1986 г. Сентябрь Том 150, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

БИБЛИОГРАФИЯ

533.951(049.3)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ

Грубер Р., Рапаз Ж. Методы конечных элементов в линейной идеальной магнитной гидродинамике. — М.: Мир 1985. — 180 с.

В последнее время при построении вычислительных моделей в физике стал широко использоваться метод конечных элементов. Этот метод основан на представлении решения в виде конечного ряда по базисным функциям, имеющим финитный носитель (конечные элементы). После подстановки такого представления в дифференциальное уравнение и использования метода Галеркина, для коэффициентов разложения получаются алгебраические уравнения. Преимущество этого численного подхода состоит в возможности наиболее полно учесть свойства искомого решения за счет удачного выбора базисных функций. Существенные черты метода проявляются при численном решении линейных задач на собственные значения. Наиболее трудные проблемы связаны с численным (дискретным) нахождением участков непрерывного спектра и бесконечно-вырожденных собственных значений, когда одному собственному значению соответствует бесконечный набор собственных функций. Неудачный выбор конечных элементов может снять это вырождение, превратив точку в дискретный набор собственных значений, разбросанных по всей прямой («загрязнение спектра» при численном решении). Другой тип проблем связан с необходимостью точного учета резонансных явлений при численном решении. Для идеальных МГД-уравнений это означает, что вектор смещения в резонансных точках должен быть точно направлен вдоль силовой линии магнитного поля. Рецензируемая книга посвящена вопросам численного моделирования МГД-спектра колебаний бесконечно-проводящей плазмы.

Книга написана швейцарскими специалистами, успешно работающими более десяти последних лет над численным решением линейных идеальных МГД-уравнений для исследования устойчивости плазмы в установках термоядерного синтеза. Созданный ими на основе метода конечных элементов код ERATO является одним из наиболее признанных в мире точных и разработанных кодов.

Книга состоит из введения, семи глав и четырех приложений. Во введении дан полезный обзор численных кодов, используемых для исследования идеальной МГД-устойчивости плазмы. Показано основное отличие предлагаемого подхода от имеющихся.

В первой главе вводятся модельные задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих особенности. Обсуждается решение этих задач методом Галеркина с использованием в качестве базисных функций различных конформных и некомформных конечных элементов различной гладкости. Выделены основные численные проблемы, которые встречаются при решении задач для идеальных линеари-

зованных МГД-уравнений с помощью конечных элементов. Для того чтобы не загрязнить спектр следует по-разному аппроксимировать нормальную и тангенциальные компоненты собственной вектор-финкции, т. е. выбирать конечные элементы из разного функционального класса. Это условие выполняется, если выбирать базисные функции в пространстве, содержащем вырожденное решение, для которого дивергенция равна нулю. При подстановке разложения искомого решения по базисным конечным элементам в вариационный функционал исходная задача сводится к алгебраической задаче на собственные значения. Сложность основной матрицы и отсутствие у нее специальной трехдиагональной формы определяет основную трудоемкость вычислений и существенно снижает экономичность предлагаемого подхода.

Гл. 2 посвящена различным представлениям линейных уравнений магнитной гидродинамики и их вариационной формулировке. В гл. 3 обсуждаются свойства устойчивости в простой цилиндрической геометрии, когда гармоники разделяются. Здесь приведено шесть аналитических решений, используемых в качестве тестов для численных расчетов. Показано, что в этом случае спектр содержит непрерывные участки и дискретный набор с точкой вырождения. Проводится подробное сравнение характера сходимости численных собственных значений при различном выборе конечных элементов. В гл. 4 обсуждается переход к двумерным конечным элементам в цилиндрической геометрии. Предлагается решение сеточно-резонансной проблемы, возникающей в двумерном случае. Заметим, что более удачное решение этой проблемы реализовано в коде PEST, где двумерное решение предварительно раскладывается в ряд Фурье по угловой координате с последующим применением конечных элементов. В рецензируемой книге требуемая точность достигается за счет выбора гибридных конечных элементов. В гл. 5 описано применение метода в случае тороидальной геометрии и приведены основные уравнения кода. Здесь же обсуждаются физические результаты, касающиеся пределов устойчивости по параметру бета, равному отношению давления плазмы к давлению магнитного поля. В гл. 6 и 7 кратко демонстрируются возможности применения предложенных приемов к другим проблемам.

Особо следует остановиться на четырех приложениях. В них, в частности, приводится организация блочных вычислений с большими разреженными матрицами, получающимися при аппроксимации задач методом конечных элементов. Собственные значения находятся способом обратной итерации. Приведенные в приложении цифры говорят о грандиозности объема вычислений. При эффективном разбиении на блоки (обычно 80 блоков объемом 334×334) и декомпозиции исходной матрицы число передаваемых слов с диска в память около 10^8 и занимает основное время вычислений на супер-ЭВМ CRAY-1. Для отечественных машин такие затраты не приемлемы. В последнем приложении имеются листинги общих блоков кода ERATO. Прямое использование написанных программ затруднительно, т. к. требует обращения к стандартным программам машины CRAY-1.

Основным недостатком книги является диспропорция в расположении материала. Только половина книги содержит идейно насыщенный материал, вторая же часть включает излишне специализированные технические подробности в реализации различных приложений.

В целом рецензируемая книга представляет большой интерес для весьма широкого круга исследователей, особенно физиков, использующих численные методы. В ней собран большой практический материал и информация о многих математически доказанных положениях для метода конечных элементов. Книга дает полное представление о современных подходах к решению задач на собственные значения для дифференциальных уравнений, содержащих особенности в коэффициентах.

Ю. Н. Днестровский