

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.567

**АМПЛИТУДА, ФАЗА, ЧАСТОТА — ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ***Д. Е. Вакман, Л. А. Вайнштейн*

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	657
а) Однозначность (658). б) Медленность (659). в) Интегральный и дифференциальный характер (660).	
1. Определение амплитуды, фазы и частоты с помощью аналитического сигнала	661
а) Принцип суперпозиции (662). б) Принцип гармонического соответствия (663). в) Однородность по времени (стационарность) (663). г) Однородность по фазе (663). д) Однородность по частоте (663). е) Совпадение энергетических спектров (663).	
2. Аналитический сигнал и комплексная запись колебаний	663
3. Преобразование частоты и детектирование	666
4. Адиабатический инвариант и квазистационарное приближение	667
5. Генератор Ван дер Поля и его частотная нестабильность, вызванная фликкер-эффектом	669
6. Пассивное и активное формирование, асимптотические свойства широкополосных ЧМ колебаний	673
7. Асимптотические свойства узкополосных колебаний	676
8. Парадоксы и контрпримеры	677
а) Парадокс Робинсона (677). б) Ранние попытки частотной телефонии (678). в) Нарушение причинности (678). г) Логарифмическая сингулярность (679). д) Колебания без несущей (680).	
Заключение	681
Цитированная литература	681

— А можете Вы исчезать и появляться не так внезапно? А то у меня голова идет кругом.

— Хорошо, — сказал Кот и исчез, — на этот раз очень медленно. Первым исчез кончик его хвоста, а последней — улыбка. Она долго парила в воздухе, когда все остальное уже пропало.

— Д-да, — подумала Алиса. — Видала я котов без улыбок, но улыбка без кота? Такого я в жизни не встречала.

(*Льюис Каррол, Алиса в стране чудес*)

ВВЕДЕНИЕ

Данный обзор можно было бы также назвать «Аналитический сигнал в теории колебаний». Аналитический сигнал (АС), введенный в 1946 г. Габором^{1, 2}, позволяет однозначным образом определить амплитуду, фазу и частоту (АФЧ) любой вещественной функции времени — случайной или детерминированной, а в теории немонохроматических волновых полей —

интенсивность поля, функции когерентности и т. д. В теории шумов и частично когерентных полей понятие АС приобрело все права гражданства; по крайней мере стало ясно, что легче и проще ввести АС, чем обходиться без него³⁻¹⁰.

Между тем в теории колебаний, радиотехнике и в других областях, имеющих дело с детерминированными временными процессами, не сводящимися к строго гармоническим, понятия АФЧ употребляются обычно без точного определения, так что, например, фраза «частотная стабильность генератора составляет 10^{-10} за такое-то время» остается, строго говоря, нерасшифрованной.

Нужно ли определять амплитуду, фазу и частоту единообразно для всех случаев, причем с помощью преобразования Гильберта и АС, т. е. достаточно сложным путем? Для узкополосных колебаний АФЧ можно ввести, чисто интуитивно, с тем меньшей неопределенностью, чем уже эффективная полоса частот; с той же неопределенностью их можно измерить детектором, фазометром, частотомером и др. В то же время АС позволяет дать точное определение АФЧ, согласующееся — в разумных пределах — с их интуитивным смыслом и практическим применением. Целесообразность этого определения подтверждается, в частности, тем, что оно удовлетворяет трем важным требованиям.

а) Однозначность

Горелик¹¹ писал, что термин «синусоидальное колебание с медленно меняющейся амплитудой» внутренне противоречиво подобно «слегка изогнутой прямой линии», и отмечал¹², что по наблюдаемому процессу

$$u(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] = a(t) \cos \varphi(t) \quad (1)$$

нельзя однозначно указать амплитуду $a(t)$ и фазу $\varphi(t)$ — не ясно, как расчленить известную функцию u на сомножители a и $\cos \varphi$. Это становится вполне очевидным, если перейти к комплексной записи $w(t) = u(t) + iv(t)$, дополнив реальное колебание $u(t)$ произвольной мнимой частью $v(t)$; тогда

$$w(t) = a(t) e^{i\varphi(t)},$$

где амплитуда a , фаза φ и мгновенная частота $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ определяются выражениями

$$a(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}, \quad \varphi(t) = \arccos \frac{u(t)}{a(t)} = \arcsin \frac{v(t)}{a(t)}, \quad (2)$$

$$\omega(t) = \frac{\dot{v}(t)u(t) - \dot{u}(t)v(t)}{a^2(t)}.$$

Следовательно, у колебания (1) АФЧ столь же произвольны, как мнимая часть. Если мы хотим дать точное определение АФЧ, то мы должны указать оператор, ставящий в соответствие каждой функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

Без однозначного определения АФЧ становятся бессодержательными некоторые методы, использующие комплексную запись и претендующие на повышенную точность. Так, отклик $\tilde{w}(t)$ линейной цепи на модулированное колебание $w(t)$ часто вычисляют с помощью квазистационарного приближения

$$\tilde{w}(t) = K(i\omega(t))w(t), \quad (3)$$

а при недостаточно медленной модуляции — с помощью уточняющего асимптотического ряда¹³⁻¹⁵

$$\tilde{w}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n K(i\omega)}{d\omega^n} e^{i\omega t} \frac{d^n}{dt^n} [w(t) e^{-i\omega t}];$$

здесь $K(i\omega)$ — коэффициент передачи цепи, а $\omega(t)$ — мгновенная частота входного процесса (производная фазы), которую надо определить, прежде чем что-то вычислять и уточнять, иначе неизбежно превышение точности.

б) Медленность

Во многих случаях (в частности, при использовании квазистационарного приближения, см. выше) необходима медленность, плавность функций $a(t)$, $\Phi(t)$ и $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\Phi}(t)$. Такая плавность получается при решении многих задач, в частности, в нелинейной теории колебаний, когда применяется метод усреднения или родственные ему методы¹⁶⁻²⁰. Однако АФЧ, определяемые при этом, осмыслены только в рамках метода усреднения и не имеют более широкого значения.

Остановимся на этом подробнее. Пользуясь представлением колебаний на фазовой плоскости с координатами $(u, -\dot{u}/\omega_0)$, определяют АФЧ по положению изображающей точки в каждый момент, т. е. из системы уравнений

$$\begin{aligned} u(t) &= a(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)], \\ -\frac{\dot{u}(t)}{\omega_0} &= a(t) \sin[\omega_0 t + \Phi(t)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Это эквивалентно общему определению (2) при $v(t) = -\dot{u}(t)/\omega_0$. Из определения (4) следует однако, что для *любого* узкополосного колебания функции $a(t)$ и $\Phi(t)$ содержат быстрые компоненты частоты $2\omega_0$ и потому не являются медленными (по сравнению с $\cos \omega_0 t$ или $\sin \omega_0 t$).

Мы ограничимся простым примером. Для колебания с медленной амплитудной модуляцией (АМ)

$$u(t) = (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad \frac{\Omega}{\omega_0} = \varepsilon \ll 1$$

естественно положить $a = 1 + m \cos \Omega t$, $\varphi = \omega_0 t$. Но определение (4) приводит к другим выражениям: с точностью до членов порядка ε получаем

$$a(t) = 1 + m \cos \Omega t + \frac{\varepsilon}{2} m \sin \Omega t \sin 2\omega_0 t,$$

$$\Phi(t) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{m \sin \Omega t}{1 + m \cos \Omega t} (1 + \cos 2\omega_0 t).$$

Таким образом, в амплитуде и фазе имеются быстрые «вибрационные» члены, не присущие исходному колебанию и компенсирующие друг друга в произведении $u = a \cos \varphi$. Разумеется, при усреднении эти вибрации пропадают и получаются плавные функции a и Φ . Однако вибрационные поправки необходимо учитывать уже в первом (по ε) приближении, их приходится дополнительно находить²¹, а нередко и *переопределять* АФЧ.

Неудачное определение АФЧ, подобное (4), особенно затрудняет построение высших приближений. Оказывается, что АС приводит к медленным АФЧ, согласующимся при соответствующих условиях с интуитивной трактовкой и позволяющим легко решать колебательные задачи (гл. 4 и 5).

в) Интегральный и дифференциальный характер

Хотя АФЧ принимают какие-то значения в каждый момент, на самом деле они имеют интегральный характер и характеризуют процесс $u(t)$ в некотором временном интервале, более строго — на всей временной оси, при $-\infty < t < \infty$. Эта ситуация известна давно: Мандельштам²⁴ указывал, что нельзя понять колебательные явления, не зная всей формы колебания, всего протекания процесса во времени.

На первый взгляд, мы приходим здесь к противоречию с привычными дифференциальными (локальными) представлениями, на которых основаны многие приборы и устройства. Все следящие системы для автоподстройки частоты или фазы, авторегулировки усиления, обычные амплитудные детекторы, дискриминаторы, ограничители и т. д., — все эти приборы основаны на том, казалось бы бесспорном, утверждении, что мгновенную частоту и амплитуду можно измерить и изменить (подстроить, ограничить) в каждый момент, не зная всего протекания процесса. С другой стороны, попытки определить АФЧ как чисто дифференциальные величины, через значения u и $\dot{u}$ в данный момент, например, с помощью формул (4), не приводят к удовлетворительным результатам. Иногда же получается явный абсурд — мгновенная частота принимает мнимые значения, изменяется от 0 до ∞ в каждом периоде и т. п.²⁵

Это противоречие преодолевается аналитическим сигналом. Интегральный характер АФЧ находит отражение в преобразовании Гильберта (гл. 1), где интегрирование выполняется по всей оси времени. Однако во многих случаях оказывается возможным *приближенное* определение АФЧ, при котором главный вклад в интеграл вносят малые (но не слишком малые!) участки во временной или в спектральной области (см. гл. 6). Тогда эти понятия приобретают квазилокальный характер.

Ситуация аналогична переходу от волн к лучам в оптике. Одни радиотехнические приборы — преобразователи частоты, некоторые модуляторы — подобны интерферометру или спектро스코пу в том смысле, что они опираются на интегральные (волновые) понятия, другие же — упомянутые следящие устройства — аналогичны телескопу или микроскопу, основанным на локальных (лучевых) представлениях. Приборы и устройства последней группы могут успешно работать лишь тогда, когда интегральные понятия асимптотически вырождаются (волны переходят в лучи). Анализ соответствующих условий объясняет некоторые парадоксы теории колебаний, а также характерные особенности ряда современных радиосистем (см. гл. 8).

Заметим, что a и Φ можно определить с помощью «скользящего» усреднения по времени

$$a(t) e^{i\Phi(t)} = 2\overline{u(t)} e^{-i\omega_0 t} \quad (5)$$

(подробности см. в гл. 8). Для узкополосных колебаний это определение и АС дают близкие результаты, но при расширении полосы (например, при частотной модуляции) определение (5) становится неоднозначным и непригодным, в то время как определение с помощью АС сохраняет силу и наглядность (см. гл. 6).

Ниже мы практически не будем касаться случайных процессов (шумов), где, как уже отмечалось, АС давно занял подобающее место. Однако,

в сущности, нет принципиальной разницы между регулярным сигналом и конкретной реализацией шума: сигнал может быть «шумоподобным», шум — «сигналоподобным». Это лишний раз говорит в пользу применения АС не только к шумам, но и к детерминированным сигналам.

Когда данная статья была почти готова, вышло новое издание книги Рытова²⁰, в которой широко применяется АС, но на равных правах применяется определение (4), комплексная запись колебаний (см. ниже гл. 2) и усреднение во времени (АС делает его излишним; см. ниже, гл. 2, 5, 8). Наша позиция более радикальна: мы считаем, что АС дает универсальное определение АФЧ, а другие определения, вообще говоря допустимые, применимы лишь постольку, поскольку они согласуются с АС. Имеется ряд контрпримеров (видеоимпульсы и колебания без четко выраженной несущей), когда сами понятия АФЧ представляются малополезными, однако даже в таких случаях введение АФЧ посредством АС может иметь смысл (гл. 8).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ, ФАЗЫ И ЧАСТОТЫ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Строго гармоническое колебание частоты ω задается при $-\infty < t < \infty$ выражениями

$$u(t) = x \cos \omega t - y \sin \omega t = a \cos(\omega t + \Phi) = a \cos \varphi, \quad (1.1)$$

где x , y , a , Φ , ω — вещественные постоянные (без ограничения общности мы полагаем $a > 0$ и $\omega > 0$), связанные между собой соотношениями

$$\begin{aligned} x &= a \cos \Phi, \quad y = a \sin \Phi, \quad a = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \Phi &= \arccos \frac{x}{a} = \arcsin \frac{y}{a}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Принято называть a амплитудой, φ — фазой, $\omega = \dot{\varphi}$ — частотой, x и y (квадратурными) компонентами амплитуды. Комплексная запись колебания (1.1)

$$w(t) = ae^{i(\omega t + \Phi)}$$

получается при дополнении колебания $u(t)$ мнимой частью

$$v(t) = a \sin(\omega t + \Phi),$$

отличающейся от $u(t)$ поворотом фазы на $-\pi/2$.

Преобразование Гильберта обобщает это правило на произвольные функции: если $u(t)$ есть суперпозиция гармонических колебаний, то функция $v(t)$, сопряженная ей по Гильберту, есть суперпозиция тех же колебаний, сдвинутых по фазе на $-\pi/2$. В частности, если $u(t)$ представима интегралом Фурье, то

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [U_c(\omega) \cos \omega t + U_s(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (1.3)$$

$$v(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [U_c(\omega) \sin \omega t - U_s(\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (1.4)$$

Во временной области это преобразование имеет вид²⁶

$$v(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{u(s)}{t-s} ds, \quad (1.5)$$

причем интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Выражение (1.5) применимо и для периодических функций (которые представляются рядами Фурье) и для случайных процессов (представляемых интегралами Фурье — Стилтеса²⁰). Связь между формулами (1.4) и (1.5) легче всего установить, пользуясь свойствами а — б) (см. ниже).

Соотношение (1.5) можно записать в символическом виде

$$v = H[u], \quad u = -H[v], \quad (1.6)$$

причем второе соотношение следует из того, что двойное преобразование Гильберта сдвигает все фазы на $-\pi$.

Как мы видим, преобразование Гильберта может быть осуществлено с помощью идеального фазовращателя на $-\pi/2$ (в реальном времени это можно сделать лишь приближенно; для сигнала, известного на всем протяжении, при $-\infty < t < \infty$, — с произвольно высокой точностью).

Функции $u(t)$ и $v(t)$ позволяют образовать *аналитический сигнал*, который в случае интеграла Фурье (1.3) имеет вид

$$w(t) = u(t) + iv(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad U(\omega) = U_c(\omega) - iU_s(\omega), \quad (1.7)$$

и в соответствии с формулами (2) мы определяем амплитуду $a(t)$, фазу $\varphi(t)$ и мгновенную частоту $\omega(t)$ колебания $u(t)$.

В дальнейшем мы покажем плодотворность этих определений с математической, физической и технической точек зрения. Полезно, однако, иметь в виду следующее:

1) Мы не утверждаем, что для всякой функции $u(t)$ следует вводить понятия АФЧ; их целесообразность определяется существом задачи.

2) Определив для данного колебания амплитуду (огibaющую) согласно (1.3) — (1.7), мы считаем ее объективной характеристикой колебания, которую детектор той или иной конструкции воспроизводит с той или иной погрешностью. Конечно, можно отказаться от такого подхода и считать, что огibaющая возникает только в результате детектирования, но тогда данный сигнал будет иметь сколько угодно огibaющих — каждому детектору соответствует своя. Сказанное относится также к фазе и частоте.

3) Термин «аналитический сигнал» объясняется тем, что в интеграле (1.7) можно считать переменную t комплексной и представлять функцию $w(t)$ в виде

$$w(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{t-s} ds, \quad t = \xi + i\eta, \quad (1.8)$$

обходя точку $s=t$ снизу. Тогда $w(t)$ есть аналитическая функция в верхней полуплоскости $\eta > 0$, убывающая при $|t| \rightarrow \infty$ как $\frac{1}{t}$ или быстрее. Ее вещественная и мнимая части (u и v) являются сопряженными гармоническими функциями, связанными условиями Коши — Римана. Функция $w^*(t) = u(t) - iv(t)$ обладает такими же свойствами в нижней полуплоскости. Все это показывает, что функция v , которую мы приводим в соответствие функции u с помощью преобразования Гильберта, в некотором смысле наилучшим образом «подогнана» к u ; другие способы подгонки являются более грубыми (см. гл. 2).

Перечислим основные свойства преобразования Гильберта (1.5) и АС.

а) Принцип суперпозиции

Оператор H линеен, т. е.

$$H\left[\sum_n c_n u_n\right] = \sum_n c_n H[u_n],$$

где c_n — произвольные числа, u_n — произвольные функции, для которых $H[u_n]$ имеет смысл.

б) Принцип гармонического соответствия

Если $u(t)$ — гармоническое колебание (1.1), то

$$\begin{aligned} v(t) &= x \sin \omega t + y \cos \omega t = a \sin(\omega t + \Phi), \\ w(t) &= (x + iy) e^{i\omega t} = a e^{i(\omega t + \Phi)}, \end{aligned}$$

откуда снова следуют соотношения (1.2). Эти соотношения вытекают из тождеств

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega s}{s} ds = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega s}{s} ds = \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega = 0, \\ -1 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

в) Однородность по времени (стационарность)

Если $u(t)$ заменить на $u(t - t_0)$ ($t_0 = \text{const}$ — произвольная задержка), то $v(t)$ заменится на $v(t - t_0)$, а $w(t)$ — на $w(t - t_0)$. Это означает, что преобразование Гильберта перестановочно с любым преобразованием, однородным во времени, например, с дифференцированием по t :

$$\mathcal{H}\left[\frac{du}{dt}\right] = \frac{d}{dt} \mathcal{H}[u], \quad \mathcal{H}\left[\frac{d^2 u}{dt^2}\right] = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{H}[u] \text{ и т. д.}$$

г) Однородность по фазе

Если в спектральном разложении $u(t)$ все фазы ωt заменить на $\omega t + \theta$ ($\theta = \text{const}$), то получим $u(t, \theta)$ вместо $u(t)$ и $w(t, \theta)$ вместо $w(t)$, причем

$$w(t, \theta) = w(t) e^{i\theta},$$

т. е. огибающая и частота останутся неизменными, а мгновенная фаза получит (постоянный) сдвиг θ .

д) Однородность по частоте

Если в спектральном разложении все фазы ωt заменить на $(\omega + p)t$ ($p = \text{const} > 0$), то получим АС $w(t, p)$, причем

$$w(t, p) = w(t) e^{ipt},$$

т. е. огибающая не изменится, а мгновенная частота сместится на p . Преобразование такого рода осуществляет идеальный смеситель (гл. 3).

е) Совпадение энергетических спектров

Как следует из выражений (1.3)—(1.4), функции u и v имеют один и тот же энергетический спектр

$$|U(\omega)|^2 = U_c^2(\omega) + U_s^2(\omega).$$

Согласно формуле (1.7) АС представляется интегралом Фурье, распространяемым только на положительные частоты. Это — примечательно, так как только положительные частоты имеют физический смысл.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ И КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ КОЛЕБАНИЙ

Вещественные колебания вида (1) часто представляют комплексными функциями, формально заменяя $\cos(\omega_0 t + \Phi)$ на $e^{i(\omega_0 t + \Phi)}$. Например, гауссову и прямоугольному радиоимпульсам

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}T} e^{-t^2/2T^2} \cos \omega_0 t, \quad u(t) = \frac{1}{2T} \Pi(t) \cos \omega_0 t, \quad (2.1)$$

где $\Pi(t) = 1$ при $|t| < T$ и $\Pi(t) = 0$ при $|t| > T$, сопоставляют комплексные функции

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} T} e^{-(t^2/2T^2) + i\omega_0 t}, \quad f(t) = \frac{1}{2T} \Pi(t) e^{i\omega_0 t}, \quad (2.2)$$

отличающиеся от соответствующих АС. При этом неявно утверждается, что амплитуда колебания (2.1) есть $|f(t)|$, и, на первый взгляд, это представляется более естественным, чем определение посредством (1.7). Построенный таким образом «комплексный сигнал» $f(t)$ конкурирует с аналитическим.

Функция $f(t)$ представляется интегралом Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.3)$$

где для импульсов (2.1)

$$F(\omega) = e^{-1/2(\omega - \omega_0)^2 T^2}, \quad F(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{(\omega - \omega_0)T}, \quad (2.4)$$

причем спектр $U(\omega)$, соответствующий АС (1.7), связан с $F(\omega)$ соотношением

$$U(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega) + F^*(-\omega)]. \quad (2.5)$$

Комплексная запись, использующая $f(t)$, имеет следующие недостатки:

1) Мы можем определить $f(t)$ и $F(\omega)$ только при условии, что исходная функция $u(t)$ задана формулой $a(t) \cos \varphi(t)$, т. е. выполнено разделение на амплитудный и колебательный множители (что, как мы знаем, неоднозначно); если же $u(t)$ задана графиком, осциллограммой или таблицей, $f(t)$ нельзя построить без дополнительных предположений.

2) Энергетический спектр функции $\text{Im } f(t)$, которой мы дополняем $u(t)$ согласно формулам (2.2) — (2.4), не совпадает с энергетическим спектром $u(t)$, поскольку

$$|F(\omega) + F^*(-\omega)|^2 \neq |F(\omega) - F^*(-\omega)|^2.$$

Таким образом, функция $v = \text{H}[u]$ дополняет функцию u более естественным и общим образом, чем функция $\text{Im } f(t)$.

В гл. 1 мы сформулировали свойства а — е) аналитического сигнала; теперь можно добавить к ним следующее:

ж) Отличие АС от функции $f(t)$ дается неравенством

$$|f(t) - w(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^0 [F(\omega) e^{i\omega t} - F^*(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 |F(\omega)| d\omega. \quad (2.6)$$

Если, как в примерах (2.1), спектр $U(\omega)$ сконцентрирован около частоты ω_0 , то с увеличением ω_0 или с уменьшением ширины полосы $\delta\omega \sim 1/T$ это отличие уменьшается. Однако точное совпадение $f(t)$ и $w(t)$ имеет место лишь тогда, когда $F(\omega) = 0$ при $\omega < 0$.

Сформулируем это условие иначе. В силу свойств а—б) при $0 < \Omega < \omega_0$ мы имеем

$$\begin{aligned} H[\cos \Omega t \cos \omega_0 t] &= \frac{1}{2} H[\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t] = \\ &= \frac{1}{2} [\sin(\omega_0 + \Omega)t + \sin(\omega_0 - \Omega)t] = \cos \Omega t \sin \omega_0 t = \cos \Omega t H[\cos \omega_0 t], \end{aligned}$$

т. е. медленную функцию $\cos \Omega t$ можно вынести за знак оператора Гильберта. Очевидное обобщение этого дает следующее свойство:

з) Квадратурные компоненты $x(t)$ и $y(t)$ можно выносить за знак преобразования Гильберта, если их спектр не содержит частот выше ω_0 , т. е.

$$u(t) = x(t) \cos \omega_0 t - y(t) \sin \omega_0 t, \quad (2.7)$$

$$v(t) = x(t) \sin \omega_0 t + y(t) \cos \omega_0 t,$$

если u и v связаны соотношениями (1.5)—(1.6).

Мы получили важное обобщение формул (1.2): при образовании АФЧ медленные функции $x(t)$ и $y(t)$ (в смысле непересечения их спектров с ω_0) играют такую же роль, как постоянные; они определяют

$$a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad \Phi(t) = \arccos \frac{x(t)}{a(t)} = \arcsin \frac{y(t)}{a(t)}. \quad (2.8)$$

Наконец, для произведения $u(t) = x(t)z(t)$, обобщая (2.7), нетрудно получить свойство²⁷:

и) Медленный (низкочастотный) множитель $x(t)$ можно вынести за знак преобразования Гильберта, если его спектр не пересекается со спектром высокочастотного (быстрого) множителя $z(t)$, т. е.

$$H[xz] = xH[z]. \quad (2.9)$$

Это свойство аналогично усреднению (где тоже медленные множители выносятся), но, заменив усреднение преобразованием Гильберта, мы уточняем и существенно расширяем понятие медленной функции; например, можно считать «медленным» модулирующее колебание частоты 999 гц при несущей 1 кгц. Это полезно при решении конкретных задач (см. гл. 4, 5).

На практике спектры функций $x(t)$ и $y(t)$ в формулах (2.7) могут слегка «переливаться» за частоту ω_0 , а спектры функций $x(t)$ и $z(t)$ в формуле (2.9) — слегка пересекаться. В этом случае мы имеем неравенства

$$\begin{aligned} |v - H[u]| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} [|X(\omega)| + |Y(\omega)|] d\omega, \\ |xH[z] - H[xz]| &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} |X(\omega)| d\omega \int_0^{\omega} |Z(v)| dv, \end{aligned} \quad (2.10)$$

аналогичные неравенству (2.6); здесь функция v определяется второй формулой (2.7), а $X(\omega)$, $Y(\omega)$ и $Z(\omega)$ суть спектры функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ соответственно; см. формулу (2.3).

Некоторые свойства АС, кажущиеся на первый взгляд парадоксальными, будут рассмотрены ниже, в гл. 8; расчеты АС можно найти в статье²⁸.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ И ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Оказывается, что функционирование многих радиотехнических устройств опирается на АС, хотя они были предложены без всякой связи с АС и даже задолго до введения АС.

Начнем с преобразования частоты²⁹. Преобразователь частоты — смеситель — есть линейное устройство, состоящее из перемножителя и фильтра (рис. 1, а) и осуществляющее, в общепринятой идеализации,

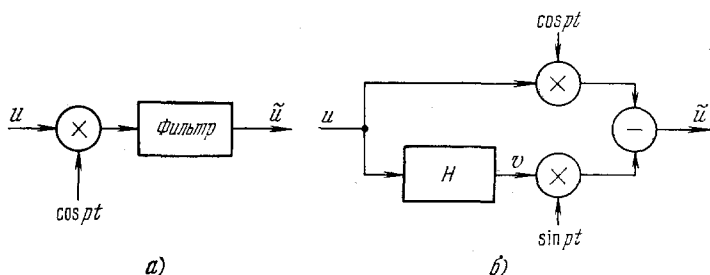


Рис. 1. Две схемы преобразователя частоты.

сдвиг спектра на частоту опорного колебания p . Представив входное колебание формулой (1.3), мы можем записать преобразованное колебание $\tilde{u}(t)$, заменив (при преобразовании частоты вверх) ω на $\omega + p$. Элементарные выкладки дают

$$\tilde{u}(t) = u(t) \cos pt - v(t) \sin pt, \quad (3.1)$$

причем сопряженная по Гильберту функция $v(t)$, соответствующая формуле (1.4), здесь обусловлена схемой смесителя. Формула (3.1) показывает, что преобразователь частоты можно выполнить иначе — по схеме на рис. 1, б, содержащей оператор Гильберта (фазовращатель); такой вариант практически используется в балансных смесителях и в однополосных модуляторах⁵.

Применяя смеситель в супергетеродинном приемнике или для сравнения измеряемой частоты с эталонной, мы всегда *предполагаем*, что амплитуда сигнала (оглабющая) и изменения мгновенной частоты сохраняются:

$$\text{если } u(t) = a(t) \cos \varphi(t), \text{ то } \tilde{u}(t) = a(t) \cos [\varphi(t) + pt]. \quad (3.2)$$

Но если это справедливо в некотором диапазоне изменения p , то отсюда следует, что $a \cos \varphi$ и $a \sin \varphi$, фигурирующие здесь, совпадают соответственно с u и v в формуле (3.1), т. е. смеситель сохраняет нужные нам свойства сигнала, только если они определены через АС.

Сказанное означает, что, применив смеситель в измерителе частоты для контроля стабильности кварцевого генератора, мы *должны* далее измерять частоту, определенную аналитическим сигналом, иначе неизбежны дополнительные искажения. Больше того, супергетеродинный приемник (изобретен в 1918 г.) удовлетворительно воспроизводит сообщения потому, что на передающем конце эти сообщения модулируют амплитуду или частоту, определенную посредством АС, по крайней мере с необходимой точностью.

Это подтверждается при рассмотрении работы модуляторов. В частности, детальный анализ работы частотного модулятора Армстронга приводит к выводу²⁹, что уже в первой системе частотной телефонии (1936 г.) осуществлялась модуляция частоты, определенной посредством АС (см. также ниже гл. 5).

Предыдущие условия можно ослабить, потребовав инвариантности только амплитуды или только изменений частоты, а также рассматривая вариации не частоты опорного колебания, а его начальной фазы³⁰: во всех случаях мы с неизбежностью приходим к тем же понятиям АФЧ.

Разберем теперь действие квадратичного детектора. Колебание

$$u(t) = \frac{1}{2} w(t) + \frac{1}{2} w^*(t) \quad (3.3)$$

после возведения в квадрат дает

$$u^2(t) = \frac{1}{2} a^2(t) + \frac{1}{4} w^2(t) + \frac{1}{4} w^{*2}(t) \quad (a^2 = ww^*), \quad (3.4)$$

причем после фильтра остается только первое слагаемое, т. е. квадрат огибающей. Обычно считают, что детектирование может осуществляться только при условии, когда спектр $u(t)$ сосредоточен около несущей частоты ω_0 в полосе, узкой по сравнению с ω_0 (штриховые линии на рис. 2). Фактически необходимо лишь, чтобы спектр $u(t)$ не выходил за пределы $\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{3\omega_0}{2}$; тогда низкочастотная и высокочастотная части спектра $u^2(t)$ не будут перекрываться (рис. 2, сплошные линии) и в принципе возможно их разделение: выделение низкочастотной части — это детектирование, выделение высокочастотной — умножение частоты.

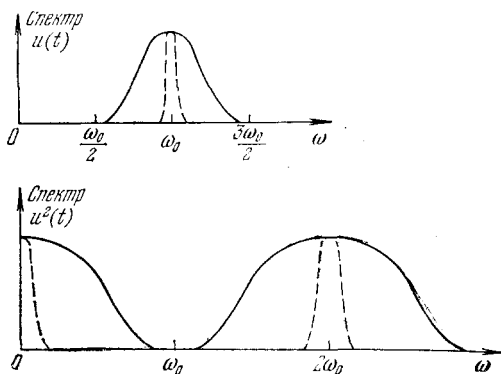


Рис. 2. К теории квадратичного детектора.

Если спектры перекрываются, детектор вносит искажения; поэтому, учитывая свойство 3) АС, мы пришли к выводу: правильно функционирующий квадратичный детектор выделяет интенсивность $I(t) = \frac{1}{2} a^2(t)$, определяемую через АС (то же справедливо для термистора и фотоумножителя); на этом, в частности, основан принцип действия интерферометра Брауна — Твисса²⁰.

4. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ И КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим колебание, подчиняющееся уравнению

$$\ddot{u}(t) + \Omega^2(t) u(t) = 0, \quad (4.1)$$

где функция $\Omega^2(t)$ изменяется медленно (по сравнению с $u(t)$; оценки даны ниже). Это уравнение описывает, например, движение маятника переменной длины, причем, как известно, при медленном возмущающем воздействии амплитуда и частота колебаний связаны условием адиабатической инвариантности^{18, 31}

$$J = a^2(t) \omega(t) = \text{const}. \quad (4.2)$$

Однако это условие выполняется, если a и ω определены через АС, и не выполняется при традиционном определении (4); что представляется веским доводом в пользу аналитического сигнала.

Чтобы перейти к АС, применим к обеим частям (4.1) преобразование Гильберта. Используя свойства в), и), получим для $v = H[u]$ такое же уравнение; поэтому АС подчиняется уравнению

$$\ddot{w}(t) + \Omega^2(t) w(t) = 0, \quad (4.3)$$

для которого условие (4.2) выполняется *точно*; чтобы убедиться в этом, достаточно умножить (4.3) на w^* и взять мнимую часть.

Уравнение (4.3) можно трактовать как уравнение движения точки в плоскости u, v под действием центральной силы (зависящей от t), тогда условие (4.2) есть закон площадей Кеплера. Ища решение уравнения (4.3) в виде

$$w(t) = \sqrt{\frac{J}{\omega(t)}} e^{i\varphi(t)}, \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega(s) ds + \varphi_0, \quad (4.4)$$

мы получаем для $\omega(t)$ уравнение

$$\omega^2 + \frac{\ddot{\omega}}{2\omega} - \frac{3\dot{\omega}^2}{4\omega^2} = \Omega^2, \quad (4.5)$$

и если положим $\omega = \Omega$ (при $\Omega > 0$ значение $\omega = -\Omega$ нам не нужно, так как АС соответствует положительным частотам; см. гл. 1), то получим приближение ВКБ³².

Мы допустим две погрешности. Во-первых, свойство и) выполняется точно, когда спектры $u(t)$ и $\Omega^2(t)$ не пересекаются; в общем случае это не так, но при медленной $\Omega(t)$ спектры пересекаются слабо, «на хвостах», и эту погрешность легко оценить, пользуясь неравенствами (2.10). Если понимать медленность в том смысле, что функция зависит от t через «медленное время» $t' = \varepsilon t$ при $\varepsilon \ll 1$, и считать, что медленные функции $\Omega(t')$, $a(t')$ и $\Phi(t')$ имеют производные до m -й включительно, то погрешность уравнения (4.3) будет порядка ε^{m+1} . Вторая погрешность, связанная с заменой ω на Ω в решении (4.4), порядка ε^{m+2} , если $\Omega^2 = 1 + \varepsilon^m g(\varepsilon t)$, т. е. если Ω^2 изменяется медленно и (при $m > 0$) мало.

Необходимо отметить, что, используя определение (4), мы получим для колебания (4.1) амплитуду и фазу, не согласующиеся с условием (4.2); лишь после введения поправок и переопределений АФЧ (по существу означающих использование АС) мы приходим к адиабатическому инварианту.

Мы показали, что АС позволяет перейти от вещественного уравнения (4.1) к комплексному уравнению (4.3). Можно показать обратное: если мы заменим уравнение (4.1) комплексным аналогом (4.3) и получаем решение $w = u + iv$ с медленными $a(t)$ и $\Phi(t)$, то w есть АС. Доказательство опирается на свойства а) и в) (см. ниже), а также на принцип гармонического соответствия (свойство б)), при нарушении которого для гармонического колебания u получают быстро осциллирующие амплитуда и фаза. Применительно к ЧМ такой подход использовал Карсон³³ еще в 1922 г. В недавней книге по нелинейным колебаниям²² также неявно используется АС.

Рассмотрим теперь вещественное линейное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) u = u = a(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] \quad (4.6)$$

и его комплексный аналог

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) \tilde{w} = w = a(t) e^{i[\omega_0 t + \Phi(t)]}, \quad (4.7)$$

имеющий в квазистационарном приближении решение (3), где $K(i\omega) = 1/L(i\omega)$. При $L(i\omega) = -\omega^2 + i\alpha\omega + \omega_0^2$ это уравнение описывает, в частности, прохождение ЧМ колебания через контур частотного дискриминатора, а в случае $K(i\omega) = 1 - k e^{-i\omega\tau}$, $0 < k < 1$ — через интерферо-

метр Берштейна^{19, 20}; при медленности $\Phi(t)$ частотные изменения преобразуются в амплитудные, что широко используется в частотных детекторах и измерителях.

На первый взгляд кажется, что комплексное уравнение (4.7) получается из исходного уравнения (4.6) без участия АС. На самом деле это не так. Поскольку преобразуемые в дискриминаторе АФЧ должны пониматься как объективно *измеряемые* параметры, уравнение (4.7) должно быть получено из (4.6) применением некоторого оператора H , связывающего u и v и не зависящего от конкретной формы колебания. Сравнивая левые части уравнений, мы замечаем, что оператор линеен и перестановочен с дифференцированием (свойства a и b), гл. 1), т. е. он соответствует стационарному фильтру с некоторым коэффициентом передачи $H(i\omega)$. С другой стороны, рассматривая преобразование правых частей и вводя квадратурные компоненты согласно формулам (2.8), мы приходим к соотношению

$$H'_i(i\omega) = -i \frac{Z(\omega - \omega_0) - Z^*(\omega + \omega_0)}{Z(\omega - \omega_0) + Z^*(\omega + \omega_0)}, \quad Z'_i(\omega) = X_i(\omega) + iY_i(\omega). \quad (4.8)$$

Независимость от $u(t)$, т. е. от $Z(\omega)$, имеет место, только если спектры $Z(\omega - \omega_0)$ и $Z(\omega + \omega_0)$ не пересекаются, и тогда (4.8) дает преобразование Гильберта: $H(i\omega) = -i \operatorname{sgn} \omega$.

Таким образом, квазистационарное приближение (3) также характеризуется двумя погрешностями: связанной с пересечением спектров погрешностью *уравнения* (4.7) и погрешностью его *решения*, имеющей порядок ε , если a и Φ зависят от et . Последняя может быть уменьшена (см. введение), но уточнения теряют смысл, если погрешность из-за пересечения спектров велика; впрочем, эта погрешность нередко меньше, чем другие.

Когда мы применяем — в характерных условиях медленности и широкополосности — квазистационарные рассуждения для оценки АФЧ (a не самого колебания), мы *неявно* используем АС. Частотный дискриминатор — типичный квазистационарный прибор, поэтому он *не* измеряет частоту АС.

5. ГЕНЕРАТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ И ЕГО ЧАСТОТНАЯ НЕСТАБИЛЬНОСТЬ, ВЫЗВАННАЯ ФЛИККЕР-ЭФФЕКТОМ!

Несмотря на актуальность проблемы и обилие литературы, частотная стабильность обычных ламповых генераторов не исследована с необходимой полнотой. Изучены лишь те возмущающие факторы, которые допускают анализ в рамках первого приближения по ε . К таким эффектам первого порядка относятся естественные флуктуации, обусловленные аддитивным шумом (тепловым и дробовым), флуктуации амплитуды, вызываемые фликкерным шумом, флуктуации частоты, вызываемые случайными изменениями емкости контура, и некоторые другие. Однако эти эффекты не всегда определяют практическую стабильность. В частности, естественные флуктуации приводят лишь к незначительному расширению спектральной линии (порядка 10^{-15}), а флуктуации емкости характерны только для некоторых малостабильных генераторов¹⁹. Мы исследуем ниже флуктуации частоты, обусловленные фликкерным шумом лампы; они проявляются лишь во втором приближении, построение которого требует более аккуратного, чем обычно, определения АФЧ.

Рассмотрим генератор Ван дер Поля, в котором крутизна лампы S и емкость контура C медленно изменяются во времени (рис. 3)

$$S(t) = S_0 [1 + \xi(t)], \quad C(t) = C_0 [1 + \eta(t)], \quad \xi \ll 1, \quad \eta \ll 1, \quad (5.1)$$

причем малые флуктуации крутизны вызваны фликкер-шумом. Для мягкого режима генерации (кубическая характеристика лампы) уравнение колебаний приводится к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \Omega^2(t) u = \varepsilon \frac{d}{dt} \left\{ \psi(t) \left[\chi(t) u - \frac{1}{3} u^3 \right] \right\}. \quad (5.2)$$

где введено безразмерное время $\omega_0 t$ и использованы обозначения

$$\varepsilon = \frac{p}{Q} \ll 1, \quad p = kRS_0 - 1, \quad \Omega^2(t) = \frac{C_0}{C(t)} = 1 - \eta(t), \quad (5.3)$$

$$\psi(t) = 1 + \xi(t) - 3\eta(t), \quad \chi(t) = 1 + \frac{\xi(t)}{p} + 2\eta(t);$$

здесь Q — добротность контура, $k = M/L$ — коэффициент связи, p — прочность предельного цикла; для некоторого упрощения формул мы произвели линеаризацию по малым возмущениям ξ и η . Если возмущения отсутствуют ($\xi = \eta = 0$, $\Omega = \psi = \chi = 1$), то уравнение (5.2) принимает простой вид

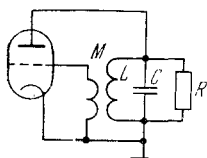


Рис. 3. Триодный генератор.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon \frac{d}{dt} \left(u - \frac{1}{3} u^3 \right). \quad (5.4)$$

Это — уравнение Ван дер Поля, которое решалось самыми разнообразными методами (см. ¹⁶⁻²¹). Будем искать решение уравнения (5.2) в виде

$$u(t) = u_1(t) + \varepsilon u_3(t) + \varepsilon^2 u_5(t) + \dots, \quad (5.5)$$

$$u_1(t) = a(t) \cos \varphi(t),$$

$$u_n(t) = x_n(t) \cos [n\varphi(t)] - y_n(t) \sin [n\varphi(t)] \quad (n = 3, 5, \dots).$$

Функции $a(t)$, $x_n(t)$ и $y_n(t)$ мы считаем медленными, зависящими от медленного времени εt , поэтому их производные имеют порядок ε , а спектры можно считать непересекающимися с высокочастотным спектром колебаний $u(t)$ и $\cos \varphi$ или $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ (см. гл. 4). Такие же условия налагаются на функции Ω , ψ и χ в уравнении (5.2).

Уравнение первого приближения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \Omega^2 u = \varepsilon \frac{d}{dt} \left\{ \psi \left[\chi u_1 - \frac{1}{3} u_1^3 \right] \right\} = \varepsilon \frac{d}{dt} \left\{ \psi \left[\left(\chi - \frac{1}{4} a^2 \right) a \cos \varphi - \frac{1}{12} a^3 \cos 3\varphi \right] \right\}$$

получается при подстановке разложения (5.5) в уравнение (5.2) и учете членов порядка ε . Применим к нему преобразование Гильберта; все медленные функции выносятся, и, как в гл. 4, мы получаем для $w = w_1 + \varepsilon w_3$ уравнение

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \Omega^2 w = \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\gamma w_1 - \frac{1}{12} \psi w_1^3 \right), \quad (5.6)$$

где

$$\gamma = \psi \cdot \left(\chi - \frac{1}{4} a^2 \right). \quad (5.7)$$

При медленном изменении a и φ спектры АС w_1 и w_3 практически не пересекаются. Поэтому, отделив колебания разных частот, мы

приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d^2 w_1}{dt^2} + \Omega^2 w_1 &= \varepsilon \frac{d}{dt} (\gamma w_1), \\ \frac{d^2 w_3}{dt^2} + \Omega^2 w_3 &= -\frac{1}{12} \frac{d}{dt} (\psi w_1^3).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Здесь первое уравнение нелинейно (γ зависит от a), из него нетрудно (умножая на w_1^* и взяв мнимую часть, как в гл. 4) получить уравнение для адиабатического инварианта $J = a^2 \omega$, а именно,

$$\dot{J} = \varepsilon \gamma J, \quad \text{или} \quad \dot{J} = \varepsilon \psi \left(\chi - \frac{1}{4\omega} J \right) J; \quad (5.9)$$

частота ω определяется уравнением

$$\omega^2 + \frac{\ddot{\omega}}{2\omega} - \frac{3\dot{\omega}^2}{4\omega^2} = \Omega^2 - \frac{\varepsilon}{2} \left(\dot{\gamma} + \frac{\varepsilon}{2} \gamma^2 \right), \quad (5.10)$$

аналогичным (4.5), причем $\omega = \Omega$ с погрешностью порядка ε^2 . Это значит, что в первом приближении амплитудная и частотная модуляции (АМ и ЧМ) триодного генератора при медленном изменении резонансной частоты его контура связаны так же, как в линейной системе, рассмотренной в гл. 4. Когда возмущения отсутствуют, т. е. $\Omega = \psi = \chi = 1$, (5.9) переходит в укороченное уравнение Ван дер Поля

$$\frac{da^2}{dt} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a^2. \quad (5.11)$$

Мы пришли к результатам Ван дер Поля существенно новым путем — не пользуясь усреднением. Одновременно мы показали, что определяемая из укороченного уравнения изменяющаяся амплитуда $a(t)$, обычно трактуемая лишь как приближение, требующее вибрационных поправок²¹, есть на самом деле абсолютная величина АС $w_1(t)$; это верно, как мы увидим ниже, и во втором приближении.

Уравнение (5.9) обобщает решение Ван дер Поля на генератор с переменными параметрами (5.2). Оно определяет величину, инвариантную в адиабатических условиях, но изменяющуюся при нарушении адиабатичности. Если возмущения медленны, то

$$J = \text{const}, \quad \gamma(t) = 0, \quad a^2(t) = 4\chi(t). \quad (5.12)$$

Второе уравнение (5.8) определяет третью гармонику; в данном приближении имеем

$$w_3 = i \frac{\psi w_1^3}{32\Omega}. \quad (5.13)$$

Поправка на частоту, вызванная флуктуациями тока, т. е. функцией $\xi(t)$, возникает лишь во втором приближении. Чтобы найти ее, нужно, подставляя разложение (5.5) в уравнение (5.2), сохранить члены порядка ε^2 : учесть пятую гармонику в левой части и третью — в правой. Перейдя к АС и разделив гармоники, получаем систему

$$\begin{aligned}\frac{d^2 w_1}{dt^2} + \Omega^2 w_1 &= \varepsilon \frac{d}{dt} \left\{ \psi \left[\left(\chi - \frac{1}{4} a^2 \right) w_1 - \frac{\varepsilon}{4} w_1^{*2} w_3 \right] \right\}, \\ \frac{d^2 w_3}{dt^2} + \Omega^2 w_3 &= \frac{d}{dt} \left\{ \varepsilon \left[\left(\chi - \frac{1}{2} a^2 \right) w_3 - \frac{1}{12} w_1^3 \right] \right\}, \\ \frac{d^2 w_5}{dt^2} + \Omega^2 w_5 &= -\frac{1}{4} \frac{d}{dt} (\psi w_1^2 w_3).\end{aligned}\quad (5.14)$$

С погрешностью порядка ϵ^3 можно ограничиться в первом уравнении (5.14) приближением (5.13) для w_3 ; тогда первое уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 w_1}{dt^2} + \Omega^2 w_1 = \epsilon \frac{d}{dt} (\gamma_1 w_1), \quad \gamma_1 = \psi \left(\chi - \frac{1}{4} a^2 - i \frac{\epsilon}{128} \frac{a^4}{\Omega} \right). \quad (5.15)$$

Полагая

$$w_1 = W \exp \left(\frac{\epsilon}{2} \int \gamma_1 dt \right), \quad (5.16)$$

мы получаем для W уравнение вида (4.3), в котором Ω^2 заменяется на

$$\Omega_1^2 = \Omega^2 - \frac{\epsilon}{2} \left(\dot{\gamma}_1 + \frac{\epsilon}{2} \gamma_1^2 \right), \quad (5.17)$$

причем мнимая часть γ_1 согласно (5.15) вносит в правую часть (5.17) слагаемое порядка ϵ^3 . Поэтому можно считать Ω_1 вещественной, заменяя в (5.17) γ_1 на γ , и взять для W выражение вида (4.4).

В показателе второго сомножителя (5.16) нужно отделить вещественную и мнимую части γ_1 и отнести последнюю к частотной поправке. Окончательно амплитуда a и частота ω АС (5.16) определяются во втором приближении соотношениями:

$$a^2 = \frac{|c|^2}{\omega_1} \exp \left(\epsilon \int \gamma dt \right), \quad (5.18)$$

$$\omega = \omega_1 - \frac{\epsilon^2}{256\Omega} \psi a^4, \quad (5.19)$$

где ω_1 определяется уравнением (5.10).

Формула (5.18) показывает, что второе приближение не вносит изменений в амплитуду и уравнение (5.9) сохраняет силу (при замене ω на ω_1); для адиабатического режима выполняются соотношения (5.12). В этом режиме безразмерная частота колебаний, определяемая выражениями (5.19) и (5.10), с учетом соотношений (5.12) имеет вид

$$\omega(t) = 1 - \frac{\epsilon^2}{16} \psi(t) \chi^2(t).$$

Мы положили здесь $\eta = 0$ и $\Omega = 1$, пренебрегая модуляцией емкости. Подставив значения ϵ , ψ и χ из выражений (5.3), мы получаем окончательные формулы для (безразмерных) амплитуды и частоты генерации

$$a(t) = 2 \left[1 + \frac{\xi(t)}{2p} \right],$$

$$\omega(t) = 1 - \frac{p^2}{16Q^2} - \mu \xi(t), \quad \mu = \frac{p(p+2)}{16Q^2}. \quad (5.20)$$

где $\xi(t)$ — медленное относительное возмущение тока лампы, вызванное фликкер-эффектом и влияющее на крутизну S согласно первой формуле (5.1).

Выражения (5.20) позволяют дать полное исследование неустойчивости генератора при воздействии фликкер-шума и прийти к следующим выводам:

а) Прочность предельного цикла p по-разному влияет на амплитуду и частоту: увеличение p , уменьшая амплитудные флуктуации, существенно увеличивает частотные.

б) Механизм образования частотных флуктуаций заключается в том, что третья гармоника колебания, взаимодействуя с первой (слагаемое $w_1^{*2} w_3$ в (5.14)), дает поправку к w_1 . Как и сама третья гармоника (см. формулу (5.13)), эта поправка находится в квадратуре с исходным колебанием,

и ее амплитудные изменения, вызываемые флуктуациями крутизны, порождают соответствующие флуктуации фазы и частоты. Наличие квадратурной поправки приводит также к статическому смещению частоты (слагаемое $-p^2/16Q^2$ во второй формуле (5.20); эта статическая поправка получена Кобзаревым³⁴ еще в 1931 г.).

в) Фликкерный шум — это медленный случайный процесс, который обычно можно считать стационарным и нормальным^{19, 20}; согласно формулам (5.20) он осуществляет АМ и ЧМ колебаний. Ширину спектральной линии определяет ЧМ; задавая энергетический спектр процесса $\xi(t)$ в виде

$$G_{\xi}(\omega) = \frac{b}{\omega^{\lambda}} \quad (b = 10^{-14}, \lambda = 0,99), \quad (5.21)$$

мы получаем для относительной ширины спектральной линии выражение¹⁹

$$\Delta\omega = \mu \sqrt{\frac{2b}{1-\lambda}}, \quad (5.22)$$

причем форма линии, обусловленная ЧМ, близка к гауссовой. В частности, если взять $p = 100$, то $\Delta\omega \approx 10^{-11}$ при $Q = 10^4$ и $\Delta\omega \approx 10^{-9}$ при $Q = 10^3$. Эти значения согласуются с фактическими характеристиками стабильных генераторов, что подтверждает существенную роль рассмотренного эффекта.

г) Результаты, относящиеся к влиянию фликкер-эффекта на частотную нестабильность триодного генератора, являются, по-видимому, новыми: в литературе¹⁶⁻²³ нам найти их не удалось. С помощью АС эти результаты получаются довольно просто, в то время как обычный подход ведет к слишком громоздким выкладкам.

д) Полученные результаты могут быть обобщены во многих направлениях, но, вероятно, самое примечательное в них — это то, что комплексные функции $w_1, w_3, \dots$ оказались полезными в нелинейной колебательной задаче.

6. ПАССИВНОЕ И АКТИВНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ, АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЧМ КОЛЕБАНИЙ

В радиолокации, технике ускорителей и в других областях, где применяются ЧМ сигналы заранее заданной формы, используют два разных способа получения таких сигналов — пассивный и активный. При пассивном способе³⁵⁻³⁷ сигнал образуется на выходе дисперсионной линии (фильтра), возбуждаемой дельта-импульсом. Амплитудная $A(\omega)$ и фазовая $\alpha(\omega)$ характеристики линии подбираются так, чтобы обеспечить заданный спектр; формируемое колебание определяется этими характеристиками и может быть представлено интегралом Фурье

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega) \cos[\omega t - \alpha(\omega)] d\omega. \quad (6.1)$$

Здесь предполагается, что полоса прозрачности линии ограничена интервалом (ω_1, ω_2) ; наряду с фазовой характеристикой $\alpha(\omega)$ удобно рассматривать групповое запаздывание

$$\tau(\omega) = \alpha'(\omega), \quad (6.2)$$

определяемое производной $\alpha(\omega)$ и обычно монотонное в полосе (рис. 4).

Активное формирование ближе к традиционной передающей технике и использует управляемый по частоте автогенератор (часто лампу обратной волны — ЛОВ). На начальной стадии от подобных генераторов отказались из-за малой стабильности и недостаточно точной реализации закона ЧМ; однако потом, применяя соответствующие схемы автоподстройки, вернулись к активному формированию, приводящему нередко

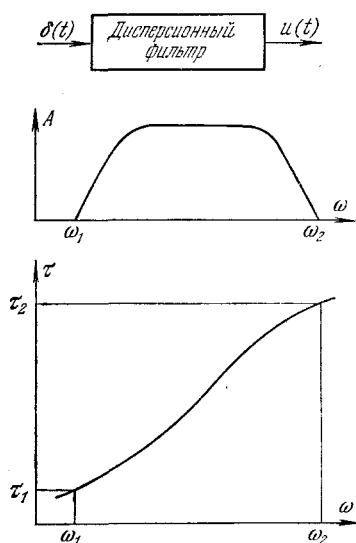


Рис. 4. Пассивное формирование ЧМ сигнала.

к результатам, практически недоступным для пассивных устройств. На рис. 5 показана схема типового активного передатчика³⁸, формирующего (в миллиметровом диапазоне) ЛЧМ сигнал со следующими параметрами: длительность импульса $T = 1$ мсек, девиация частоты $\Delta f = 1000$ Мгц, база $B = T\Delta f = 10^6$.

Передатчик функционирует следующим образом. Колебание генератора с линейным изменением частоты задерживается на время $\delta t_0 = 1$ мсек и смешивается с незадержанным. На выходе смесителя образуется (постоянная) разностная частота $\delta f = \delta t_0 / T \Delta f = 1$ Мгц. В схеме имеется опорный кварцевый генератор на частоту $\delta_0 f_0 = 1$ Мгц, и разностная частота сравнивается с $\delta_0 f_0$ в фазовом детекторе. При рассогласовании фаз появляется сигнал ошибки, управляющий частотой основного генератора. Осуществляемая таким образом стабилизация мгновенной разностной частоты (и даже фазы) обеспечивает формирование колебания со строго линейной ЧМ.

Обратим внимание на принципиальное отличие пассивного и активного способов. Пассивный способ является интегральным, в фильтре заранее учтена форма колебания на всей временной оси: зная характеристики фильтра $A(\omega)$ и $\alpha(\omega)$, можно заранее сказать, какое значение

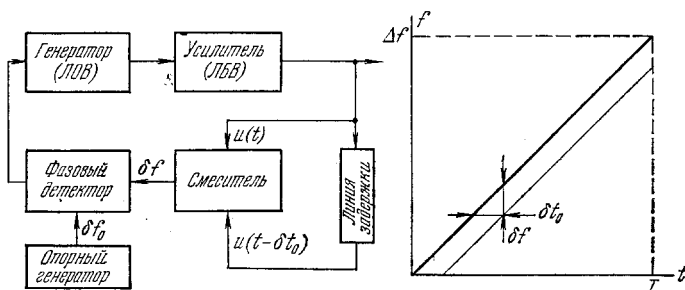


Рис. 5. Активное формирование ЧМ сигнала.

примет сигнал в каждый момент t . Наоборот, в активном способе мгновенная частота измеряется и подстраивается за малое время δt_0 , определяемое быстродействием следящей системы; ни один элемент схемы «не знает заранее» формы колебания. Иначе говоря, активный способ использует адиабатическую концепцию медленно меняющейся частоты, пассивный — основан на спектральном (т. е. интегральном) подходе. Однако оба спо-

соба применяются для одной и той же цели; их сопоставление позволит установить важную связь этих альтернативных подходов.

Вернемся к пассивному способу. Для колебания (6.1) нетрудно построить АС:

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A(\omega) e^{i[\omega t - \alpha(\omega)]} d\omega. \quad (6.3)$$

Вычислив этот интеграл, мы смогли бы точно указать амплитуду и мгновенную частоту (определенные через преобразование Гильберта) для каждого момента, хотя в каждый момент t сигнал образуется суперпозицией всех спектральных компонент, для определения которых нужно в свою очередь знать всю форму колебания. Однако во многих случаях интеграл (6.3) можно вычислить *приближенно*, применяя асимптотический метод стационарной фазы. Согласно этому методу главный вклад в (6.3) вносит для каждого t малая окрестность стационарной точки ω_s , определяемой уравнением

$$\alpha'(\omega_s) = \tau(\omega_s) = t, \quad (6.4)$$

причем эффективная ширина этой окрестности равна ³⁹

$$\delta\omega = (4 \div 8) \sqrt{\frac{1}{|\tau'(\omega_s)|}}, \quad \tau'(\omega_s) = \alpha''(\omega_s). \quad (6.5)$$

Если эта ширина мала по сравнению с $\omega_2 - \omega_1$ и окрестность заключена внутри интервала (ω_1, ω_2) , т. е. если

$$\delta\omega \ll \omega_2 - \omega_1, \quad \omega_1 + \delta\omega < \omega_s < \omega_2 - \delta\omega, \quad (6.6)$$

то интеграл (6.3) приближенно равен

$$w(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi \tau'(\omega_s)}} A(\omega_s) \exp \left\{ i \left[\omega_s t - \alpha(\omega_s) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad (6.7)$$

и, следовательно, мгновенная частота $\dot{\phi}$ с учетом (6.4) равна $\omega_s(t)$. Таким образом, *в условиях применимости метода стационарной фазы* мгновенная частота равна той частоте спектра, которая вносит главный вклад в значение w для данного момента. Мы пришли к адиабатической трактовке: в каждый момент колебание характеризуется лишь одной частотой — мгновенной частотой АС, и ее изменения во времени определяют спектр колебания; каждый момент времени (точнее, его малая окрестность δt , см. ниже) определяет значение спектральной функции $A(\omega) e^{-i\alpha(\omega)}$ в точке $\omega = \omega_s(t)$. В этом и состоит традиционная концепция медленно меняющейся частоты, на которой основано активное формирование. Но, как теперь ясно, такая трактовка применима не всегда, а лишь тогда, когда интегральная зависимость (6.3) приводит к выражению (6.7), т. е. когда выполнены условия (6.6).

В этих условиях ширина полосы $\omega_2 - \omega_1 \approx 2\pi\Delta f$, где Δf — девиация мгновенной частоты, а перепад группового запаздывания $|\tau(\omega_2) - \tau(\omega_1)| \approx T$, где T — длительность импульса. Поскольку также $\tau'(\omega_s) \sim T/(\omega_2 - \omega_1)$, мы получаем из первого условия (6.6) неравенство

$$B = T\Delta f \gg 5 \div 20, \quad (6.8)$$

т. е. дифференциальные представления (адиабатическая трактовка) применимы к широкополосным ЧМ колебаниям с большой базой.

Второе условие (6.6) указывает на искажения из-за краевого эффекта, когда существенный интервал частот $\delta\omega$ выходит из полосы фильтра; этому соответствует временной интервал

$$\delta t = \frac{\delta\omega}{|d\omega_s/dt|} = (4-8) \sqrt{\frac{2}{|\ddot{\varphi}(t_s)|}}, \quad \dot{\varphi}(t_s) = \omega, \quad (6.9)$$

приходящийся на край импульса. Краевые искажения неизбежно появляются при активном формировании (см. рис. 5) и ограничивают его возможности.

Искаженные из-за краевого эффекта участки спектра обычно отфильтровывают при приеме, сужая полосу приемника (весовая обработка). Допустив потери 10% энергии, мы приходим к условию: $\delta t \leq 0,1T$ и с учетом выражения (6.9) получаем оценку

$$B = T\Delta f \geq 500 - 2000, \quad (6.10)$$

уточняющую условие (6.8). Эта оценка подтверждается практикой. Так, авторы обширного обзора³⁸ ЛЧМ импульсов, сформированных активными методами, отмечают преимущества этих методов перед пассивными, особенно для больших баз — порядка 10^6 и более. Но характерно, что, несмотря на существенные отличия активных методов и на различия в диапазонах и ширинах полос импульсов, ни один сигнал с базой меньше 1000 активным способом не формируется, в соответствии с нашим условием (6.10).

При базах, измеряемых десятками и сотнями, господствует пассивное формирование, не связанное с адиабатической трактовкой, и, как мы видим, это обусловлено принципиальными, а не техническими причинами. Пытаясь сформировать подобный сигнал активным способом (в такой попытке в свое время участвовал один из авторов данной работы (Д. В.)), мы допускаем ту же ошибку, как пытаюсь получить направленное излучение от параболического отражателя малых (по сравнению с длиной волны) размеров, т. е. механически применяя геометрическую оптику и забывая о том, что краевые эффекты здесь не малы — они полностью определяют излучение и делают геометрикооптические представления неприменимыми.

Заметим также, что выбранные в передатчике на рис. 5 разностная частота δf и время задержки δt_0 согласуются с оценками (6.5) и (6.9); это характерно и для других активных устройств такого типа³⁸.

7. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УЗКОПОЛОСНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Выше мы рассмотрели *широкополосные* колебания, возникающие при ЧМ с большими базами; для таких колебаний определение АФЧ по формуле (5) непригодно, в то время как определение с помощью АС согласуется с адиабатической трактовкой и дает пределы ее применимости. Примеры узкополосных колебаний даны в начале гл. 2 (при $\omega_0 T \gg 1$); более общо, если $u(t)$ определяется первой формулой (2.7) и квадратурные компоненты $x(t)$ и $y(t)$ медленны, т. е. эффективная полоса $\delta\omega$ их спектральных функций $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ мала по сравнению с несущей частотой,

$$\delta\omega \ll \omega_0, \quad (7.1)$$

то АС принимает простой вид

$$w(t) = [x(t) + iy(t)] e^{i\omega_0 t}, \quad (7.2)$$

также согласующийся с адиабатической трактовкой.

Разумеется, этот результат связан со свойствами ж—и АС. Но целесообразно истолковать его иначе, с позиций приближенного вычисления интегралов (1.7) и (2.3). В этих интегралах, как и в интеграле (6.3), имеется существенная область частот, примыкающая к точке ω_0 и определяемая эффективной полосой $\delta\omega$. Приближенное выражение (7.2) верно, когда эта полоса не выходит за границу $\omega = 0$ в интеграле (1.7). При такой трактовке условие (7.1) вполне аналогично (6.6).

Мы получили, однако, два качественно разных условия, при которых интегральные представления, связанные с АС, вырождаются в привычную адиабатическую трактовку колебаний с медленно меняющимися параметрами. Условие (7.1) требует *узкополосности* по отношению к ω_0 , это привычно и понятно. Вместе с тем, условие (6.8) требует большой базы — *широкополосности*, причем оно никак не связано с несущей частотой.

В этой связи следует иметь в виду, что в своей математической сущности эти условия едины, что имеется не два разных, а одно условие асимптотического вырождения. Рассматривая, скажем, формирование по схеме рис. 4, предположим, что дисперсия и затухание линии зависят от частоты в равной мере; тогда удобно рассматривать интеграл (6.3) на комплексной плоскости ω и стационарная (перевальная) точка ω_s также будет, вообще говоря, комплексной⁴⁰. Она переходит на вещественную ось лишь в рассмотренных предельных случаях, когда превалируют только амплитудные либо только фазовые изменения спектра. Общее же условие вырождения (т. е. применимости метода перевала) сводится к тому, что *спектр должен быстро изменяться вблизи ω_s* , причем, несущественно, какие это изменения, — амплитудные или фазовые.

Узкополосные колебания — это амплитуда спектра $A(\omega)$, близкая к дельта-функции, широкополосные — это быстро изменяющаяся фаза $\alpha(\omega)$, обусловленная дисперсионной линией; в обоих случаях допустима замена интегральных АФЧ дифференциальными, т. е. адиабатическая трактовка.

8. ПАРАДОКС И КОНТРИПРИМЕРЫ

АФЧ, определенные посредством АС, — это объективные характеристики колебания, измеряемые амплитудным детектором, частотным дискриминатором и т. п. Но принцип действия этих и многих других приборов основан на адиабатической концепции медленно изменяющихся амплитуды и частоты. Мы видели, что такая концепция требует выполнения условий (6.8) или (7.1); при нарушении этих условий спроектированная аппаратура окажется неработоспособной. Мы уже встречались с этим в гл. 6: активные способы формирования практически пригодны только при больших базах. Приведем дополнительные примеры, уделяя главное внимание условию (6.8).

а) Парадокс Робинсона⁴¹

Исходя из представления о медленно меняющейся частоте, Робинсон предложил устранить помехи от соседних ЧМ передатчиков, применяя малую девиацию Δf , существенно меньшую модулирующей звуковой частоты F (1930 г). Это предполагает, очевидно, что в каждый момент излучается участок спектра вблизи $\omega(t)$, так что энергии вне пределов девиации нет. Однако уменьшение девиации приводит к малому индексу ЧМ, $m = \Delta f/F \ll 1$, который, как легко заметить, при тональной модуляции равен базе B . Поэтому условие (6.8) нарушается и адиабатическая концепция теряет силу, становится неприменимой.

Ошибка Робинсона в том, что он считал эту концепцию универсальной. Это та же ошибка, как, считая универсальными представления геометрической оптики, пытаться рассмотреть под микроскопом объект, малый по сравнению с длиной волны.

б) Ранние попытки частотной телефонии ⁴²

Еще в 1912 г. с дуговым передатчиком (и позже — с ламповым), пытались модулировать частоту, подключая конденсаторный микрофон к контуру. Демодуляцию выполняли на склоне резонансной кривой приемника. Удовлетворительных результатов не получалось — почему?

В диапазоне длинных волн, с которым тогда имели дело, емкость контура — тысячи и десятки тысяч пикофарад, а переменная емкость микрофона — порядка 1%. Поэтому девиация не превышала 1 кГц (при несущей 100 кГц), и модуляция речью приводила к малому индексу $m \ll 1$, при котором адиабатическая концепция непригодна.

Здесь допускалась та же ошибка Робинсона — не хватало широкополосности. Применяя варикапы или реактивные лампы, мы осуществляем подобную модуляцию, но при больших девиациях частоты.

Модулятор Армстронга (см. гл. 3) также работал с малым индексом ($m \ll 1/2$), однако модулированные колебания затем умножались по частоте, что увеличило индекс ЧМ в 500 раз ⁴². Поэтому прием этих колебаний мог производиться обычным дискриминатором с ограничителем амплитуд, т. е. аппаратурой, основанной на адиабатических представлениях.

Теперь обратимся к контрпримерам, связанным с необычными (точнее, непривычными) свойствами АС и приведшим к сравнительно распространенному мнению, что аналитический сигнал, удобный и полезный в математической теории, не всегда имеет смысл с физической или технической точки зрения ^{7, 8, 28, 43–45}.

в) Нарушение причинности

На рис. 6 показана огибающая прямоугольного радиоимпульса, имеющая предвестник и след. Возникают недоуменные вопросы: Как может огибающая, т. е. следствие, опережать исходный сигнал — причину?

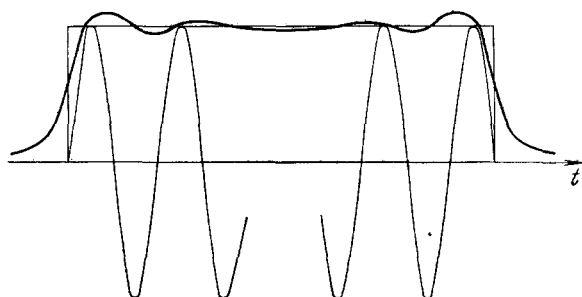


Рис. 6. Огибающая прямоугольного радиоимпульса.

Что огибает огибающая, когда еще или уже нет никакого колебания? Как может такая огибающая соответствовать результату детектирования — ведь сигнал на выходе детектора не опережает входное воздействие? Как получается, что огибающая ведет себя подобно улыбке Чеширского кота в стране чудес? Разумеется, с математической точки зрения предвестник и след объясняются аналитическим характером функции $w(t)$, не терпящим скачков, но и физически, после некоторых размышлений, этот результат понятен.

Для узкополосных колебаний можно ввести «естественное» понятие огибающей и ее компонент соотношениями

$$a^2(t) = \overline{2u^2(t)}, \quad x(t) = \overline{2u(t) \cos \omega_0 t}, \quad y(t) = -\overline{2u(t) \sin \omega_0 t}, \quad (8.1)$$

где волнистой чертой обозначено усреднение во времени по некоторому эффективному интервалу, например,

$$a^2(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^{t+T_0} u^2(s) ds, \quad \text{или}$$

$$a^2(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(t-s)^2}{2T_0^2} \right] u^2(s) ds. \quad (8.2)$$

Конечно, $a(t)$ будет зависеть от способа и интервала усреднения, многие полезные математические свойства ее будут утрачены, но главное в том, что и согласно формулам (8.2) огибающая *опережает* $u(t)$: при «наползании» интервала усреднения на импульс образуется предвестник, а при «сползании» — след. Ясно, что любое разумное определение огибающей (физическое, позволяющее измерить $a(t)$, а не математическая абстракция) приводит к предвестнику и следу длительностью $T_0 \gg \pi/\omega_0$.

Заметим, что по первой формуле (8.1) работает квадратичный детектор, по двум остальным — синхронные детекторы; усреднение осуществляется фильтром, пропускающим только низкие частоты ($\omega \ll \omega_0$). Результат, хотя и слабо, зависит от частотной характеристики фильтра. Кроме того, фильтр выдает функции $a(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ с задержкой порядка T_0 , обратно пропорциональной полосе фильтра. При подобном усреднении предвестника нет, но след удлиняется.

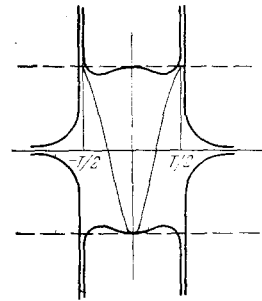
АС обеспечивает минимальное время усреднения: для узкополосных колебаний $T_0 \sim \pi/\omega_0$, а для всех других время усреднения «самонастраивается» в соответствии со структурой процесса, как видно из выражения (6.9) для δt . Таким образом, определение АФЧ посредством АС настолько «дифференциально», насколько это вообще возможно.

г) Л о г а р и ф м и ч е с к а я с и н г у л я р н о с т ь

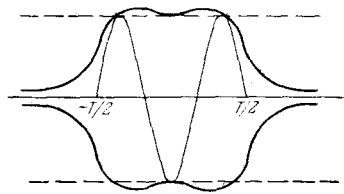
На рис. 7 показаны огибающие импульсов, длительность которых сравнима с периодом $2\pi/\omega_0$ несущей частоты. Если $u(t)$ имеет скачки, то в этих точках огибающая обращается в бесконечность. Логарифмическая сингулярность в точках разрыва $u(t)$ присуща преобразованию Гильберта, что также иногда вызывает сомнения в физической содержательности АС^{28, 44}.

Разумеется, реальные сигналы определяются непрерывными функциями $u(t)$, но даже если пользоваться разрывными функциями, идеализируя реальные явления, то и тогда логарифмическая (т. е. очень слабая) особенность не приводит к каким-либо неверным выводам. Если же функция $u(t)$ непрерывна, то нет и особенностей.

При «чисто дифференциальном» определении АФЧ по формуле (4) бесконечность в точках разрыва $u(t)$ получается не логарифмической, а более сильной.* АС дает (несущественную) сингулярность именно потому, что он обеспечивает минимальное время усреднения. Кроме того, $a(t)$ и $\Phi(t)$ обычно рассматриваются в медленном времени, так что интегрируемые выбросы, предвестники и следы вообще несущественны.



а)



б)

Рис. 7. Огибающие ξ прямоугольных радиоимпульсов малой длительности.

д) Колебания без несущей

На рис. 7 уже даны примеры сигналов, для которых наглядный смысл огибающей не очень четок. Число таких примеров нетрудно увеличить. Рассмотрим, например, колебание с прямоугольным спектром ⁴³

$$U(\omega) = 1 \text{ при } |\omega - \omega_0| < \Delta\omega, \quad U(\omega) = 0 \text{ при } |\omega - \omega_0| > \Delta\omega. \quad (8.3)$$

При $\omega_0 \gg \Delta\omega$ оно имеет квазигармонический характер, и АС дает вполне естественную форму огибающей. Будем смещать спектр в область низких частот, уменьшая ω_0 . В пределе $\omega_0 = \Delta\omega$ получим широкополосный спектр видеопульса

$$U(\omega) = 1 \text{ при } \omega < 2\Delta\omega, \quad U(\omega) = 0 \text{ при } \omega > 2\Delta\omega. \quad (8.4)$$

Огибающая такого колебания показана на рис. 8. Часто полагают, что для подобных колебаний огибающую лучше не вводить вообще, поскольку

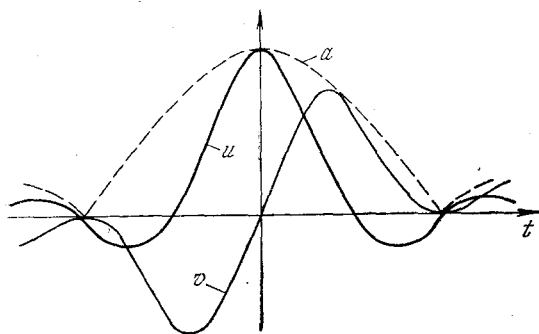


Рис. 8. Огибающая видеопульса с прямоугольным спектром.

она не дает наглядного представления о ходе процесса и, быстро изменяясь, имеет лишь условный смысл ^{43, 45}.

Однако именно такой спектр имеет ЛЧМ импульс в канале промежуточной частоты после обработки в согласованном фильтре: амплитудный спектр сигнала прямоугольный, фазовая структура устраняется в фильтре, а для канала вполне реальны ^{36, 37}, например, значения $f_0 = 30 \text{ МГц}$, $\Delta f = 25 \text{ МГц}$ (так что $\Delta f \approx f_0$). В этом случае огибающую необходимо

ввести — она определяет результат детектирования и разрешение по дальности. Смещение частотного спектра вниз осуществляется в смесителе (см. гл. 3), который оставляет инвариантной огибающую, определенную посредством АС.

Еще более сложное колебание получается, когда средняя часть спектра (8.4) режектирована, например, при подавлении помехи. Остаются узкие полосы на краях, примерно соответствующие двум синусоидам с частотами ω_1 и ω_2 , причем $\omega_1 \ll \omega_2$. Именно этот контрпример дал повод сделать вывод, что для широкополосных колебаний огибающая (абсолютная величина АС) лишена физического содержания ⁸. Однако и из таких огибающих на практике приходится извлекать остаточную информацию о сигнале, а кроме того, в гл. 6 мы рассматривали колебания сколь угодно широкополосные, для которых АФЧ и АС имеют четкий и наглядный смысл.

Подводя итоги, можно сказать, что огибающие во многих контрпримерах непривычны, но объявлять их а priori бессмысленными не стоит: бывают и они полезны и содержательны.

Бывают также случаи (см. гл. 5), когда для колебания в целом введение одного АС и соответствующих АФЧ нерационально, а вместе с тем АС и АФЧ удобно ввести для ряда непересекающихся спектральных полос (в гл. 5 это окрестности частот ω_0 , $3\omega_0$, $5\omega_0$ и т. д.).

Существует мнение, что АС пригоден для описания модуляции гармонических колебаний, но не произвольного переносчика, например $\sin^3 \omega_0 t$. Однако еще в 1958 г. было предложено соответствующее обобщение². Амплитудную и частотную модуляции произвольного колебания $u_0(t)$ можно определить как соответствующее изменение огибающей и фазы АС $w_0(t) = u_0(t) + iv_0(t)$. При этом функции $u_0(t)$ и $v_0(t)$ играют такую же роль, как $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ при модуляции гармонических колебаний. Такой подход позволяет, в частности, легко получить и обобщить большинство результатов Агеева⁴⁶.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы уже упоминали о многообразных применениях АС в теории случайных процессов и полей, в частности, в волновой оптике^{9, 10}; в квантовой оптике АС сохраняет свое значение, поскольку поле записывается в виде (3.3) и после перехода к операторам одно слагаемое определяет излучение (рождение) фотонов, а другое — их поглощение (уничтожение), так как в одном слагаемом фигурируют только положительные, а в другом — только отрицательные частоты.

Данный обзор преследует, учитывая сказанное выше, довольно скромную цель: «подтянуть» (в смысле применения АС) теорию колебаний до уровня теории шумов, теории когерентности и других областей, где АС используется уже давно и дал ряд важных результатов. Мы попытались показать, что АС позволяет лучше понять и рассчитать колебательные явления в самых разнообразных системах, хотя для его принятия требуется преодолеть некоторый психологический барьер.

Значение АС возрастает по мере того, как теория колебаний вторгается в новые области и количественные изменения (главным образом расширение полосы сигналов) перерастают в качественные; тогда привычные представления приходится заменить новыми, более общими, сводящимися к ним лишь в соответствующем пределе. Аналитический сигнал дает нам общее определение амплитуды, фазы и частоты — основных понятий теории колебаний и волн.

Авторы благодарят Л. М. Финка за полезные обсуждения.

Институт повышения квалификации МПС СССР

(Московский филиал)

Институт физических проблем АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. D. G a b o r, J. IEE 93, (pt. 3), 429 (1946).
2. J. D u g u n d j i, IRE Trans. IT-4, 53 (1958).
3. В. И. Б у н и м о в и ч, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., «Сов. радио», 1951.
4. Р. Д е ч, Нелинейные преобразования случайных процессов, М., «Сов. радио», 1965.
5. Л. Ф р е н к с, Теория сигналов, М., «Сов. радио», 1974.
6. Б. Р. Л е в и н, Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1, М., «Сов. радио», 1966.
7. Д. М и д д л т о н, Введение в статистическую теорию связи, т. 1, М., «Сов. радио», 1961.
8. Г. К р а м е р, М. Л и д б е т т е р, Стационарные случайные процессы, М., «Мир», 1969.
9. Э. В о л ь ф, Л. М а н д е л ь, УФН 87, 491 (1965); 88, 347, 619 (1966).
10. М. Б о р н, Э. В о л ь ф, Основы оптики, М., «Наука», 1970.
11. Г. С. Г о р е л и к, Колебания и волны, М., Физматгиз, 1959.
12. Г. С. Г о р е л и к, Г. А. Е л к и н, Радиотехн. и электрон. 2, 28 (1957).
13. J. C a r s o n, T. F r y, Bell. Syst. Techn. J. 16, 513 (1937).
14. И. С. Г о н о р о в с к и й, Радиосигналы и переходные явления в радиопежах, М., «Связьиздат», 1954.
15. Д. В е й н е р, Б. Л е о н, Тр. ИИЭР 53, 665 (1965).
16. Б. В а н д е р П о л ь, Нелинейная теория электрических колебаний, М., Связь-техиздат, 1935.

17. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М., Физматгиз, 1959.
18. Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, М., «Наука», 1969.
19. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, М., «Наука», 1968.
20. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, ч. 1. Случайные процессы, М., «Наука», 1976.
21. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., «Наука», 1974.
22. М. И. Конторович, Нелинейные колебания в радиотехнике, М., «Сов. радио», 1973.
23. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, М., «Сов. радио», 1973.
24. Л. И. Мандельштам, Лекции по некоторым вопросам теории колебаний, Полн. собр. трудов, т. 5, М., Изд-во АН СССР, 1950.
25. J. Shekel, Proc. IRE 41, 548 (1953).
26. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М., Гостехиздат, 1948.
27. Е. Бедроян, Тр. ИИЭР 51, 887 (1963).
28. A. K. Smolinski, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences 19, 473 (1971).
29. Д. Е. Вакман, Радиотехника 32 (5), 20 (1977).
30. В. И. Коржик, Радиотехника 23 (4), 1 (1968).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, М., «Наука», 1958.
32. Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), М., «Мир», 1965.
33. J. Carson, Proc. IRE 10, 57 (1922).
34. Ю. Б. Кобзарев, Вестн. электротехн., № 10, 346 (1931).
35. J. R. Klauder, A. C. Price, S. Darlington, W. D. Albersheim, Bell Syst. Techn. J. 39, 745 (1960).
36. Я. Д. Ширман, Разрешение и сжатие сигналов, М., «Сов. радио», 1974.
37. В. К. Слока, Вопросы обработки радиолокационных сигналов, М., «Сов. радио», 1970.
38. В. Н. Кочемасов, Л. А. Белов, Зарубеж. радиоэлектрон. 8, 32 (1975).
39. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, М., Изд-во АН СССР, 1961.
40. Л. А. Вайнштейн, УФН 118, 339 (1976).
41. С. М. Рытов, УФН 29, 147 (1946).
42. E. N. Armstrong, Proc. IRE 24, 689 (1936).
43. И. С. Гоноровский, Радиотехнические цепи и сигналы, ч. I, М., «Сов. радио» 1966.
44. Л. Е. Варакин, А. С. Гусель, Радиотехника 30 (1), 17 (1975).
45. Б. Г. Кадук, В. В. Садовский, Проблемы технической электродинамики, вып. 34, 3 (1972).
46. Д. В. Агеев, Радиотехника 30 (4), 1 (1975).