображенными на рис. 5, на первый взгляд может показаться, что должны взаимно компенсироваться вероятности для диаграмм на рис. 7, *g* и *e*, как это происходит для диаграмм на рис. 5, *b* и *v*: ведь они отличаются только

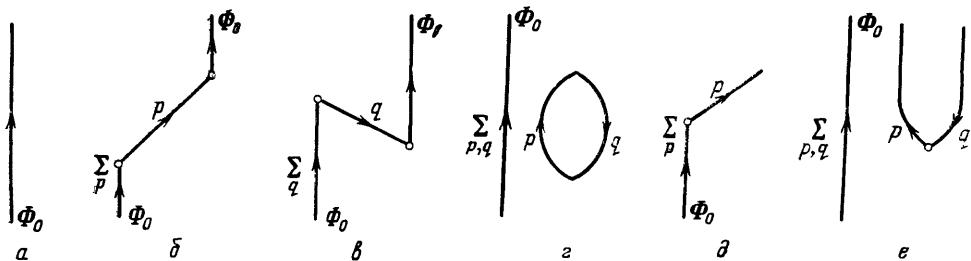


Рис. 7. Диаграммы, начинающиеся с одной частицы в состоянии Φ_0 .

частицей-«зрителем», которая несущественна (или кажется несущественной). В итоге мы остались бы с диаграммой на рис. 7, *v* — так что в релятивистском случае немедленно возникает проблема: чем компенсируется вклад этой диаграммы в полную вероятность?

Проблема решается красиво и изящно: «зритель» на рис. 7, *e* далеко несуществен! Рассмотрим частный случай рис. 7, *e*, когда состояние *p* совпадает с начальным состоянием Φ_0 . Тогда вначале имеется частица в состоянии Φ_0 , а в конце — две частицы в этом же состоянии и одна античастица в состоянии *q*. Как можно установить, какая из конечных частиц является исходной, а какая возникла при рождении пары? Ответ: никак. Другими словами, мы должны учесть добавочную диаграмму: на рис. 8 показана одна из диаграмм, вносящих вклад в рис. 7, *e*, а также добавочная, так называемая «обменная» диаграмма.

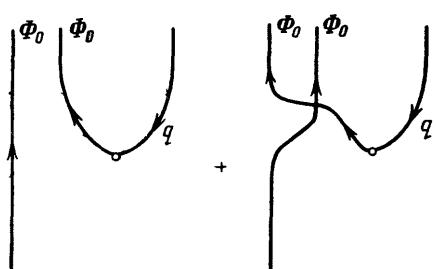


Рис. 8. Одна из диаграмм рис. 7, *e* вместе с обменной диаграммой

Две диаграммы на рис. 8 интерферируют конструктивно, и возникающий в результате вклад в полную вероятность погашает отрицательный вклад (см. рис. 4) диаграммы на рис. 7, *v*.

Итак, позвольте подвести итоги. Мы добавили несколько дополнительных диаграмм, чтобы учесть возможность рождения пар; в частности, мы добавили диаграмму на рис. 7, *v*. При попытке проверить сумму вероятностей мы обнаружили, что эта диаграмма (рис. 7, *v*) вносит в полную вероятность отрицательный вклад, который должен что-то скомпенсировать. То, что компенсируется, — это добавочная вероятность рождения в присутствии частицы-«зрителя» особой пары частица — античастица, в которой рождающаяся частица находится в таком же состоянии, что и «зритель».

Это увеличение вероятности — очень глубокий и важный результат. Он состоит в том, что простое присутствие частицы в определенном состоянии удваивает вероятность рождения пары, частица которой находится в этом же состоянии. Если в этом состоянии исходно было *n* частиц, то вероятность возрастает в $(n + 1)$ раз. Очевидно, этот факт может стать очень

важным! Он является ключевым свойством бозе-статистики и, среди прочего, лежит в основе работы лазера.

В качестве другого примера давайте рассмотрим некоторые диаграммы высших порядков для перехода вакуума в вакуум. Допустим, возмущающий потенциал действует четыре раза, рождая и уничтожая две пары частица-античастица — как показано на рис. 9, а. Теперь сравним это с тем, что получится, если после рождения пар каждая частица аннигилирует не с той античастицей, с которой она родилась, а с другой античастицей. Вы получите диаграмму на рис. 9, б. Эти две амплитуды складываются и вносят вклад в амплитуду перехода вакуум-вакуум. Это очень просто, и это составляет суть бозе-статистики.

Бозе-статистика, на самом деле, не так уж непостижима. Представляется естественным, что амплитуды надо складывать, если две одинаковые частицы, распространяющиеся из точек A, B в точки A', B' , попадут из A не в A' и из B не в B' , а, соответственно, в B' и A' , что является лишь частным случаем общего квантово-механического принципа: если процесс может происходить многими взаимоисключающими способами, мы должны сложить амплитуды всех способов. Кроме того, если частицы возникают вследствие квантования классического поля (типа электромагнитного поля, или поля колебаний кристалла), то по принципу соответствия они должны быть бозе-частицами — иначе не возникнут правильные корреляции интенсивностей, как в эффекте Хэнбери Брауна и Твисса *). Проще говоря, квантование гармонических осцилляторов, описывающих моды колебаний поля, автоматически приводит к бозе-частицам.

В дальнейшем мы обнаружим, что в случае фермионов, частиц с полуцелым спином, возникает неожиданный знак минус. Например, для диаграмм на рис. 9 каждая петля вносит в амплитуду знак минус. Поэтому для рис. 9, а возникают два знака минус, а для рис. 9, б (с одной петлей) — один знак минус, так что амплитуды вычитаются, и вы получаете фермистатистику. Нам придется разобраться, почему в случае спина $1/2$ каждая петля дает знак минус. Разгадка, как мы увидим, состоит в том, что каждая петля неявно подразумевает поворот на 360° .

Связь между свойствами частицы и античастицы. Прежде чем говорить о фермионах, я хотел бы вернуться назад, чтобы несколько более подробно рассмотреть связь между свойствами частицы и античастицы. Конечно, свойства античастицы полностью определяются свойствами частицы. Давайте рассмотрим это обстоятельство на простейшем примере бессpinовой частицы и скалярного потенциала U . Мы видели, что при $t_2 > t_1$ амплитуда распространения свободной частицы с массой m из точки x_1 в точку x_2 равна

$$F(2, 1) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \exp \{ -i [E_p(t_2 - t_1) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \}. \quad (9)$$

Эта формула релятивистски ковариантна — поэтому для бессpinовых частиц мы можем считать в формуле (5) a и b постоянными величинами. Нам нужно выяснить, чему равна амплитуда при $t_2 < t_1$.

Если $t_2 < t_1$ и события разделены пространственно-подобным интервалом, ответ прост: амплитуда по-прежнему равна $F(2, 1)$. Это объясняется тем, что, как мы знаем, в пространственно-подобной области выражение для $F(2, 1)$ правильно для $t_2 > t_1$, а глядя на процесс из другой системы отсчета, мы можем получить $t_2 < t_1$, причем процесс останется по-прежнему в про-

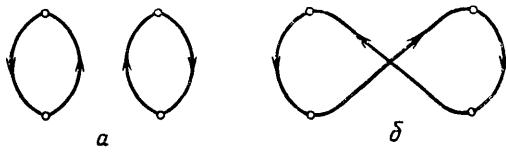


Рис. 9. а — Два рождения пар без обмена. б — Два рождения пар с обменом

*) См.: Фейнман Р. Теория фундаментальных процессов. — М.: Наука, 1978.

пространственно-подобной области. В этой системе отсчета амплитуда останется прежней — она не зависит от системы отсчета — и когда мы попытаемся записать $F(2, I)$ в новых координатах, мы получим *ту же самую* формулу, так как $F(2, I)$ релятивистски ковариантна. Итак, $F(2, I)$ — это правильная формула для амплитуды как в переднем световом конусе, так и в пространственно-подобной области. А как быть с задним световым конусом?

Необходимая нам дополнительная информация состоит в том, что при $t_2 < t_1$ по-прежнему надо учитывать только положительные энергии. Следовательно, в этой области можно представить амплитуду в виде

$$G(2, I) = \int_0^{\infty} \exp[-i\omega(t_2 - t_1)] X(x_1, x_2, \omega) d\omega, \quad (10)$$

где X — некоторая функция, которую мы хотим определить. Причина замены знака в показателе экспоненты состоит в следующем. Мы создаем волны, расходящиеся из источника в точке x_1 , энергия или частота которых, в соответствии с нашими требованиями, положительна. Другими словами, временная зависимость должна иметь вид $\exp(-i\omega\Delta t)$ с $\omega > 0$. Здесь Δt — временной интервал от момента излучения, который должен быть положительным. В случае $t_2 > t_1$ волны существовали интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$. В случае $t_2 < t_1$ — интервал времени $\Delta t = t_1 - t_2$.

Итак, при $t_2 < t_1$ — как в прошлом (заднем) световом конусе, так и в пространственно-подобной области — мы можем записать амплитуду в виде (10). Это значит, что для получения амплитуды при $t_2 < t_1$ в пространственно-подобной области мы можем использовать как формулу (9), так и формулу (10). Это позволит нам определить G в данной области, откуда ее можно однозначно экстраполировать на всю область $t_2 < t_1$.

При $t_2 < t_1$ и пространственно-подобных x_1 и x_2 мы имеем выражение (9), которое представляет собой сумму по отрицательным частотам. Вопрос состоит в том, можем ли мы представить также это выражение в виде функции только от положительных частот? Обычно так сделать нельзя. Это чудо, но для данной функции, которая релятивистски инвариантна, это возможно. Сейчас покажу почему.

Во-первых, при $t_1 = t_2$ $F(2, I)$ действительна. В данном случае экспонента имеет вид $\exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]$, и мнимая часть обращается в нуль, так как является интегралом от нечетной функции по четной области. Но если F действительна при $t_1 = t_2$, то в пространственно-подобной области она будет действительной и для любых t_1, t_2 вследствие релятивистской инвариантности: движущийся наблюдатель вычислит точно такую же действительную амплитуду, хотя для него $t_2 \neq t_1$. Поскольку F действительна, то она совпадает со своей комплексно-сопряженной величиной, у которой зависимость от времени имеет противоположный знак. Итак, окончательное выражение для $G(2, I)$ является комплексно сопряженным с $F(2, I)$:

$$G(2, I) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \exp\{i\{E_p(t_2 - t_1) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\}\}. \quad (11)$$

Это выражение имеет правильный вид: содержит только положительные энергии. Такое решение является единственным, так как по теореме (4) не существует функции вида (10), отличающейся от него только в заднем световом конусе. Итак, если t_2 больше чем t_1 и расположено в переднем световом конусе, ответом является формула (9); если t_2 меньше чем t_1 и расположено в заднем световом конусе — ответом является формула (11); а в промежуточной области, когда t_1 и t_2 разделены пространственно-подобно, ответом является как (9), так и (11) — обе формулы совпадают.

Сначала мы узнали кое-что только об одной области пространства-времени, и, просто допустив релятивистскую инвариантность, мы смогли получить информацию обо всем пространстве-времени. В этом нет ничего таин-

ственного. Если нам известно поведение некоторой функции в какой-то одной области четырехмерного эвклидова пространства, а также законы преобразования этой функции при вращениях (в нашем примере функция является инвариантной), то, поворачивая нашу область произвольным образом, мы получим совершенно определенное поведение функции во всем четырехмерном эвклидовом пространстве. В данном случае мы имеем дело с четырехмерным пространством-временем Минковского, x , y , z и t , которое несколько отличается от эвклидова пространства, впрочем, несильно: мы по-прежнему можем все это проделать. Сложность с пространством Минковского в том, что существует своего рода «ничейная земля» — область изменения t_2 вне светового конуса, исходящего из t_1 : при помощи преобразований Лоренца попасть туда нельзя. Но мы получили правильное продолжение через пространственно-подобную область, так как предположение о положительности энергии накладывает ограничение на решение. Другими словами, изменяющая все знаки операция PT является настоящим релятивистским преобразованием, или скорее преобразованием Лоренца, продолженным через пространственно-подобную область при помощи требования о положительности энергии. Так что нет ничего таинственного в том, что все сделано одной релятивистской инвариантностью.

Спин 1/2 и ферми-статистика. Итак, до сих пор мы рассматривали бесспиновые частицы, а теперь я хотел бы перейти к спину 1/2 и посмотреть, что получится. Если у вас есть состояние со спином 1/2 и вы поворачиваете его, скажем, вокруг z -оси на угол θ , то фаза состояния меняется на $e^{-i\theta/2}$. Это утверждение доказывается множеством теоретико-групповых аргументов, в которые я не могу сейчас углубляться, хотя это и приятное упражнение. Главное состоит в том, что если вы совершаете поворот на 360° , то это приводит к умножению волновой функции на (-1) . Начиная с этого места, все попытки продвинуться дальше, основываясь на интуиции, обречены на неудачу, потому что этот результат трудно осознать. Как может полный поворот на 360° что-нибудь изменить? Теперь одна из главных трудностей будет состоять в наблюдении за тем, сделан ли поворот на 360° или еще нет, т. е., надо ли учитывать знак минус, или не надо. И действительно, дальше мы увидим, как у ферми-частиц возникают таинственные знаки минус из-за оставленных без внимания поворотов на 360° !

Дирак очень красиво показывал, что один полный оборот можно отличить от поворота на нулевой угол *). На самом деле, поворот на нулевой угол эквивалентен двум полным оборотам. Я хочу показать вам трюк, который исполняют танцовщицы в варьете. Смотрите — я буду поворачивать стакан (см. последовательность фотографий 1—4 на с. 174) — запоминайте, каким образом — до тех пор, пока снова не покажется метка. Вот я повернул стакан на 360° , но оказался в затруднительном положении. Однако если я еще продолжу вращение, что в данных обстоятельствах не так просто, я не сломаю руку. Все станет на место. Итак, два оборота эквивалентны ничего не деланию, тогда как один оборот может иметь большое значение. Так что надо следить за тем, сделан ли оборот или нет, и оставшаяся часть лекции как раз и будет мучительной попыткой проследить за тем, сделан оборот или нет **).

В качестве примера я добавлю еще кое-что — просто чтобы вы уяснили себе, какого рода формулы нам встретятся: здесь типичны формулы с половинным углом. Например, предположим, у вас есть электрон, проекция спина которого на z -ось равна $+1/2$. Чему равна вероятность получить опять

*) Это знаменитая дираковская головоломка с ножницами; см. в книге: Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. — М.: Мир, 1987.—С. 64.

**) Эта часть взята из лекции Фейнмана дословно.

$+1/2$, измеряя проекцию спина на некоторую другую ось, скажем, z ? Пусть, угол между двумя осями равен θ , тогда ответ следующий:

$$\begin{aligned} \text{Prob} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta), \\ \text{Amp} &= \cos \frac{\theta}{2} = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь будем исследовать амплитуды в теории со спином $1/2$ и со скалярным взаимодействием. То есть, возьмем возмущение U простейшего типа, при котором зависящие от спинов части амплитуд обуславливаются самими



частицами, а не возмущением — это упростит рассмотрение. Мы получим формулы, похожие, с точностью до релятивистской модификации, на приведенную выше формулу с половинным углом. Итак, начнем.

Мы знаем, что энергия и импульс частицы массы m должны удовлетворять соотношению

$$E^2 - p^2 = m^2, \quad (13)$$

где m^2 — конечно, просто константа, а $p = |\mathbf{p}|$ — величина импульса. Это означает, что при заданной величине E задана величина p и наоборот, так что нам не надо двух различных переменных. Формула (13) похожа на тригонометрическую формулу $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, за исключением величины m^2 и знака минус. Вместо тригонометрических функций можно использовать гиперболические, и параметризовать E и p при помощи одной переменной. Если написать

$$E = m \operatorname{ch} \omega, \quad p = m \operatorname{sh} \omega, \quad (14)$$

то E и p автоматически удовлетворяют (13); ω — это наша новая переменная. Она называется быстротой.

Предположим, что сначала частица с заданным спиновым состоянием покится, а возмущение переводит ее в состояние с импульсом p . Начальный четырехвектор энергии-импульса равен $p_1 = (m, 0, 0, 0)$, а конечный, скажем, $p_2 = (E, p, 0, 0)$, где E и p удовлетворяют соотношению (14). Амплитуда такого процесса рассеяния дается формулой типа формулы с половинным

углом (12), имеющей, с точностью до несущественного множителя, вид

$$A_{\text{scatt}} \propto \text{ch} \frac{\omega}{2}. \quad (15)$$

По аналогии с рассмотренным выше случаем пространственного вращения, мы можем записать эту формулу, опять с точностью до несущественного множителя, как

$$A_{\text{scatt}} \propto (\text{ch} \omega + 1)^{1/2} \propto (E + m)^{1/2}. \quad (16)$$

Эту амплитуду можно однозначно записать в релятивистски ковариантном виде, замечая, что $p_1 \cdot p_2 = Em$, где $p_1 \cdot p_2$ — скалярное произведение двух четырехвекторов. Поэтому амплитуду можно записать в виде

$$A_{\text{scatt}} \propto (p_1 \cdot p_2 + m^2)^{1/2}. \quad (17)$$

Преимущество релятивистски-ковариантной формы записи состоит в том, что амплитуда, которую мы вывели для специального случая, теперь оказывается справедливой для любых p_1 и p_2 . Мы собираемся воспользоваться этой формулой для вывода амплитуды рождения пары. Пусть $p_1 = (m, 0, 0, 0)$, как и раньше, но $p_2 = (-E, -p, 0, 0)$. Это состояние с отрицательной энергией соответствует, конечно, античастице. Теперь $p_1 \cdot p_2 = -Em$, и мы получаем для амплитуды рождения пары

$$A_{\text{pair}} \propto (-mE + m^2)^{1/2} \propto i(E - m)^{1/2}. \quad (18)$$

Мы собираемся при помощи этих результатов видоизменить для случая спина 1/2 наше рассуждение с полными вероятностями. Мы увидим, что не обойтись без обращения к принципу запрета Паули. Рассуждение вполне такое же, как в бесспиновом случае, так что я сосредоточусь в основном на различиях между спином 0 и спином 1/2.

В случае процесса, начинающегося из вакуумного состояния, мы можем непосредственно использовать рассуждения для спина 0 и получим соотношение, показанное на рис. 6.

Теперь давайте исследуем процессы, начинающиеся с частицы в состоянии Φ_0 , причем будем считать частицу покоящейся. Получим те же шесть диаграмм, что и на рис. 7, но на этот раз амплитуды соответствующих диаграмм удовлетворяют совершенно другим соотношениям.

Для получения полной вероятности нам надо вычислить действительные части диаграмм на рис. 7, б, в и г, а также квадрат модулей диаграмм на рис. 7, д и ж. Начнем с рис. 7, б. В этом процессе частица рассеивается в точке x_1 в состояние p , а затем летит в точку x_2 , где она рассеивается назад в состояние Φ_0 . Из (17) мы знаем, что каждое рассеяние дает по множителю $(E + m)^{1/2}$, так что амплитуда, отвечающая рис. 7, б, равна

$$A_6 = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (E_p + m) \exp \{ -i [E_p (t_2 - t_1) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \}, \quad (19)$$

где знак минус возник благодаря множителям $-i$ в каждой вершине.

Вероятность процесса рассеяния на рис. 7, д равна квадрату модуля (16), и после суммирования по импульсам оказывается, что (16) и (19) обеспечивают выполнение показанного на рис. 3 соотношения и в случае частиц со спином 1/2.

Чтобы получить правильное выражение для рис. 7, в, мы должны быть внимательны. Это выражение с отрицательными частотами должно равняться (19), если t_2 , \mathbf{x}_2 и t_1 , \mathbf{x}_1 разделены пространственно-подобным интервалом. Но очевидно, что (19) равно $-[m + i(\partial/\partial t_2)] F(2, 1)$ (см. (7)), что в пространственно-подобной области равно $-[m + i(\partial/\partial t_2)] G(2, 1)$, поэтому с однозначностью

$$A_5 = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (-E_p + m) \exp \{ +i [E_p (t_2 - t_1) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \}. \quad (20)$$

Это соотношение (как и (11)) было получено посредством аналитического продолжения, без помощи (18), однако множитель $(-E_p + m)$ может также рассматриваться как возникающий из двух множителей в выражении для A_{pair} (см. (18)).

В этом месте возникает существенное отличие случая спина 0 от спина 1/2: для фермионов соотношение, показанное на рис. 4, не выполняется. Чтобы увидеть это в случае спина 1/2, у нас есть все необходимое. Из (18) получаем $E_p - m$ для обязательно положительной вероятности рождения

пары; сравнивая эту величину с действительной частью амплитуды (20) (содержащей произведение амплитуды для спина 0 на множитель $(-E_p + m)$), получаем соотношение, показанное на рис. 10 и отличающееся от рис. 4 очень важным знаком минус.

Теперь вспомним, что в бозевском случае диаграмма на рис. 7, *в* вносила отрицательный вклад в полную вероятность. Это означало, что должен был возникнуть добавочный, непредвиденный положительный вклад, который бы

все уравновешивал. Хитрость надо было применять только к рис. 7, *г*, 7, *е* с $p = 0$, а также к рис. 7, *в*. Мы видели, что необходимый положительный вклад обеспечивается добавлением обменной диаграммы (рис. 8). В целом то, что требовалось — это бозе-статистика.

В противоположность этому, в фермиевском случае рис. 7, *в* вносит положительный вклад в полную вероятность (в чем можно убедиться из рис. 10). Поэтому нам необходим дополнительный отрицательный вклад. На самом деле, благодаря рис. 6 и 10, диаграммы на рис. 7, *в* и *г* в точности гасят друг друга, так что для равенства полной вероятности единице должны гасить друг друга и обе диаграммы на рис. 8.

Отсюда видно, что амплитуды для диаграмм, отличающихся только перестановкой пары фермионов, должны вычитаться друг из друга. Свести концы с концами можно только сказав, что у фермионов в случае присутствия частицы-«зрителя», находящейся в определенном состоянии, вероятность возникновения другой частицы в таком же состоянии при рождении пары уменьшается: вместо ожидаемой амплитуды $1 + 1 = 2$, как в бозе-случае, в ферми-случае получается $1 - 1 = 0$. Правило состоит в том, что если частица находится в каком-то состоянии, то вы не сможете при рождении пары посадить в это состояние другую частицу. Тот факт, что исходная частица не дает осуществиться ожидаемому вами процессу, сдвигает вероятность в нужную сторону. Итак, мы продемонстрировали связь между спином и статистикой на частном примере: статистика у спина 1/2 и спина 0 разная. Мы использовали относительность, квантовую механику и, конечно, уравнение Дирака. Теперь продолжим обсуждение с тем, чтобы еще яснее понять механизм этой связи.

Античастицы и обращение времени. Теперь я хотел бы сформулировать общее правило того, как частица связана со своей античастицей. Выше мы уже говорили, что все, что нужно для понимания свойств античастицы — это смотреть на частицу «вспять во времени». Более точно, справедливо следующее. Предположим, вы начинаете с античастицы в некотором начальном состоянии с импульсом \mathbf{p}_i , энергией E_i , со спиновым состоянием u_i (для частицы с произвольным спином). Имея такое начальное состояние, античастица может вести себя по-разному. Например, если античастица заряжена, она

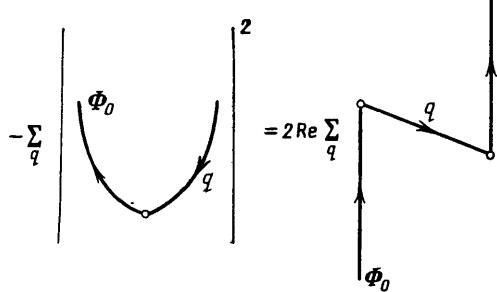


Рис. 10. Тождество, соответствующее изображенному на рис. 4 для частиц со спином 1/2

может испустить фотон с поляризацией \mathbf{a} , импульсом \mathbf{Q}_a , энергией E_a и оказаться в конечном состоянии с импульсом \mathbf{p}_f , энергией E_f , спином u_f . Амплитуда такого процесса с участием античастицы равна амплитуде обратного процесса с участием частицы. А именно, процесса, в котором частица с импульсом \mathbf{p}_f , энергией E_f , спиновым состоянием $(PT)u_f$ поглощает фотон с поляризацией $-\mathbf{a}^*$, с импульсом \mathbf{Q}_a и энергией E_a и попадает в состояние с импульсом \mathbf{p}_i , энергией E_i , спином $(PT)^{-1}u_i$ (рис. 11). Следовательно, действуя операцией PT на амплитуду процесса с участием античастицы, вы получите амплитуду процесса с участием частицы. Заметьте, что действие PT на состояние с импульсом \mathbf{p} , энергией E дает состояние также с импульсом \mathbf{p} , энергией E . Почему? Потому что после обращения времени получается импульс $-\mathbf{p}$, энергия E , а последующая пространственная инверсия, изменяющая знаки у пространственных переменных, возвращает нас в исходное

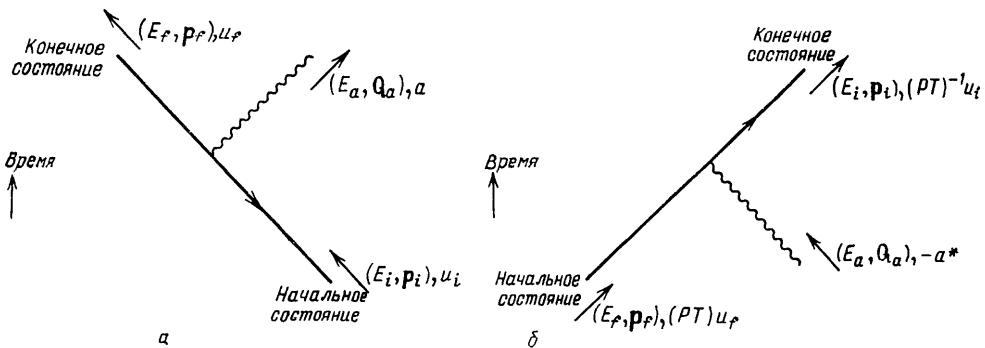


Рис. 11. *а* —Процесс с участием античастицы. *б* — Соответствующий процесс с участием частицы

состояние с импульсом \mathbf{p} , энергией E . Однако PT влияет на поляризацию фотона, а также на спиновое состояние. Заметьте, что на одном конце процесса необходимо применять обратное преобразование, т. е. преобразование $(PT)^{-1}$. Хотя кажется, что оно совпадает с PT , имеется, как мы скоро увидим, небольшое различие. Поэтому преобразование C , которое меняет частицу на античастицу, эквивалентно пространственной инверсии P и обращению времени T . Все происходит в обратном порядке во времени — например, если свет циркулярно поляризован и вектор поляризации равен, скажем, $(e_x, e_y) = (1, i)$, то обращенная во времени поляризация равна $(e_x, e_y)^* = (1, -i)$ — при этом электрический вектор вращается в противоположном направлении. Тогда $PT(e_x, e_y) = -(e_x, e_y)^*$ и т.д. $C = PT$ — все процессы нужно обратить во времени и инвертировать в пространстве, но я не буду вдаваться в подробности, чтобы это доказать.

Выше отмечалось, что при получении частицы из античастицы к спиновому состоянию на одном конце процесса надо применить операцию PT , тогда как на другом конце — операцию $(PT)^{-1}$. Хотелось бы иметь одинаковые преобразования на обоих концах, так как если спиновые состояния u_i и u_f совпадают, то совпадают и состояния $(PT)u_i$ и $(PT)u_f$. Позже нам понадобится это свойство. Оказывается, с пространственной инверсией P сложностей не возникает, поэтому выберем фазы так, чтобы $P^2 = 1$ — т.е. две пространственные инверсии равносильны тому, что ничего не произошло. Однако мы собираемся показать, что для частиц со спином $1/2$ $T^2 = -T$, т.е. $TT = -1$, тогда как для бесспиновых частиц $TT = +1$. Из этого различия в знаке, этого добавочного знака минус, и вытекают принцип запрета Паули и фермиевская статистика.

Действие двукратного обращения времени. Как может случиться, что в случае частиц со спином $1/2$ двукратное обращение времени приводит к изменению знака? Ответ состоит в том, что двойное применение T эквивалент-

но повороту на 360° . Если я дважды «перебросил» x -ось, я совершил поворот на 360° ; а в четырехмерном пространстве-времени можно было бы ожидать, что это будет верно также и для t -оси. И это действительно так, я покажу это ниже (даже не предполагая никакой релятивистской связи между t и x !). Мы уже говорили, что поворот частицы со спином $1/2$ на 360° приводит к умножению на (-1) . Так же мы получаем $TT = -1$. Покажем, что в случае спина $1/2$ должно получаться $TT = -1$.

Действие обращения времени на различные состояния

Состояние: $ a\rangle$	Обращенное состояние: $T a\rangle$	Дважды обращенное состояние: $TT a\rangle$
$ x\rangle$	$ x\rangle$	$ x\rangle$
$ p\rangle = \sum e^{ipx} x\rangle$	$ -p\rangle = \sum e^{-ipx} x\rangle$	$ p\rangle$
$\alpha a\rangle + \beta b\rangle$	$\alpha^*T a\rangle + \beta^*T b\rangle$	$\alpha TT a\rangle + \beta TT b\rangle$
Состояния с целым спином:		
$ j, m=0\rangle$	$e^{i\Phi} j, m=0\rangle$	$e^{i\Phi}(e^{-i\Phi} j, m=0\rangle) = j, m=0\rangle$
Состояния со спином $1/2$:		
$ +z\rangle$	$ z\rangle$	$- +z\rangle$
$ z\rangle$	$- z\rangle$	$- z\rangle$
$ +x\rangle = 2^{-1/2}(+z\rangle + z\rangle)$	$2^{-1/2}(-z\rangle - +z\rangle) = - -x\rangle$	$- +x\rangle$
$ x\rangle = 2^{-1/2}(+z\rangle - z\rangle)$	$2^{-1/2}(-z\rangle + +z\rangle) = +x\rangle$	$- -x\rangle$

В таблице приведены различные типы состояний, а также результаты действия на них однократного и двукратного преобразования T . Первое состояние — это состояние с частицей в точке x пространства; используя дираховские символы, обозначим это состояние $|x\rangle$. Между значками « $|$ » и « \rangle » помешают либо название состояния, либо какой-нибудь символ этого состояния, в данном случае — точку x , в которой расположена частица. Тогда после обращения времени получим $T|x\rangle = |x\rangle$ — т. е. частица останется в той же точке, и только. С другой стороны, частица с импульсом p (т. е. в состоянии $|p\rangle$) после обращения времени попадает в состояние $|-p\rangle$, однако после второго обращения времени вернется в состояние $|p\rangle$.

Рассматривая состояние $|p\rangle$, мы видим, что T является так называемым «антиунитарным» преобразованием. Состояние $|p\rangle$ можно образовать, комбинируя состояния $|x\rangle$ с разными x и разными фазами. Чтобы получить обращенное во времени состояние $|-p\rangle$, надо взять те же состояния $T|x\rangle = |x\rangle$, но с комплексно сопряженными (по отношению к состоянию $|p\rangle$) фазами. Так что в общем случае $T[\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle] = \alpha^*T|a\rangle + \beta^*T|b\rangle$, т. е. для антиунитарного преобразования, встречаясь с коэффициентами, надо каждый раз брать их комплексно сопряженные значения. Конечно, при повторном применении T вы снова комплексно сопрягаете коэффициенты, и если вы сильны в алгебре, то знаете, что делать это — пустая потеря времени. Так что $TT|a\rangle$ должно быть тем же физическим состоянием $|a\rangle$, но проклятая квантовая механика всякий раз допускает фазовые отличия. Итак, отсюда следует, что $TT|a\rangle = \text{фаза} \cdot |a\rangle$, причем фаза должна совпадать для всех состояний, которые могут интерферировать с состоянием $|a\rangle$. Это обеспечивает одинаковую интерференцию состояний до и после применения TT . Спин 0 и спин $1/2$ не могут интерферировать, это состояния фундаментально разных типов; поэтому общие изменения фазы при действии TT на эти состояния могут быть разными.

Теперь мы воспользуемся тем, что для состояния с угловым моментом $|j, m\rangle$, $T|j, m\rangle = \text{фаза} \cdot |j, -m\rangle$. Для углового момента должно выпол-

няться именно такое соотношение: нечто, вращающееся определенным образом, после обращения времени должно вращаться в противоположную сторону. Например, для орбитального углового момента $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, а поскольку T переводит $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ то $T\mathbf{L} = -\mathbf{L}$, т.е., действуя T , вы получаете противоположно направленный угловой момент.

Прежде всего рассмотрим состояния с целым спином. Тогда должно существовать состояние с нулевой z -компонентой углового момента, именно, $|j, m = 0\rangle$. Действуя один раз T , переводим это состояние в то же самое состояние $|j, m = 0\rangle$, умноженное на некоторую фазу. Повторное действие T может перевести это состояние только точно в состояние $|j, m = 0\rangle$, поскольку T — антиунитарное преобразование. А так как фаза одинакова для всех способных интерферировать состояний, то $TT = +1$ для всех состояний с целым спином.

Чтобы разобраться в том, что происходит в случае полуцелого спина, давайте рассмотрим простейший пример спина $1/2$. Попытаемся заполнить нашу таблицу для четырех состояний: со спином вверх и вниз относительно z -оси, $|+z\rangle$, $| -z\rangle$, и со спином вверх и вниз относительно x -оси, $|+x\rangle$, $| -x\rangle$. В элементарной теории спина известно, как выражаются эти последние через базисные состояния $|+z\rangle$ и $| -z\rangle$: одно из них, $|+x\rangle$, является суперпозицией базисных состояний с совпадающими фазами и амплитудами, второе, $| -x\rangle$ — суперпозицией с совпадающими амплитудами и противоположными фазами. Физически обращенное во времени состояние $|+z\rangle$ есть $| -z\rangle$ и наоборот. Аналогично, обращение времени для $|+x\rangle$ должно дать $| -x\rangle$ с точностью до фазового множителя.

Для первого значения в нашей таблице $T|+z\rangle$ мы должны получить $| -z\rangle$, по крайней мере, с точностью до фазового множителя. Этот первый множитель может быть выбран произвольно, как вы сможете убедиться в дальнейшем, так что можно взять $T|+z\rangle = | -z\rangle$. Теперь $T| -z\rangle$ должно равняться $|+z\rangle$, умноженному на некоторую фазу. Однако мы не можем взять просто $|+z\rangle$, так как тогда действие T на $|+x\rangle$, суперпозицию $|+z\rangle$ и $| -z\rangle$ с одинаковыми фазами, даст снова состояние $|+x\rangle$ с одинаковыми фазами, а не противофазное состояние $| -x\rangle$ (с точностью до множителя), как должно быть на самом деле. Чтобы произошло обращение фаз, мы должны взять $T| -z\rangle = -|+z\rangle$, т.е. выбрать фазу, противоположную взятой для $T|+z\rangle$. Теперь $T(T|+z\rangle) = T| -z\rangle = -|+z\rangle$, и можно заполнить оставшуюся часть таблицы. Следовательно, $TT = -1$ для спина $1/2$, а также, как легко показать, для любого полуцелого спина j , когда обращение времени изменяет физическое состояние. Объединяя этот результат с полученным для частиц с целочисленным спином, получаем, что $TT \equiv$ повороту на 360° .

Теперь перейдем к определению знака петли для спина $1/2$. Вспомним, что потенциал в релятивистской квантовой механике может приводить к рождению пар, то есть вероятность того, что вакуум (т.е. состояние без частиц) останется вакуумом, должна быть меньше единицы. Напишем амплитуду для вакуума, остающегося вакуумом, как $1 + X$, где X — вклад всех замкнутых петель, изображенных в правой части рис. 6. Тогда X должен вносить отрицательный вклад в вероятность того, что вакуум остается вакуумом — это следует из тождества на рис. 6, поскольку левая часть строго отрицательная.

Рассмотрим петли, вносящие вклад в X . Сконструируем петлю, начав, например, с электрона с дираковской волновой функцией u , который распространяется вдоль петли и возвращается в исходное физическое состояние u . Нам надо вычислить след от получающегося матричного произведения, суммируя диагональные элементы. Но здесь есть некоторая тонкость. Конечное состояние могло бы оказаться повернутым на 360° по отношению к исходному — и в самом деле, видно, что эквивалентное этому повороту преобразование TT имело место. Из какой бы системы отсчета вы бы ни следили за этим процессом, электрон на каком-то этапе превращается в движущийся вспять

во времени позитрон (одно T), а затем снова в движущийся вперед во времени электрон (другое T) — так что, пройдя по петле, вы в конце концов вернетесь в состояние TTu (рис. 12).

В случае бозонов (для спина нуль) действует такой же оператор TT , но там мы имеем $TT = +1$, и никаких проблем не возникает. В случае бозонов

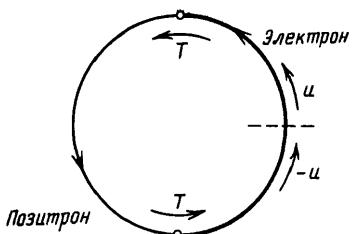


Рис. 12. Петля, содержащая частицу и античастицу, на которой показаны два обращения времени T

все работает: вычисление обычного следа X дает отрицательную величину. В случае же спина $1/2$ мы только что обнаружили добавочный знак минус. Таким образом, чтобы обеспечить выполнение тождества на рис. 6, обеспечить отрицательность вклада X в вероятность, мы должны добавить новое правило для полуцелого спина: каждому петлевому вкладу надо приписать добавочный знак минус, чтобы скомпенсировать знак минус от $TT = -1$. Если этого не сделать, вероятности не будут должным образом суммироваться, и у нас не будет непротиворечивой теории частиц со спином $1/2$. Только

этот знак минус согласуется с ферми-статистикой.

Общее правило для петель в случае спина $1/2$, состоящее в том, что каждую замкнутую петлю надо умножить на минус единицу, и дает нам ферми-статистику, см. рис. 9. Диаграммы на рис. 9, *a* и *b* различаются знаком, поскольку на рис. 9, *a* две петли, а на рис. 9, *b* — только одна. Поэтому из рис. 9 следует, что обмен двух частиц дает дополнительный знак минус, т.е. получается ферми-статистика!

Магнитные монополи, спин и ферми-статистика. В заключение, чтобы еще понятнее разъяснить связь между вращательными свойствами частиц и их статистикой, я хотел бы продемонстрировать вам пример с объектом, спин которого равен $1/2$ и для которого известно, откуда возникает угловой момент.

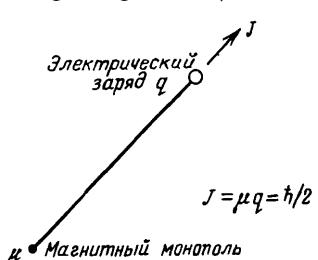


Рис. 13. Магнитный монополь μ в присутствии электрического заряда q

Предположим, у нас имеется магнитный монополь по соседству с электрическим зарядом (рис. 13). Магнитный монополь изобрел Дирак, поэтому его уместно упомянуть в этой лекции. Магнитный монополь является источником магнитного потока — так же как обычный заряд является источником электрического. Никто никогда не видел магнитного монополя, но всегда можно его вообразить. На самом деле, если взять просто обычный магнит в виде очень длинного стержня, то магнитный поток, вытекающий из одного его конца, будет подобен потоку из магнитного монополя, потому что другой конец находится очень далеко.

Как бы то ни было, предположим, что у нас есть магнитный монополь с магнитным зарядом μ по соседству с электрическим зарядом q . И предположим, что оба эти объекта являются бесспиновыми, так что не надо беспокоиться о внутреннем угловом моменте. Но эти объекты находятся по соседству друг с другом, так что можно обычным образом составить вектор Пойнтинга $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Интегрируя вектор Пойнтинга, можно вычислить величину момента, и если вы это сделаете, то увидите, что у нашего составного объекта имеется угловой момент (направленный вдоль прямой, соединяющей заряд с монополем), который не зависит от расстояния между объектами. Чему равен угловой момент, вы можете вычислить многими способами, я оставлю это в качестве упражнения — но оказывается, что угловой момент равен μq *).

*) Вероятно, проще всего вычислить угловой момент, если найти вращающий момент, который необходим для того, чтобы ось (прямая, соединяющая μ и q) вращалась

Далее, в квантовой механике угловой момент должен быть квантован. На самом деле, разрешены значения углового момента, кратные $(1/2)\hbar$ — так что возьмем наименьшее разрешенное значение и положим $\mu q = (1/2)\hbar$. Следовательно, мы сами построили объект со спином 1/2. Если это нам удалось, то при повороте на 360° фаза нашего объекта должна менять знак — посмотрим, так ли это.

Пусть магнитный заряд будет неподвижен. Повернем электрический заряд вокруг него на 360° (рис. 14). Имеется знаменитая теорема, гласящая, что когда вы перемещаете электрический заряд q в магнитном поле, то фаза изменяется на величину $\exp(iq \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}/\hbar)$, где $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ — контурный интеграл от векторного потенциала \mathbf{A} вдоль траектории движения заряда. (Это должно вас запугать!) В данном случае контурный интеграл надо брать по окружности, но, используя простой векторный анализ, можно перейти от интегрирования \mathbf{A} по контуру к интегрированию \mathbf{B} , магнитного поля, по поверхности, границей которой является наша окружность. Предположим, я перейду от контурного интеграла к интегралу от \mathbf{B} по верхней полусфере. Поверхностный интеграл от \mathbf{B} является как раз магнитным потоком через эту поверхность. Далее, полный поток, испускаемый магнитным монополем, равен $4\pi\mu$, т.е. интеграл от потока по полной сфере, целиком окружающей монополь, должен равняться $4\pi\mu$. В данном случае мы интегрируем только по полусфере, так что получаем половину этой величины, т.е. $2\pi\mu$. Следовательно, полное изменение фазы будет равно $\exp(2\pi i \mu q / \hbar)$, а используя соотношение $\mu q = \hbar/2$, получим отсюда $\exp(i\pi) = -1$. Очень хорошо, это совершенно верно.

В этом месте я немного отвлекусь, потому что мы очень близко подошли к рассуждению Дирака, доказывающему, что если где-нибудь во Вселенной имеется всего один монополь, то электрический заряд должен квантоваться. Это рассуждение таково. Если бы я вычислял интеграл не по верхней, а по нижней полусфере, то ответ был бы тем же самым. В этом случае поверхность ориентирована противоположно по отношению к контуру интегрирования, так что фазовый множитель оказывается равным $\exp(-i\pi)$, т.е. по-прежнему -1 . Заметим, однако, что если заряды q не квантованы, не кратны $\hbar/2\mu$, то вклады от двух различных поверхностей были бы разными — возникает противоречие. Следовательно, существование магнитных монополей приводит к квантованию заряда, а поскольку мы верим, что заряд квантован, то некоторые люди верят и в магнитные монополи.

Предположим теперь, что у нас есть два таких объекта: одна совокупность монополя и заряда, которую я назову A , и другая такая же, которую я назову B . Первоначально A расположена в точке x , а B в точке y (обе ориентированы одинаково, скажем, вверх). Что произойдет, если поменять их местами? Смотрите.

На рис. 15, *a* изображена операция обмена. Нам нужно вычислить изменение фазы, приобретаемое вследствие этого процесса. Единственный источник изменения фазы — это движение заряда, входящего в A , вокруг монополя, входящего в B , и движение заряда, входящего в B , вокруг монополя, входящего в A . (Относительное положение зарядов и монополей внутри каждой совокупности при движении не меняется.) По отношению к B операция обмена выглядит, как показано на рис. 15, *b*, а по отношению к A — как на рис. 15, *c*. Каждое относительное перемещение вносит вклад в

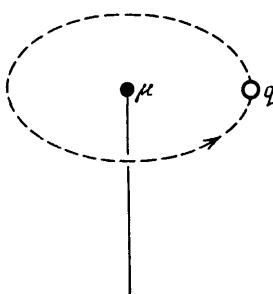


Рис. 14. Вращение электрического заряда q на 360° вокруг магнитного монополя

с угловой скоростью ω — при движении электронов по окружности вокруг монополя. Сила, которую надо уравновесить, возникает, конечно, благодаря движению электрона в магнитном поле монополя.

общее изменение фазы, равный $\exp\left(iq \int A \cdot dx/\hbar\right)$. Поскольку A поворачивается вокруг R на 180° , а B , в свою очередь, вокруг A на 180° , то общий поворот равен 360° . Чтобы вычислить изменение фазы, посмотрим на контуры интегрирования: рис. 15, δ дает интегрирование по контуру от x до y , а на рис. 15, θ — обратно от y до x . Объединяя оба интеграла, получим контур интегрирования в виде замкнутой вокруг монополя петли — такой же, как при

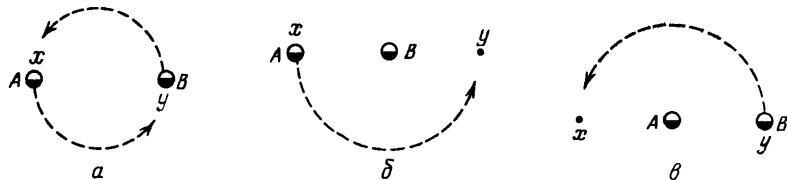


Рис. 15. Обмен двух совокупностей заряд-монополь

вращении на 360° — и, как мы показали раньше, множитель (-1) . Разумеется, это в точности то, чего вы ожидаете от ферми-статистики — при обмене объектов со спином $1/2$ должен возникать множитель -1 . (Мы предполагали, что заряд и монополь обладают нулевым спином и подчиняются бозе-статистике.)

Заключение. Мы провели длинное и подробное рассуждение, однако основные идеи надо запомнить. Вот как мы рассуждали. Если мы считаем, что частицы могут иметь только положительную энергию, то нельзя исключить их распространение вне светового конуса. В другой системе отсчета такие частицы могут казаться движущимися вспять во времени: это античастицы. То, что для одного наблюдателя будет виртуальной частицей, для другого окажется виртуальной античастицей. Затем, используя мысль о том, что полная вероятность всех исходов процесса должна равняться единице, мы увидели, что возникающие благодаря существованию античастиц и рождению пар добавочные диаграммы обуславливают бозе-статистику для случая бесспиновых частиц. Разрабатывая эту же мысль для случая фермионов, мы увидели, что обмен частицами приводит к знаку минус: они подчиняются ферми-статистике. Основное правило состояло в том, что двукратное обращение времени совпадает с поворотом на 360° . Это дало нам связь между спином и статистикой и принцип запрета Паули для спина $1/2$. Вот, собственно, и все, а остальное было лишь детализацией.

* * *

В этом состоит основное содержание лекции, но после обсуждений с некоторыми слушателями и дальнейших размышлений я хотел бы добавить несколько замечаний, которые делают связь спина со статистикой еще более очевидной и прямой. Рассуждение с монополем и зарядом позволило получить результат не путем релятивистского анализа действия двукратного обращения времени, но непосредственно путем поворота на 360° . Этот аргумент можно сделать более общим. Мы считаем, что правила для бозе-случая очевидны, если исходить из того, что в квантовой механике амплитуды, отвечающие взаимоисключающим возможностям, должны складываться. А что в случае ферми-частиц?

Мы уже отмечали, что у объектов с полуцелым спином знак амплитуды может быть скрыт, так как повороты на 360° могут оказаться незамеченными. И вот, закон связи спина со статистикой, который нам хотелось бы понять, может быть сформулирован одновременно для обоих случаев следующим образом: *обмен пары частиц влияет на волновую функцию точно так же как поворот системы отсчета одной из них вокруг системы отсчета другой на*

360° . Почему это так? Просто потому, что обмен как раз и предполагает такое относительное вращение систем отсчета!

В примере с монополем и зарядом мы уже отмечали, что если A и B меняются местами (по траекториям, которые нигде не пересекаются), то A кажется, что B поворачивается вокруг нее на 180° , и B кажется, что A поворачивается тоже на 180° в том же направлении: т. е. имеется взаимный поворот на 360° .

Чтобы проверить, что это верно и в общем случае, представим себе (используя идею Дэвида Финкельштейна), что объекты A и B прикреплены в соответствующих точках на концах ленты или ремня. Мы можем узнать, вращались ли относительно друг друга системы отсчета, проверив, не закручена

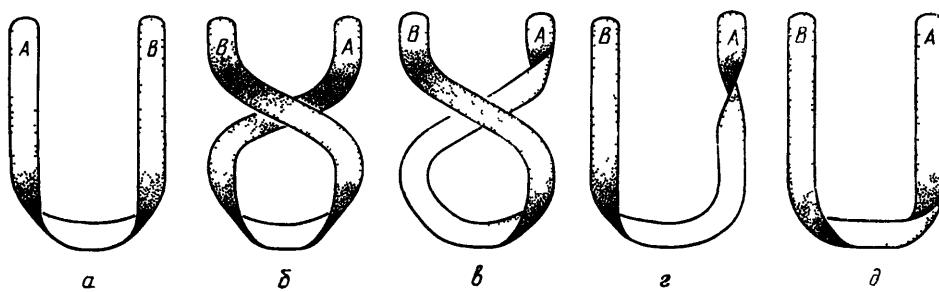


Рис. 16 На последовательности рис. $a - d$ концы ремня меняются местами. Заметьте, что правый конец ремня на рис. a и d закручен в противоположные стороны. Чтобы вернуть ремень в исходное состояние, необходим дополнительный поворот правого конца ремня на 360° .

ли лента на 360° (после обмена концов A и B пространственное положение ленты приблизительно восстанавливается). И достаточно очевидно, что обмен объектов (во время которого каждый движется параллельно самому себе, не совершая никакого абсолютного поворота) приводит именно к такому скручиванию ленты (рис. 16).

Поскольку обмен предполагает поворот на 360° одного объекта по отношению к другому, то при обмене объектов с полуцелым спином имеются все основания ожидать появления фазового множителя (-1) .