

537.312.62

**ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕЙ И ЭЛЕКТРОСОПРОТИВЛЕНИЕ
СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ****Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	413
1. Полуфеноменологическое описание вязкого течения вихревой структуры	415
а) Термодинамические свойства сверхпроводника II рода в магнитном поле (415). б) Физическая природа диссипативных процессов (418). в) Диссипативная функция (419).	
2. Сопротивление сверхпроводников II рода в простой микроскопической теории	424
а) Сверхпроводящие сплавы с парамагнитными примесями. Слабые и промежуточные поля ($B \ll H_{c2}$) (424). б) Уравнения движения и деформации в решетке вихрей в присутствии транспортного тока (426). в) Сверхпроводящие сплавы с парамагнитными примесями. Сильные поля ($B \approx H_{c2}$) (429).	
3. Результаты для общего случая сверхпроводящих сплавов	433
а) Вязкое течение вихрей в сверхпроводящих сплавах. Случай $B \ll H_{c2}$ (433). б) Сверхпроводящие сплавы. Сильные поля ($B \approx H_{c2}$) (435). в) Поверхностный импеданс (438).	
4. Состояние экспериментальных исследований	440
а) Сводка основных теоретических формул (440). 1) Сплавы с большой концентрацией парамагнитных примесей (440). 2) Сплавы с малой концентрацией парамагнитных примесей (441). 3) Обычные сверхпроводящие сплавы (без парамагнитных примесей). Слабые поля $H \ll H_{c2}$ ($\kappa \gg 1$) (441). 4) Сплавы без парамагнитных примесей. Сильные поля (441). — б) Результаты сравнения теории и эксперимента (442).	
Заключение	445
Список обозначений	446
Цитированная литература	447

ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных особенностей в свойствах так называемых сверхпроводников II рода, к которым относятся сверхпроводящие сплавы с достаточно короткой длиной свободного пробега, а также чистый ниобий, наиболее нетривиальной является появление у них конечного сопротивления в присутствии магнитного поля. Это обстоятельство, имеющее кардинальное значение для практических применений сверхпроводимости, явилось в последние десять лет предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований. В настоящее время можно считать установленным, что это сопротивление обязано движению вихревой структуры, введенной впервые Абрикосовым¹ для описания своеобразного поведения сверхпроводников II рода в магнитном поле. Движение вихрей, как это было впервые отмечено в работе², есть результат действия на вихрь со стороны сверхтекучей компоненты тока силы Лоренца. В реальных сверхпроводниках ситуация существенно осложняется действием сил «пиннинга», поэтому собственно равномерное движение решетки вихрей осуществляется лишь при достаточно большой величине тока через

образец, когда действие «пиннинговых» центров оказывается подавленным. Ниже всюду будет рассматриваться именно этот случай, и только при этом величина сопротивления является свойством, присущим самому сверхпроводнику, и не зависит от деталей обработки образца. На рис. 1 воспроизведены вольт-амперные характеристики,

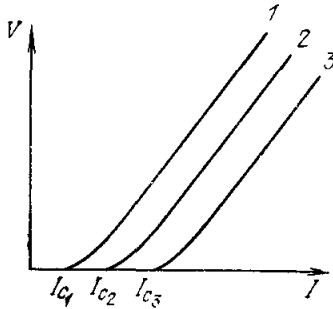


Рис. 1. Идеализированные вольт-амперные характеристики для образцов с различной степенью неоднородности структуры.

и Кима⁴. Образец обычно имеет вид тонкой пленки. Такую постановку диктует стремление избежать искривления вихревых нитей за счет собственного поля тока и под действием «пиннинговых» сил, а также добиться большей однородности плотности транспортного тока. Действительно, хотя при конечном сопротивлении средняя плотность тока была бы отлична от нуля в массивном образце, эффект Мейсснера у поверхности приводил бы к существенному искривлению линий тока в окрестности вихревой нити, если плотность нитей не слишком велика. С этой точки зрения оптимальными являются пленки с размерами, меньшими глубины проникновения магнитного поля.

Вихревая нить несет квант потока магнитного поля $\Phi_0 = (hc/2e)n_H$ (вектор n_H вдоль поля)*. Поэтому сила Лоренца, действующая со стороны протекающего тока на систему токов в вихре (отнесенная к единице длины вихря)

$$F_L = \frac{1}{c} [j_{tr}, \Phi_0],$$

направлена так, как показано на рис. 2.

Если под действием этой силы вихрь приобретает скорость v_L , то в образце индуцируется макроскопическое электрическое поле

$$E = \frac{1}{c} [B, v_L],$$

где магнитная индукция $B = n_L \Phi_0$ (n_L — плотность вихревых нитей). Таким образом, направление электрического поля определяется направлением движения вихревых нитей. В галилеевски инвариантной системе, такой как гелий, вихревые нити при низких температурах в равновесии

изведены вольт-амперные характеристики, полученные в классических экспериментах Кима, Хэмшстада и Стрэнда³ для сплавов Nb — Ta. Видно, что хотя пороговое значение тока, при котором появляется конечная разность потенциалов, различно у разных образцов, наклон всех кривых одинаков при больших токах.

На рис. 2 схематически изображена обычная постановка эксперимента. Направление магнитного поля взято перпендикулярно плоскости пластинки (пленки) из исследуемого сверхпроводника, точками обозначена вихревая структура. Конечное сопротивление продольному току I_{tr} обуславливает принципиальную возможность появления холловской разности потенциалов, действительно обнаруженной экспериментами Рида, Фосета

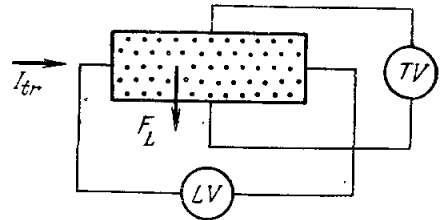


Рис. 2. Схема постановки эксперимента по измерению ρ_j и угла Холла. Точками обозначены вихревые нити. LV, TV — продольное и поперечное напряжения.

*) Список обозначений см. в конце статьи на стр. 446.

двигаются вместе со сверхтекучей компонентой скорости. Если то же самое имело бы место и в сверхпроводнике, как было предположено Де Женном и Нозье⁵, то, согласно рис. 2, по крайней мере для чистого сверхпроводника II рода (например, Nb), в экспериментах наибольшей величиной была бы холловская разность потенциалов (поперечное поле E). В решетке металла увлечению вихрей может препятствовать их торможение за счет каких-то релаксационных механизмов. Если это торможение велико, то под действием силы F_L вихри медленно движутся поперек направления транспортного тока — картина, которая носит название вязкого течения вихрей. Эксперимент, даже при низких температурах, решительным образом свидетельствует в пользу преобладания диссипационных механизмов, природа которых обсуждается ниже. Холловская составляющая скорости оказывается мала, и для угла Холла α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{||}}{v_{\perp}}$$

имеет тот же порядок, что и в нормальном металле⁴. При $T = 0$ эффективная проводимость, полученная в экспериментах³, оказалась равной

$$\sigma_f = \frac{\sigma_n H_{c2}}{B}.$$

С теоретической точки зрения описанные выше факты должны укладываться в рамки представлений микроскопической теории сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера (БКШ)⁶. То обстоятельство, что вихревая структура движется относительно решетки, требует обобщения теории БКШ, включающего зависимость параметров теории от времени. Микроскопическая теория нестационарных процессов в сверхпроводниках была построена в работах Горькова и Элиашберга⁷⁻⁹. Как обычно для физики сверхпроводимости, качественное понимание явлений в сверхпроводнике II рода, разыгрывающихся при протекании тока, может быть достигнуто на базе полуфеноменологических соображений, которые изложены в гл. 1 предлагаемого обзора. В гл. 2 и 3 обсуждаются результаты микроскопической теории. Наконец, в гл. 4 сделана попытка оценить степень количественного соответствия между микроскопической теорией и экспериментом.

1. ПОЛУФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ

а) Термодинамические свойства сверхпроводника II рода в магнитном поле. Ниже мы суммируем основные сведения о вихрях, необходимые нам для дальнейшего. Более подробное изложение читатель найдет в книге¹⁰ или обзоре Шмидта и Мкртчяна¹¹. Как упоминалось выше, к сверхпроводникам II рода принадлежат чистый ниобий и, возможно, ванадий, а также сверхпроводящие сплавы с малой длиной свободного пробега¹². С физической точки зрения основным свойством, ответственным за качественное изменение поведения этих объектов в магнитном поле, является отрицательная поверхностная энергия на границе между нормальной и сверхпроводящей фазами. В теории Гинзбурга — Ландау¹³ поверхностная энергия отрицательна при $\kappa > 1/\sqrt{2}$, где параметр

$$\kappa = \frac{\sqrt{2} 2eH_{c2}\delta^2}{\hbar c}$$

с точки зрения теории БКШ характеризует величину отношения глубины проникновения поля δ к радиусу когерентности ξ :

$$\kappa = \frac{\delta}{\xi}.$$

В приближении теории Гинзбурга — Ландау Абрикосовым¹ было показано, что разрушение сверхпроводимости в магнитном поле начинается при поле $H_{c1} < H_{cm}$ и заканчивается при $H_{c2} > H_{cm}$, где H_{cm} — термодинамическое поле перехода. При $\kappa \gg 1$ имеем¹

$$H_{c2} = \kappa \cdot \sqrt{2} H_{cm}, \quad H_{c1} \approx H_{cm} \frac{\ln \kappa}{\sqrt{2} \kappa}. \quad (1.1)$$

В интервале полей $H_{c1} < H \ll H_{c2}$ ($B \ll H_{c2}$) магнитное поле проникает в образец в виде нитей, структура которых изображена на рис. 3.

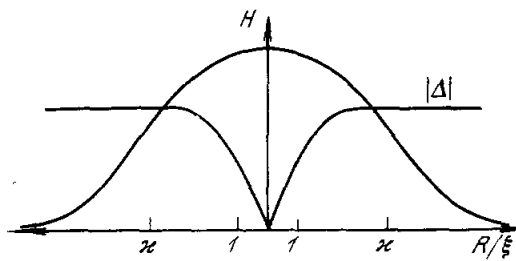


Рис. 3. Схематическая зависимость параметра порядка и магнитного поля для изолированной вихревой нити.

На этом рисунке схематически представлено распределение магнитного поля H и параметра порядка Δ в зависимости от расстояния до центра нити r . Магнитный поток, связанный с отдельной нитью, равен $hc/2e$ и распределен по площади с размерами порядка глубины проникновения. Поэтому величина поля около нити обычно порядка H_{c1} . Параметр порядка меняется на расстояниях $\xi = \delta/\kappa \ll \delta$ и быстро стремится к равновесному значению Δ_∞ ($\Delta_\infty \equiv \Delta$ в отсутствие поля). В центре остова $\Delta(0) = 0$. В указанном выше интервале полей остовы нитей не перекрываются, и мы можем пользоваться представлением об отдельных нитях, упакованных в решетку и связанных друг с другом магнитным взаимодействием, характерный радиус действия которого велик по сравнению с размером остова нити. Макроскопическое среднее магнитное поле — индукция $B = n_L \Phi_0$.

При увеличении полей до H_{c2} расстояния между нитями уменьшается до $d \sim \xi$. Из рис. 3 видно, что остовы начинают перекрываться, а это приводит к существенному уменьшению средней по образцу величины параметра порядка.

Микроскопическая теория сверхпроводимости подтвердила общую картину вихревого состояния в магнитном поле, предложенную в¹ в двух отношениях. Во-первых, оказалось¹², что в окрестности температуры перехода теория БКШ переходит в теорию Гинзбурга — Ландау, и поэтому результаты¹ в этой области носят количественный характер. Параметр порядка теории^{1, 13} пропорционален энергетической щели Δ в энергетическом спектре сверхпроводника в теории БКШ. Во-вторых, во всей области температур проникновение магнитного поля в массивный образец начинается при некотором малом поле H_{c1} и происходит описанным выше образом в виде решетки нитей. Поля H_{c1} и H_{c2} с точностью до зависящих от температуры коэффициентов имеют порядок (1.1), где в качестве H_{cm} надлежит брать термодинамическое критическое поле массивного сверхпроводника при данной температуре¹⁴.

Важное обстоятельство, существенное для всего дальнейшего, можно качественно усмотреть из того, что параметр порядка обращается в нуль в центре нити, а также из сделанного выше замечания о связи между пара-

метром порядка и щель в энергетическом спектре сверхпроводника в теории БКШ. Согласно ⁶ в однородном сверхпроводнике энергетический спектр возбуждений носит пороговый характер: плотность состояний $v_s(\epsilon)$ в сверхпроводящем состоянии равна

$$v_s(\epsilon) = v_n \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}}.$$

Таким образом, можно думать, что в неоднородном по пространству сверхпроводнике плотность состояний зависит от точки, а обращение параметра порядка в нуль в центре нити говорит об отсутствии порога возбуждения около центра. Впервые это было показано Кароли, Де Женном и Матриконом ¹⁵ в рамках микроскопической теории для чистого сверхпроводника II рода. Результат ¹⁵ изображен схематически на рис. 4 в виде «зонной»

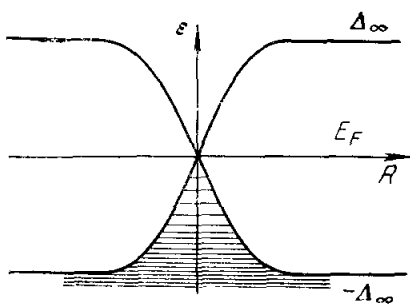


Рис. 4. «Зонная структура». Штриховкой обозначены заполненные состояния.

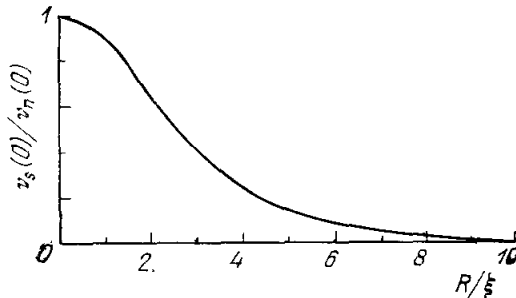


Рис. 5. Нормированная плотность состояний на поверхности Ферми для «грязного» сверхпроводящего сплава ¹⁶.

структуры спектра сверхпроводника. Заштрихованная область показывает заполненные при абсолютном нуле температур состояния возбуждений с энергией $\epsilon < 0$. Расстояние между двумя кривыми есть «локальный» порог для возбуждения основного состояния. При $\rho \rightarrow \infty$ этот порог равен $2\Delta_\infty$, но в области $\rho \sim \xi$ порог отсутствует. В этой области $v_s(0)/v_n \sim 1$. На рис. 5 приведены результаты численных расчетов ¹⁶ зависимости $v_s(\rho, 0)/v_n$ в случае так называемого «грязного» сплава, когда длина свободного пробега $l \ll \hbar v_F/T_c$. Величина ξ на рис. 5 выбрана так, чтобы $\xi = \sqrt{D/2\Delta_\infty(0)} = \sqrt{\hbar v_F/10,5T_c}$.

Вообще говоря, как было впервые показано Бардином, Кюммелем, Джекобсом и Тьюордом ¹⁷, структура энергетического спектра рис. 4 при промежуточных $\kappa \sim 1$ существенно сказывается на величине нижнего критического поля H_{c1} при низких температурах, поскольку энергия вихревой нити в этом случае в значительной мере определяется ее сердцевиной. Иначе выглядит также распределение магнитного поля. По сравнению с рис. 3 поле в окрестности центра нити имеет довольно резкий максимум ¹⁸. Происхождение этого эффекта наиболее наглядно следует из результатов ⁴⁷ для чистого сверхпроводника II рода. В этом случае фермиевские возбуждения в остовах нити имеют сохраняющуюся проекцию момента m относительно оси на направление магнитного поля, но при этом $\epsilon < 0$ (заштриховано на рис. 4) отвечает $m < 0$, тогда как $\epsilon > 0$ всегда соответствует $m > 0$. При нулевой температуре, к которой и относится рис. 4, заняты все состояния с $m < 0$ и пусты состояния с $m > 0$. Таким образом, окрестность центра вихря представляет собой своего рода соленоид. Эффект сосредоточения поля у сплавов с $\kappa \sim 1$ ¹⁸ может оказаться настолько сильным, что поле может менять направление, чтобы сохранить величину полного магнитного потока ϕ_0 . Однако ниже мы, в основном, имеем в виду случай $\kappa \gg 1$.

б) Физическая природа диссипативных процессов. Только что описанная структура вихря подсказывает некоторую упрощенную модель, в которой вихрь состоит из полностью нормальной сердцевины и области с размером δ , в которой сосредоточивается квант потока. На границе сверхпроводящий параметр от своего значения в однородном сверхпроводнике скачком изменяется до нуля. Эта грубая картина позволяет, однако, понять один из механизмов диссипации энергии в вихре: джоулевский нагрев нормальных возбуждений вблизи центра нити. Оценка вклада от этого механизма была сделана впервые Брадином и Стеффеном¹⁹ и основана на следующих соображениях. Напишем гидродинамические уравнения для скорости движения «сверхтекучих» электронов \mathbf{v}_s :

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \nabla \mu_{\mathbf{v}} \quad (1.2)$$

где μ — химический потенциал. Если вихревая нить движется как целое с постоянной скоростью \mathbf{v}_L , то полная производная $d\mathbf{v}_s/dt$ содержит член

$$(\mathbf{v}_L \nabla) \mathbf{v}_s = \nabla (\mathbf{v}_L \mathbf{v}_s), \quad (1.3)$$

поскольку $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, здесь $\mathbf{v}_L \ll \mathbf{v}_s$ и \mathbf{v}_s — поле скоростей сверхтекучей компоненты вне сердцевины вихря:

$$m\mathbf{v}_s = \mathbf{p}_s(\mathbf{r}) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (1.4)$$

Поскольку в модели вне вихря параметр порядка постоянен,

$$2\mathbf{p}_s = \hbar \nabla \theta,$$

где θ — фаза волновой функции куперовской

т. е. определяются решением статической задачи. Потенциал Φ пропорционален скорости и должен определяться из неоднородного линейного уравнения (1.19), куда также входят известные величины. Диссипация в единице объема пропорциональна v_L^2 . Среднее электрическое поле $\bar{\mathbf{E}}$ определяется из условия

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{v}_L]. \quad (1.20)$$

Таким образом, выражая скорость через $\bar{\mathbf{E}}$, мы получаем диссипацию энергии, пропорциональной квадрату макроскопического электрического поля, что непосредственно дает удельную проводимость σ_f в сверхпроводящей фазе:

$$\bar{W} = \sigma_f \bar{E}^2.$$

Если решетка вихрей достаточно разрежена, что имеет место либо при очень малой концентрации нитей, либо при $\kappa \gg 1$ в интервале полей $B \ll H_{c2}$, то $\rho_f = \sigma_f^{-1}$, очевидно, пропорционально числу нитей. Поэтому удобно ρ_f записать в виде

$$\rho_f = \beta^{-1}(T, B) \frac{B}{H_{c2}(T)}, \quad (1.21)$$

где подлежит определению безразмерный коэффициент $\beta(T, B)$, а $H_{c2}(T)$ — верхнее критическое поле при данной температуре.

Пусть $\kappa \gg 1$, так что при полях $B \ll H_{c2}$ достаточно ограничиться движением отдельной нити, которое возникает за счет локальной (т. е. в окрестности данной нити) сверхтекучей компоненты тока j_{tr} . Для неускоренного движения сила Лоренца $\mathbf{F}_L = 1/c [\mathbf{j}_{tr}, \Phi_0]$ на единицу длины вихря компенсируется силой вязкого трения $-\eta v_L$. Если $j_{tr} = \sigma_f \bar{E} = \frac{\sigma_f}{c} v_L B$, то отсюда коэффициент вязкости можно выразить через проводимость

$$\eta = \frac{\sigma_f \Phi_0 B}{c^2} = \beta \frac{\sigma_n \Phi_0 H_{c2}}{c^2}. \quad (1.22)$$

Выше не делалось специальных предположений. При $\kappa \gg 1$ уравнение (1.19) и выражение (1.18) для W удастся упростить. Действительно, в этом случае помимо того, что для отдельной нити можно выбрать $\text{div } \mathbf{A} = 0$, величина вектор-потенциала \mathbf{A} на расстояниях $\rho \sim \xi$ мала по сравнению с $(c/2e) \nabla \theta$:

$$\hbar \nabla \theta \sim \frac{1}{\rho} \sim \frac{1}{\xi}, \quad \frac{e}{c} \mathbf{A} \sim \frac{e}{c} H(0) \rho \sim \frac{H(0) \xi}{\Phi_0} \sim \frac{\xi}{\delta^2}.$$

Второй член в фигурных скобках (1.18) и член $\sigma_n (\nabla \Phi)^2$ вместе с помощью (1.19) переходят в

$$\frac{1}{2e} (\hbar \dot{\theta} + 2e\Phi) \sigma_n \nabla^2 \Phi + \sigma_n (\nabla \Phi)^2 = \frac{\hbar}{2e} \dot{\theta} \sigma_n \nabla^2 \Phi + \sigma_n \text{div} (\Phi \nabla \Phi)$$

Откидывая поверхностный вклад, получим для диссипации энергии на единицу длины вихря

$$\bar{W} = \int \left[2\gamma \hbar (\mathbf{v}_L \nabla |\Psi|)^2 + \frac{1}{2e} \sigma_n \dot{\theta} \nabla^2 \Phi \right] d^2 \mathbf{r}. \quad (1.23)$$

Два члена в (1.23) представляют соответственно вклад в диссипацию энергии за счет релаксации параметра порядка и омической диссипации нормальными возбуждениями в сердцевине вихря.

Качественно формулы (1.22) и (1.23) соответствуют общей экспериментальной ситуации. Поскольку, однако, количественно уравнения (1.14) и (1.17) следуют из микроскопической теории сверхпроводимости только в сплавах с парамагнитными примесями, мы отложим вычисление и обсуждение (1.23) до соответствующего раздела.

2. СОПРОТИВЛЕНИЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ II РОДА В ПРОСТОЙ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Простые уравнения вида (1.11) и (1.17) возникают в микроскопической теории только в двух случаях: сплавы с большой концентрацией парамагнитных примесей и сплавы в сильном магнитном поле ($H_{c2} - H \ll \ll H_{c2}$). Ниже в гл. 3 будут объяснены качественно те причины, которые приводят к столь резкому усложнению аппарата микроскопической теории БКШ при переходе к изучению кинетических явлений в сверхпроводниках. Здесь же заметим кратко, что это обстоятельство заложено в пороговом характере электронного спектра сверхпроводника. Парамагнитные примеси и магнитное поле обладают одним общим свойством, которое принципиально меняет указанную особенность спектра: они нарушают инвариантность гамильтониана электронов по отношению к инверсии времени. Как известно, в куперовском спаривании волновые функции двух электронов получают друг из друга операцией обращения времени. Нарушение этой инвариантности действием магнитного поля или за счет взаимодействия электронов с собственным моментом примеси подавляет образование пар. В определенной области концентраций это подавление проявляется в так называемой «бесцелевой сверхпроводимости»²⁵, где энергетический порог возбуждения отсутствует. В пределе, когда плотность состояний сверхпроводника $\nu_s(\varepsilon) \approx \nu_n(0)$, кинетические уравнения существенно упрощаются и приобретают вид диффузионных уравнений предыдущего раздела⁷. Аналогично действует магнитное поле, как было доказано в термодинамическом случае Маки¹⁴ и Кароли, Сиро и Де Женном²⁶. Нелинейные кинетические уравнения диффузионного типа (1.11), как оказывается, можно написать и в этом случае⁹, однако, как мы увидим, ситуация в области $|H - H_{c2}| \ll H_{c2}$ всюду, за исключением непосредственной окрестности T_c , намного проще. Дело в том, что сильное магнитное поле подавляет сверхпроводимость во всем объеме. Поэтому вместо картины локализованных вихревых нитей состоянию сверхпроводника в этом предельном случае отвечает сильное перекрытие нитей, и параметр порядка равномерно мал по всему объему.

а) Сверхпроводящие сплавы с парамагнитными примесями. Слабые и промежуточные поля ($B \ll H_{c2}$). Поведение этих сплавов в переменном поле в предельном случае больших концентраций ($T_c \ll T_{c0}$ или $\tau_s T_{c0} \ll 1$) описывается следующими уравнениями⁷:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial |\Delta|}{\partial t} + \frac{\tau_s}{3} \left[-\pi^2 (T_c^2 - T^2) + \frac{|\Delta|^2}{2} \right] |\Delta| - \\ - D \nabla^2 |\Delta| + \frac{4e^2}{c^2} D Q^2 |\Delta| = 0, \\ \frac{c}{2e} |\Delta|^2 \tilde{\mu} + D \operatorname{div} (|\Delta|^2 \mathbf{Q}) = 0, \\ \mathbf{j} = \sigma_n \mathbf{E} - \frac{2\sigma_n \tau_s}{c} |\Delta|^2 \mathbf{Q}; \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

здесь $D = l v_F / 3$ — коэффициент диффузии, а τ_s — среднее время между соударениями электронов с примесью, сопровождающееся переворотом спина. Уравнения (2.1) записаны для параметра порядка микроскопической теории сверхпроводимости, при этом введены обозначения:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} - \frac{c}{2e} \nabla \theta, \quad \tilde{\mu} = \dot{\theta} + 2e\Phi \quad (2.2)$$

(θ — фаза параметра порядка; всюду в этом разделе $\hbar = 1$).

Соответствие между уравнениями (2.1), (2.2) и (1.11), (1.17) полное, если положить $\Psi = \Delta \sqrt{N_0 \tau_s / 2}$ и $\gamma = \hbar / 2mD$. Поэтому, в частности, вязкость η можно было бы определить, используя выражение (1.23) для диссипативной функции. Мы применим здесь другой подход²⁷, имея в виду, в частности, продемонстрировать концепцию эквивалентности силы Лоренца и силы Магнуса; показать, что движение вихря вызывается полем сверхтекучей скорости в его окрестности. Более существенно то, что излагаемый подход применим также и в случае, когда уравнения типа (1.11) и (1.17) не имеют места.

Ниже мы будем считать постоянной теорию Гинзбурга — Ландау $\kappa = c(48\pi D\sigma_n)^{-1/2} \gg 1$. Поэтому, как об этом уже говорилось выше, при вычислениях все величины понадобятся на расстояниях $\rho \ll \delta$, на которых магнитным полем (и, следовательно, вкладом от него в векторный потенциал \mathbf{A}) можно пренебречь вплоть до полей $H \ll H_{c2}$. Поэтому даже если расстояния между нитями d малы по сравнению с глубиной проникновения, но еще велики по отношению к радиусу когерентности, выражение для \mathbf{Q} в (2.2) сводится к виду $\mathbf{Q} = -(c/2e)\nabla\theta$.

Обозначив $2e\Phi = \mu^*$ и $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}/e$ — плотность потока импульса электронов, мы можем переписать систему уравнений (2.1) так, чтобы заряд электрона в них вообще не фигурировал (знак модуля у Δ здесь и ниже в этом разделе опускаем):

$$\dot{\Delta} + \frac{\tau_s}{3} \left[-\pi^2 (T_c^2 - T) + \frac{\Delta^2}{2} \right] \Delta - D\nabla^2 \Delta + D(\nabla\theta)^2 \Delta = 0, \quad (2.3)$$

$$\Delta^2 (\dot{\theta} + \mu^*) - D \operatorname{div} (\Delta^2 \nabla\theta) = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{j}_s = -\frac{\sigma_n}{2e^2} (\nabla\mu^* - 2\tau_s \Delta^2 \nabla\theta). \quad (2.5)$$

Уравнения (2.4) и (2.5) совместно с $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ дают

$$D\nabla^2 \mu^* - 2\tau_s \Delta^2 (\dot{\theta} + \mu^*) = 0. \quad (2.6)$$

Будем искать решение этих уравнений для медленно движущегося вихря в виде

$$\Delta = \Delta_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}_L t) + \Delta_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}_L t), \quad \theta = \theta_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}_L t) + \theta_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}_L t). \quad (2.7)$$

Подставим (2.7) в уравнения (2.3) и (2.5), ограничиваясь линейными по \mathbf{v}_L членами:

$$-(\mathbf{v}_L \nabla) \Delta_0 + \frac{\tau_s}{3} \left[-\pi^2 (T_c^2 - T^2) + \frac{3\Delta_0^2}{2} \right] \Delta_1 - D\nabla^2 \Delta_1 + D(\nabla\theta_0^2) \Delta_1 + 2D(\nabla\theta_0 \nabla\theta_1) \Delta_0 = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{j}_{s1} = -\frac{\sigma_n}{2e} (\nabla\mu^* - 2\tau_s \Delta^2 \nabla\theta_1 - 4\tau_s \Delta_0 \Delta_1 \nabla\theta_0). \quad (2.9)$$

В силу пространственной однородности начало координат в статических решениях уравнений (2.1) Δ_0 , θ_0 , \mathbf{j}_{s0} может быть сдвинуто на произвольный вектор \mathbf{d} : $f(\mathbf{r}) \rightarrow f(\mathbf{r} + \mathbf{d})$. Поэтому очевидно, что $\Delta_d = (\mathbf{d}\nabla) \Delta_0$, $\theta_d = (\mathbf{d}\nabla) \theta_0$ удовлетворяют уравнению (2.8) (без неоднородного члена $(\mathbf{v}_L \nabla) \Delta_0$) и линеаризованному уравнению $\operatorname{div} \mathbf{j}_d = 0$ с выражением (2.9) (без члена $\nabla\mu^*$) в качестве \mathbf{j}_d , если всюду заменить Δ_1 и θ_1 на Δ_d и θ_d . Имея это в виду, умножим (2.8) на Δ_d и проинтегрируем по объему цилиндра с радиусом большим, чем ξ . Обозначая аналогично $\Delta_v = (\mathbf{v}_L \nabla) \Delta_0$ и пользуясь тем, что Δ_1 затухает на расстояниях порядка ξ , можем проинтегрировать члены $D\Delta_d \nabla^2 \Delta_1$ по частям, откидывая поверхностные интегралы. Получим

$$-\int \Delta_v \Delta_d d^3\mathbf{r} + 2 \int D \left[(\nabla\theta_0 \nabla\theta_1) \Delta_0 \Delta_d - (\nabla\theta_0 \nabla\theta_d) \Delta_0 \Delta_1 \right] d^3\mathbf{r} = 0.$$

Комбинируя второй интеграл с помощью выражения для \mathbf{j}_{s1} и \mathbf{j}_d , находим

$$-\int \Delta_v \Delta_d d^3\mathbf{r} + \frac{De^2}{\tau_s \sigma_n} \int (\mathbf{j}_{sd} \nabla \theta_1 - \mathbf{j}_{s1} \nabla \theta_d) d^3\mathbf{r} - \frac{D}{2\tau_s} \int (\nabla \mu^* \nabla \theta_d) d^3\mathbf{r} = 0.$$

Интегрируя по частям, получим ($\text{div } \mathbf{j}_d = 0$)

$$\frac{De^2}{\tau_s \sigma_n} \int (\mathbf{j}_{sd} \theta_1 - \mathbf{j}_{s1} \theta_d) dS = \int (\Delta_v \Delta_d) d^3\mathbf{r} + \int \Delta_0^2 \tilde{\mu}_d d^3\mathbf{r},$$

где согласно (2.6) $\tilde{\mu} = \mu^* - (\mathbf{v}_L \nabla) \theta_0$ удовлетворяет уравнению

$$D \nabla^2 \tilde{\mu} - 2\tau \Delta_0^2 \tilde{\mu} = 0$$

с граничным условием конечности μ^* при $\rho = 0$ ^{28, 29}. Поверхностный интеграл легко выразить через $\mathbf{j}_{s1\infty} = \mathbf{j}_{s1r}$. Действительно, при $\rho \gg \xi$

$$\mathbf{j}_{s1\infty} = \frac{\sigma_n \tau_s \Delta_\infty^2}{e^2} \nabla \theta_1, \quad (\mathbf{j}_d)_\rho = \frac{\sigma_n \tau_s \Delta_\infty^2}{e^2 \rho^2} [\mathbf{n}_H, \mathbf{d}]_\rho.$$

Отсюда $\theta_1 = \frac{e^2}{\sigma_n \tau_s \Delta_\infty^2} (\mathbf{j}_{s1\infty} \rho)$,

$$([\mathbf{n}_H, \mathbf{d}] \mathbf{j}_{s1\infty}) = \frac{\sigma_n \tau_s}{2\pi e D} (\mathbf{v}_L \mathbf{d}) \left[\int 2\pi \rho \left(\frac{d\Delta_0}{d\rho} \right)^2 d\rho + \int 2\pi \Delta_0^2 \tilde{\mu}_1 d\rho \right], \quad (2.10)$$

где $\tilde{\mu} = v_L \tilde{\mu}_1 \sin \varphi$ и $\tilde{\mu}_1 = -1/\rho$ при $\rho \rightarrow 0$. Если $v_L = \bar{E}c/B$ и $\mathbf{j}_{s1\infty} = \mathbf{j}_{1r}$, то для проводимости получаем

$$\sigma_f = \frac{6\alpha \sigma_n H c^2}{B}, \quad (2.11)$$

где мы воспользовались выражением для верхнего критического поля $H_{c2} = c\tau_s \Delta_\infty^2 / 12cD$ в данной конкретной задаче, а численный коэффициент α равен

$$\alpha = \int_0^\infty \rho \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 d\rho + \int_0^\infty \tilde{\mu} f^2 d\rho = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (2.12)$$

где функция f — решение стационарной задачи для единичного вихря в безразмерных переменных^{1, 27} (в единицах $\xi = \sqrt{\frac{6D}{\tau_s \Delta_\infty^2}}$)

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho f) \right] + (1 - f^2) f = 0,$$

а $\tilde{\mu}_1$ в тех же единицах удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{\mu}_1) \right) - 12f^2 \tilde{\mu}_1 = 0, \quad \tilde{\mu}_1 = -\frac{1}{\rho} \text{ при } \rho \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Величина α_1 была вычислена в работе²⁸: $\alpha_1 = 0,279$ *). Уравнение (2.13) численно решалось Лихаревым и Куприяновым²⁸ и Хью (см.^{29, 30}); для α_2 получено значение $\alpha_2 = 0,159$. Таким образом, $\alpha = 0,438$. Два члена в (2.12), в соответствии с (1.23), описывают вклад в диссипацию энергии за счет механизма релаксации параметра порядка (α_1) и омических потерь (α_2).

б) Уравнения движения и деформации в решетке вихрей в присутствии транспортного тока. В предыдущем разделе рассматривалась одна нить в поле обтекающего ее сверхтекучего тока. Транспортный ток в объеме сверхпроводника возникает, разумеется, лишь при конечной плотности вихревых нитей. При малых полях $B \ll H_{c2}$ очень существенна роль краевых эффектов,

*) В работе²⁷ приведено менее точное значение $\alpha_1 = 0,247$.

поскольку из-за эффекта Мейсснера ток, в основном, протекает вблизи поверхности сверхпроводника, уходя вглубь лишь в окрестности нитей. С этим связана одна из отмечавшихся трудностей при измерении вихревого сопротивления в сверхпроводниках при малых полях. Вторым фактором, играющим существенную роль, является собственное поле тока, приводящее к появлению компоненты магнитного поля, перпендикулярной приложенному внешнему полю. Эта компонента искривляет решетку вихрей. Таким образом, в массивном образце величина тока около отдельной нити, вообще говоря, не совпадает со средней плотностью транспортного тока *).

Рассматривая решетку вихрей, будем предполагать, что $B \ll H_{c2}$, т. е. расстояния между вихрями d велики по сравнению с ξ ($\kappa \gg 1$). Расположим начало координат на одной из нитей. Координаты точек вдоль нити характеризуются двумерным вектором деформации $\mathbf{u}(z, t)$, координаты вдоль остальных нитей: $\rho_{0i} + \mathbf{u}_i(z, t)$, где ρ_{0i} — равновесное положение i -й нити. Искривление нитей изменит картину движения вблизи выделенного вихря ($\rho \ll d$). Хотя скорость и деформация по предположению малы, нулевое приближение для отдельной нити отвечает теперь не только смещению, но и повороту равновесных решений:

$$\Delta = \Delta_0(\rho - \mathbf{u}(z, t)) + \Delta_1, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0(\rho - \mathbf{u}(z, t)) + [\delta\varphi, \mathbf{Q}_0] + \mathbf{Q}_1, \quad \delta\varphi = \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right] \quad (2.14)$$

(сравни с (2.7)!). В результате вычислений, полностью аналогичных тем, которые привели нас к соотношению (2.10), получим ²⁷

$$\{[\mathbf{n}_H, \mathbf{d}] \mathbf{j}_{1\infty} = -\frac{m p_F \tau_s e}{2\pi^3} \int [\Delta_d(\dot{\mathbf{u}} \nabla) \Delta_0 + \tilde{\mu} \Delta_0^2 \theta_d] d^2 \mathbf{r} - \frac{m p_F \tau_s e D}{2\pi^3} \int \left[\Delta_d \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \nabla \right) \Delta_0 + \theta_d \Delta_0^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \nabla \right) \theta_0 \right] d^2 \mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Второй интеграл в (2.15) приводится к виду

$$-\frac{m p_F \tau_s D e \Delta_0^2}{2\pi^2} \left\{ \kappa^2 \frac{\varepsilon}{2\pi} + \int_{\rho}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \left(\frac{2e}{c} Q_0 \right)^2 \right] \rho d\rho \right\} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \mathbf{d},$$

где $\varepsilon = 2\pi\kappa^{-2} (\ln \kappa + 0,18)$ — энергия, приходящаяся на единицу длины вихря ¹. Окончательно

$$\mathbf{j}_{1\infty}(\rho) = 6\alpha \frac{\sigma_n H_{c2}}{c} [\mathbf{n}_H, \dot{\mathbf{u}}] - \frac{c\varphi_0}{16\pi^2 \delta^2} \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right] \left\{ \kappa^2 \frac{\varepsilon}{2\pi} + \int_{\rho}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \left(\frac{2e}{c} Q_0 \right)^2 \right] \rho d\rho \right\} \quad (2.16)$$

(последний член содержит зависимость от ρ).

Это соотношение позволяет установить связь между скоростью движения нити и деформацией вихревой решетки. Для этого поступим следующим образом. Ток $\mathbf{j}_{1\infty}(\rho)$ не больших расстояниях остова выделенной нити можно найти непосредственно из уравнения Лондонов

$$\delta^2 \text{rot rot } \mathbf{h} + \mathbf{h} = \varphi_0 \sum_j \int dS_j \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j);$$

здесь \mathbf{h} — микроскопическое магнитное поле, dS_j — элемент длины вдоль j -й нити, $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_j)$ — трехмерная δ -функция, \mathbf{R}_j — трехмерный вектор, проведенный в точку на j -й нити. Отсюда легко получить выражение

*) Мы покажем, однако, что выражение (2.14) для проводимости не изменяется при учете последнего обстоятельства, пока собственное поле тока мало по сравнению с H .

для тока $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{h}$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = -\frac{c\varphi_0}{16\pi^2\delta^2} \sum_j \int \left\{ d\mathbf{S}_j, \text{grad} \left[\frac{\exp(-|\mathbf{R}-\mathbf{R}_j|/\delta)}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_j|} \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Считая, что $\mathbf{u}(\mathbf{R})$ медленно меняется на расстояниях порядка δ и d , разложим (2.17) по степеням малых деформаций решетки до членов второго порядка по производным $\nabla_i^2 \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{1\infty} = & \frac{c}{B} \left\{ (c_{11} - c_{66}) [\mathbf{n}_H, \nabla \text{div } \mathbf{u}] + c_{66} [\mathbf{n}_H, \nabla^2 \mathbf{u}] + \right. \\ & \left. + c_{44} \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right] + (c_{12} - c_{66}) \frac{\partial}{\partial z} \text{rot } \mathbf{u} \right\} - \frac{c\varphi_0}{16\pi^2\xi^2} \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right] - \\ & - \frac{c\varphi_0}{16\pi^2\delta^2} \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right] \left[K_0 \left(\frac{\rho}{\delta} \right) + \frac{\rho}{2\delta} K_1 \left(\frac{\rho}{\delta} \right) \right], \quad (2.18) \end{aligned}$$

где c_{ij} — упругие модули треугольной решетки вихревых нитей, вычисленные Лабушем³¹. Сравнивая выражения (2.16) и (2.18) при $\xi \ll \rho \ll d$, получим уравнение, описывающее движение вихревой решетки:

$$\begin{aligned} 6\alpha \frac{H c_2^2 \sigma_n}{c^2} B [\mathbf{n}_H, \dot{\mathbf{u}}] = \\ = (c_{11} - c_{66}) [\mathbf{n}_H, \nabla \text{div } \mathbf{u}] + c_{66} [\mathbf{n}_H, \nabla^2 \mathbf{u}] + c_{44} \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right]. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Деформация решетки и скорость ее движения определяются приложениями макроскопическими электрическими, \mathbf{E} , и магнитными, \mathbf{H} , полями или транспортным током \mathbf{j}_{tr} . Задача, таким образом, состоит в том, чтобы выразить деформации решетки через \mathbf{j}_{tr} . Для этого запишем термодинамический потенциал Гиббса²⁴ для системы вихрей в заданном внешнем поле \mathbf{H} ³²:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \int \left\{ \left[\frac{1}{2} (c_{11} - c_{66}) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + c_{66} \left(\frac{\partial u_H}{\partial x_i} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + c_{44} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\mathbf{H} - \mathbf{H}_0}{4\pi} \mathbf{B} \right\} d^3\mathbf{r}; \quad (2.20) \end{aligned}$$

здесь \mathcal{F}_0 и \mathbf{H}_0 соответствуют сверхпроводнику с недеформированной решеткой вихревых нитей, так что при $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ и $\partial \mathbf{u} / \partial x_i = 0$ потенциал $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$.

Его вариация по векторам деформации u_i при постоянном \mathbf{H} определяет действующие на решетку вихрей силы. При этом индукция \mathbf{B} изменяется на

$$\delta \mathbf{B} = B_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - B_0 \mathbf{n}_H \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (2.21)$$

При установившемся равномерном движении решетка находится в равновесии. Поэтому условие минимума потенциала (2.20) дает

$$(c_{11} - c_{66}) \nabla \text{div } \mathbf{u} + c_{66} \nabla^2 \mathbf{u} + c_{44} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = \frac{B_0}{c} \mathbf{j}_{tr}, \quad (2.22)$$

где, по определению,

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{tr} = \text{rot } \mathbf{H} = \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right] - [\mathbf{n}_H, \nabla (H_z - H_0)].$$

Таким образом, мы видим, что правая часть (2.19) непосредственно равна макроскопическому транспортному току:

$$\mathbf{i}_{tr} = 6\alpha \sigma_n \frac{H c_2^2}{c} [\mathbf{n}_H, \dot{\mathbf{u}}] \quad (2.23)$$

в соответствии со сделанным выше утверждением.

Среднее электрическое поле $\bar{\mathbf{E}}$ можно найти из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \bar{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

где \mathbf{B} дается выражением (2.24):

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{B_0}{c} [\mathbf{n}_H, \dot{\mathbf{u}}]. \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в (2.23), видим, что сверхпроводник обладает конечной проводимостью

$$\sigma_f = \sigma_n 6\alpha \frac{H c^2}{B_0}.$$

Отметим еще раз, что уравнение (2.22) имеет вид условий равновесия упруго деформированной решетки

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = F_i;$$

σ_{ik} — тензор напряжений, где роль внешней силы играет сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_t r, \mathbf{B}_0].$$

Взяв силу, действующую на один вихрь, найдем, что $\mathbf{F}_L = \eta \mathbf{v}_L$ ($\mathbf{v}_L = \dot{\mathbf{u}}$ — скорость вихря), где коэффициент вязкости (на единицу длины вихря)

$$\eta = \frac{6\alpha \sigma_n \varphi_0 H c^2}{c^2}.$$

Подставляя сюда $\varphi_0 = \pi \hbar c / e$ и $H_{c2} = \hbar c / 2e \xi^2$, видим, что

$$\eta = \frac{3\alpha \pi N_0 \hbar^2 \tau}{m \xi^2},$$

т. е. из выражения для коэффициента вязкости заряд электрона выпадает в полном соответствии с тем фактом, что уравнения (2.1) представляют собой обобщенные уравнения гидродинамики для сверхтекучей ферми-жидкости. Поэтому сила Лоренца эквивалентна силе Магнуса, действующей со стороны сверхтекучей компоненты на единицу длины вихря. Что же касается кинематики движения вихря, то преобладающим оказывается не увлечение вихря сверхтекучей компонентой жидкости, а действие вязких сил, обусловленное неинвариантностью системы электронов в сплаве по отношению к галилеевским преобразованиям.

Укажем еще, что результаты этого раздела, касающиеся связи транспортного тока с деформациями решетки, основаны на уравнении Лондонов вдали от вихря и потому носят макроскопический характер. Детали кинетических диссипационных процессов, определяемые микроскопической моделью, фигурируют при $\kappa \gg 1$ только в величине константы в выражениях (2.19) и (2.23) для одной нити.

в) Сверхпроводящие сплавы с парамагнитными примесями. Сильные поля ($B \approx H_{c2}$). Остановимся сначала на равновесной структуре вихревой решетки в больших полях. В этом случае, как уже упоминалось выше, сверхпроводимость существенно подавлена во всем объеме сверхпроводника. Из микроскопической теории¹⁴ следует, что при полях, близких к H_{c2} , сверхпроводник описывается уравнениями типа Гинзбурга — Ландау во всем интервале температур $0 < T < T_c$. Ограничиваясь в целях иллюстрации в этом разделе простейшим случаем сплавов с парамагнитными примесями, запишем

статическое уравнение (2.1):

$$\frac{\tau_s}{3\hbar^2} \left[-\pi^2 (T_c^2 - T^2) + \frac{|\Delta|^2}{2} \right] \Delta - D \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Delta = 0.$$

Для того чтобы рассматриваемая картина имела более общий и наглядный характер, удобно ввести масштаб длины в этом уравнении:

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{6D\hbar^2}{\tau_s \Delta_\infty^2}}, \quad \text{где } \Delta_\infty = \sqrt{2\pi^2 (T_c^2 - T^2)}$$

— равновесное значение параметра порядка Δ в отсутствие магнитного поля. После этого имеем

$$\xi^{-2} \left(1 - \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2} \right) \Delta + \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Delta = 0. \quad (2.25)$$

В рассматриваемой области полей Δ/Δ_∞ мало, а для \mathbf{A} обычно выбирается калибровка $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ (напомним, что магнитное поле направлено вдоль оси z). При $H = H_{c2}$ решение (2.25), обладающее периодичностью по x и y , как показал Абрикосов¹, имеет вид

$$\Delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(inqy) \exp \left[-\frac{e}{\hbar c} H \left(x - \frac{\tau_n \hbar c q}{2eH} \right)^2 \right]. \quad (2.26)$$

Коэффициенты C_n подчиняются условиям периодичности $C_{n+\nu} = C_n$, где ν — целое число; парамет-

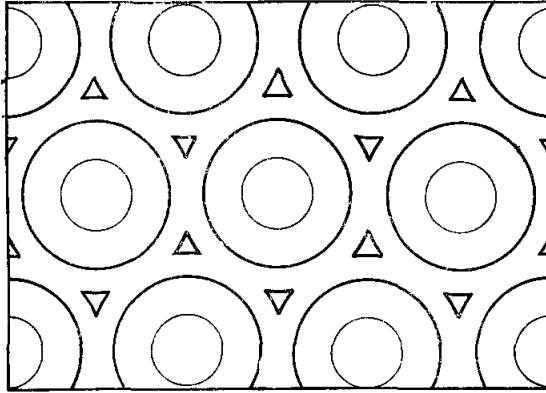


Рис. 6. Линии постоянной плотности сверхпроводящих электронов для треугольной решетки вихревых нитей³³.

ры q и ν определяются конкретной геометрической структурой решетки. Для треугольной решетки $\nu = 2$, причем $C_1 = iC_0$. Каждое слагаемое в (2.26) описывает зародыши сверхпроводящей фазы в форме полосы шириной $\xi(T)$ (напомним, что $H_{c2} = \hbar c / 2e \xi^2$, поэтому при $H = H_{c2}$ в показателе экспоненты стоит просто $-(1/2\xi^2)(x - x_0)^2$, $x_0 = -n\hbar c q / 2eH$). Линии $|\Delta|^2 = \text{const}$ для треугольной решетки изображены³³ на рис. 6.

Если поле H немного меньше H_{c2} , то индукция $B \neq H_{c2}$, при этом связь между индукцией B и магнитным полем H можно установить из уравнения

$$\frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} = \frac{\hbar c^2}{16\pi\delta^2 e} \left[\Delta^* \left(-i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta - \Delta \left(-i\nabla + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta^* \right] \Delta_\infty^{-2},$$

$\delta = \hbar c (8\pi\sigma_n \tau_s \Delta_\infty^2)^{-1/2}$ — глубина проникновения магнитного поля. Используя выражение (2.26), можно показать, что

$$j_x = -\frac{c^2 \hbar}{16\pi\delta^2 e} \frac{\partial}{\partial y} \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2}, \quad j_y = \frac{c^2 \hbar}{16\pi\delta^2 e} \frac{\partial}{\partial x} \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2}, \quad (2.27)$$

откуда

$$h_z = H - \frac{\hbar c}{4e\delta^2} \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2}.$$

Усредняя, \bar{h}_z , по объему образца, получим

$$\bar{h}_z = B = H - \frac{\hbar c}{4e\delta^2} \frac{|\bar{\Delta}|^2}{\Delta_\infty^2}. \quad (2.28)$$

Для нахождения $|\bar{\Delta}|^2$ умножим (2.25) на Δ^* и проинтегрируем по объему сверхпроводника. Тогда с учетом (2.26), (2.28) получим

$$\frac{|\bar{\Delta}|^2}{\Delta_\infty^2} = \frac{1 - (H/H_{c2})}{\beta_L [1 - (2\kappa)^{-2}]}, \quad (2.29)$$

где $\beta_L = |\bar{\Delta}|^4 / (|\Delta|^2)^2$. Для треугольной решетки $\beta_L = 1,16$ ³³. В дальнейшем нам будет удобнее выразить $|\bar{\Delta}|^2$ не через H , а через B , так как именно индукция B равна полю H в пустоте у поверхности образца. Подставляя (2.28) в (2.29), находим

$$\frac{|\bar{\Delta}|^2}{\Delta_\infty^2} = \frac{2\kappa^2 [1 - (B/H_{c2})]}{\beta_L (2\kappa^2 - 1) + 1}. \quad (2.30)$$

В конкретном случае сверхпроводника с парамагнитными примесями в больших полях сопротивление проще всего найти³⁴, исходя из выражения (1.16) для диссипативной функции W , данного и в гл. 1, где надо положить $\gamma = \hbar/2mD$; $\Psi = \Delta \sqrt{N_0 \tau \tau_s / 2}$:

$$W = \frac{N_0 \tau \tau_s}{2mD} \left[\hbar \frac{\partial \Delta}{\partial t} + 2ie\Phi \Delta \right]^2 + \sigma_n \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi \right]^2.$$

Удобно выбрать калибровку потенциалов так, чтобы электрическое поле, которое в нулевом по $|\Delta|^2$ приближении является однородным, описывалось скалярным потенциалом

$$\Phi = -E_x x, \quad \mathbf{A} = (0, H_{c2} x, 0).$$

В этом случае второй член в W при усреднении по образцу дает просто $\sigma_n \bar{E}^2$ с точностью до $|\Delta|^2$, так как отклонения поля от средней величины $\delta E = E - \bar{E}$ выпадают: $\overline{\delta E} = 0$, а $\overline{(\delta E)^2} \sim |\bar{\Delta}|^4$. Для вычисления первого члена заметим, что в первом приближении по скорости движения можно считать, что $\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -(\mathbf{v}_L \nabla) \Delta_0$, где Δ_0 — равновесное значение Δ , даваемое (2.26), а среднее электрическое поле $\bar{\mathbf{E}} = -(1/c) [\mathbf{v}_L, \mathbf{B}] = -(1/c) [\mathbf{v}_L, \mathbf{H}_{c2}]$, таким образом, в выбранной калибровке Φ скорость \mathbf{v}_L направлена вниз по оси y . Используя это, можно записать

$$\left| \hbar \frac{\partial \Delta}{\partial t} + 2ie\Phi \Delta \right|^2 = v_{Ly}^2 \hbar^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2ie}{\hbar c} A_y \right) \Delta^* \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2ie}{\hbar c} A_y \right) \Delta \right].$$

Чтобы упростить вычисление этих выражений, введем операторы

$$\begin{aligned} \Pi_{\pm} &= \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)_x \pm i \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)_y, \\ \Pi_{\pm}^* &= \left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)_x \pm i \left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)_y, \end{aligned}$$

действующие соответственно на Δ и Δ^* .

С помощью (2.26) легко убедиться в том, что $\Pi_+ \Delta_0 = 0$, а $[\Pi_+, \Pi_-] = (4e/\hbar c) H_{c2}$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \overline{\left| \hbar \frac{\partial \Delta}{\partial t} + 2ie\Phi \Delta \right|^2} &= \frac{v_{Ly}^2 \hbar^2}{4} \overline{[(\Pi_+^* \Delta_0^*) (\Pi_- \Delta_0)]} = \frac{v_{Ly}^2 \hbar^2}{4} \overline{(\Delta_0^* \Pi_+ \Pi_- \Delta_0)} = \\ &= \frac{v_{Ly}^2 \hbar^2}{4} \overline{(\Delta_0^* [\Pi_+, \Pi_-] \Delta_0)} = \frac{ev_{Ly}^2 \hbar^2}{\hbar c} H_{c2} \overline{|\Delta|^2} = 2e^2 \xi^2 (\bar{E})^2 \overline{|\Delta|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{W} = \sigma_n \bar{E}^2 \left(1 + 6 \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2} \right).$$

Приравнивая $\bar{W} = \sigma_f \bar{E}^2$, получим ³⁴

$$\sigma_f / \sigma_n = 1 + 6 \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2} = 1 + \frac{12\kappa^2}{\beta_L (2\kappa^2 - 1) + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}} \right). \quad (2.31)$$

Этот результат принято изображать как наклон зависимости удельного сопротивления ρ_f от B :

$$S = \left[\frac{H_{c2}}{\rho_n} \frac{d\rho_f}{dB} \right]_{B=H_{c2}} = \frac{12\kappa^2}{\beta_L (2\kappa^2 - 1) + 1}.$$

В грязных сплавах $l \ll \xi$ параметр Гинзбурга — Ландау κ велик, поэтому

$$S \approx \frac{6}{\beta_L} \approx 5,17.$$

Заметим, что проводимость в больших полях может быть получена также путем прямого вычисления тока в уравнениях (2.1). При этом уравнение для параметра порядка имеет точное решение.

Выпишем еще раз временные уравнения (2.1) в виде (2.25) ⁷:

$$-D^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \right) \Delta + \xi^{-2} \left(1 - \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2} \right) \Delta + \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Delta = 0, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_n \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right) +$$

$$+ \frac{\hbar c^2}{16\pi \delta^2 e \Delta_\infty^2} \left[\Delta^* \left(-i\nabla - \Delta \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta - \Delta \left(-i\nabla + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta^* \right]. \quad (2.33)$$

Калибровку потенциалов выберем, как и ранее: $\Phi = -\bar{E}_x x$, $\mathbf{A} = (0, H_{c2} x, 0)$. Поскольку $\bar{\mathbf{E}} = -(1/c) [\mathbf{v}_L, \mathbf{B}]$, то $v_{Lx} = 0$, $v_{Ly} = -c\bar{E}_x / H_{c2}$. Нетрудно убедиться, что решением уравнения (2.32) с такими потенциалами является функция ²²

$$\Delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp[inq(y - v_{Ly}t)] \exp \left[-\frac{eH_{c2}}{\hbar c} \left(x - \frac{n\hbar c q}{2eH_{c2}} + \frac{iv_{Ly}\hbar c}{4DeH_{c2}} \right)^2 \right], \quad (2.34)$$

которая, очевидно, описывает равномерное движение со скоростью v_{Ly} исходной равновесной структуры (2.26). Используя полученное выражение для Δ , легко вычислить ток (2.33). Производя те же выкладки, как и при выводе (2.27), получим

$$j_x = \sigma_n \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right)_x - \frac{\hbar c^2}{16\pi \delta^2 e \Delta_\infty^2} \frac{\partial |\Delta|^2}{\partial y} - \frac{\hbar c^2 v_{Ly}}{16\pi \delta^2 e D} \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2},$$

$$j_y = \sigma_n \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right)_y + \frac{\hbar c^2}{16\pi \delta^2 e \Delta_\infty^2} \frac{\partial |\Delta|^2}{\partial x}.$$

После усреднения по образцу имеем ^{22, 34}

$$\bar{j}_y = 0, \quad \bar{j}_x = \sigma_n \bar{E}_x - \frac{\hbar c^2 v_{Ly}}{16\pi \delta^2 e D} \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2} = \sigma_n \bar{E}_x \left(1 + 6 \frac{|\Delta|^2}{\Delta_\infty^2} \right).$$

Таким образом, для проводимости δ_f опять получается выражение (2.31). Формулы (2.31), взятые буквально (выражение для κ !), относятся к случаю парамагнитных сплавов. Однако идея расчетов в общем случае (о чем будет идти речь ниже) близка к изложенной схеме.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СПЛАВОВ

а) Вязкое течение вихрей в сверхпроводящих сплавах. Случай $V \ll H_{c2}$. Метод диссипативной функции, изложенный в п. в) гл. 1, непосредственно неприменим для вычисления вязкости при движении вихревых нитей в обычных сверхпроводящих сплавах. Неравновесные процессы в сверхпроводниках должны описываться кинетикой возбуждений в сверхпроводниках. Соответствующая система неравновесных кинетических уравнений, обобщающая обычное кинетическое уравнение в нормальном металле, была выведена из микроскопической теории Элиашбергом³⁵. Она слишком сложна, чтобы приводить ее в настоящем обзоре. Что же касается качественной стороны дела, то ее можно понять, рассматривая особенности вязкого течения вихрей вблизи критической температуры. В этой области наши дальнейшие рассуждения, как показывает подробная микроскопическая теория³⁶, имеют также количественный характер.

Вблизи T_c размер вихря растет $\xi(T) \propto (T_c - T)^{-1/2}$. Движение вихрей приводит к отклонению функции распределения возбуждений от равновесной фермиевской функции $n_0(\epsilon) = (e^{\epsilon/T} + 1)^{-1}$. Поскольку времена релаксации электронов по энергиям за счет столкновений их друг с другом и с фононами велики, то установление стационарного состояния происходит посредством оттока неравновесных возбуждений на бесконечность. Соответствующие времена определяются диффузионным соотношением $Dt_{\text{дифф}} \sim \xi^2 \propto (T_c - T)^{-1}$.

Напишем уравнение теории БКШ, определяющее величину $\Delta(\mathbf{r}, t)$, считая, что зависимость последней от \mathbf{r} и t достаточно медленная:

$$\Delta(\mathbf{r}, t) = \lambda \int_0^\infty \frac{v_s(\epsilon, \mathbf{r})}{v_n} \Delta(\mathbf{r}, t) [1 - 2n(\epsilon_p, \mathbf{r}, t)] \frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{dQ_p}{4\pi}. \quad (3.1)$$

Относительно плотности уровней v_s/v_n предположено, что она определяется обычным соотношением $v_s = 0$ при $\epsilon < \Delta$ и $v_s = v_n \epsilon / \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}$, но с локальным значением $|\Delta(\mathbf{r}, t)|$. В формуле (3.1) $n(\epsilon_p, \mathbf{r}, t)$ — функция распределения нормальных возбуждений, которая слабо отличается от равновесной $n = n_0(\epsilon) + n_1(\epsilon_p, \mathbf{r})$. В окрестности критической температуры в термодинамически равновесном случае уравнение (3.1) может быть разложено по величине Δ/T_c и $\nabla\Delta/T_c$, что дает известные уравнения теории Гинзбурга — Ландау. Поэтому, имея в виду повторить вывод п. а) гл. 2, позволивший нам получить связь сверхтекучей компоненты тока со скоростью движения вихря, мы, аналогично (2.8), напишем линеаризованное уравнение для поправки Δ_1 к щели за счет движения вихря:

$$\frac{\pi}{8T_c} \frac{\partial \Delta_0}{\partial t} + \frac{\pi}{8T_c} D \left[\nabla^2 \Delta_1 - \frac{4e^2}{c^2} Q_0^2 \Delta_1 - \frac{8e^2}{c^2} (Q_0 Q_1) \Delta_0 \right] + \left[\frac{T_c - T}{T_c} - \frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2} 3\Delta_0^2 \right] \Delta_1 = -\Delta_1^{(a)}, \quad (3.2)$$

где левая часть (без $\partial\Delta/\partial t$) есть линеаризация уравнений Гинзбурга — Ландау для сплавов (Горьков¹²), а правая часть, согласно (3.1), есть

$$\Delta_1^{(a)}(\mathbf{r}_1, t) = -2 \int_\Delta^\infty \frac{\Delta_0}{\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_0^2}} n_1(\epsilon_p, \mathbf{r}) d\epsilon.$$

Для функции n_1 напишем обычное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial n_0(\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial n_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_1}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{1}{\tau_\epsilon} (n_1 - \bar{n}_1), \quad (3.3)$$

где

$$\bar{n}_1 = \int n_1(\varepsilon_p) \frac{dO_p}{4\pi}, \quad \varepsilon_p = \sqrt{v_F^2 (p - p_F)^2 + \Delta^2 (\mathbf{r} - \mathbf{v}_L t)},$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}_F \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}{\varepsilon}, \quad \tau_\varepsilon v_\varepsilon = l.$$

Строго обосновать локальное уравнение (3.3) удастся только с помощью микроскопической теории³⁶, однако возможность его применимости в окрестности T_c обусловлена малостью Δ по сравнению с T . Благодаря этому почти все электроны возбуждены и вклад от спаренных электронов имеет дополнительную малость Δ/T_c . Если примесей много, т. е. $l \ll \xi$, то (3.3) обычным образом приводится к диффузионному уравнению, поскольку в разложении зависимости $n_1(\varepsilon_p)$ от направления \mathbf{p} по полиномам Лежандра

$$n_1(\varepsilon_p) = \bar{n}_1 + (\mathbf{v}_F \mathbf{n}_1) + \dots$$

второй член мал в меру $l/\xi \ll 1$. Действительно, взяв нулевую и первую гармонику от уравнения (3.3), получаем

$$\mathbf{n}_1 = -\frac{v_\varepsilon \tau_\varepsilon}{v_F} \nabla \bar{n}_1 = -\frac{l}{v_F} \nabla \bar{n}_1, \quad (3.4)$$

$$D \nabla^2 \bar{n}_1 = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \frac{\partial \Delta}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Полагая, как обычно $\partial \Delta / \partial t = -(\mathbf{v}_L \nabla) \Delta_0$ и обозначая $\bar{n}_1 = -\tilde{w}_\varepsilon v_L \cos \varphi$, получим из (3.5) для \tilde{w} уравнение

$$D \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{w}_\varepsilon) \right] = \frac{1}{4T} \operatorname{ch}^{-2} \frac{e}{2T} \frac{d}{d\rho} \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}, \quad (3.6)$$

которое легко решается³⁶ с граничными условиями

$$\tilde{w}_\varepsilon(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty \quad (\varepsilon > \Delta_0),$$

$$\tilde{w}_\varepsilon(\rho_0) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta_0(\rho_0) = \varepsilon \quad (\varepsilon < \Delta_0).$$

Повторяя вывод соотношения (2.10), находим

$$(\mathbf{j}_N, \mathbf{d}), \mathbf{j}_{tr} = \frac{m p_F e}{\pi^2} \int \Delta_1^{(a)} (\mathbf{d} \nabla) \Delta_0 \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{m p_F e}{\pi^2} (\mathbf{v}_L \mathbf{d}) \int_0^\infty \rho d\rho \frac{d\Delta^2}{d\rho} \int_\Delta^\infty \frac{\tilde{w}_\varepsilon(\rho) d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}}. \quad (3.7)$$

В этом выражении мы оставили только главный член, обязанный неравномерности функции распределения. Все остальные члены, в частности джоулевская диссипация, дают меньший вклад. Причина ясна из вида правых частей в (3.2) и (3.5). Из (3.5) оцениваем

$$n_1 \sim \frac{v_L \Delta_0^2 \xi}{D \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \frac{1}{2T} \operatorname{ch}^{-2} \frac{e}{2T}.$$

Интеграл в (3.7) по ε дает основной вклад в области $\varepsilon \sim \Delta$. Величина $\Delta_1^{(a)}$ имеет порядок $v_L \Delta_0^2 \xi / DT \sim v_L \sqrt{T_c - T}$, что можно сравнить с вкладом, например, от диффузионной производной в левой части (3.2) ($\pi/8 T_c$) $\partial \Delta / \partial t \sim v_L \Delta_0 / T \xi \sim v_L (T_c - T)$. Аналогично, можно убедиться, что вклад в омический ток от $n_1 \mathbf{j} \sim -e \int v_F \mathbf{n}_1 d\varepsilon dO_p$ обусловлен электронами с $\varepsilon \sim T$, а потому связанная с ними диссипация энергии определяется, как и в разделе б) гл. 1 оценкой¹⁹ доли объема сверхпроводника,

занятого нормальной сердцевиной вихря. Этот механизм всегда дает в коэффициент у σ_f вклад порядка единицы, тогда как после вычисления (3.7)³⁶ для проводимости сплавов вблизи T_c получаем *)

$$\sigma_f = 1,1 \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)^{-1/2} \sigma_n \frac{H_{c2}(T)}{B_0}.$$

С точки зрения уравнений (2.11) этот результат означает добавочный множитель $(1 - T/T_c)^{-1/2}$ в коэффициенте α . Иными словами, при $T \rightarrow T_c$ из-за больших размеров вихря релаксация параметра порядка происходит медленнее, чем предполагалось в²⁰. Обратим также внимание, что, как и выше, заряд электрона выпадает из соотношения (3.7), поскольку j/e имеет смысл плотности потока импульса электронов.

Таким образом, мы видели, что корневая особенность плотности состояний теории сверхпроводимости БКШ приводит в уравнении (3.4) к сильной зависимости параметра порядка от неравновесных добавок к функции распределения возбуждений в области $|T - T_c| \ll T_c$. Следы этой особенности могут проявляться даже в том случае, если $v_s(\epsilon)$ не обращается в бесконечность, т. е. особенность несколько сглажена за счет эффектов, нарушающих куперовское спаривание. Например, если концентрация парамагнитной примеси не слишком велика, так что температура перехода T_c мало меняется: $|T_c - T_{c0}| \ll T_{c0}$ ($\tau_s T_{c0} \gg \hbar$), то, как было показано Элиашбергом³⁸, в области температур $\tau_s \Delta \ll \hbar$ также имеет место эффективное увеличение времени релаксации параметра порядка. Величина проводимости вихревой решетки ($H \ll H_{c2}$) равна²⁷

$$\sigma_f = 2,15 \frac{\tau_s T_c}{\hbar} \sigma_n \frac{H_{c2}}{B_0}.$$

Случай, когда аналогичную роль играет магнитное поле для обычного сверхпроводящего сплава, рассмотрен Ларкиным и Овчинниковым^{39, 40} (см. следующий раздел).

Мы довольно подробно остановились на вычислении проводимости (или вязкости) вихревой структуры в окрестности критической температуры. Отмеченные особенности этого предельного случая дают возможность получать сравнительно простые формулы. Общий случай произвольных температур оказывается чрезвычайно трудоемким хотя бы по той причине, что сам спектр, плотность состояний, величина щели существенно меняются на малых расстояниях. Общие уравнения, позволяющие в принципе посредством численных расчетов найти проводимость решетки вихревых нитей, были получены для грязных сплавов из полной системы кинетических уравнений в работе Горькова и Копнина⁴¹. Однако решение их найдено только для случая низких температур. Проводимость при $T = 0$ равна⁴¹

$$\sigma_f = \frac{0,9 \sigma_n H_{c2}(0)}{B_0}.$$

б) Сверхпроводящие сплавы. Сильные поля ($B \approx H_{c2}$). Микроскопическая теория движения вихревых нитей в сплавах в области больших полей $H_{c2} - H \ll H_{c2}$ существенно проще, чем в слабых полях, поскольку, как указывалось в п. в) гл. 2, параметр порядка $\Delta/\Delta_\infty \sim \sqrt{1 - (H/H_{c2})}$ мал во всем объеме сверхпроводника. Поэтому в термодинамическом (статическом) случае существует обобщение теории

*) Коэффициент 1,1 в этом выражении получен с использованием интерполяционной кривой для $\Delta_0(\rho)$. В то же время вычисление интеграла в (3.7) при помощи ЭВМ в³⁷ дало значение $\beta = 2,85 [1 - (T/T_c)]^{-1/2}$. Такое расхождение кажется странным: повторных расчетов β пока не опубликовано.

Гинзбурга — Ландау¹⁴, где разложение свободной энергии происходит по параметру $\Delta/T \sim \sqrt{H_{c2} - H}$. Чтобы кратко суммировать результаты, укажем, что с точностью до линейных членов уравнение для Δ в этой теории имеет вид

$$\left[\ln \frac{T}{T_{c0}} + \psi \left(\frac{1}{2} + \hat{\rho} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right) \right] \Delta = 0; \quad (3.8)$$

здесь $\psi(z)$ — логарифмическая производная от гамма-функции, а $\hat{\rho}$ — оператор

$$\hat{\rho} = \frac{\hbar D}{4\pi T} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2.$$

Поскольку функция (2.26)

$$\Delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(inqy) \exp \left[-\frac{eH_{c2}}{\hbar c} \left(x - \frac{n\hbar c q}{2eH_{c2}} \right)^2 \right]$$

является собственной функцией оператора $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} \Delta = \rho_0 \Delta,$$

где $\rho_0 = 2DeH_{c2}/4\pi Tc$, уравнение (3.8) сводится к алгебраическому уравнению, из которого определяется верхнее критическое поле $H_{c2}(T)$:

$$\ln \frac{T}{T_{c0}} + \psi \left(\frac{1}{2} + \rho_0 \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right) = 0.$$

Плотность тока в смешанном состоянии равна

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma_n}{4\pi T e} \psi' \left(\frac{1}{2} + \rho \right) \left[\Delta^* \left(-i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta - \Delta \left(-i\nabla + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta^* \right].$$

Связь между индукцией и полем дается формулой, аналогичной (2.28):

$$-4\pi M = H - B = \frac{\sigma_n}{eTc} |\Delta|^2 \psi' \left(\frac{1}{2} + \rho_0 \right). \quad (3.9)$$

В свою очередь, для M имеем

$$M = -\frac{H_{c2} - H}{4\pi} \frac{1}{(2\kappa_2^2(T) - 1) \beta_L}, \quad (3.10)$$

где введен новый параметр $\kappa_2(T)$ ^{14, 26}. При $T \rightarrow T_c$ величина $\rho \rightarrow 0$ и все вышеприведенные формулы переходят в обычные выражения теории Гинзбурга — Ландау, а

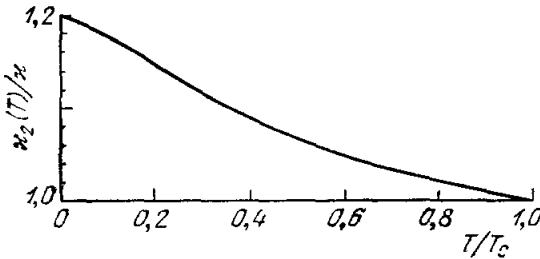
$$\kappa_2(T) \rightarrow \kappa.$$

Зависимость $\kappa_2(T)$ дана на рис. 7.

При описании кинетических явлений в сверхпроводящих сплавах при $H \approx H_{c2}$ функции распределения неравновесных возбуждений также допускают разложение

Рис. 7. Зависимость обобщенного параметра Гинзбурга — Ландау κ_2 от температуры²⁶ (κ — обычный параметр Гинзбурга — Ландау¹³).

по параметру порядка, так как особенность в плотности состояний $\nu_s(\epsilon)$ полностью сглажена. Ясно, что в этом случае плотность состояний мало отличается от ее значения в нормальном металле в меру малости $|\Delta|$. Параметром разложения здесь, однако, служит отношение Δ/ϵ_0 , где $\epsilon_0 = 2DeH_{c2}(T)/c$. Как показывает микроскопическая



теория⁹, вклад неравновесных возбуждений в процессы релаксации параметра порядка имеет дополнительную малость $(\Delta/\varepsilon_0)^2$ по отношению к процессам релаксации, описанным в п. в) гл. 1. Поэтому в случае, когда Δ/ε_0 мало, простое обобщение статического уравнения для Δ на нестационарный случай заключается, грубо говоря, в том, что, как и в случае парамагнитных примесей (2.32), оператор $D [\nabla - (2ie/\hbar c) \mathbf{A}]^2$ в статическом уравнении (3.8) заменяется^{42, 43} на

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \Phi\right) + D \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A}\right)^2.$$

Поэтому решением в присутствии электрического поля по-прежнему оказывается выражение типа (2.34), описывающее движущуюся как целое решетку вихрей. Что касается электрического тока, то здесь вклад неравновесных возбуждений оказывается сравнимым с обычным омическим током даже в том случае, когда их вкладом можно пренебречь в уравнении для Δ ⁴⁴.

Интересно отметить, что неравенство $\Delta/\varepsilon_0 \ll 1$ при заданном поле H может нарушаться при достаточной близости T к T_c , поскольку $\Delta \sim \sqrt{T_c - T}$, а $\varepsilon_0 \sim (T_c - T)$. Это происходит при $1 \gg 1 - (H/H_{c2}) \gg \gg 1 - T/T_c$. В этом случае задача нахождения проводимости существенно осложняется.

В том простом случае, когда выполняется неравенство $\Delta/\varepsilon_0 \ll 1$, вычисление проводимости в смешанном состоянии аналогично схеме, изложенной в п. в) гл. 2, и состоит в нахождении поправок, пропорциональных $|\Delta|^2$, к току в нормальном состоянии $\sigma_n \bar{E}$.

В настоящем обзоре невозможно останавливаться на деталях довольно громоздких расчетов проводимости в этом случае. Ограничимся лишь результативной стороной дела.

Первой попыткой применения микроскопической теории к проблеме резистивного состояния сверхпроводящих сплавов II рода были работы Кароли и Маки⁴². Их результат имеет вид

$$\sigma_f = \sigma_n \left[1 + \frac{c}{4\pi T_e D H_{c2}} \psi' \left(\frac{1}{2} + \rho_0 \right) |\Delta|^2 \right].$$

Используя формулы (3.9) и (3.10), этот результат можно представить в виде

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + \frac{4\kappa^2 a^2}{[2\kappa_2^2(T) - 1] \beta_L + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}} \right),$$

где $a = \pi^2/2\sqrt{14\zeta(3)} = 1,20$.

Однако в⁴² не учтен вклад неравновесных возбуждений в электрический ток. Впервые на это обстоятельство обратил внимание Томсон⁴⁴. Найденное им выражение:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + \frac{4\kappa^2 a^2 L_D(T)}{[2\kappa_2^2(T) - 1] \beta_L + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}} \right), \quad (3.11)$$

где $L_D(T) = 2 + [\rho_0 \psi''((1/2) + \rho_0) / \psi'((1/2) + \rho_0)]$. Такой же результат был получен затем и другими авторами^{43, 45, 46}. При $T \rightarrow T_c$ проводимость ровно в 2 раза больше, чем было вычислено в⁴². Зависимость $S = [(H_{c2}/\rho_n) d\rho_f/dB]_{B=H_{c2}}$ от T изображена на рис. 8.

Формула (3.11) перестает быть справедливой в непосредственной близости T к T_c . Как уже отмечалось выше, при $1 - (H/H_{c2}) \gg 1 - (T/T_c)$ становится существенной роль неравновесных возбуждений при релаксации параметра порядка. Явления, разыгрывающиеся в этой области температур, имеют ту же физическую природу, что и при слабых полях,

и обсуждались в предыдущем разделе. Проводимость сверхпроводников в этой области температур вычислялась в работах Ларкина и Овчинникова^{39, 40}. Ими было показано, что для сверхпроводящих сплавов

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 0,18 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \left[\frac{2\kappa^2}{\beta_L(2\kappa^2 - 1) + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right) \right]^{3/2}.$$

В случае же, когда кроме магнитного поля на куперовское спаривание оказывает влияние также небольшая концентрация парамагнитных примесей: $\tau_s T_{c0} \gg \hbar$, $\Delta^2 \tau_s \gg \hbar \epsilon_0$, т. е. в области полей

$$\frac{\hbar}{\tau_s T_c} \ll X \ll \frac{\hbar^2}{\tau_s^2 (T_c - T) T_c},$$

где

$$X = \frac{2\kappa^2}{\beta_L(2\kappa^2 - 1) + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right),$$

проводимость равна³⁹

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 0,32 \frac{\tau_s T_c}{\hbar} X^2.$$

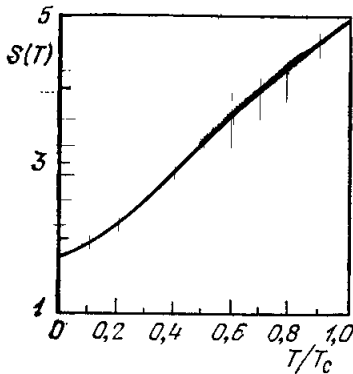


Рис. 8. Температурная зависимость наклона $S(T) = [(H/\rho_n) d\rho_f/dH]_{H_{c2}}$ при больших полях⁴⁴.

Вблизи критического поля H_{c2} оказывается возможным исследовать диссипативные процессы в сверхпроводниках при произвольном соотношении между длиной свободного пробега l и корреляционным радиусом ξ_0 (размер куперовских пар)⁴⁷. По причине громоздкости формул мы отсылаем читателя к оригинальной работе.

в) Поверхностный импеданс. Как уже говорилось во введении, наблюдение описываемой картины вязкого течения вихрей в эксперименте затрудняется действием сил «пиннинга», поэтому часто используется методика определения сопротивления сверхпроводника в смешанном состоянии по измерению диссипации энергии при отражении от его поверхности магнитной волны (обычно в сантиметровом диапазоне длин волн). Эта диссипация, как известно, определяется вещественной частью импеданса (поверхностным сопротивлением)

$$Z(\omega) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \lambda(\omega),$$

где $\lambda(\omega)$ — «скиновая» глубина проникновения электромагнитного поля.

В слабом поле $B \ll H_{c2}$ задача об отражении электромагнитной волны от поверхности сверхпроводника в смешанном состоянии в первом приближении по ω может быть решена с помощью уравнений (2.21), (2.22) и (2.24), а также соотношений

$$\mathbf{j}_{tr} = \sigma_f \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}_{tr} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H} = \left[\mathbf{n}_H, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right] - [\mathbf{n}_H, \nabla (H_z - H_0)].$$

Заметим, что все эти соотношения имеют весьма общий характер и не зависят от конкретной модели сверхпроводника.

Нетрудно показать²⁷, что при отражении электромагнитной волны сверхпроводник в смешанном состоянии ведет себя как своего рода анизотропная «среда», описываемая уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E}_\sim = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_\sim}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H}_\sim = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\sim$$

и материальными уравнениями

$$\mathbf{j}_{\sim} = \sigma_f \mathbf{E}_{\sim}, \quad \mathbf{B}_{\sim} = \mu \mathbf{H}_{\sim}$$

(значком \sim отмечены переменные величины), а магнитная проницаемость μ зависит от направления магнитного поля волны по отношению к \mathbf{H}_0 . При этом, если \mathbf{H}_{\sim} параллельно \mathbf{H}_0 , то μ дается выражением

$$\mu_{\parallel} = \frac{B_0^2}{4\pi c_{11}},$$

а если \mathbf{H}_{\sim} перпендикулярно \mathbf{H}_0 , то

$$\mu_{\perp} = \frac{B_0^2}{4\pi c_{44}}.$$

Модули c_{11} и c_{44} равны ³¹

$$c_{11} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial B} + \frac{1}{8\pi} \int_0^B B'^2 \frac{\partial^2 H(B')}{\partial B'^2} dB', \quad c_{44} = \frac{BH}{4\pi}.$$

При $\kappa \gg 1$ и в интервале полей $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$

$$c_{11} \approx \frac{B^2}{4\pi} - \frac{BH_{c1}}{16\pi \ln \kappa}.$$

Действуя обычным образом ²⁴, можно получить «макроскопическую скин-овую» глубину проникновения электромагнитного поля

$$\lambda_{\parallel, \perp} = \frac{(1+i)c}{\sqrt{8\pi\mu_{\parallel, \perp}\sigma_f\omega}}.$$

Поверхностное сопротивление

$$R_f = \text{Re } Z(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\mu\sigma_f c^2}},$$

где для σ_f надо пользоваться соответствующими выражениями, полученными в гл. 2 и 3 (см. также (4.1а), (4.2а), (4.3)).

Этот подход применим, когда «скиновая» глубина $\lambda(\omega)$ велика по сравнению с глубиной проникновения постоянного поля:

$$\delta = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar}{\Delta\sigma_n \text{th}(\Delta/2T)}},$$

чтобы можно было пренебречь эффектами на самой поверхности. К сожалению, неравенство $\lambda \gg \delta$ выполняется только в метровом диапазоне длин волн. Так, даже при температурах меньше T_c

$$\frac{\lambda}{\delta} \sim \sqrt{\frac{T_c}{\hbar\omega} \frac{H_0}{H_{c2}}},$$

где характерные значения T_c/\hbar порядка 10^{11} сек^{-1} .

В случае сильных полей ($H_0 \approx H_{c2}$) частотная зависимость импеданса может быть вычислена более полно. Положим $\mathbf{j} = -Q(\omega) \mathbf{A}$. Скин-овая глубина λ выражается через $Q(\omega)$ посредством $\lambda^{-2} = 4\pi Q(\omega)/c$. Ядро $Q(\omega)$ можно представить в виде

$$Q(\omega) = Q_n(\omega) + Q'(\omega),$$

где

$$Q_n = -\frac{i\omega\sigma_n}{c}$$

соответствует нормальному металлу, а Q' представляет собой малую поправку, обусловленную неполным подавлением сверхпроводимости.

Для поверхностного сопротивления получим

$$\frac{R_f - R_n}{R_n} = \frac{\operatorname{Re} Z(\omega) - \operatorname{Re} Z_n(\omega)}{\operatorname{Re} Z_n(\omega)} = \frac{c}{2\omega\sigma_n} [\operatorname{Im} Q'(\omega) - \operatorname{Re} Q'(\omega)]. \quad (3.12)$$

В пределе $\omega \rightarrow 0$ это отношение дает

$$\frac{R_f - R_n}{R_n} = \frac{\rho_f - \rho_n}{2\rho_n} \quad (3.13)$$

($R_n = \sqrt{2\pi\omega/\sigma_n c^2}$ — поверхностное сопротивление нормального металла).

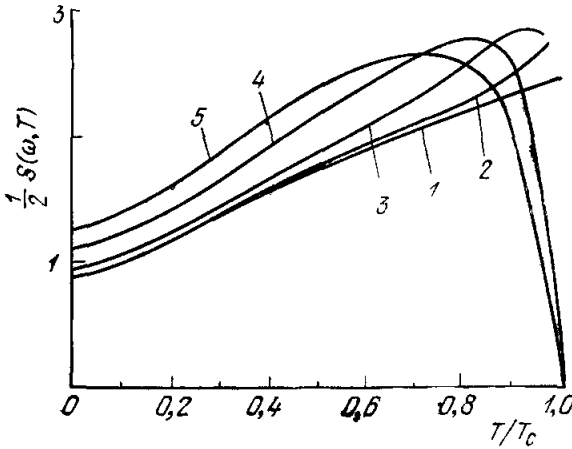


Рис. 9. Семейство кривых для наклона $(1/2) S(\omega, T) = \{[H/R_n(\omega)] dR_f(\omega)/dH\}_{H_{c2}}$, выраженного через поверхностный импеданс ⁴⁸.

1 — $\nu/T_c = 0$; 2 — $\nu/T_c = 0,4$, $\omega/\varepsilon_0(0) = 0,0109$; 3 — $\nu/T_c = 2$, $\omega/\varepsilon_0(0) = 0,0544$; 4 — $\nu/T_c = 6$, $\omega/\varepsilon_0(0) = 0,1633$; 5 — $\nu/T_c = 10$, $\omega/\varepsilon_0(0) = 0,2771$. $S(0, T)$ (кривая 1) совпадает с наклоном $S(T) = [H/\rho_n] d\rho_f/dH]_{H_{c2}}$ (см. рис. 8) сопротивления в постоянном токе.

Заметим, что производная $\partial R_f/\partial B|_{H_{c2}}$ непосредственно выражается через производную $d\rho_f/dB|_{H_{c2}}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{H_{c2}}{R_n} \frac{dR_f}{dB}\right)_{H_{c2}} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{H_{c2}}{\rho_n} \frac{d\rho_f}{dB}\right)_{H_{c2}} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} S(T). \end{aligned}$$

Ядро $Q'(\omega)$ вычислено Томсоном ⁴⁴. При малых частотах $\hbar\omega \ll \pi(T_c - T)$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re} Q'}{\omega} &= 0, \\ \frac{\operatorname{Im} Q'}{\omega} &= \frac{4eML_D(T)}{8\pi T\rho_0}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где магнитный момент дается формулой (3.9). Отсюда с помощью (3.12) и (3.13) легко получается выражение (3.11) для про-

водимости. В области вблизи T_c , где частота ω становится сравнимой с $\pi(T_c - T)/\hbar$ для $\hbar\omega \ll \pi T_c$ и $T_c - T \ll T_c$, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Q' &= -4eM \left[\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \varepsilon_0^2} + \frac{\omega^2 \{1 - 2\rho [\psi''(1/2)/\psi'(1/2)]\}}{\omega^2 + 4\varepsilon_0^2} \right], \\ \operatorname{Im} Q' &= 2eM\omega \left[\frac{\varepsilon_0}{\omega^2 + \varepsilon_0^2} + \frac{4\varepsilon_0 \{1 - 2\rho_0 [\psi''(1/2)/\psi'(1/2)]\}}{4\varepsilon_0^2 + \omega^2} + \frac{3\psi''(1/2)\hbar}{4\pi T\psi'(1/2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

На рис. 9, взятом из работы Педерсена, Кима и Томсона ⁴⁸, приведены результаты численных расчетов наклона

$$\frac{1}{2} S(\omega, T) = \left(\frac{H_{c2}}{R_n} \frac{dR_f}{dB}\right)_{H_{c2}}$$

для различных значений параметра $\omega/\varepsilon_0(0)$.

4. СОСТОЯНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

а) Сводка основных теоретических формул. Прежде чем переходить к обсуждению экспериментальных данных, дадим сводку формул, описывающих проводимость различных сверхпроводящих сплавов в области малых и больших полей при различных температурах.

1) Сплавы с большой концентрацией парамагнитных примесей.

а) Малые поля $H \ll H_{c2}$, $\kappa \gg 1$ ²⁷⁻³⁰:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = \frac{2,63H_{c2}(T)}{B}, \quad \frac{\rho_f}{\rho_n} = \frac{0,381B}{H_{c2}(T)}. \quad (4.1a)$$

б) Большие поля $H \approx H_{c2}$ ³⁴:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_f}{\sigma_n} &= 1 + \frac{12\kappa^2}{\beta_L(2\kappa^2-1)+1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right), \\ \frac{\rho_f}{\rho_n} &= 1 - \frac{12\kappa^2}{\beta_L(2\kappa^2-1)+1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

(в пределе $\kappa \gg 1$ практически $\rho_f/\rho_n = 1 - 5,17 [1 - (B/H_{c2})]$).

2) Сплавы с малой концентрацией парамагнитных примесей.

а) $H \ll H_{c2}$, $\kappa \gg 1$, $\tau_s T_c \sqrt{1 - (T/T_c)} \ll 1$ ²⁷:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 2,15 \frac{\tau_s T_c}{\hbar} \frac{H_{c2}(T)}{B}. \quad (4.2a)$$

б) $H \approx H_{c2}$, $\hbar/\tau_s T_c \ll 1 - (B/H_{c2}) \ll \hbar^2/\tau_s^2 T_c (T_c - T)$ ³⁹:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 0,32 \frac{\tau_s T_c}{\hbar} \left[\frac{2\kappa^2}{\beta_L(2\kappa^2-1)+1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right) \right]^2. \quad (4.2b)$$

При $\kappa \gg 1$

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 0,24 \frac{\tau_s T_c}{\hbar} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right)^2.$$

3) Обычные сверхпроводящие сплавы (без парамагнитных примесей). Слабые поля $H \ll H_{c2}$ ($\kappa \gg 1$).

а) Низкие температуры $T \ll T_c$ ⁴¹:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = \frac{0,9 H_{c2}(0)}{B}, \quad \frac{\rho_f}{\rho_n} = \frac{1,1 B}{H_{c2}(0)}. \quad (4.3a)$$

б) Высокие температуры $T \rightarrow T_c$ ^{36, 40*}:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_f}{\sigma_n} &= 1,1 \frac{1}{\sqrt{1 - (T/T_c)}} \frac{H_{c2}(T)}{B}, \\ \frac{\rho_f}{\rho_n} &= 0,9 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \frac{B}{H_{c2}(T)}. \end{aligned} \quad (4.3b)$$

4) Сплавы без парамагнитных примесей. Сильные поля.

а) $1 - (H/H_{c2}) \ll 1 - (T/T_c)$ ^{43, 44}:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + \frac{5,76\kappa^2 L_D(T)}{[2\kappa^2(T)-1] \beta_L + 1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right). \quad (4.4a)$$

При $\kappa \gg 1$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_f}{\sigma_n} &= 1 + 2,49 L_D(T) \left[\frac{\kappa}{\kappa^2(T)} \right]^2 \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right), \\ \frac{\rho_f}{\rho_n} &= 1 - 2,49 L_D(T) \left[\frac{\kappa}{\kappa^2(T)} \right]^2 \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right) \end{aligned}$$

(см. рис. 8).

б) $1 - (H/H_{c2}) \gg 1 - (T/T_c)$ ³⁹:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_n} = 1 + 0,18 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \left[\frac{2\kappa^2}{\beta_L(2\kappa^2-1)+1} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right) \right]^{3/2}. \quad (4.4b)$$

При $\kappa \gg 1$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_f}{\sigma_n} &= 1 + 0,14 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right)^{3/2}, \\ \frac{\rho_f}{\rho_n} &= 1 - 0,14 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{B}{H_{c2}}\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

*) См. сноску на стр. 435.

Следует отметить, что до сих пор (за исключением интерполяционной кривой, полученной Даниловым, Куприяновым и Лихаревым³⁷) еще не проводились расчеты зависимости ρ_f от H при произвольных полях *).

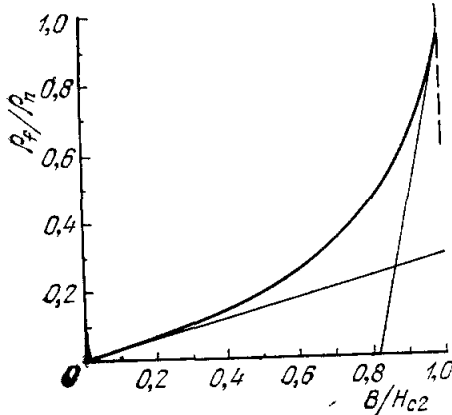


Рис. 10. Интерполяционная кривая для сплавов с большой концентрацией парамагнитных примесей³⁷.

Прямые линии дают наклон кривой при малых и больших полях.

нократно упоминалось выше, осуществление такого «вязкого» течения вихрей затрудняется зацеплением вихрей за неоднородности структуры образца («пиннинг»). Это приводит к тому, что линейные участки вольт-амперных характеристик располагаются при достаточно больших токах, превышающих в среднем так называемый критический ток j_c , при котором происходит отрыв вихрей от неоднородностей; кроме того, эти участки оказываются сравнительно короткими. Все это затрудняет обработку экспериментальных данных и снижает точность эксперимента. Для получения надежных результатов поэтому приходится подвергать образцы специальной химической обработке, устраняющей дефекты структуры.

Имеются также и другие трудности, связанные с искривлением вихревых нитей, которое обусловлено не только силами «пиннинга», но также эффектом Мейсснера и необходимостью учитывать собственное поле транспортного тока. Если плотность транспортного тока равна j_{tr} , то поле на поверхности образца толщиной D

$$H \approx \frac{2\pi}{c} j_{tr} D.$$

Как следует из результатов гл. 2, выражения для проводимости в слабых полях получены в предположении малости собственного поля тока по сравнению с приложенным полем, которое при малой концентрации вихрей имеет порядок H_{c1} . С другой стороны, транспортный ток должен превышать j_c , поэтому получаем оценку:

$$j_c \ll j_{tr} \ll \frac{cH_{c1}}{2\pi D}.$$

Выполнение этого неравенства возможно только при достаточно тонком образце. Так, например, для образца хорошо отожженного сплава

*) На рис. 10 изображена полученная в³⁷ зависимость ρ_f от отношения B/H_{c2} для сплавов с большой концентрацией парамагнитных примесей. Наклон кривой $\rho_f(B)$ при больших полях равен 5,17, что совпадает с результатом³⁴, однако наклон при малых полях, полученный в³⁷, равен 0,318, что не совпадает с результатом работ²⁸ и³⁰. Это расхождение связано, по нашему мнению, с ошибкой авторов работы³⁷.

б) Результаты сравнения теории и эксперимента. Остановимся теперь кратко на результатах экспериментов по измерению ρ_f в смешанном состоянии. В настоящее время для этой цели применяются два метода: измерения на постоянном токе и метод поверхностного сопротивления.

В первом методе через образец, находящийся во внешнем магнитном поле $H_{c1} < H < H_{c2}$, перпендикулярно магнитному полю пропускается электрический ток j_{tr} . Схема опыта изображена на рис. 2. Сопротивление ρ_f отождествляется с наклоном линейного участка вольт-амперной характеристики. Однако, как уже неод-

Nb — 45% Ta критическое поле H_{c1} порядка 200 э, а плотности критического тока порядка $5 \cdot 10^3 \text{ а/см}^2$ ⁴⁹. Отсюда получаем

$$5 \cdot 10^3 \text{ а/см}^2 \ll j_{tr} \ll \frac{3 \cdot 10^2}{D} \text{ а/см}^2.$$

Таким образом, в этом случае толщина образца должна быть меньше $10^{-2} - 10^{-3} \text{ см}$, а соответствующая плотность тока будет превышать 10^4 а/см^2 . В тонком образце это приводит к большому джоулевому нагреву как самого образца, так и подводящих контактов. Все это требует эффективного охлаждения.

От этих трудностей в значительной мере можно избавиться, если воспользоваться методом, основанным на измерении коэффициента

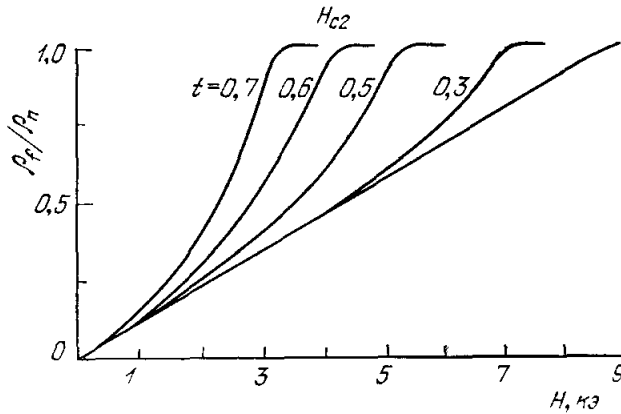


Рис. 11. Зависимость ρ_f от магнитного поля для сплава $\text{Nb}_{0,5}\text{Ta}_{0,5}$.
 $T_c = 6,15 \text{ }^\circ\text{К}$, $t = T/T_c$.

поглощения при отражении электромагнитной волны от поверхности сверхпроводника в смешанном состоянии (метод поверхностного сопротивления). Выражения для импеданса сверхпроводника и его связь с сопротивлением в смешанном состоянии приведены в п. в) гл. 3. Там же было указано, что этот метод, в основном, пригоден в случае предельно большой концентрации вихревых нитей. Этот метод имеет также тот недостаток что им практически невозможно измерить ρ_f вблизи T_c . Дело в том, что при $T - T_c$ при любой заданной частоте электромагнитной волны отношение ω/ε_0 или ω/Δ перестает быть малым, что затрудняет извлечение величины ρ_f из результатов эксперимента (см. рис. 9).

Для изучения диссипации энергии в смешанном состоянии в принципе можно применить также метод, основанный на генерации колебаний вихревых нитей путем круглых колебаний образца в магнитном поле, перпендикулярно оси вращения⁵⁰. Этот метод, однако, в настоящее время находится в стадии разработки, конкретных результатов по ρ_f пока не получено.

Впервые явление вязкого течения вихрей в сверхпроводниках второго рода изучалось в работах Кима и др.³ Для сплава $\text{Nb}_{0,5}\text{Ta}_{0,5}$ они получили зависимость ρ_f от H , изображенную на рис. 11. Качественно, кривые $\rho_f(H)$ сохраняют свой вид и для других сверхпроводников при произвольных температурах и полях. Кимом и др. была предложена эмпирическая формула

$$\frac{\rho_f}{\rho_n} = \beta^{-1}(T) \frac{B}{H_{c2}(T)},$$

где $\beta(T) = H_{c2}(0)/H_{c2}(T)$. При $T \rightarrow 0$ это выражение для β хорошо согласуется с теоретическим значением $\beta = 0,9$ (4.3а), однако при

конечных температурах эта формула неудовлетворительно описывает температурную зависимость $\beta(T)$ (см. (4.36)).

Измерению ρ_f при различных полях посвящено большое количество экспериментов. Остановимся сначала на результатах по измерению ρ_f в сплавах при слабых полях. На рис. 12 приведены данные работ ^{3, 51-54}, изображающие температурную зависимость функции $\beta(T)$. Сплошная линия изображает график функции $1,1 [1 - (T/T_c)]^{-1/2}$, стрелкой отмечено значение $\beta(0) = 0,9$ (см. (4.3а) — (4.3б)). Наиболее существен здесь тот факт, что эксперимент подтверждает предсказание теории ³⁶ о возрастании $\beta(T)$ вблизи критической температуры, отражающее медленность процессов релаксации вблизи T_c .

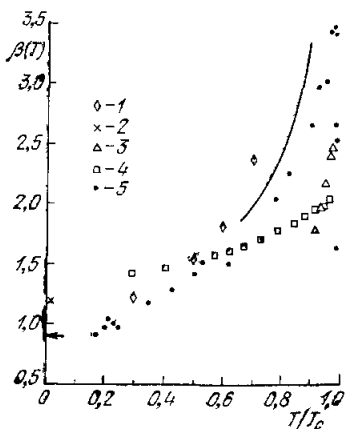


Рис. 12. Функция $\beta(T)$ (см. формулы (1.21) и (4.3б)).

Сплошная линия — график функции $1,1 [1 - (T/T_c)]^{-1/2}$. Стрелкой указано теоретическое значение $\beta(0) = 0,9$. 1 — результаты ³, 2 — ⁵¹, 3 — ⁵², 4 — ⁵³, 5 — ⁵⁴.

в особенности полученные методом постоянного тока, часто имеют вблизи H_{c2} провал, который, возможно, объясняется наличием пиннинга. При этом в качестве наклона $d\rho_f/dH$ вблизи H_{c2} некоторые исследователи брали $d\rho_f/dH$ до провала, а другие — после.

В качестве примера приведем данные по измерению ρ_f в сильных полях, полученные Акстом и Джойнером ⁵⁶ методом постоянного тока. На рис. 13 заштрихована область, в которой располагаются экспериментальные точки, соответствующие сплавам $Nb_{0,5}Ta_{0,5}$, $Nb_{0,1}Ta_{0,9}$, $In_{0,98}Bi_{0,02}$, $In_{0,98}Bi_{0,04}$, $Pb_{0,6}Tl_{0,4}$, $Pb_{0,39}Tl_{0,61}$, $Pb_{0,95}Tl_{0,05}$. Сплошная линия соответствует теоретической зависимости (4.4а), а штриховая — результатам теории Кароли и Маки, с которой сравнивались все экспериментальные данные до появления работы Томсона ⁴⁴.

Наиболее надежными в настоящее время представляются данные Педерсена, Кима и Томсона ⁴⁸, полученные методом поверхностного сопротивления с использованием дифференциальной техники, позволяющей измерять непосредственно $dR_f(\omega)/dH$. Достоинство этого метода заключается в том, что он допускает простую экстраполяцию наклона dR_f/dH до полей H_{c2} . На рис. 14 приведены данные ⁴⁸ для сплавов

По причине сравнительной простоты вязкое течение вихрей при полях, близких к H_{c2} , было изучено теоретически значительно раньше ⁴²⁻⁴⁴, чем область малых полей ^{27-30, 36, 39-41}. Этим объясняется тот факт, что на протяжении почти пяти лет основное количество экспериментов относилось именно к области больших полей. Измерение ρ_f здесь проведено практически во всей области температур и для разнообразных сплавов с широким диапазоном параметров ^{48, 55-61}. При этом экспериментальные данные обнаруживают чрезвычайно сильный разброс. На некоторые причины этого разброса указано в обзоре Кима ⁶². Кроме того, кривые $\rho_f(H)$,

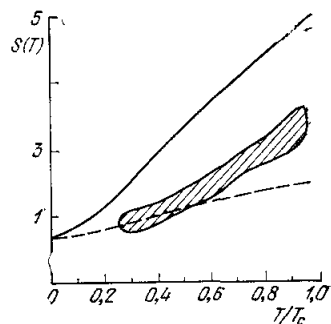


Рис. 13. Данные ⁵⁶ по измерению ρ_f вблизи H_{c2} для сплавов $NbTa$, $InBi$ и $PbTl$ различной чистоты.

Заштрихована область, соответствующая экспериментальным точкам. Сплошная линия — теоретическая зависимость ⁴⁴ (см. рис. 8; формула (4.4а)), штриховая линия — результат Кароли и Маки ⁴⁴.

Nb — Ta различной чистоты. Сплошные кривые 1 соответствуют численным расчетам по теоретическим зависимостям (3.14) и (3.15) (частота $3,14 \cdot 10^{10}$ гц и критические температуры 5,8 и 8,5°K). Кривая 2, вычисленная по (3.14), — низкочастотный предел ($\omega \rightarrow 0$). На рис. 15 приведены аналогичные данные для сплавов Pb — In. Кривые 1 рассчитаны для критических температур 6,2 и 7,0°K. Любопытно отметить указанное в работе⁴⁸ обстоятельство, что многие экспериментальные данные по наклону зависимости

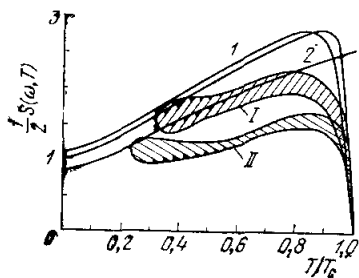


Рис. 14. Данные⁴⁸ по измерению R_f методом поверхностного сопротивления для сплавов Nb — Ta. I — область экспериментальных точек для $Nb_{0,8}Ta_{0,2}$, $Nb_{0,7}Ta_{0,3}$, II — $Nb_{0,8}Ta_{0,2}$, $Nb_{0,8}Ta_{0,2}$. Кривые 1 вычислены соответственно для критических температур 5,8° и 8,5°K и частоты $\nu = 3,14 \cdot 10^{10}$ гц. Кривая 2 соответствует наклону $S(T)$ в постоянном токе.

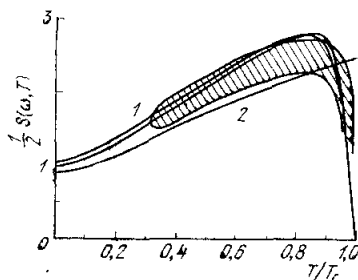


Рис. 15. Данные⁴⁸ по измерению R_f методом поверхностного сопротивления для сплавов $Pb_{0,5}In_{0,5}$, $Pb_{0,83}In_{0,17}$, $Pb_{0,9}In_{0,1}$. Кривые 1 вычислены для критических температур 6,2°K и 7,0°K, $\nu = 3,14 \cdot 10^{10}$ гц.

сопротивления от поля вблизи H_{c2} лучше согласуются с более ранней формулой Маки⁴², чем с несомненно более верным результатам Томсона (3.11). Обусловлен ли этот факт чисто психологическими причинами или имеет более существенное происхождение — пока сказать затруднительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из этого краткого обзора экспериментальных данных следует, что теория, в основном, согласуется с экспериментом, несмотря на большие трудности в получении окончательных результатов как с той, так и с другой стороны. Наиболее простые и разработанные выводы теории, такие как, например, формулы для сплавов с парамагнитными примесями или поведение проводимости вблизи T_c , как раз и представляют дополнительные сложности для проверки их в экспериментальной ситуации. Современная микроскопическая теория сверхпроводимости позволяет в принципе вычислить проводимость сверхпроводника в смешанном состоянии при произвольных температурах во всей области магнитных полей. Однако сравнительно простые, аналитические выражения для проводимости могут быть получены лишь в довольно узких диапазонах параметров H/H_{c2} и T/T_c . На рис. 16 заштрихованы области, в которых имеются

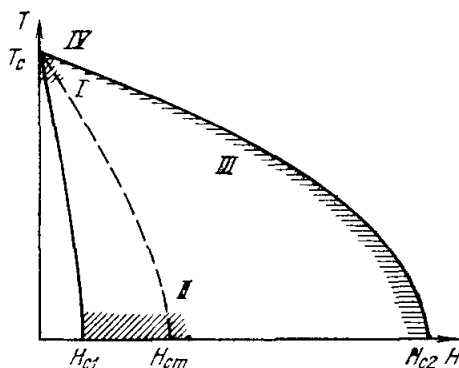


Рис. 16. Заштрихованные области соответствуют тем областям параметров H/H_{c2} и T/T_c , где имеются аналитические выражения для σ_f . Области I соответствуют формулы (4.2а), (4.3б), области II — (4.3а), III — (4.2б), (4.4а), IV — (4.4б).

аналитические выражения для σ_f (см. сводку формул); лишь для сплавов с большой концентрацией парамагнитных примесей проводимость σ_f вычислена во всей области температур как при малых, так и при больших полях. Вычисление проводимости в областях, где параметры H/H_{c2} и T/T_c не близки к нулю или единице, сопряжено с большими трудностями и возможно, по-видимому, лишь с использованием численных методов. В целом мы можем констатировать, что микроскопическая теория дает не только качественное, но и количественное описание выбранного своеобразного круга явлений.

В нашем обзоре мы ставили целью изложить физические механизмы, управляющие вязким течением вихрей, и дать представление о тех методах, с помощью которых эти вопросы разрешаются в теоретических работах. Работ этих в настоящее время довольно много, тем не менее целый ряд явлений, родственных затронутым в обзоре, пока не имеет настоящего микроскопического описания. Это, по нашему мнению, относится к большинству термомагнитных явлений (по крайней мере, в интервале полей $H \ll H_{c2}$), а также к эффекту Холла. Начиная с работы¹⁹, где было отмечено, что эффект Холла в сверхпроводнике должен иметь тот же порядок, что и в нормальном металле, делались неоднократные попытки получить этот эффект количественно из микротехории (см., например,^{63, 64}). По разным причинам, но все эти попытки пока являются недостаточными. Следует добавить, что и экспериментальные данные по эффекту Холла весьма разноречивы.

В заключение авторы выражают благодарность А. И. Ларкину и Ю. Н. Овчинникову за полезные обсуждения.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- A — векторный потенциал электромагнитного поля,
- $a = 1,20$,
- B — магнитная индукция,
- B_0 — то же при недеформированной решетке вихревых нитей,
- c_{ij} — модули упругости треугольной решетки вихревых нитей,
- D — коэффициент диффузии,
- d — расстояние между вихревыми нитями,
- \mathbf{d} — произвольный вектор трансляции вихревой структуры,
- \bar{E} — напряженность электрического поля,
- \mathcal{F} — термодинамический потенциал Гиббса в заданном внешнем поле H ,
- F — плотность свободной энергии,
- F_L — сила Лоренца, действующая на отдельный вихрь единичной длины,
- $j = \Delta/\Delta_\infty$,
- H_{cm} — термодинамическое критическое магнитное поле,
- H_{c1} — нижнее критическое магнитное поле,
- H_{c2} — верхнее критическое магнитное поле,
- H — макроскопическая напряженность магнитного поля,
- H_0 — то же при недеформированной решетке вихревых нитей,
- h — микроскопическое магнитное поле,
- \mathbf{j} — плотность электрического тока,
- j_{tr} — плотность среднего (макроскопического) электрического тока (транспортный ток),
- $j_{1\infty}$ — плотность тока, создаваемая при движении отдельной нити на больших расстояниях от ее остова,
- j_c — критический ток пиннинга,
- K_0, K_1 — функции Бесселя от мнимого аргумента,
- $L_D(T) = 2 + \rho_0 \psi''((1/2) + \rho_0) / \psi'((1/2) + \rho_0)$,
- l — длина свободного пробега
- M — магнитный момент единицы объема сверхпроводника,
- N — плотность числа электронов,
- n_L — плотность вихревых нитей,
- $n_0(\epsilon)$ — функция распределения Ферми,
- $n(\epsilon, \mathbf{r}, t)$ — функция распределения,

- \mathbf{n}_H — единичный вектор в направлении магнитного поля,
 ρ_F — импульс электронов на поверхности Ферми,
 $\mathbf{Q} = \mathbf{A} - (c/2e) \nabla \theta$,
 Q_0 — величина \mathbf{Q} для неподвижного вихря,
 $\mathbf{Q}_d = (d\nabla) \mathbf{Q}_0$,
 $R_f = \text{Re } Z(\omega)$ — поверхностное сопротивление в смешанном состоянии,
 $R_n = \text{Re } Z_n(\omega) = \sqrt{2\lambda\omega/\sigma_n c^2}$ — то же в нормальном состоянии,
 $S = [(H_{c2}/\rho_n) (d\rho_f/dB)]$ — наклон зависимости удельного сопротивления от B ,
 T — температура,
 T_c — критическая температура,
 T_{c0} — критическая температура в отсутствие магнитного поля и парамагнитных примесей,
 $\mathbf{u}_i(z, t)$ — вектор деформации i -й вихревой нити,
 \mathbf{v}_L — скорость движения вихревой нити,
 v_F — скорость на поверхности Ферми,
 W — диссипативная функция,
 $Z(\omega)$ — импеданс,
 $\beta_L = 1,16$ — постоянная треугольной решетки вихревых нитей,
 Δ — параметр порядка (энергетическая щель),
 Δ_0 — то же для неподвижного вихря,
 Δ_∞ — значение Δ в отсутствие магнитного поля,
 $|\Delta|^2$ — усреднение по образцу,
 δ — глубина проникновения магнитного поля,
 ε — энергия возбуждений, отсчитанная от поверхности Ферми,
 $\varepsilon_0 = 2DeH_{c2}/c$,
 η — коэффициент вязкости для вихря,
 θ — фаза параметра порядка,
 $\kappa = \delta/\xi$ — параметр теории Гинзбурга — Ландау,
 $\lambda(\omega), \lambda_{||}, \perp$ — скин-глубина проникновения переменного электромагнитного поля,
 $\tilde{\lambda}$ — константа куперовского взаимодействия электронов,
 μ — химический потенциал,
 $\tilde{\mu} = \dot{\theta} + 2e\Phi$,
 $\mu_{||, \perp}$ — магнитная проницаемость,
 ν_n — плотность состояний в нормальном металле на поверхности Ферми,
 $\nu_s(\varepsilon)$ — плотность состояний в сверхпроводнике,
 ξ — радиус когерентности,
 ρ — расстояние от центра вихря,
 ρ_{0i} — равновесное положение i -й вихревой нити,
 ρ_f — удельное сопротивление в смешанном состоянии,
 $\rho_0 = \varepsilon_0/4\pi T$,
 σ_n — проводимость нормального металла,
 $\sigma_f = \rho_f^{-1}$ — проводимость сверхпроводника в смешанном состоянии,
 τ — время свободного пробега электронов по отношению к соударениям с атомами примесей,
 τ_s — время свободного пробега электрона по отношению к перевороту спина,
 Φ — скалярный потенциал,
 φ — азимутальный угол в цилиндрической системе координат,
 $\varphi_0 = hc/2e = 2 \cdot 10^{-7} \text{ эс} \cdot \text{см}^2$,
 Ψ — параметр порядка в теории Гинзбурга — Ландау,
 ψ — производная от гамма-функции (пси-функция),
 ψ', ψ'' — производные от пси-функции

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР,
 Черноголовка (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 32, 1442 (1957).
2. P. G. de Gennes, J. Matricon, Rev. Mod. Phys. 36, 45 (1964).
3. Y. B. Kim, C. F. Hempstead, A. R. Strand, Phys. Rev. A139, 1163 (1965).
4. W. A. Reed, E. Fawcett, Y. B. Kim, Phys. Rev. Lett. 14, 790 (1966).
5. P. G. de Gennes, P. Nozieres, Phys. Lett. 15, 216 (1965).
6. J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
7. Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ 54, 612 (1968).
8. Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ 56, 1297 (1969).
9. Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, J. Low Temp. Phys. 2, 161 (1970).

10. Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, Сверхпроводимость второго рода, М., «Мир», 1970.
11. В. В. Шмидт, Г. С. Мкртчян, УФН 112, 459 (1974).
12. Л. П. Горьков, ЖЭТФ 37, 1407 (1959).
13. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
14. К. Маки, Physics 1, 21 (1964).
15. С. Caroli, P. G. de Gennes, J. Matricon, Phys. Lett. 9, 307 (1964); С. Caroli, J. Matricon, Phys. kondens. Materie 3, 380 (1965).
16. R. J. Watts-Tobin, R. J. Waterworth, Zs. Phys. 261, 249 (1973).
17. J. Bardeen, R. Kümmel, A. E. Jacobs, L. Tewordt, Phys. Rev. 187, 556 (1969).
18. L. Крамер, W. Pesch, Sol. State Comm. 12, 549 (1973).
19. J. Bardeen, M. J. Stephen, Phys. Rev. A140, 1197 (1965).
20. M. Tinkham, Phys. Rev. Lett. 13, 804 (1964).
21. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ 36, 319 (1959).
22. A. Schmid, Phys. kondens. Materie 5, 302 (1966).
23. Л. П. Горьков, ЖЭТФ 34, 735 (1958).
24. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
25. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ 39, 1781 (1960).
26. С. Caroli, M. Surot, P. G. de Gennes, Sol. State Comm. 4, 17 (1966).
27. Л. П. Горьков, Н. В. Копнин, ЖЭТФ 60, 2331 (1971).
28. М. Ю. Куприянов, К. К. Лихарев, Письма ЖЭТФ 15, 349 (1972).
29. С.-R. Hu, R. S. Thompson, Phys. Rev. B6, 110 (1972); Phys. Rev. Lett. 31, 217 (1973).
30. С.-R. Hu, Phys. Rev. B6, 1756 (1972).
31. R. Labusch, Phys. Stat. Sol. 19, 715 (1967).
32. А. И. Ларкин, ЖЭТФ 58, 1466 (1970).
33. W. H. Kleiner, L. M. Roth, S. H. Autler, Phys. Rev. A133, 1226 (1964).
34. R. S. Thompson, С.-R. Hu, Phys. Rev. Lett. 27, 1352 (1971).
35. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ 61, 1254 (1971).
36. Л. П. Горьков, Н. В. Копнин, ЖЭТФ 64, 356 (1973).
37. В. В. Данилов, М. Ю. Куприянов, К. К. Лихарев, ФТТ 16, 935 (1974).
38. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ 55, 2443 (1968).
39. И. А. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ 64, 1096 (1973).
40. Ю. Н. Овчинников, *ibid* 65, 290.
41. Л. П. Горьков, Н. В. Копнин, *ibid.*, стр. 396.
42. С. Caroli, К. Маки, Phys. Rev. 159, 306; 164, 591(1967); К. Маки, *ibid* 169, 381 (1968); J. Low Temp. Phys. 1, 45, 1969.
43. Н. Такауама, Н. Ебисава, Progr. Theor. Phys. 44, 1450 (1970).
44. R. S. Thompson, Phys. Rev. B1, 327 (1970).
45. Н. Такауама, К. Маки, Phys. Rev. Lett. 28, 1445 (1972).
46. Н. Такауама, К. Маки, J. Low Temp. Phys. 12, 195 (1973).
47. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ 66, 1100 (1974).
48. R. J. Pedersen, Y. B. Kim, R. S. Thompson, Phys. Rev. B7, 982 (1973).
49. J. W. Heaton, A. C. Rose-Innes, Cryogenics 4, 85 (1964).
50. Д. Г. Чигвинадзе, ЖЭТФ 63, 2144 (1972).
51. J. Gilchrist, P. Монсеау, J. Phys. Chem. Sol. 32, 2101 (1971); J. Phys. C3, 1399 (1970).
52. В. Н. Губанков, ФТТ 14, 2618 (1972).
53. Н. Я. Фогель, ЖЭТФ 63, 1371 (1972).
54. И. Н. Гончаров, Г. Л. Дорофеев, А. Никитиу, Л. В. Петрова, Ф. Фричевски, И. С. Хухарева, ЖЭТФ 67, 2235 (1974).
55. J. A. Sore, I. F. Silvera, Phys. Rev. Lett. 20, 326 (1968).
56. С. J. Ахт, W. C. H. Joiner, Phys. Rev. 171, 461 (1968).
57. N. Usui, T. Ogasawara, K. Yasukochi, S. Tomoda, J. Phys. Soc. Japan 27, 574 (1969).
58. K. Noto, Y. Muto, in: Proc. of the 12th Intern. Conference on Low Temperature Physics, 1971, p. 399.
59. Y. Muto, K. Mori, K. Noto, Physica 55, 362 (1971).
60. Т. Ogushi, Y. Shibuяа, J. Phys. Soc. Japan 32, 400 (1972).
61. И. Н. Гончаров, И. С. Хухарева, Письма ЖЭТФ 17, 85 (1973).
62. Y. B. Kim, цит. в ⁵⁸ сборник, p. 231.
63. A. G. Vijfeijken, A. K. Niessen, Phys. Lett. 16, 23 (1965).
64. Y. Baba, K. Маки, Progr. Theor. Phys. 44, 1431 (1970).