

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

Э. А. Канер, В. М. Яковенко

### СОДЕРЖАНИЕ

I.	Введение . . . . .	41
II.	Геликоидальная неустойчивость . . . . .	43
	1. Постановка задачи. Уравнения и граничные условия (43). 2. Геликоидальная неустойчивость в безграничной среде (45). 3. Резонансное взаимодействие геликонов со звуком в полупроводниковом стержне с идеально проводящей поверхностью (49).	
III.	Пучковая неустойчивость . . . . .	53
	4. Неустойчивость в безграничной среде (53). 5. Граничные условия (55). 6. Взаимодействие потенциальных колебаний с пучком (56). 7. Взаимодействие непотенциальных волн с потоком заряженных частиц в сильном магнитном поле (61).	
IV.	Перегревная неустойчивость . . . . .	63
	8. Основные уравнения (63). 9. Неустойчивость изотропной плазмы (66). 10. Перегревная неустойчивость в магнитном поле (69).	
	Цитированная литература . . . . .	71

### I. ВВЕДЕНИЕ

В последние десять лет возрос интерес к исследованиям электромагнитных свойств проводящих твердых тел. За это время были открыты различные типы слабозатухающих электромагнитных волн в полупроводниках и металлах, изучены разнообразные неустойчивости, нелинейные эффекты, взаимодействие волн между собой и с внешними полями. Сейчас эта область, объединяемая названием «плазменные явления в твердых телах», бурно развивается и является, пожалуй, одной из наиболее оживленных в физике твердого тела. Интерес к плазменным эффектам в твердых телах обусловлен рядом причин. Во-первых, неустойчивые состояния электронно-дырочной плазмы в полупроводниках могут использоваться (и уже используются) для генерации, усиления и преобразования электромагнитных волн в широком интервале длин волн — от радиочастотного диапазона до оптического. Во-вторых, плазменные эффекты в проводниках связаны со специфическими особенностями твердого тела и позволяют поэтому изучать энергетический спектр, кинетические свойства и взаимодействия электронов проводимости. Наконец, в-третьих, твердотельная плазма представляет собой удобный объект для моделирования процессов, происходящих в газоразрядной плазме. Необходимо отметить, что многие электромагнитные свойства твердых тел похожи на свойства обычной плазмы. Однако, несмотря на сходство, имеются и существенные различия. Основное из них состоит в том, что равновесная плазма твердых тел абсолютно устойчива, в то время как газовая плазма обычно обладает малым временем жизни и быстро распадается. Отличия также обусловлены существованием кристаллической решетки, квантовыми эффектами,

явлениями анизотропии, возможностью изменения параметров плазмы в очень широких пределах.

Изучение неустойчивостей составляет значительную часть исследований в физике плазмы. Известно, что многочисленные плазменные неустойчивости разделяются на две группы: кинетические и гидродинамические. Кинетические неустойчивости возникают при большой длине свободного пробега электронов, значительно превосходящей длину волны. Они обусловлены резонансным взаимодействием медленных волн с отдельными группами частиц, скорости которых близки к фазовой скорости волны. Примером кинетической неустойчивости может служить эффект обращения затухания Ландау<sup>1</sup> при движении пучка в бесстолкновительной плазме<sup>2, 3</sup>. Гидродинамические неустойчивости связаны с упорядоченным движением макроскопических объемов плазмы. Как правило, эти неустойчивости развиваются в области низких частот и малых длин свободного пробега. В качестве математического аппарата для исследования таких неустойчивостей применяют уравнения гидродинамики. Последовательная теория гидродинамической, точнее, гидромагнитной, неустойчивости изложена в обзоре Кадомцева<sup>4</sup>. Достаточно полная теория плазменных неустойчивостей обоих типов содержится в недавно вышедшей книге Михайловского<sup>5</sup>.

Характерной особенностью электронно-дырочной плазмы полупроводников является относительно большая величина частоты столкновений  $\nu$  носителей тока с рассеивателями. Минимальное значение  $\nu$  обычно не меньше  $10^{11}—10^{12}$  сек<sup>-1</sup>. Поэтому вплоть до инфракрасных частот применимо гидродинамическое приближение. Другими словами, чаще всего приходится иметь дело с неустойчивостями гидродинамического типа.

В данном обзоре рассматриваются три важные, по нашему мнению, группы неустойчивостей, а именно — геликоидальная, пучковая и перегреваемая.

Геликоидальная неустойчивость, о которой идет речь в гл. II, обусловлена дрейфом электронов относительно кристаллической решетки в постоянном магнитном и электрическом полях. Своим происхождением эта неустойчивость обязана существованию спиральной электромагнитной волны — геликона<sup>6, 7</sup>. Наличие упругих сил кристаллической решетки приводит к возникновению поперечных и продольных звуковых колебаний, которые взаимодействуют с геликонами. В условиях неустойчивости это обстоятельство существенно отличает твердотельную плазму от газоразрядной. Особое внимание уделено выяснению роли собственного магнитного поля, создаваемого однородным постоянным током.

В гл. III обсуждаются результаты теоретических и некоторых экспериментальных исследований взаимодействия пучка электронов, движущегося вблизи поверхности полупроводника, с собственными электромагнитными волнами в образце. Основное внимание уделено «размерному эффекту» — влиянию конечных размеров образца на инкременты нарастания амплитуды волны. Эти инкременты сильно возрастают в области резонансов, когда собственная частота волны совпадает с частотой колебаний электронов в движущемся пучке. Механизм этой неустойчивости аналогичен пучковой неустойчивости в газовой плазме и связан с перекачкой энергии направленного движения пучка в энергию колебаний.

Наконец, гл. IV посвящена неустойчивости, возникающей в результате нагрева электронов постоянным электрическим полем. Благодаря малой-скорости передачи энергии от электронов в решетку, на статической вольт-амперной характеристике возникает падающий участок, где дифференциальное сопротивление образца отрицательно. Это приводит к неустойчивости возмущений температуры и связанных с ними электромагнитных

полей. Обычно перегревная неустойчивость является аperiodической. Большой интерес представляет выяснение условий, в которых эта неустойчивость носит колебательный характер.

Цель данного обзора — привлечь внимание к перечисленным выше неустойчивостям, которые пока сравнительно слабо изучены экспериментально и в то же время интересны как с общезначимой точки зрения, так и в отношении технических приложений.

Очевидно, что предлагаемый обзор затрагивает лишь небольшую часть общей проблемы гидродинамической неустойчивости твердотельной плазмы. В частности, оставлены в стороне геликоидальная неустойчивость двухкомпонентной плазмы, усиление и генерация звука в пьезополупроводниках, рекомбинационно-ионизационные неустойчивости, эффект Гапана. Некоторые из них описаны в обзорах Гуревича<sup>8</sup>, Пустовойта<sup>9</sup>, Волкова и Когана<sup>10</sup>, а также в монографии Болч-Бруевича, Звягина и Миронова<sup>11</sup>. Соответственно и приведенная библиография не претендует на полноту: цитируется литература, непосредственно связанная с обсуждаемыми вопросами.

## II. ГЕЛИКОИДАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

1. **Постановка задачи. Уравнения и граничные условия.** Для решения задачи об устойчивости магнитоактивной плазмы твердого тела с током необходимо воспользоваться уравнениями Максвелла и теории упругости, а также материальными уравнениями, связывающими переменный ток с электромагнитными и звуковыми полями. Наиболее полная и строгая теория, описывающая взаимодействие электронов проводимости с решеткой, построена в работах<sup>12-16</sup>. В сильном магнитном поле, когда ларморовский радиус вращения электронов значительно меньше длины электромагнитных или звуковых волн (длина волн меньше также длины свободного пробега), согласно Скобову и Канеру<sup>14</sup> преобладающим является индукционный механизм связи электронов с решеткой. Поэтому мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением именно этого механизма взаимодействия.

Полная система уравнений имеет следующий вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j} = Ne \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{v} \right),$$

$$m\mathbf{v} \left( \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = -e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right), \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} (N\mathbf{v}) = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - s_t^2 \Delta \mathbf{u} + (s_t^2 - s_l^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \right] =$$

$$= Ne \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{H} \right] \right\} + m\mathbf{v}N \left( \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right); \quad (1.3)$$

здесь  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поля,  $\mathbf{u}$  — вектор смещения решетки,  $s_t$ ,  $s_l$  — скорости поперечного и продольного звуков,  $\rho$  — плотность кристалла,  $e$ ,  $m$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $N$ ,  $\mathbf{v}$  — заряд, эффективная масса, скорость, концентрация и частота соударений электронов. Частота предполагается достаточно низкой, так что силой инерции в уравнениях движения электронов можно пренебречь. Предполагается также выполненным условие квазинейтральности, т. е. концентрация электронов равна концентрации заряда решетки. Уprungие свойства среды изотропны. Диссипативные слагаемые в уравнениях движения учитывают закон сохранения импульса системы при столкновениях электронов с решеткой.

Система уравнений (1.1) — (1.3) должна быть дополнена граничными условиями. Эти граничные условия сводятся к следующему: силы, с которыми действуют на поверхность раздела две соприкасающиеся различные среды, должны быть равны и противоположны по направлению <sup>17</sup>:

$$(\sigma_{ik} + T_{ik}) n_k = (\sigma'_{ik} + T'_{ik}) n_k, \quad (1.4)$$

где величины со штрихом и без него относятся к различным средам, а вектор нормали  $\mathbf{n}$  имеет в обеих средах одно и то же направление. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.  $\sigma_{ik}$  — тензор упругих напряжений <sup>18</sup>,  $T_{ik}$  — максвелловский тензор напряжений. Кроме того, разумеется, должны выполняться электродинамические граничные условия.

Если образец окружен идеально проводящей поверхностью (что реализуется, например, в круглом металлическом волноводе, полностью заполненном полупроводником), то на границе тангенциальные компоненты электрического поля обращаются в нуль. Для полупроводникового стержня, окруженного непроводящей средой (вакуум,  $\sigma'_{ik} = 0$ ), систему уравнений (1.1) — (1.3) необходимо дополнить уравнениями Максвелла в вакууме:

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad c \text{ rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Токи смещения здесь предполагаются малыми по сравнению с токами проводимости в проводящей среде. В этом случае на границе образца должны быть непрерывны нормальные составляющие магнитного поля и тангенциальные составляющие электрического поля; тангенциальные компоненты  $\mathbf{H}$  могут, вообще говоря, испытывать разрыв, обусловленный наличием поверхностных токов.

Рассмотрим образец цилиндрической формы радиуса  $R$ , бесконечный вдоль оси симметрии (ось  $z$ ). Ток  $j_0 = j_{0z} = -N_0 e v_0$  и внешнее магнитное поле  $H_{0z}$  предполагаются однородными. Остальные величины, входящие в уравнения (1.1) — (1.3), в состоянии равновесия могут зависеть только от координаты  $r$  цилиндрической системы отсчета ( $r, \varphi, z$ ). Равновесные значения величин имеют нулевой индекс. При этом, согласно (1.1) — (1.3), азимутальное магнитное поле  $H_{0\varphi} = 2\pi j_0 r / c$  связано с радиальной компонентой вектора смещения решетки соотношением

$$\rho s^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_{0r}) \right] = \frac{j_0 H_{0\varphi}}{c} \equiv \frac{H_{0\varphi}}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_{0\varphi}). \quad (1.6)$$

Интегрируя это уравнение с граничным условием (1.4) на поверхности цилиндра (мы полагаем, что окружающая цилиндр среда является вакуумом в отношении упругих свойств, т. е.  $\sigma'_{ik} = 0$ ), можно определить деформацию цилиндра и распределение напряжений в нем.

Из уравнения (1.6) видно, что относительная деформация  $u_{0r}/r \sim H_{0\varphi}^2 / 4\pi \rho s^2$  для твердого тела очень мала. Очевидно, что упругие константы, например, скорость звука, не могут существенно измениться в результате таких деформаций. В стационарном состоянии  $E_{0\varphi} = H_{0r} = 0$ ,  $E_{0z} = -m v_0 v / e$ . Кроме того, возникает также радиальная компонента электрического поля  $E_{0r} = v_0 H_{0\varphi} / c$ , которая приводит к весьма незначительному нарушению условия нейтральности, именно,

$$\frac{\Delta N_0}{N_0} \sim \left( \frac{v_0}{c} \right)^2 \sim 10^{-6}.$$

Рассмотрим теперь малые колебания, в которых переменные добавки изменяются как  $A(r) \exp(ik_z z + il\varphi - i\omega t)$ , где  $\omega$  — частота,  $l, k_z$  — азимутальное и осевое волновые числа. Линеаризуя уравнения (1.1) —

(1.3), нетрудно получить систему уравнений для малых колебаний в следующем виде:

$$-i(\omega - k_z v_0) \mathbf{H} - \frac{c^2 v}{\omega_0^2} \Delta \mathbf{H} + \frac{c}{4\pi e N_0} \text{rot} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}_0] = \\ = \omega k_z H_{0z}^* \mathbf{u} + i\omega \mathbf{H}_0 \text{div } \mathbf{u} - c \text{rot} (\mathbf{E}_0 \text{div } \mathbf{u}), \quad (1.7)$$

$$\omega^2 \mathbf{u} + s_l^2 \Delta \mathbf{u} + (s_l^2 - s_z^2) \text{grad } \text{div } \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho c} [\mathbf{j}_0 \mathbf{H}] - \frac{1}{4\pi \rho} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}_0], \quad (1.8)$$

где  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N_0 / m$ ,  $H_{0z}^* = H_{0z} + (e/k_z r) H_{0\phi}$ .

Следует отметить, что для выяснения вопроса об устойчивости системы (1.7) — (1.8) в отсутствие диссипации можно воспользоваться энергетическим принципом<sup>4</sup>. Идея этого метода заключается в следующем. Если исходная система уравнений является самосопряженной, то ее можно получить, исходя из вариационного принципа наименьшего действия для функции Лагранжа. Определив знак потенциальной энергии колебаний, из общих теорем механики можно сделать вывод об устойчивости равновесного состояния системы.

Мы, однако, воспользуемся методом собственных колебаний, поскольку он дает более полную информацию. При достаточно больших внешних магнитных полях (циклотронная частота электронов  $\omega_H = eH_{0z}/mc$  значительно превосходит частоту соударений и частоту сигнала) в проводящей среде, как известно<sup>6, 7</sup>, распространяются слабозатухающие электромагнитные (геликоны, или спиральные) волны, а также поперечный и продольный звуки. Эти волны оказываются взаимно связанными<sup>14, 16</sup>, и величина их связи характеризуется малым параметром порядка  $H_{0z}^2 / 4\pi \rho s_{il}^2 \ll 1$ . Степень связи, однако, резко возрастает в условиях резонанса, когда частоты и волновые векторы исходных (парциальных) волн совпадают. При этом происходит настолько сильная взаимная трансформация волн, что возникают связанные электромагнитные и звуковые колебания. Наличие электронов проводимости, дрейфующих с постоянной скоростью  $v_0$ , приводит к изменению спектра электромагнитных волн. В частности, появляются волны, распространяющиеся с фазовой скоростью, меньшей скорости дрейфа. Резонансное взаимодействие таких электромагнитных колебаний со звуком приводит к раскачке связанных колебаний с максимально большим инкрементом нарастания. Парциальные электромагнитные волны в этом случае играют роль посредника, преобразующего энергию поступательного движения электронов в энергию колебаний всей системы. К изучению неустойчивостей такого рода мы и перейдем.

2. Геликоидальная неустойчивость в безграничной среде. Рассмотрим прежде всего случай, когда размеры образца достаточно велики и значительно превосходят длину распространяющихся волн. Очевидно, что поверхностные эффекты при этом не играют существенной роли. В отсутствие взаимодействия электронов проводимости с решеткой из уравнения (1.7) получаем следующее дисперсионное соотношение, определяющее спектр и затухание геликонов<sup>\*</sup>):

$$\omega = k_z v_0 \pm \frac{ck k_z H_{0z}^*}{4\pi e N_0} - i\nu \frac{k^2 c^2}{\omega_0^2}, \quad (2.1)$$

где  $k = (\kappa^2 + k_z^2)^{1/2}$ ,  $\kappa$  — поперечное волновое число (его значение определяется из граничных условий).

<sup>\*</sup>) Необходимо отметить, что такой спектр геликоны сохраняют даже при достаточно большой амплитуде волны<sup>19</sup>.

Из уравнения (2.1) следует, что в дрейфующей плазме могут существовать два типа геликонов: быстрый, фазовая скорость которого больше  $v_0$ , и медленный — со скоростью, меньшей скорости дрейфа. Эти геликоны имеют различные поляризации:  $\text{rot } \mathbf{H} = \pm k\mathbf{H}$ . Разумеется, обе волны являются затухающими. Неустойчивость может возникнуть лишь при наличии нескольких групп носителей с различной подвижностью в плазме твердого тела<sup>20-22</sup>, либо при учете движения ионов в газоразрядной плазме<sup>9</sup>, либо, наконец, при наличии связи электромагнитной волны с колебаниями решетки<sup>23-25</sup>.

Игитхановым и Кадомцевым<sup>26</sup> было отмечено, что геликоидальная неустойчивость, рассмотренная в работе<sup>25</sup>, в пренебрежении собственным магнитным полем  $H_{0\phi}$  представляет собой по существу неустойчивость Крускала — Шафранова<sup>4</sup>, исследованную в газоразрядной плазме. Действительно, критерий появления обеих неустойчивостей, как мы увидим ниже, одинаков. Тем не менее, мы хотели бы обратить внимание на то, что неустойчивость типа Крускала — Шафранова в твердотельной плазме имеет ряд отличительных особенностей.

Во-первых, существование упругих сил в кристаллической решетке приводит к тому, что неустойчивость может носить колебательный характер. Во-вторых, если частота колебаний значительно превосходит инкремент, то неустойчивость может возникать в условиях, когда  $|H_{0\phi}|$  больше  $H_{0z}$ . Иными словами, в твердотельной плазме существует область параметров, где достаточно большое собственное магнитное поле  $H_{0\phi}$  не оказывает влияния на развитие неустойчивости. Таким образом, результаты работ<sup>23, 25</sup> в этой области остаются справедливыми, хотя они и получены без учета  $H_{0\phi}$ .

Перейдем теперь к исследованию взаимодействия геликонов, обладающих аксиальной симметрией ( $l = 0$ ), с поперечным звуком. Поскольку  $s_t < s_l$ , то следует ожидать, что неустойчивость с участием поперечного звука будет возникать при меньших скоростях дрейфа электронов. Заметим, что при достаточно больших поперечных размерах образца ( $k_z^2 \gg \kappa^2 \sim \pi^2/R^2$ ) условие существования медленного геликона ( $v_0 > ck_z H_{0z}/4\pi e N_0$ ) эквивалентно требованию  $H_{0\phi} > H_{0z}$ . Однако закон дисперсии геликонов для аксиально-симметричных колебаний не зависит от азимутального магнитного поля<sup>23, 25</sup>. Полагая, что волны распространяются только вдоль оси  $z$  ( $\kappa \rightarrow 0$ ) и выполнено условие поперечности колебаний  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , из уравнений (1.7) — (1.8) получим дисперсионное соотношение для связанных электромагнитных и звуковых поперечных волн в следующей форме<sup>25</sup>:

$$\left(\frac{\omega^2}{s_t^2} - k_z^2\right) \left(\omega - k_z v_0 \mp \frac{ck_z^2 H_{0z}}{4\pi e N_0} + i\nu \frac{k_z^2 c^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{k_z^2 H_{0z}^2 \omega}{4\pi \rho s_t^2} \left(1 \pm \frac{4\pi e N_0 v_0}{ck_z H_{0z}}\right). \quad (2.2)$$

Здесь верхний знак относится к циркулярно-поляризованной волне с  $\text{rot } \mathbf{H} = k_z \mathbf{H}$ , нижний — к волне с  $\text{rot } \mathbf{H} = -k_z \mathbf{H}$ . При распространении поперечных звуковых волн  $\omega \approx k_z s_t$  наличие азимутального магнитного поля приводит к появлению продольной составляющей вектора смещения решетки

$$u_z = \frac{iH_{0\phi}H_{0z}}{4\pi \rho k_z (s_t^2 - s_l^2)},$$

и волны, строго говоря, перестают быть поперечными. Однако вклад  $u_z$ -компоненты в уравнение (1.7) пренебрежимо мал, если выполняется условие

$$u_{\phi} H_{0z} \gg u_z |H_{0\phi}| \left| \frac{v_0}{s_t} - 1 \right|. \quad (2.3)$$

Из уравнения (1.8) следует, что

$$u_{\Phi} \approx \frac{iH_{0z}H_{\Phi}}{8\pi r s_t \delta\omega} \left( \frac{4\pi e v_0 N_0}{ck_z H_{0z}} - 1 \right),$$

где  $\delta\omega = \omega - k_z s_t$ . Таким образом, окончательно условие поперечности колебаний запишется в форме

$$\frac{\omega}{|\delta\omega|} \gg 2 \frac{H_{0\Phi}^2}{H_{0z}^2} \frac{s_t |v_0 - s_t|}{s_t^2 - s_t^2} \left| \frac{ck_z H_{0z}}{4\pi e N_0 v_0 - ck_z H_{0z}} \right|. \quad (2.3a)$$

Воспользовавшись тем обстоятельством, что по порядку величины  $|H_{0\Phi}| \sim H_{0z} k_z R$ , получим область параметров, в которой применима формула (2.2):

$$\left| \frac{\omega}{\delta\omega} \right| \frac{s_t^2 - s_t^2}{s_t |v_0 - s_t|} \left| \frac{4\pi e v_0 N_0}{ck_z H_{0z}} - 1 \right| \gg k_z^2 R^2 \gg \pi^2. \quad (2.4)$$

При резонансном взаимодействии поперечного звука и геликона частоты и волновые векторы обеих волн совпадают. Соответствующие резонансные точки показаны на рис. 1. Рассмотрим, например, взаимодействие медленной электромагнитной волны со звуком. Пусть  $\omega > 0$ ,  $v_z > 0$ ,  $v_0 > 0$ . Условие резонанса, очевидно, имеет вид

$$k_{z \text{ рез}} = \frac{4\pi e N_0}{c H_{0z}} (v_0 - s_t), \quad \omega_{\text{рез}} = k_{z \text{ рез}} s_t. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что резонанс осуществляется только при  $v_0 > s_t$ . Поправка к резонансной частоте определяется правой частью уравнения (2.2) и равна

$$\delta\omega_{\text{рез}} = \pm i\omega_{\text{рез}} \sqrt{\frac{H_{0z}^2}{8\pi r s_t (v_0 - s_t)}}. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) следует, что одна из связанных волн нарастает, а вторая — затухает. Амплитуда поляризованных по кругу колебаний нарастает, образуя своеобразную винтовую (геликоидальную) структуру. Поэтому такого рода неустойчивость мы называем геликоидальной — по аналогии с винтовой плазменной неустойчивостью, рассмотренной в работе<sup>27</sup>. Нетрудно вычислить  $\delta\omega_{\text{рез}}$  и для остальных резонансных точек. При этом в точках 2 и 4 (см. рис. 1) нарастания нет\*), а в точке 3 величина  $\delta\omega_{\text{рез}}$  определяется выражением (2.6). Иными словами, нарастает та из связанных волн, у которой величина фазовой скорости меньше  $v_0$ , а направление ее совпадает со скоростью дрейфа электронов. В этом случае механизм геликоидальной неустойчивости эквивалентен черенковскому.

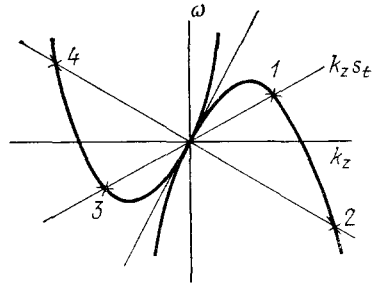


Рис. 1. Схематический вид зависимости  $\omega(k_z)$  для связанной геликоидной и звуковых волн при наличии дрейфа электронов.

Выясним характер возникающей неустойчивости. Для этого найдем добавку  $\delta k$  к волновому вектору  $k_{z \text{ рез}}$  при фиксированной частоте. Получим

$$\delta k^2 = - \frac{\omega_{\text{рез}}^2 H_{0z}^2}{8\pi r s_t^2 (v_0 - s_t) (\partial\omega/\partial k_z)_{\text{рез}}}, \quad (2.6a)$$

\*) В этих точках колебания затухают с относительным декрементом, пропорциональным  $v/\omega_H$ .

где  $(\partial\omega/\partial k)_{\text{рез}}$  — групповая скорость геликонов в резонансе. Нетрудно показать<sup>28</sup>, что при отрицательной групповой скорости геликонов ( $v_0 > 2s_t$ ) неустойчивость является абсолютной, при положительной — конвективной.

Формула (2.6) получена в предположении «сильной» связи, т. е. степень взаимной трансформации является настолько большой, что  $\delta\omega_{\text{рез}}$  превосходит затухание геликонов  $\nu k_z^2_{\text{рез}} c^2/\omega_0^2$ . В этом случае разделение волн на звуковую и электромагнитную теряет смысл и в резонансной области возникают связанные волны. Если же условие сильной связи не выполнено, тогда деление волн на геликоны и звук остается справедливым. В этом случае геликоны затухают с относительным декрементом  $\frac{\nu |v_0 - s_t|}{\omega_H s_t}$ , а звуковые волны нарастают с инкрементом

$$\delta\omega_{\text{рез}} = i\omega_{\text{рез}} \frac{H_{0z}^2 \omega_H}{8\pi\rho (v_0 - s_t)^2 \nu}. \quad (2.7)$$

Так, для полупроводника РbTe \*) с  $N_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ,  $\rho = 3,5 \text{ г/см}^3$ ,  $m \sim 10^{-29} \text{ г}$ ,  $s_t \sim 10^5 \text{ см/сек}$ ,  $\nu \approx 2 \cdot 10^{10} - 10^{11} \text{ сек}^{-1}$  при  $H_{0z} = 10^3 \text{ э}$ ,  $v_0 - s_t \sim s_t$  осуществляется слабая связь между волнами. При этом  $k_z_{\text{рез}} \sim 20 \text{ см}^{-1}$ ,  $\omega_{\text{рез}}/|\delta\omega_{\text{рез}}| \sim 10^5$  и неравенства (2.4) хорошо выполняются для  $R \approx 1 \text{ см}$ . В больших магнитных полях ( $H_{0z} \sim 10^4 \text{ э}$ ) при гелиевых температурах возможно также выполнение условия сильной связи ( $k_z_{\text{рез}} \sim 2 \text{ см}^{-1}$ ,  $\omega_{\text{рез}}/|\delta\omega_{\text{рез}}| \sim 10^2$ ,  $15 > k_z R > \pi$ ).

Вдали от резонанса (частоты звуковой и электромагнитной волн не совпадают при заданных  $k_z$ ) из уравнения (2.2) получим поправку к звуковой частоте  $\omega = k_z s_t$  в следующем виде:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{H_{0z}^2}{4\pi\rho s_t^2} \left(1 - \frac{4\pi e v_0 N_0}{c k_z H_{0z}}\right) \left(1 - \frac{v_0}{s_t} - \frac{c k_z H_{0z}}{4\pi e s_t N_0} - \frac{i\nu c^2 k_z}{s_t \omega_0^2}\right) \times \\ \times \left[ \left(1 - \frac{v_0}{s_t} - \frac{c k_z H_{0z}}{4\pi e s_t N_0}\right)^2 + \frac{\nu^2 c^4 k_z^2}{\omega_0^4 s_t^2} \right]^{-1}. \quad (2.8)$$

Нарастание колебаний происходит при выполнении условия

$$v_0 > \frac{c k_z H_{0z}}{4\pi e N_0}. \quad (2.9)$$

Это условие соответствует требованию, чтобы сила Лоренца  $(1/c) [\mathbf{j}_0, \mathbf{H}]$ , действующая на заряженную решетку, превосходила силу  $(1/c) [\mathbf{j}, \mathbf{H}_0]$ . Необходимо подчеркнуть, что неравенство (2.9) в отсутствие резонанса не связано какими-либо соотношениями между дрейфовой скоростью  $v_0$  и фазовой скоростью волны. Поэтому неустойчивость вне резонанса можно, по-видимому, обнаружить не только в полупроводниках, но и в металлах, где невозможно создать большую скорость дрейфа. Условие неустойчивости (2.9) эквивалентно условию Крускала — Шафранова ( $|H_{0\phi}|/H_{0z} > \pi R/L$ ,  $L$  — длина системы) возникновения винтовой неустойчивости плазменного шнура в сильном продольном поле. Однако подчеркнем еще раз, что сформулированное условие справедливо для шнура с малыми поперечными размерами ( $R \ll L$ , отсюда  $|H_{0\phi}| < H_{0z}$ ), в то время как в плазме твердого тела геликоидальная неустойчивость может возникнуть и в случае большого собственного магнитного поля ( $R \gg L$ ,  $|H_{0\phi}| > H_{0z}$ ).

Разумеется, говорить о нарастании колебаний можно лишь в том случае, если инкремент нарастания превышает затухание неэлектронного

\*) В дальнейшем все численные оценки будут проводиться для РbTe, поскольку в нем было экспериментально обнаружено взаимодействие спиральных и звуковых волн<sup>29</sup>.



(решеточного) происхождения. Так как возникновение неустойчивости ожидается для длинноволновых фононов, то условие  $\omega\tau_{ph} \ll 1$  (где  $\tau_{ph}$  — время релаксации тепловых фононов) хорошо выполняется. Решеточное поглощение описывается в этом случае механизмом Ахиезера<sup>30</sup> и пропорционально квадрату волнового вектора. Сравнение электронного инкремента нарастания и коэффициента решеточного поглощения показывает, что в области волновых векторов  $k_z < 4\pi e s_i N_0 / c H_{0z}$  ( $v_0 \sim s_i$ ) для PbTe при гелиевых температурах решеточное поглощение пренебрежимо мало<sup>31</sup>.

Если скорость дрейфа превосходит скорость  $s_i$ , то наличие азимутального магнитного поля  $H_{0\phi}$  приводит к взаимодействию геликонов с продольными звуковыми колебаниями, распространяющимися вдоль  $z$ . Это взаимодействие носит локальный характер и осуществляется в области, достаточно удаленной от оси цилиндра, т. е. при условии  $k_z r \ll 1$  и  $H_{0z} \ll |H_{0\phi}(r)|$ . Формулы, описывающие дисперсионные свойства и инкременты нарастания связанных волн в этом случае, приведены в работе<sup>32</sup>.

3. Резонансное взаимодействие геликонов со звуком в полупроводниковом стержне с идеально проводящей поверхностью. На идеально проводящей поверхности тангенциальные компоненты электрического поля обращаются в нуль. Очевидно, что это условие должно выполняться и в стационарном случае. Отсюда получается, что внутри образца  $E_{0z} = 0$ . Скорость дрейфа электронов  $v_0$  будет конечной величиной, если одновременно положить  $\nu = 0$ . Таким образом, в приближении идеально проводящей границы статическую проводимость образца вдоль внешнего магнитного поля необходимо устремить к бесконечности, а поперечную — к нулю. Граничные условия (1.4) для упругих напряжений принимают вид

$$\sigma_{ir}|_{r=R} = 0. \quad (3.1)$$

Компоненты максвелловского тензора напряжений в линейном приближении выпадают из (3.1) вследствие выполнения электродинамических граничных условий. Если выразить  $\sigma_{ir}$  через компоненты тензора  $u_{ik}$ , то краевые условия (3.1) можно представить в форме (все величины берутся при  $r = R$ )

$$\begin{aligned} s_i^2 r \frac{\partial u_r}{\partial r} + (s_i^2 - 2s_z^2) (i l u_\phi + u_r + i k_z r u_z) &= 0, \\ i k_z u_r + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - u_\phi + i l u_r &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.2) видно, что граничные условия «перепутывают» продольный и поперечный звуки даже в отсутствие связи электронов с решеткой. Однако для аксиально-симметричных возмущений с  $l = 0$ , уравнение для компоненты  $u_\phi$  отделяется от уравнений для  $u_z$  и  $u_r$ .

Поэтому прежде всего рассмотрим спектры аксиально-симметричных колебаний в цилиндрическом образце в отсутствие взаимодействия электромагнитных и звуковых волн. Плоскость поляризации геликонов вращается вокруг оси  $z$ , причем компоненты переменного магнитного поля связаны уравнением  $\text{rot } \mathbf{H} = \pm k_{01} \mathbf{H}$ , где  $k_{01}^2 = \kappa_{01}^2 + k_z^2$ . Отсюда находим

$$H_r = -\frac{i A k_z}{\kappa_{01}} J_1(\kappa_{01} r), \quad H_\phi = \mp i \frac{k_{01}}{k_z} H_r, \quad H_z = A J_0(\kappa_{01} r), \quad (3.3)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  — функции Бесселя. Из граничного условия  $H_r(R) = 0$  следует, что спектр радиальных волновых чисел  $\kappa_{01}$  определяется нулями функции  $J_1(\kappa_{01} R)$ . Частотный спектр геликонов описывается соотношением (2.1) при  $\nu = 0$ .

Звуковые колебания с поляризацией  $u_\varphi$  ( $\sim J_1(\kappa_{02}r)$ ) являются поперечными, и их волновое число  $\omega/s_t = k_{02} \equiv (\kappa_{02}^2 + k_z^2)^{1/2}$ . Спектр радиальных волновых чисел  $\kappa_{02}$  находится из условия  $J_2(\kappa_{02}R) = 0$ . Дисперсионные свойства колебаний с  $u_z, u_r \neq 0$  описываются более сложными выражениями, поскольку в граничных условиях продольные и поперечные волны не разделяются. Для поверхностных звуковых колебаний в цилиндре нетрудно получить известное дисперсионное уравнение

$$(\kappa_t^2 + k_z^2) \frac{I_0(\kappa_t R)}{I_1(\kappa_t R)} - 4\kappa_t \kappa_l k_z^2 \frac{I_0(\kappa_l R)}{I_1(\kappa_l R)} + \frac{2\kappa_l (k_z^2 - \kappa_t^2)}{R} = 0, \quad (3.4)$$

где  $\kappa_{l,t}^2 = k_z^2 - \omega^2/s_{l,t}^2 > 0$ , а  $I_0$  и  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя.

При больших  $R$  уравнение (3.4) переходит в известное дисперсионное соотношение для рэлеевских волн в полуограниченной среде<sup>18</sup>. Скорость поверхностной волны  $\omega/k_z = s_t \xi$ , где  $\xi < 1$  — положительное число, зависящее от отношения  $s_t/s_l$  (см. <sup>18</sup>). При больших, но конечных значениях  $k_z R$  скорость рэлеевской волны несколько больше  $s_t \xi$  (на величину порядка  $1/k_z R$ ).

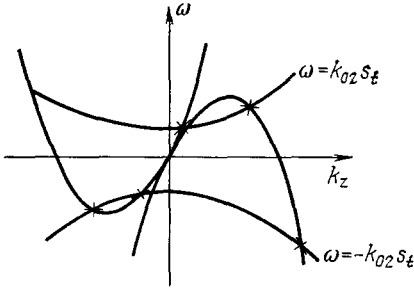


Рис. 2. Схематическая зависимость  $\omega$  от  $k_z$  для связанных геликонной и поперечной звуковой волн в цилиндрическом образце.

Перейдем теперь к изучению резонансного взаимодействия геликонов с объемным поперечным звуком. Условие резонанса в ограниченной среде заключается в том, чтобы, помимо совпадения частот и  $z$ -составляющих волновых чисел, вдоль радиуса  $R$  укладывалось целое число полуволн каждого парциального колебания. Другими словами, функции  $J_1(\kappa_{01}R)$  и  $J_2(\kappa_{02}R)$  должны одновременно обратиться в нуль. Соответствующие резонансные точки без взаимодействия показаны на рис. 2.

Полные волновые числа  $k_{01}$  и  $k_{02}$  не совпадают в силу различия  $\kappa_{01}$  и  $\kappa_{02}$ . Полагая, что при таком взаимодействии связанные колебания являются поперечными, получим следующее характеристическое уравнение, определяющее частоту в зависимости от полного волнового числа:

$$\left( \frac{\omega^2}{s_t^2} - k^2 \right) \left( \omega - k_z v_0 \mp \frac{ck k_z H_{0z}}{4\pi e N_0} \right) = \frac{k_z^2 H_{0z}^2 \omega}{4\pi \rho s_t^2} \left( 1 \pm \frac{4\pi e v_0 N_0}{ck H_{0z}} \right). \quad (3.5)$$

Оно несколько отличается от уравнения (2.2).

Верхний знак относится к связанной волне с поляризацией  $\text{rot } \mathbf{H} = k\mathbf{H}$ , нижний — соответствует  $\text{rot } \mathbf{H} = -k\mathbf{H}$  (величины  $k, k_z, \omega$  для определенности считаем положительными). Воспользовавшись тем обстоятельством, что в связанных волнах  $u_r = u_z = 0$ , из граничных условий для  $u_\varphi$  и  $H_r$  получим дисперсионное уравнение, описывающее взаимодействие медленного геликона со звуком:

$$J_1(\kappa_1 R) J_2(\kappa_2 R) = - \frac{H_{0z}^2}{4\pi \rho s_t^2} \frac{k_0^2 \kappa_{01} k_{02} J_1(\kappa_{02} R) J_2(\kappa_{01} R)}{(k_{01} + k_{02})(k_{01} - k_{02})^2}, \quad (3.6)$$

где

$$k_0 = \frac{4\pi e s_t N_0}{c H_{0z}}, \quad k_{01} = \frac{4\pi e N_0}{c H_{0z}} \left( v_0 - \frac{\omega}{k_z} \right), \quad k_{02} = \frac{\omega}{s_t}.$$

Все эти величины являются положительными.

Уравнение (3.6) позволяет найти поправку к частоте  $\delta\omega$ , если учесть, что  $\kappa_\alpha = \kappa_{0\alpha} + \delta\kappa_\alpha$ , а

$$\delta\kappa_\alpha \approx \frac{k_{0\alpha}}{\kappa_{0\alpha}} \frac{\partial k_{0\alpha}}{\partial \omega} \delta\omega. \quad (3.7)$$

В случае резонансного взаимодействия в соотношении (3.7) можно пренебречь поправками, обусловленными изменением волновых чисел  $\delta k_{0\alpha}$ . Эти поправки оказываются малыми по параметру  $(H_{0z}^2/4\pi\rho s_i^2)^{1/2}$ . Резонанс происходит при выполнении условия

$$k_{02}st = k_z \text{ рез} \left( v_0 - \frac{ck_{01}H_{0z}}{4\pi eN_0} \right). \quad (3.8)$$

Разлагая левую часть уравнения (3.6) по степеням  $\delta\omega$  и учитывая условие резонанса (3.8), окончательно находим

$$(\delta\omega)^2 = \frac{H_{0z}^2}{4\pi\rho s_i^2} \frac{\kappa_{01}^2 k_{01}^2 s_i \partial\omega/\partial k_{01}}{R^2 k_{01} (k_{c1} + k_{02}) (k_{01} - k_{02})^2}. \quad (3.9)$$

Знак правой части (3.9) совпадает со знаком производной  $\partial\omega/\partial k_{01}$ , т. е. по существу определяется дисперсией геликона. Поскольку медленный геликон обладает аномальной дисперсией ( $\partial\omega/\partial k_{01} < 0$ ), то при его резонансном взаимодействии с объемным поперечным звуком происходит раскачка связанных колебаний. При взаимодействии быстрого геликона со звуком нарастания волн не происходит благодаря тому, что  $\delta\omega^2 \propto \partial\omega/\partial k_{01} > 0$ .

Критерий применимости формулы (3.9) нетрудно получить, если оценить относительную роль тех слагаемых в «уравнениях движения» (1.7), в которых присутствует собственное магнитное поле тока  $H_{0\varphi}$ . Простые оценки<sup>32</sup> показывают, что необходимое и достаточное условие поперечности колебаний имеет вид

$$\frac{\omega}{|\delta\omega|} \gg \left( \frac{k_{01}cH_{0\varphi}}{4\pi eN_0} \right)^2 \frac{1}{s_i^2 - s_i'^2}. \quad (3.10)$$

Степень «деполяризации» звука вследствие взаимодействия между волнами, т. е. относительная величина компоненты  $u_r$ , оказывается малой и имеет порядок  $|\delta\omega|/\omega$ .

Остановимся теперь на взаимодействии геликонов со звуковыми колебаниями, если составляющие вектора смещения решетки  $u_r$  и  $u_z$  отличны от нуля, а  $u_\varphi = 0$ . Из уравнений (1.7) и (1.8) следует, что коэффициент связи вихревых аксиально-симметричных звуковых колебаний с геликонами не зависит от  $H_{0\varphi}$ , а для продольного звука он зависит от  $H_{0\varphi}$  и  $H_{0z}$ . Поскольку мы предполагаем, что  $H_{0\varphi}(R) \gg H_{0z}$ , то для оценки инкремента нарастания достаточно ограничиться взаимодействием геликонов с продольными звуковыми колебаниями и в коэффициенте связи волн можно пренебречь постоянным магнитным полем  $H_{0z}$  (при этом связь поперечных и продольных звуковых колебаний осуществляется через условия на границе).

Возникающая система уравнений решается методом последовательных приближений по малому параметру

$$\frac{H_{0\varphi}^2}{4\pi\rho s_i^2} \ll 1. \quad (3.11)$$

В результате возникает дисперсионное уравнение, описывающее связанные рэлеевские и спиральные электромагнитные волны в полупроводниковом цилиндре<sup>32</sup>. Однако мы не станем выписывать это сложное уравнение, а приведем лишь выражение для поправки к частоте вблизи резонанса. Резонансное взаимодействие геликонов с рэлеевской звуковой

волной имеет место при условии

$$s_l \xi = v_0 \pm \frac{ck_{01} H_{0z}}{4\pi e N_0}, \quad k_{01} = \sqrt{\kappa_{01}^2 + k_z^2}, \quad (3.12)$$

где  $\kappa_{01} R$  — корень  $J_1(x)$ . Для поправки к частоте получаем соотношение

$$(\delta\omega)^2 = \frac{H_{0\Phi}^2}{4\pi \rho s_l^2} \frac{\partial\omega}{\partial k_{01}} \frac{\omega k_{01} \kappa_{01}^2}{R(\kappa_l^2 + \kappa_{01}^2)^2} \left[ \frac{1}{\kappa_l} + \left( \frac{s_l}{s_t} \right)^2 \frac{\kappa_l k_z^2 - (\kappa_l^2 + k_z^2) \kappa_l}{\kappa_l^2 k_z^2} \right]^{-1}. \quad (3.13)$$

Поскольку в рэлеевских волнах  $\kappa_l > \kappa_t$  и  $k_z > \kappa_t$ , то величина в квадратной скобке положительна и знак правой части совпадает со знаком групповой скорости геликона  $\partial\omega/\partial k_{01}$ . Следовательно, неустойчивость связанных колебаний возможна только при взаимодействии рэлеевской звуковой волны с медленным геликоном, обладающим аномальной дисперсией. Ситуация здесь, по существу, такая же, как и при резонансе геликона с объемным поперечным звуком. Однако нарастание колебаний в рассматриваемом случае происходит при меньших скоростях дрейфа, чем при взаимодействии геликона с объемными звуковыми волнами.

В тонком стержне, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной волны и глубиной ее проникновения в образец, дисперсионное уравнение (3.4) дает известный закон дисперсии продольных колебаний

$$\omega = k_z s_l \sqrt{2(1 + \sigma)}, \quad (3.14)$$

где  $\sigma$  — модуль сдвига. Фазовая скорость этой волны меньше скорости объемного продольного звука. Взаимодействие колебаний (3.14) с геликонами возможно только за счет собственного магнитного поля постоянного тока при условии, что радиальное волновое число геликона  $\kappa_{01}$  велико по сравнению с  $k_z$ . Инкремент нарастания связанных волн (медленный геликон плюс волна (3.14)) определяется выражением

$$(\delta\omega)^2 = \frac{H_{0\Phi}^2}{2\pi \rho s_l^2} \frac{\partial\omega}{\partial k_{01}} \frac{(k_z s_l)^2 (1 - \sigma)}{\omega \kappa_{01} R^2}. \quad (3.15)$$

Из условия резонанса определяется значение магнитного поля  $H_{0z}$  при заданных размерах образца, скорости дрейфа и концентрации электронов. Если поперечные размеры образца становятся меньше длины волны в радиальном направлении ( $\kappa_{01} R < 1$ ), то амплитуда электромагнитной волны сильно уменьшается и взаимодействие звуковых волн с геликонами исчезает.

Для аксиально-несимметричных колебаний вычисление инкрементов нарастания становится чрезвычайно громоздким. Поэтому ограничимся следующим замечанием. Из условия резонанса медленных геликонов (2.1) и звуковых волн видно, что для несимметричных колебаний величина эффективного магнитного поля  $H_{0z}^*$  может быть меньше внешнего поля  $H_{0z}$ . Это приводит к уменьшению скорости дрейфа вблизи резонанса. Отметим, что в случае идеально проводящей поверхности не существует поверхностных геликонов не только с  $l = 0$ , но и с  $l \neq 0$ . В связи с этим вывод работ<sup>32, 33</sup> о наличии аксиально-несимметричных поверхностных геликонов является неправильным.

В заключение кратко остановимся на неустойчивости связанных волн в образце, граничащем с вакуумом. В этом случае, помимо геликона, необходимо учитывать и поверхностные колебания в среде<sup>34, 35</sup>, поскольку одних геликонов недостаточно для удовлетворения граничных условий. Учет поверхностных колебаний, несмотря на их сильное затухание, приводит к бесстолкновительным потерям геликонов, а при наличии дрейфа — к бесстолкновительному нарастанию колебаний. Причина возникновения таких потерь обусловлена потерями энергии на возбуждение поверхностных колебаний.

III. ПУЧКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

4. Неустойчивость в безграничной среде. Выше рассматривалось взаимодействие волн с электронами проводимости, дрейфующими с постоянной скоростью под действием электрического поля. Однако вследствие невысоких значений скорости дрейфа в полупроводниках ( $v_0 \approx 10^6 - 10^7$  см/сек) дрейфовая неустойчивость ограничена областью сравнительно низких частот и медленных волн. Новые возможности появляются при взаимодействии собственных колебаний с электронными пучками, движущимися в вакууме над поверхностью проводящего твердого тела. Пучковая неустойчивость в газоразрядной плазме была предсказана Пирсом<sup>36</sup>, Ахиезером и Файнбергом<sup>37</sup>, Бомом и Гроссом<sup>2</sup> и к настоящему времени изучена достаточно хорошо<sup>5</sup>. В то же время пучковая неустойчивость в твердых телах исследована значительно меньше. Одной из первых работ в этом направлении был обзор Лопухина и Веденова<sup>38</sup>. В нем обсуждался принцип действия резистивного усилителя, основанного на сдвиге фаз между электронным током в пучке и переменным полем волны, распространяющейся в плазме твердого тела. Очевидно, что такое взаимодействие является значительно более эффективным, если в твердом теле возбуждены собственные колебания — электромагнитные волны<sup>39</sup>, экситоны<sup>40</sup>, спиновые волны<sup>41</sup>, поверхностные плазмоны<sup>42а, 43, 44</sup> и другие. Инкремент неустойчивости сильно возрастает по мере приближения к резонансу, когда частота волны совпадает с одной из собственных частот колебаний в движущемся пучке

$$\omega = kv_0, \quad \omega = kv_0 - \Omega_H; \tag{4.1}$$

здесь  $v_0$  — скорость пучка,  $\Omega_H = |e|H/m_0c$  — циклотронная частота электронов.

В этом разделе будет изложена теория и обсуждены некоторые эксперименты по неустойчивостям, обусловленным резонансным взаимодействием электронных пучков с поверхностными<sup>42а, 43-46</sup> и объемными волнами<sup>46-48</sup> в твердотельной плазме. В расчетах пучок предполагается полностью скомпенсированным, тепловым движением частиц в пучке пренебрегается. В невозмущенном состоянии плотности и скорости легкой и тяжелой компонент пучка одинаковы. Переменные поля возмущают только электронную компоненту, плотность и скорость ионов остаются неизменными. Для определения неравновесной части плотности  $n$  и возмущения скорости  $\mathbf{v}$  используются линеаризованные уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v} &= \frac{e}{m_0} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}] + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] \right) \quad (e > 0), \\ \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v}_0 \nabla) n &= 0; \end{aligned} \tag{4.2}$$

здесь  $m_0$  — масса свободного электрона,  $n_0, \mathbf{v}_0$  — равновесные значения плотности и скорости пучка.

Физический механизм и особенности пучковой неустойчивости могут быть проиллюстрированы на примере взаимодействия поперечных экситонов с частицами в безграничной среде в отсутствие постоянного магнитного поля<sup>40</sup>. В этом случае уравнения Максвелла приобретают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\frac{4\pi e}{c} (n\mathbf{v}_0 + n_0\mathbf{v}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор электрической поляризации, связанный с электрическим полем уравнением <sup>49, 50</sup>

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \omega_e^2 \mathbf{P} - \alpha \Delta \mathbf{P} = \gamma \mathbf{E}; \quad (4.4)$$

здесь  $\omega_e$  — частота экситонного поглощения, параметр  $\alpha$  описывает пространственную дисперсию ( $\alpha \approx \hbar \omega_e / m$ ), а постоянная  $\gamma \approx Ne^2/m$  пропорциональна силе осциллятора  $N$  с частотой  $\omega_e$ . Дисперсионное уравнение для пучка с экситонами есть

$$[\omega^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - k^2 c^2] (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_0)^2 = \Omega_b^2 \left[ \omega^2 - \frac{c^2 (\mathbf{k} \mathbf{v}_0)^2}{v_0^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \right], \quad (4.5)$$

где  $\Omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_0}$  — лэнгмюровская частота пучка,

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{4\pi\gamma}{\omega^2 - \omega_e^2 - \alpha k^2} \quad (4.6)$$

— диэлектрическая постоянная среды с учетом пространственной дисперсии. В приближении малой плотности пучка, когда  $\Omega_b \rightarrow 0$ , уравнение (4.5) распадается на два:

$$\omega = \mathbf{k} \mathbf{v}_0, \quad \omega^2 = k^2 c^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}). \quad (4.7)$$

Первое из них описывает колебания пучка исчезающе малой плотности, второе — собственные электромагнитные волны в среде. При  $k^2 c^2 > \omega_e^2$ ,  $4\pi\gamma$  из второго уравнения (4.7) находим спектры фотонов и экситонов

$$\omega_1^2 \approx k^2 c^2 + 4\pi\gamma, \quad \omega_2^2 = (\omega_e^2 + \alpha k^2) \left( 1 - \frac{4\pi\gamma}{k^2 c^2} \right).$$

В резонансе частоты и волновые числа колебаний пучка и экситонов совпадают. При конечной, но малой плотности пучка инкремент нарастания связанной волны, в соответствии с (4.5), равен

$$\eta \equiv \text{Im } \omega = \sqrt{3} \omega \sqrt[3]{\frac{\pi\gamma\Omega_b^2 \sin^2 \theta}{4k^4 c^4}}, \quad (4.8)$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}_0$ . Из условия резонанса  $\omega = kv_0 \cos \theta$  следует, что скорость пучка  $v_0$  должна быть больше фазовой скорости волны  $\omega/k$ . Это означает, что механизм неустойчивости связан с черенковским излучением. При типичных значениях параметров —  $k \approx 10^5 \text{ см}^{-1}$ ,  $\omega_e \sim 4\pi\gamma \approx 10^{14-15} \text{ сек}^{-1}$ ,  $v_0 = 0,1c$ ,  $n_0 = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$  — относительный инкремент может достигать величины порядка  $10^{-5}$ . Поскольку для ряда веществ <sup>49, 50</sup> относительное затухание может быть на порядок меньше, то в принципе экситоны могут быть усилены пучком. Однако экспериментально такое усиление до сих пор еще не наблюдалось. Заметим, что в оптически активных средах типа кварца, киновари <sup>12</sup> инкремент нарастания может оказаться гораздо больше.

Характер неустойчивости зависит от знака групповой скорости волны, т. е. от знака  $\alpha$ . При аномальной дисперсии ( $\alpha < 0$ ) неустойчивость (4.8) является абсолютной, а при нормальной дисперсии ( $\alpha > 0$ ) — конвективной.

Наряду с поперечными волнами, пучок может возбуждать и усиливать продольные экситоны, спектр которых определяется нулями функции  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ . Дисперсионное уравнение и инкремент нарастания продольных экситонов нетрудно найти из уравнения (4.5), если положить в нем  $c = \infty$ .

Разумеется, возбуждение экситонов экспериментально должно осуществляться в тонких образцах. Поэтому необходимо проанализировать взаимодействие пучка с волнами в ограниченной среде.

5. Г р а н и ч н ы е у с л о в и я. В неоднородной системе с резкой границей важное значение имеет вопрос о граничных условиях. Рассмотрим вначале квазинейтральный пучок электронов, движущийся в вакууме над плоской поверхностью полупроводника  $y = 0$ . На границе раздела, очевидно, должны быть непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля. Особенностью таких задач является возникновение поверхностных токов, которые обусловлены переносом возмущений электронной плотности в пучке вдоль границы. Поэтому нормальные составляющие вектора индукции  $D_y$  уже не являются непрерывными. Скачок компоненты  $D_y$  пропорционален скорости пучка  $v_0$ <sup>51, 52</sup>. Математически этот факт связан с тем, что тангенциальные компоненты вектора индукции содержат производные по нормальной координате, поскольку переменный ток в пучке

$$j_z \sim -|e|v_0 n = -\frac{|e|v_0}{i(\omega - k_z v_0)} \frac{\partial (n_0 v_y)}{\partial y} \quad (5.1)$$

пропорционален  $\partial (n_0 v_y)/\partial y$ . Поэтому при интегрировании<sup>7</sup> уравнения  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  по бесконечно узкому переходному слою интегралы, содержащие тангенциальную компоненту  $D_z$ , дают конечный вклад. Если выразить  $v_y$  через электрические поля с помощью уравнений движения (4.2), то граничное условие для скачка  $D_y$  можно представить в форме

$$\begin{aligned} [D_y^{(2)} - D_y^{(1)}]_{y=0} = \\ = -\frac{\Omega_H^2 k_z v_0}{\omega^2 \Delta} \left[ \omega E_y^{(2)} + i\Omega_H E_x + \frac{ik_x v_0 \Omega_H}{\omega - k_z v_0} E_z - k_z v_0 \left( E_y^{(2)} + \frac{i}{k_z} \frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial y} \right) \right]_{y=0}; \quad (5.2) \\ \Delta = \Omega_H^2 - (\omega - k_z v_0)^2. \end{aligned}$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 относятся к областям, занимаемым полупроводником и пучком соответственно \*).

Для полубесконечных систем граничное условие (5.2) необходимо дополнить условием исчезновения всех переменных полей при  $y \rightarrow \infty$ . В ограниченном образце необходимы добавочные краевые условия на других поверхностях. Решая уравнения (4.2) совместно с уравнениями Максвелла, из граничных условий получаются дисперсионные уравнения, описывающие взаимодействие пучка с объемными или поверхностными колебаниями.

Уравнения Максвелла в пучке имеют вид (4.3) при  $\mathbf{P} \equiv 0$ , а электромагнитные свойства среды характеризуются тензором диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik} + \epsilon_{ik}^* \quad (5.3)$$

Здесь  $\epsilon_0$  — решеточная часть диэлектрической постоянной образца,  $\epsilon_{ik}^*$  — ее электронная часть. Отличные от нуля элементы тензора  $\epsilon_{ik}^*$  определяются хорошо известными формулами:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^* = \epsilon_{yy}^* = -\frac{\omega_0^2 (\omega + i\nu)}{\omega [(\omega + i\nu)^2 - \omega_H^2]}, \quad \epsilon_{xy}^* = \frac{i\omega_0^2 \omega_H}{\omega [(\omega + i\nu)^2 - \omega_H^2]}, \\ \epsilon_{zz}^* = -\frac{\omega_0^2}{\omega (\omega + i\nu)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $\omega_0$  — плазменная частота носителей тока в полупроводнике, вектор  $\mathbf{H}$  параллелен оси  $z$ .

\*) Во всех случаях, где речь идет о поверхностных волнах, предполагается, что частота поверхностной рекомбинации мала по сравнению с  $\nu$ , а глубина проникновения волны превосходит характерную длину неоднородности, связанной с этой рекомбинацией.

6. Взаимодействие потенциальных колебаний с пучком. В потенциальных возмущениях переменное магнитное поле значительно меньше электрического вследствие того, что ток проводимости и ток смещения почти полностью компенсируют друг друга. Полагая, что вдали от границы раздела равновесная концентрация электронов постоянна, запишем характеристическое уравнение в форме

$$k_i k_j \varepsilon_{ij} = 0, \quad (6.1)$$

Если учесть свойства симметрии тензора  $\varepsilon_{ij}$ , то из (6.1) легко найти  $k_y$ :

$$k_y^2 = -k_x^2 - k_z^2 \frac{\varepsilon_{zz}^*}{\varepsilon_{xx}}, \quad (6.2)$$

причем знаки  $k_y$  выбираются так, чтобы поля внутри и вне образца затухали, т. е.  $\text{Im } k_y^{(1)} > 0$ ,  $\text{Im } k_y^{(2)} < 0$ .

Нетрудно показать, что для потенциальных колебаний компоненты  $\varepsilon_{xx}$  и  $\varepsilon_{zz}$  в пучке есть

$$\varepsilon_{xx}^{(2)} = \varepsilon_{yy}^{(2)} = 1 + \frac{\Omega_b^2}{\Delta}, \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} = 1 - \frac{\Omega_b^2}{(\omega - k_z v_0)^2}. \quad (6.3)$$

Из граничных условий (5.2) и непрерывности тангенциальных составляющих  $E$  находим дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний<sup>45</sup>

$$k_y^{(2)} \varepsilon_{yy}^{(2)} - k_y^{(1)} \varepsilon_{yy}^{(1)} + k_x \left[ \varepsilon_{yx}^{(1)} - \frac{i \Omega_H \Omega_b^2}{\Delta (\omega - k_z v_0)} \right] = 0. \quad (6.4)$$

В отсутствие постоянного магнитного поля дисперсионное уравнение (6.4) описывает взаимодействие пучка с поверхностными плазмонами

$$\left[ \varepsilon_0 + 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega (\omega + i\nu)} \right] (\omega - k_z v_0)^2 = \Omega_b^2. \quad (6.5)$$

Заметим, что при  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\nu = 0$  это уравнение описывает неустойчивость скользящих пучков<sup>5</sup>. В резонансе, когда

$$\omega_p \equiv \omega_0 (\varepsilon_0 + 1)^{-1/2} = k_z v_0, \quad (6.6)$$

инкремент нарастания связанной волны в приближении малой плотности пучка равен

$$\text{Im } \omega = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2^4}} \frac{\sqrt[3]{\omega_0 \Omega_b^2}}{\sqrt{\varepsilon_0 + 1}} \propto \sqrt[3]{n_0}. \quad (6.7)$$

Эта формула справедлива в случае сильной связи пучка с плазмонами, когда  $\text{Im } \omega \gg \nu$ . Можно показать, что рассматриваемая неустойчивость имеет конвективный характер, поскольку групповая скорость поверхностных плазмонов положительна<sup>17</sup>. В условиях слабой связи ( $\text{Im } \omega \ll \nu$ ) также возможно нарастание колебаний. В этом случае

$$\delta \omega \equiv \omega - k_z v_0 = \pm \Omega_b \frac{k_z v_0 (k_z v_0 + i\nu)}{k_z^2 v_0^2 (\varepsilon_0 + 1) - \omega_0^2 + i\nu k_z v_0}. \quad (6.8)$$

Неустойчивость (6.8) в определенном отношении аналогична «резистивной» неустойчивости, рассматривавшейся в обзоре<sup>38</sup>. Однако вследствие частотной дисперсии диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \omega_0^2/\omega^2$  возникает максимум инкремента в условиях резонанса (6.6). Если  $\omega \gg \nu$ , то инкремент нарастания в максимуме равен

$$\text{Im } \delta \omega = \Omega_b \sqrt{\omega_0/2\nu}. \quad (6.9)$$

Интересно отметить, что подобная неустойчивость возникает также на границе двух плазмopodobных сред, если в одной из них электроны



дрейфуют под действием постоянного электрического поля. Согласно <sup>42b</sup> дисперсионное уравнение потенциальных колебаний лишь несколько отличается от (6.5) и имеет вид

$$\left( \varepsilon_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + iv)} \right) (\omega - k_z v_0) = -4\pi i \sigma, \quad (6.10)$$

где  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{02}$ ,  $v_0$  — скорость дрейфа,  $\sigma$  — статическая проводимость образца. Отсюда в приближении малой проводимости  $\sigma$  для инкремента нарастания получаем

$$\text{Im } \delta\omega = \frac{4\pi\sigma (k_z v_0)^2 [\omega_0^2 - \varepsilon_0 (k_z^2 v_0^2 + v^2)]}{(\varepsilon_0 k_z^2 v_0^2 - \omega_0^2)^2 + \varepsilon_0^2 v^2 k_z^2 v_0^2}. \quad (6.11)$$

Раскачка дрейфовых колебаний имеет место, если реальная часть эффективной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_0 - [\omega_0^2/k_z v_0 (k_z v_0 + iv)]$  является отрицательной (выражение в квадратных скобках (6.11) положительно). Хотя инкремент (6.11) пропорционален первой степени плотности дрейфующей плазмы, его абсолютная величина может оказаться больше, чем в случае (6.9), благодаря более высокой концентрации носителей тока в плазме полупроводника.

Обсудим возможности усиления поверхностных волн в полупроводниках электронным пучком. В отсутствие столкновений фазовая скорость поверхностной волны  $\omega/k_z = c \sqrt{1 - |\varepsilon_1|^{-1}}$  может быть сколь угодно малой. В частности, при  $\omega = \omega_0 (\varepsilon_0 + 1)^{-1/2}$  она обращается в нуль. Если же учесть столкновения, то волна будет обладать относительно малым затуханием при  $|\varepsilon_1| - 1 \gg \varepsilon_1^{(i)}$ , где  $\varepsilon_1^{(i)} = \omega_0^2 \nu / \omega^3$ . Для типичных значений параметров —  $\nu \approx 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$  и  $\omega \approx \omega_0 \varepsilon_0^{-1/2} \approx 10^{12} \text{ сек}^{-1}$  — величина  $\varepsilon_1^{(i)}$  становится порядка единицы. Это означает, что в таких образцах минимальные скорости волн миллиметрового диапазона достигают величины  $c/\sqrt{2}$ , т. е. оказываются лишь несколько меньше  $c$ . Иными словами, сильная резонансная связь (6.6) между колебаниями в миллиметровой области частот осуществляется только в случае релятивистских скоростей пучка. При скоростях  $v_0 \approx 0,1 c$  в этой области частот можно реализовать только слабую (нерезонансную) связь (6.8). Для субмиллиметрового диапазона фазовая скорость волны уменьшается и резонансное усиление можно осуществить с нерелятивистским пучком ( $v_0 \ll 0,1 c$ ).

Отметим, что скорость поверхностных волн экситонного происхождения в оптической области может оказаться гораздо меньше — порядка  $10^9 \text{ см/сек}$ . Дисперсионное уравнение (6.5) остается справедливым и в этом случае, если величину  $\varepsilon_0 - [\omega_0^2/\omega(\omega + iv)]$  заменить на  $1 - 4\pi\gamma [\omega(\omega + iv) - \omega_e^2]^{-1}$ . При этом  $\nu/\omega_e \approx 10^{-6}$  и условия усиления становятся вполне благоприятными с экспериментальной точки зрения.

С целью фокусировки электронного пучка в экспериментах обычно применяется магнитное поле  $H_0 \sim 10^4 \text{ э}$ . Поскольку в таких полях циклотронная и плазменная частоты электронов могут быть одного порядка, естественно ожидать некоторых новых особенностей неустойчивости.

Рассмотрим прежде всего взаимодействие пучка с «косыми» потенциальными колебаниями <sup>43</sup>, в которых

$$k_x^2 \gg k_z^2 |\varepsilon_{zz} / \varepsilon_{yy}|.$$

Подставляя в (6.4)  $k_y^{(1,2)} = \pm i k_x (k_x > 0)$ , получим

$$\left[ \omega(\omega - \omega_H + iv) - \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_0 + 1} \right] (\omega - k_z v_0) (\omega - k_z v_0 + \Omega_H) = \Omega_b^2 \frac{\omega(\omega - \omega_H - iv)}{\varepsilon_0 + 1}. \quad (6.12)$$

В предельном случае  $\Omega_b \rightarrow 0$  соотношение (6.12) распадается на три независимых уравнения, описывающих поверхностные колебания в полупроводнике и волны плотности заряда в пучке (4.1) при наличии магнитного поля. Из условия равенства нулю выражения в квадратных скобках (6.12) находим предельные частоты поверхностных волн

$$\omega^\pm = \frac{\omega_H - i\nu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_H - i\nu}{2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\epsilon_0 + 1}} \quad (6.13)$$

(корень положителен при  $\nu \rightarrow 0$ ). В сильном магнитном поле

$$\omega^+ = \omega_H + \frac{\omega_0^2}{\omega_H(\epsilon_0 + 1)}, \quad \omega^- = -\frac{\omega_0^2}{\omega_H(\epsilon_0 + 1)} \left(1 + i\frac{\nu}{\omega_H}\right). \quad (6.14)$$

Отметим, что колебания с частотой  $\omega^-$  существуют в широком интервале частот  $\omega \ll \omega_H$ , независимо от соотношения между  $\omega$  и  $\nu$  (относительный декремент затухания равен  $\nu/\omega_H$ ).

Исследуем теперь резонансное взаимодействие поверхностных волн с колебаниями пучка  $\omega = k_z v_0 - \Omega_H$  в условиях аномального эффекта Доплера. В резонансе, когда  $\omega^+ = k_z v_0 - \Omega_H$ , мнимые поправки к частоте равны

$$\delta\omega \equiv \omega - \omega^+ = \frac{i}{2} \left[ -\nu \pm \sqrt{\nu^2 + \frac{4\Omega_b^2 \omega_r^+ (\omega_r^+ - \omega_H)}{(\epsilon_0 + 1) \Omega_H (\omega_r^+ - \omega_r^-)}} \right]. \quad (6.15)$$

В формуле (6.15) индексом  $r$  обозначена вещественная часть соответствующей собственной частоты (6.14). Видно, что неустойчивость возникает тогда, когда второе слагаемое

под знаком радикала положительно. При сильной связи ( $\nu \rightarrow 0$ ) инкремент нарастания колебаний пропорционален  $\Omega_b \propto \sqrt{n_0}$ . В случае слабой связи радикал в выражении (6.15) следует разложить по степеням второго члена, и величина инкремента оказывается пропорциональной  $\Omega_b^2 \propto n_0$ . Аналогичные результаты получаются и при взаимодействии волн (6.14) с колебаниями в пучке  $\omega = k_z v_0$ .

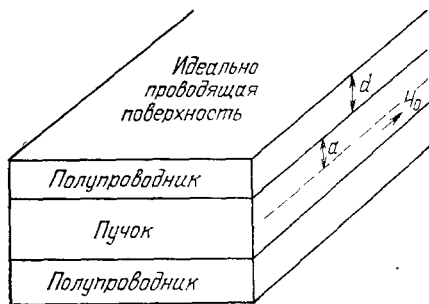


Рис. 3.

Выше мы исследовали потенциальные колебания с большими значениями  $k_x$ . В обратном предельном случае  $k_x \ll k_z$  поверхностные волны в области сильных магнитных полей отсутствуют. Действительно, из уравнения (6.4) следует, что величины  $k_y$  являются вещественными, т. е. колебания имеют объемный характер. Поэтому рассмотрим структуру типа «сэндвич» (рис. 3), состоящую из пучка и двух слоев полупроводника \*).

Такая геометрия соответствует условиям эксперимента, поставленного в работе <sup>45</sup>. Дисперсионные свойства этой системы описываются уравнением

$$\epsilon_{yy}^{(2)} k_{y2} \operatorname{ctg} \left( k_{y2} a - \alpha \frac{\pi}{2} \right) + \epsilon_{yy}^{(1)} k_{y1} \operatorname{ctg} \left( k_{y1} d - \beta \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (6.16)$$

Значения  $\alpha = 0$  (или  $\alpha = 1$ ) соответствуют симметричному (антисимметричному) распределению электрического поля в пучке ( $|y| \leq a$ );  $\beta = 0$

\* Интересные результаты по исследованию взаимодействия аксиально-несимметричных потенциальных волн с пучком получены в работе <sup>53</sup>.

отвечает идеально проводящим внешним границам  $|y| = a + d$ , а  $\beta = 1$  — границе с вакуумом. Пусть  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ . В сильном магнитном поле ( $\omega_H \gg \omega$ )  $\varepsilon_{yy}^{(1)} = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{yy}^{(2)} = 1$ . Если  $\text{Im}(k_{y1}d) \gg 1$ , то уравнение (6.16) можно представить в виде

$$\varepsilon_0 k_{y1} \text{ctg}(k_{y2}a) = ik_{y2}, \quad (6.17)$$

где

$$k_{y1} = k_z \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\varepsilon_0 \omega (\omega + i\nu)} - 1}, \quad k_{y2} = k_z \sqrt{\frac{\Omega_b^2}{(\omega - k_z v_0)^2} - 1},$$

$$\text{Im } k_{y1} > 0, \quad \text{Re } k_{y2} < 0.$$

Чтобы упростить окончательные формулы, положим  $\varepsilon_0 \gg 1$ . Тогда

$$\Delta\omega \approx \frac{ik_{y2}^2 (\omega - k_z v_0)}{\varepsilon_0 k_{y1} a (k_z^2 + k_{y2}^2)}, \quad k_{y2} a \approx \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (6.18)$$

Отсюда видно, что максимум инкремента нарастания достигается при  $\omega \approx \omega_0 \varepsilon_0^{-1/2}$ .

В предельном случае «тонкого» пучка ( $k_{y2}a \ll 1$ ) и тонкой пластины ( $k_{y1}d \ll 1$ ), граничащей с вакуумом ( $\beta = 1$ ), дисперсионное уравнение (6.16) для симметричных колебаний ( $\alpha = 1$ ) нетрудно преобразовать с помощью (6.2) к следующему виду:

$$\varepsilon_{zz}^{(2)} a + \varepsilon_{zz}^{(1)} d = 0. \quad (6.19)$$

Поскольку компоненты  $\varepsilon_{zz}$  не зависят от  $H_0$ , уравнение (6.19) описывает одномерное взаимодействие продольных плазменных колебаний с пучком. Оно отличается от (6.5) тем, что величины  $\varepsilon_0$  и  $\omega_0^2$  содержат дополнительный множитель  $d/a$ . Поэтому при  $d < a$  в соответствии с (6.7) инкремент нарастания возрастает примерно в  $(a/d)^{1/3}$  раз.

Взаимодействие пучка с плазменными колебаниями экспериментально исследовалось в германии<sup>54</sup> и антимониде индия<sup>45</sup>. В последней работе применялся монокристаллический образец  $n$ -InSb с подвижностью  $7 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \text{ в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$  и концентрацией  $N_0 = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$  при температуре жидкого азота. Эффективная масса в  $n$ -InSb равна  $m_e \approx 0,015 m_0$ , а частота столкновений  $\nu = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ . Статическая диэлектрическая постоянная составляет  $\varepsilon_0 = 16$ .

Был обнаружен плазменный резонанс на частоте  $\omega_0/\sqrt{\varepsilon_0} = 8,1 \times 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ , соответствующий длине волны в вакууме  $\lambda = 2,3 \text{ мм}$ . Резонанс наблюдался с помощью измерения зависимости коэффициента отражения от частоты в миллиметровом диапазоне. В этом случае образец помещался в торец прямоугольного волновода с размерами  $7,2 \times 3,4 \text{ мм}^2$ , а его толщина выбиралась достаточно большой, чтобы можно было пренебречь волной, отраженной от другой границы.

Взаимодействие пучка с образцом изучалось на установке, схема которой приведена на рис. 4. Пучок имел поперечные размеры  $0,4 \times 3,5 \text{ мм}^2$  и фокусировался магнитным полем. Для ускорения применялся источник импульсного напряжения с переменной длительностью импульса от 0,2 до 100  $\mu\text{сек}$ . Образец InSb имел форму прямоугольной пластины с длиной 6  $\text{мм}$ , толщиной  $d = 2,5 \text{ мм}$ , шириной 3,5  $\text{мм}$  и клинообразными срезами для согласования со входом и выходом волновода. В качестве генераторов служили лампы обратной волны, работавшие в диапазонах 12, 5, 2 и 1,5  $\text{мм}$ , в импульсном режиме (длительность импульса генератора была несколько больше импульса ускоряющего напряжения).

На рис. 5, 6 приведены зависимости приращения мощности  $\Delta P$  от напряжения и тока в пучке для резонансной длины волны  $\lambda = 2,3 \text{ мм}$ .

Величина  $\Delta P$  представляет собой разность мощности на выходе установки при наличии пучка относительно мощности  $P_0$  в отсутствие пучка.

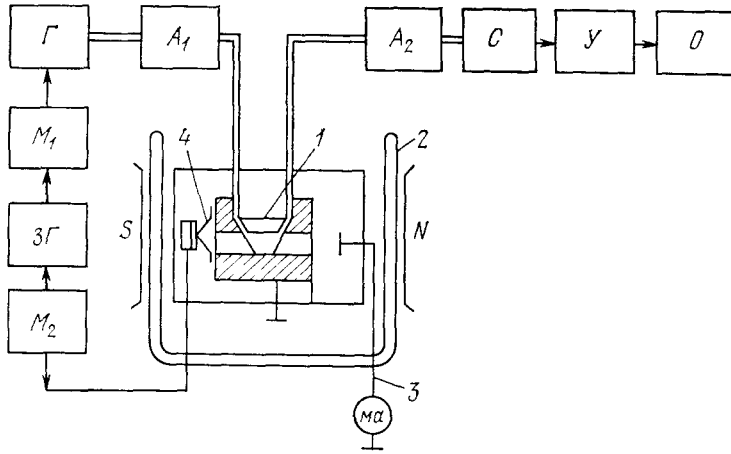


Рис. 4. Схема измерений <sup>43</sup>

Г — генератор,  $A_{1, 2}$  — аттенюаторы,  $M_{1, 2}$  — модуляторы, ЗГ — задающий генератор, СУ — усилитель, О — осциллограф. 1 — образец, 2 — дуар, 3 — коллектор, 4 — электронная пушка.

При малых  $\Delta P/P_0$  это отношение пропорционально инкременту нарастания. Наблюдалось монотонное увеличение  $\Delta P$  с ростом напряжения

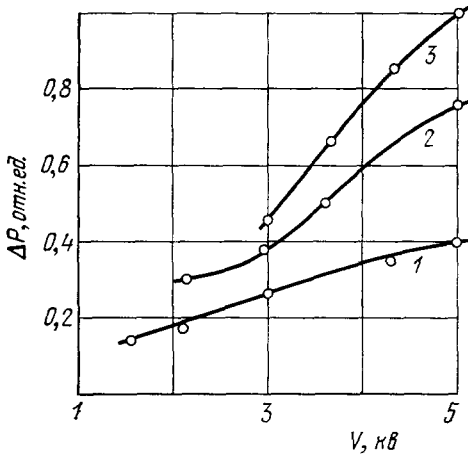


Рис. 5. Зависимость  $\Delta P$  от ускоряющего напряжения  $V$ .

Ток в пучке (мА): 90 (1), 120 (2) и 200 (3).

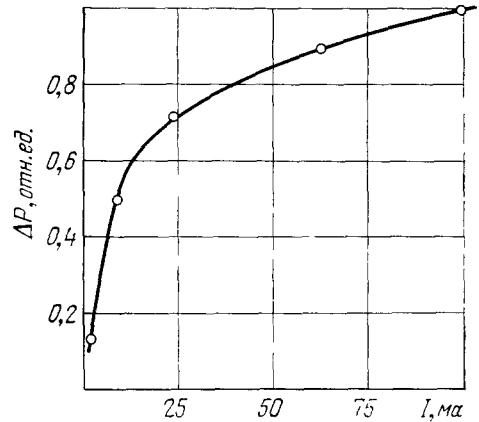


Рис. 6. Зависимость  $\Delta P$  от тока в пучке ( $V = 4$  кВ).

и тока. Зависимость инкремента от величины тока в пучке естественно объясняется формулой (6.18). Действительно, подставляя в нее выражение для  $\omega - k_z v_0$  через  $k_{y2} a \approx \pi(n + 1/2)$ , получим

$$-Im k_z = Re \frac{\Omega_b \omega (k_{y2} v_0)^2}{\alpha \omega_0 \epsilon_0^{1/2} (\omega^2 + k_{y2}^2 v_0^2)^{3/2}} \left( 1 - \frac{\omega^2 \epsilon_0}{\omega_0^2} - i \frac{v}{\omega} \right)^{-1/2}. \quad (6.20)$$

Поскольку плотность пучка  $n_0$  входит только через лэнгмюровскую частоту  $\Omega_b$ , то зависимость инкремента от тока  $J_b$  оказывается  $|Im k_z| \propto \sqrt{J_b}$ .

Формула (6.20) может объяснить также и увеличение инкремента с ростом напряжения. В самом деле, если предположить, что  $k_{y2}v_0 < \omega$ , то  $|\text{Im } k_z|$  при  $J_b = \text{const}$  будет пропорционально  $v_0^{3/2} \propto U^{3/4}$ , что качественно согласуется с экспериментом. Таким образом результаты экспериментов <sup>45</sup> объясняются взаимодействием пучка конечных размеров с квазипотенциальными колебаниями в сильном магнитном поле.

Выходная мощность возрастала с увеличением постоянного магнитного поля. Начиная с поля  $H_0 \approx 2 \text{ кэ}$ , мощность перестает зависеть от  $H_0$ . Этот факт не вытекает из приведенных выше формул, которые показывают, что для не очень тонкого образца инкремент уменьшается с ростом  $H_0$ . В условиях эксперимента увеличение  $H_0$  сопровождается возрастанием плотности тока вблизи поверхности образца и ростом длины участка взаимодействия пучка с волной. С этим, по-видимому, и связано наблюдаемое возрастание выходной мощности с  $H_0$ .

Вследствие относительно большой частоты соударений ( $v/\omega \sim 0,1$ ), к сожалению, не удается разделить взаимодействие с объемными и поверхностными плазмонами (их частоты отличаются всего на 3%). По той же причине в эксперименте реализуется случай слабой связи пучка с волной. Поэтому усиление за счет пучка лишь частично компенсирует общие потери энергии электромагнитной волны в полупроводнике, и не удается осуществить генерацию колебаний.

Необходимо отметить, что при трансформации потенциальных волн в электромагнитные на выходе системы, как правило, возникают большие потери на преобразование. С этой точки зрения представляет интерес выяснение вопроса о возбуждении пучком непотенциальных колебаний.

7. Взаимодействие непотенциальных волн с потоком заряженных частиц в сильном магнитном поле. Прежде всего покажем, что вблизи границы раздела полупроводника с вакуумом существуют непотенциальные поверхностные волны. Будем предполагать, что к образцу приложено сильное магнитное поле, параллельное его поверхности, и полупроводниковая плазма замагничена. Иными словами, мы считаем, что

$$|\epsilon_{xx}| \ll |\epsilon_{xy}| \ll |\epsilon_{zz}|, \quad (7.1)$$

где  $\epsilon_{ik}$  определяется формулами (5.3) и (5.4). В этом приближении уравнения Максвелла

$$\left[ k^2 \delta_{ik} - k_i k_k - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ik}(\omega, \mathbf{H}) \right] E_k = 0 \quad (7.2)$$

приводят к двум типам волн. Одна из них — геликон, а другая является потенциальной волной. Характеристическое уравнение для геликона (без учета затухания) можно записать в форме

$$k_{yh}^2 = -k_x^2 - k_z^2 - \frac{\omega^4 \epsilon_{xy}^2}{k_z^2 c^4}. \quad (7.3)$$

Из волнового уравнения для потенциальных колебаний  $k_i k_k \epsilon_{ik} = 0$  в приближении сильного магнитного поля ( $\epsilon_0 \gg |\epsilon_{xx}^*|$ ) находим

$$k_{ys}^2 = k_z^2 \frac{\omega_0^2}{\epsilon_0 \omega (\omega + iv)}, \quad k_x^2 \ll k_{ys}^2, \quad \text{Im } k_{ys} > 0. \quad (7.4)$$

Очевидно, что геликонная волна (7.3) может стать поверхностной при «косом» распространении, когда

$$k_x^2 \gg k_z^2 \frac{\omega^4 |\epsilon_{xy}^2|}{c^4 |k_z^2|}, \quad \text{т. е. } k_{yh} = -i |k_x|. \quad (7.5)$$

Необходимо отметить, что вблизи поверхности раздела геликон всегда сопровождается потенциальными колебаниями (7.4). Это следует из того факта, что без учета волны (7.4) нельзя удовлетворить граничным условиям на плоскости  $y = 0$ .

Закон дисперсии и затухание непотенциальных поверхностных волн нетрудно найти, воспользовавшись непрерывностью переменного магнитного поля на границе раздела. В результате получим <sup>48</sup>

$$\omega - 2\omega_H \left( \frac{k_z c}{\omega_0} \right)^2 \operatorname{sgn} k_x = 2i \frac{k_z^2 c^2 |k_x|}{\omega_0 \epsilon_0 k_{ys}}. \quad (7.6)$$

Правая часть этого соотношения описывает затухание поверхностной волны. Относительный декремент затухания по абсолютной величине равен

$$\left| \frac{\delta\omega}{\omega_r} \right| = \left| \frac{\epsilon_{xy} k_x}{\epsilon_0 \operatorname{Re} k_{ys}} \right|. \quad (7.7)$$

Условие малости декремента выполняется тем лучше, чем больше статическая диэлектрическая проницаемость решетки  $\epsilon_0$ , магнитное поле и чем меньше эффективная масса носителей заряда. Подходящими материалами, в которых можно реализовать условие малого затухания, являются InSb или PbTe.

В InSb при  $N_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $\epsilon_0 = 16$ ,  $m = 0,01 m_0$  на частоте  $\omega \sim \nu \sim 3 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$  при  $H_0 = 10 \text{ кэ}$  и  $k_x = 2k_z$  получим  $k_z = 40 (1 + i \cdot 0,3) \text{ см}^{-1}$ . В PbTe, в котором  $N_0 \approx 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $\epsilon_0 = 400$ ,  $m = 0,02 m_0$ , при  $H_0 = 50 \text{ кэ}$ ,  $k_x = 2k_z$  и на частоте  $\omega = 5 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$  получаем  $k_z = 330 (1 + 0,15 \cdot i) \text{ см}^{-1}$ .

Поверхностная геликонная волна (7.6), предсказанная в работе <sup>42б</sup>, была недавно обнаружена экспериментально Байбаковым и Дацко <sup>55, 56</sup> в  $n$ -InSb.

Волна наблюдалась в пластине с размерами  $5 \times 13 \times 15 \text{ мм}^3$  при комнатной температуре, на частотах 20—1500 МГц, в магнитных полях до 25 кэ. Концентрация электронов была равна  $1,2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , подвижность  $5 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \text{ в}^{-1} \text{ сек}^{-1}$ . Для определения дисперсионной зависимости применялась резонансная методика, основанная на возбуждении стоячей поверхностной волны на краю пластинки и на регистрации основной гармоники ее размерного резонанса.

На рис. 7 приведена зависимость частоты волны от  $k_z$  при различных значениях магнитного поля. Видно, что теоретическая кривая, построенная по формуле  $\omega = 2\omega_H (k_z c / \omega_0)^2$  для концентрации, соответствующей исследованному образцу, близка к экспериментально наблюдаемой. Квадратичная зависимость частоты от  $k_z$  означает, что обнаруженная волна действительно является поверхностным геликоном. Отклонение экспериментальной кривой от теоретической обусловлено пренебрежением поправок к частоте, возникающих из правой части уравнения (7.6).

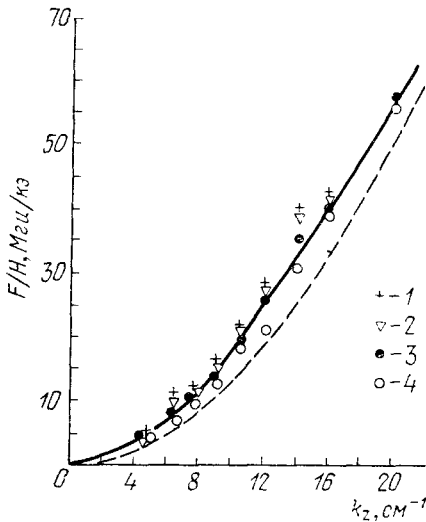


Рис. 7. Дисперсионная характеристика поверхностного геликона в  $n$ -InSb (по <sup>56</sup>).

$H$  (кэ): 20 (1), 15 (2), 10 (3) и 5 (4). Теоретическая кривая (штриховая) построена по формуле (7.6) для  $N_0 = 1,2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Существование геликона, как известно, обусловлено эффектом Холла в сильном магнитном поле. Поэтому в скомпенсированной плазме поверхностный геликон исчезает. При этом, однако, могут возникнуть поверхностные волны альвеновского типа<sup>48</sup>, аналогичные объемным<sup>57</sup>. В работах<sup>43, 46, 48</sup> были найдены инкременты нарастания поверхностных непотенциальных волн, взаимодействующих с пучком. Возбуждение пучком объемных колебаний типа геликонов, очевидно, можно осуществить в структурах типа «сэндвич». Теоретически этот вопрос рассматривался в работах<sup>47, 58</sup>; соответствующие эксперименты описаны в<sup>59, 60</sup>.

#### IV. ПЕРЕГРЕВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Выше были рассмотрены некоторые неустойчивости твердотельной плазмы, обусловленные упорядоченным (поступательным) движением электронов. Здесь мы обсудим другой вид неустойчивости, обязанной своим происхождением тепловому движению электронов во внешних электрическом и магнитном полях.

Речь пойдет о так называемой *перегревной* неустойчивости. Механизм ее состоит в следующем.

В стационарном состоянии средние импульс и энергия, теряемые электронами при столкновениях с решеткой, компенсируются воздействием постоянного электрического поля. При низких температурах передача энергии от электронов к решетке затруднена, поскольку эффективная масса фонона  $T/s^2$  много больше электронной массы  $m$ . Поэтому уже при сравнительно небольших напряженностях поля  $E$  электронный газ нагревается<sup>61</sup> и средняя кинетическая энергия электрона превышает температуру кристалла. Для некоторых механизмов рассеяния электронная частота столкновений с передачей импульса уменьшается по мере роста средней энергии. Это означает, что джоулево тепло, поглощаемое электронами, возрастает с полем. Одновременно с этим уменьшается доля энергии, передаваемая в решетку, что, в свою очередь, вызывает еще больший нагрев электронного газа, и т. д. В результате возникает падающий участок на вольт-амперной характеристике (отрицательная дифференциальная проводимость)<sup>10, 11, 62-68 \*</sup>. Перегрев электронного газа и приводит к неустойчивости. Перегревная неустойчивость плазмы газового разряда описана в обзоре Кадомцева<sup>4</sup>, а в полупроводниках — рассматривалась в работах<sup>10, 11, 65, 68, 72-82</sup>. Обычно эта неустойчивость имеет аperiодический характер. Ниже будет показано, что при определенных условиях перегревная неустойчивость в полупроводниках становится колебательной.

8. *Основные уравнения.* Для анализа перегревной неустойчивости во внешних электрическом и магнитном полях в первую очередь необходимо найти плотности тока  $\mathbf{j}$  и потока тепла  $\mathbf{Q}$ . Эта задача может быть решена на основе кинетического уравнения. Мы не станем выводить формулы для этих потоков во всех деталях, а остановимся только на основных приближениях и приведем окончательный результат (подробности можно найти, например, в работе<sup>72</sup>).

В интеграле столкновений необходимо учесть рассеяние электронов друг на друге, на фононах и на примесях. Предполагается, что масса примесей бесконечно велика и поэтому электроны упруго рассеиваются на них. Кроме того, будем считать, что межэлектронные столкновения,

\*) Явления нагрева электронов в плазме газового разряда и твердых тел описаны в обзорах<sup>69, 70</sup> и монографии Гинзбурга<sup>71</sup>.

приводящие к «максвеллизациям» функции распределения электронов, играют основную роль. Благодаря этому удается ввести эффективную электронную температуру  $\Theta(\mathbf{r}, t)$  и записать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (N\Theta) + \operatorname{div} \mathbf{Q} = \mathbf{jE} - \mathcal{F}(N, \Theta), \quad (8.1)$$

где  $\mathcal{F}$  — мощность, передаваемая в решетку от электронной системы. Критерий возможности введения эффективной температуры, как известно, имеет вид

$$N \gg N_{\text{кр}} = \frac{(m\Theta)^{3/2} s^2 e_0^2}{2\pi L_c T e^4 \tau_{\text{ph}}}, \quad (8.2)$$

где  $T$  — температура решетки ( $T$  и  $\Theta$  измеряются в энергетических единицах),  $L_c$  — кулоновский логарифм,  $\tau_{\text{ph}}$  — импульсное время релаксации электронов на фононах. Неравенство (8.2) представляет собой условие того, что характерное кулоновское время межэлектронной релаксации  $\tau_e \approx \sqrt{m} \Theta^{3/2} e_0^2 / 2\pi L_c N e^4$  мало по сравнению с энергетическим временем  $\tau_{\text{ph}} / \delta$  ( $\delta \approx m s^2 / T$  — малая неупругость при рассеянии электронов на акустических фононах). Численная оценка показывает, что критическая концентрация  $N_{\text{кр}}$  при типичных значениях параметров полупроводников имеет порядок  $10^{12} - 10^{14} \text{ см}^{-3}$  \*).

Благодаря тому, что процесс передачи энергии от электронов к фононам является медленным, соответствующий интеграл столкновений упрощается, если разложить его по малой неупругости<sup>61</sup>. Тогда для изотропной части функции распределения  $F_0(\epsilon)$  получается уравнение Фоккера — Планка, в котором столкновительный член имеет вид

$$\hat{v}\{F_0\} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ A(\epsilon) v \left( \frac{\partial F_0}{\partial \epsilon} + \frac{F_0}{T} \right) \right], \quad (8.3)$$

где  $A(\epsilon)$  — коэффициент диффузии в пространстве энергий.

Для анизотропной части функции распределения  $\mathbf{F}_1 \mathbf{p} / p$  интеграл столкновений сводится ко времени релаксации  $\tau(\epsilon)$ , именно,

$$v\{F_1\} = \frac{F_1}{\tau(\epsilon)}. \quad (8.4)$$

Величина  $\tau(\epsilon)$  определяет изменение импульса электронов с энергией  $\epsilon$ .

В реальных полупроводниках могут одновременно существовать несколько механизмов рассеяния, и практически всегда зависимости  $A(\epsilon)$  и  $\tau(\epsilon)$  являются степенными, т. е.

$$\begin{aligned} A(\epsilon) &= A_0(T) \left( \frac{\epsilon}{T} \right)^r, \\ \tau(\epsilon) &= \tau(T) \left( \frac{\epsilon}{T} \right)^q. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Значения постоянных  $r$  и  $q$ , характеризующих тип рассеяния, приведены в таблице, взятой из работы<sup>67</sup>. Так, если импульс изменяется при столкновениях с акустическими фононами, а энергия передается пьезофононам, то  $q = -1/2$ , а  $r = 1/2$ .

Сформулируем теперь основные уравнения и граничные условия. Полная система состоит из уравнения баланса энергии (8.1), уравнений

\*) Отметим, что если условие (8.2) нарушается, то изотропная часть электронной функции распределения перестает быть максвелловской. Эта ситуация подробно проанализирована в обзоре Киквидзе и Рухадзе<sup>65</sup>.



Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.6)$$

и уравнения непрерывности

$$-e \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad e > 0. \quad (8.7)$$

На поверхности раздела, помимо обычных электродинамических граничных условий, необходимо задать дополнительные условия для

Механизм рассеяния	$r$	$q$
Акустические колебания	3/2	-1/2
Оптические колебания, $T < T_D^*$	1	0
Оптические колебания, $T > T_D$	-1/2	1/2
Пьезоакустические колебания	1/2	1/2
Полярные полупроводники, рассеяние на оптических колебаниях, $T > T_D$	-1/2	3/2
Нейтральные примеси	—	0
Заряженные примеси	—	3/2
Дипольные примеси	—	1/2

\*)  $T_D$  — дебаевская температура.

потока импульса и потока энергии частиц. Довольно очевидно, что эти дополнительные условия (в отличие от электродинамических) не имеют универсального характера и должны формулироваться по-разному в зависимости от конкретной физической задачи.

Пусть полупроводник помещен в постоянные электрическое и магнитное поля. В стационарном состоянии электронная температура  $\Theta_0$  определяется из требования обращения в нуль правой части уравнения (8.1), в котором вместо  $\mathcal{F}$  и  $\mathbf{j}$  следует подставить значения

$$\mathcal{F}_0 = \frac{2N_0(\Theta_0 - T)}{\sqrt{\pi} T \Theta_0^{5/2}} \int_0^\infty d\varepsilon A(\varepsilon) \varepsilon^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\Theta_0}\right), \quad (8.8)$$

$$\mathbf{j}_0 = \hat{\sigma} \mathbf{E}_0 \equiv e^2 \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} F_0(\varepsilon) \hat{\beta}(\varepsilon) \cdot \mathbf{E}_0; \quad (8.9)$$

здесь  $F_0(\varepsilon) \propto \exp(-\varepsilon/\Theta_0)$  — максвелловская функция распределения с температурой  $\Theta_0$  и введено следующее обозначение для тензора  $\hat{\beta}$ :

$$\hat{\beta}(\varepsilon) = \frac{8\pi \sqrt{2m} \tau(\varepsilon)}{3\Theta_0(1 + \omega_H^2 \tau^2(\varepsilon))} \begin{pmatrix} 1, & -\omega_H \tau(\varepsilon), & 0 \\ \omega_H \tau(\varepsilon), & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 + \omega_H^2 \tau^2(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

(ось  $Oz$  параллельна  $\mathbf{H}_0$ ).

В динамическом режиме, наряду с постоянными, существуют также переменные поля. Будем полагать, что переменные величины  $\propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . Согласно <sup>72</sup>, выражения для колеблющихся частей плотности

тока и тепла можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) &= \hat{\sigma} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v}_0, [\mathbf{k}, \mathbf{E}]] \right\} + \frac{N'}{N_0} \hat{\sigma} \left( \mathbf{E}_0 + \frac{i\mathbf{k}\Theta_0}{e} \right) + \\ &\quad + \frac{\Theta'}{\Theta_0} \left[ \left( \hat{\lambda} - \frac{5}{2} \hat{\sigma} \right) \mathbf{E}_0 - i \frac{\Theta_0}{e} \left( \frac{3}{2} \hat{\sigma} - \hat{\lambda} \right) \mathbf{k} \right], \quad (8.11) \\ Q'(\omega, \mathbf{k}) &= -\frac{\Theta_0}{e} \hat{\lambda} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v}_0, [\mathbf{k}, \mathbf{E}]] \right\} - \\ &\quad - \frac{N'\Theta_0}{N_0 e} \hat{\lambda} \left( \mathbf{E}_0 + i\mathbf{k} \frac{\Theta_0}{e} \right) + \frac{\Theta'}{\Theta_0} \left[ \left( -\hat{\kappa} + \frac{5\Theta_0}{2e^2} \hat{\lambda} \right) e\mathbf{E}_0 + i\Theta_0 \left( \frac{3\Theta_0}{2e^2} \hat{\lambda} + \hat{\kappa} \right) \mathbf{k} \right]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Штрихом отмечены переменные добавки; тензоры термоэлектричества и теплопроводности задаются формулами

$$\hat{\lambda} = \frac{e^2}{\Theta_0} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{5/2} F_0(\varepsilon) \hat{\beta}(\varepsilon), \quad \hat{\kappa} = \frac{1}{\Theta_0} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{7/2} F_0(\varepsilon) \hat{\beta}(\varepsilon). \quad (8.13)$$

Скорость стационарного дрейфа определяется величиной постоянного тока  $\mathbf{j}_0 = -N_0 e \mathbf{v}_0$ .

Комбинации тензоров  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\kappa}$ , фигурирующие в (8.11) и (8.12), описывают вклад в потоки от переменных полей, а также за счет эффектов дрейфового движения, диффузии, термодиффузии и теплопроводности.

Формулы (8.13) не учитывают пространственной и временной дисперсии диссипативных коэффициентов и справедливы при следующих условиях:

$$\omega\tau, kl, kv_0\tau \ll 1. \quad (8.14)$$

Однако даже в гидродинамическом приближении (8.14) исследование перегретой неустойчивости в постоянном магнитном поле и с учетом всех диссипативных процессов является весьма громоздким. Поэтому следует рассмотреть наиболее интересные частные случаи.

9. Неустойчивость изотропной плазмы. В отсутствие внешнего магнитного поля  $H_0$  тензоры  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\kappa}$  превращаются в скаляры

$$\sigma = \frac{N_0 e^2}{m\nu(\Theta_0)} \frac{\Gamma(q+2,5)}{\Gamma(2,5)}, \quad \lambda = (q+2,5)\sigma, \quad \kappa = \frac{\Theta_0}{e^2} (q+3,5)\lambda, \quad (9.1)$$

где  $\nu(\Theta_0) = (1/\tau_0) (T/\Theta_0)^q$  — импульсная частота соударений электронов при температуре  $\Theta_0$ ,  $\Gamma(x)$  — эйлерова функция. Уравнение баланса энергии (8.1) в стационарном состоянии (при  $\Theta_0 \gg T$ ) принимает вид

$$\frac{e^2 E_0^2 \tau_0}{m} = \frac{3\Gamma(r+1,5) A(T)}{2\Gamma(q+2,5) T} \left( \frac{\Theta_0}{T} \right)^{r-q}. \quad (9.2)$$

Для рассматриваемых ниже медленных процессов потенциальные и вихревые колебания удается разделить. В случае потенциальных колебаний можно положить  $\mathbf{H} = 0$  и  $c = \infty$ , а связь продольного электрического поля с неравновесной концентрацией определить из уравнения Пуассона. В результате получаем дисперсионное уравнение в форме

$$\omega^2 + i\omega \left( \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0} + B \right) - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0} \left[ \frac{\gamma(r-q) k_\perp^2 + (r+q) k_\parallel^2}{k^2} + i\mathbf{k}\mathbf{v}_0 + \frac{8\pi\lambda}{3\varepsilon_0} (kr_D)^2 \right] - iC = 0. \quad (9.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 B &= (r - q) \gamma + \frac{2\alpha}{3} \left( i \mathbf{k} \mathbf{v}_0 + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0} k^2 r_D^2 \right), \\
 C &= \mathbf{k} \mathbf{v}_0 \left[ \gamma (r - q) + \frac{16\pi\lambda}{3\varepsilon_0} (kr_D)^2 \right] + \\
 &\quad + \frac{2}{3} i \left\{ v_0^2 \left[ k_{\parallel}^2 \left( q + \frac{7}{2} \right) + k^2 (q - r) \right] - \lambda\sigma \left( \frac{4\pi k^2 r_D^2}{\varepsilon_0} \right)^2 \right\}, \\
 r_D^2 &= \frac{\varepsilon_0 \Theta_0}{4\pi N_0 e^2}, \quad \gamma = \frac{2\sigma E_0^2}{3N_0 \Theta_0}, \quad \alpha = 5 + 3q - q^2; \quad (9.4)
 \end{aligned}$$

$k_{\parallel}$ ,  $k_{\perp}$  — составляющие волнового вектора вдоль и поперек скорости дрейфа  $\mathbf{v}_0 = \sigma E_0 / N_0 e$ ,  $r_D$  — дебаевский радиус электронов. Параметр  $\gamma$  представляет собой частоту релаксации энергии в электронной системе.

Тот факт, что уравнение (9.2) является квадратным, обусловлен наличием колебаний электронной температуры и концентрации. Очевидно, что эти колебания взаимно связаны между собой.

Если ток смещения мал, т. е. максвелловское время релаксации  $\varepsilon_0 / 4\pi\sigma$  является наименьшим среди всех характерных времен ( $4\pi\sigma \gg | \varepsilon_0 B |$ ), то решения уравнения (9.3) имеют вид

$$\omega_1 = -i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \omega_2 = \mathbf{k} \mathbf{v}_0 - i\gamma \frac{(r - q) k_{\perp}^2 + (r + q) k_{\parallel}^2}{k^2} - i \frac{8\pi\lambda}{3} (kr_D)^2. \quad (9.5)$$

Из приведенной выше таблицы видно, что величина  $r + q$  всегда положительна, в то время как  $r - q$  может быть отрицательной (например, при рассеянии энергии на оптических фононах, а импульса — на заряженных примесях). Поэтому перегревная неустойчивость в случае малых времен  $\varepsilon_0 / 4\pi\sigma$  возможна только для «вытянутых» вдоль тока возмущений с  $k_{\perp}^2 > |(r + q) / (r - q)| k_{\parallel}^2$ . Длина возмущений должна быть достаточно большой, чтобы теплопроводность и диффузия, которые описываются последним слагаемым в  $\omega_2$ , не препятствовали неустойчивости. Следовательно, критерий неустойчивости имеет вид

$$\left( q + \frac{5}{2} \right) (kr_D)^2 < \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4\pi N_0 \Theta_0} \ll \frac{3}{2}. \quad (9.6)$$

Поскольку  $\gamma > |k v_0|$ , то неустойчивость является аperiodической.

Как и в случае газоразрядной плазмы<sup>4</sup>, перегревная неустойчивость может вызвать расслоение образца на домены, которые вытянуты вдоль тока и обладают разной проводимостью<sup>68</sup>.

В случае поперечных длинноволновых возмущений ( $k_{\parallel} \ll k_{\perp} \ll r_D^{-1}$ ,  $eE_0 / \theta_0$ ) колебания плотности и температуры разделяются и перегревная неустойчивость возникает независимо от соотношения между  $\gamma$  и  $4\pi\sigma / \varepsilon_0$ . При этом электронная плотность затухает с декрементом  $4\pi\sigma / \varepsilon_0$ , а флуктуации температуры нарастают с инкрементом

$$\omega_2 = i\gamma (q - r), \quad q > r. \quad (9.7)$$

Можно показать, что коротковолновые возмущения затухают благодаря диффузии и теплопроводности.

Проанализируем эволюцию продольных возмущений в противоположном предельном случае больших максвелловских времен ( $4\pi\sigma / \varepsilon_0 \ll |r - q| \gamma$ ). Для длинных волн ( $k \ll eE_0 / \theta_0$ ) находим

$$\omega_1 = i\gamma (q - r), \quad (9.8)$$

$$\omega_2 = kv_0 - i \frac{4\pi\sigma (r + q)}{\varepsilon_0 (r - q)} \left[ 1 + (kr_D)^2 \frac{(r + q + q^2)}{r + q} \right]. \quad (9.9)$$

Эти формулы (при условии  $k^2 r_D^2 \ll 1$ ) были получены в работах <sup>72, 73, 75</sup>, а с учетом членов с  $k^2 r_D^2$  — Гуляевым <sup>81</sup> и Чавчанидзе <sup>82</sup>. Очевидно, что при  $r < q$  обе ветви колебаний являются нарастающими. Несмотря на то, что  $|\omega_1| > |\omega_2|$  (и нарастание флуктуаций определяется, в основном,  $\omega_1$ ), остановимся на анализе слагаемых с  $k^2 r_D^2$ , поскольку в литературе по этому поводу существуют противоречивые высказывания. Из формулы (9.9) видно, что для низкочастотных ( $\omega \ll |\omega_1|$ ) продольных возмущений роль истинной электропроводности играет дифференциальная проводимость  $\sigma_{\text{dif}} = \sigma(r+q)/(r-q)$ , которая может изменять знак при определенных типах рассеяния энергии и импульса. Член с  $k^2 r_D^2$  в (9.9) возникает не только от диффузии и теплопроводности, но и от пространственного переноса возмущений энергии и концентрации электронов под действием постоянного электрического поля. Первым обратил внимание на это обстоятельство Гуляев в работе <sup>81</sup>. Из анализа уравнения (9.3) следует, что в области длинных волн ( $k_{\parallel} \ll eE_0/\theta_0$ ) эффекты переноса доминируют и именно благодаря им изменяется знак перед  $k^2 r_D^2$  в формуле (9.9) (если  $r < q$ ). В связи с этим вывод автора работы <sup>82</sup> о том, что диффузионное затухание изменяет знак одновременно с  $\sigma_{\text{dif}}$ , строго говоря, неправилен. Это недоразумение обусловлено тем, что в <sup>82</sup> рассмотрена длинноволновая область ( $k_{\parallel} \ll eE_0/\theta_0$ ), в которой диффузия и теплопроводность вообще малосущественны. Утверждение Блотекжара <sup>80</sup>, что диффузия приводит к росту флуктуаций объемного заряда, является следствием его необоснованного предположения о характере зависимости подвижности от тока. (Замечания о недостатках такой модели имеются в работе <sup>10</sup>). Диффузия и теплопроводность проявляются в полной мере лишь в области коротковолновых возмущений и всегда подавляют рост флуктуаций. Так, при  $k_{\parallel} \gg eE_0/\theta_0$  обе ветви колебаний затухают с декрементами

$$\omega_{1,2} = -i \frac{4\pi\sigma}{3\varepsilon_0} k^2 r_D^2 (\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 3(5+2q)}), \quad (9.10)$$

где  $\alpha^2 > 3(5+2q)$ .

Таким образом, при выполнении условия

$$1 + k^2 r_D^2 \ll |r-q| \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4\pi N_0 \theta_0} \quad (9.11)$$

в плазме твердого тела, наряду с аperiodической неустойчивостью (9.8), возникает также колебательная неустойчивость (9.9). Однако развитие колебательной неустойчивости сильно затруднено, поскольку  $|\omega_1| \gg \gg |\omega_2|$ . Это обстоятельство будет, видимо, весьма серьезным препятствием при попытке использовать перегревную неустойчивость для генерирования микрорадиоволн \*). Можно ожидать, что по мере развития неустойчивости образец с большими поперечными размерами, вероятно, расслоится на области с различной концентрацией и температурой электронов, причем домены будут сильно вытянуты поперек тока.

Интересный результат получается в случае, когда максвелловское время  $\varepsilon_0/4\pi\sigma$  порядка энергетического времени  $1/\gamma$  <sup>75</sup>. Если  $r < q$  и

$$\left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0} + \text{Re } B\right)^2 \ll \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0} \gamma(r+q), \quad kv_0 \ll \gamma, \quad (9.12)$$

то нарастание за счет перегрева электронов и затухание флуктуаций вследствие максвелловской релаксации, диффузии и т. п. почти полностью компенсируются. Благодаря этому возникают связанные температурно-концентрационные колебания, которые слабо затухают или нарастают.

\*) Это, однако, не исключает возможности создания устройств типа генератора Коппенда <sup>83</sup>, когда образец с током помещается в резонатор.

Их спектр и затухание имеют вид

$$\omega_{1,2} = \pm \Omega_{\Theta} + \frac{\alpha}{3} \mathbf{k} \mathbf{v}_0 - i \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0} \left[ 1 + \frac{(r-q)\varepsilon_0 E_0^2}{6\pi N_0 \Theta_0} + \frac{2}{3} \alpha k^2 r_D^2 \right], \quad (9.13)$$

где

$$\Omega_{\Theta}^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_{\text{эфф}}}, \quad m_{\text{эфф}} = \frac{3\Theta_0}{2v_0^2 (r+q)}. \quad (9.14)$$

Собственная частота этих колебаний аналогична лэнгмюровской частоте заряженных частиц с массой  $m = m_{\text{эфф}}$ .

При получении всех вышеприведенных дисперсионных соотношений не учитывалось собственное магнитное поле постоянного тока  $j_0$ . Очевидно, что такое пренебрежение допустимо при условии  $(\omega_H \tau)^2 \ll 1$ , где  $\tilde{\omega}_H \approx \omega_0^2 v_0 a / c^2$  — циклотронная частота собственного магнитного поля,  $a$  — максимальные размеры образца. Для типичных значений параметров —  $N_0 \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $v_0 \approx 10^6 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $m \approx 10^{-28} \text{ г}$ ,  $\nu \approx 10^{12} \text{ сек}^{-1}$  — величина  $\tilde{\omega}_H \tau$  меньше единицы даже при размерах  $a \approx 5 \text{ м}$ .

10. Перегревная неустойчивость в магнитном поле. Для генерации и усиления колебаний представляет интерес разогретая магнитоактивная плазма, поскольку в ней существуют геликоны. Можно ожидать, что эффективная проводимость, определяющая затухание геликонов, в результате нагрева изменит знак и возникнет неустойчивость. Поэтому прежде всего изучим особенности вихревых возмущений в сильно разогретой плазме с одним типом носителей. Пусть ось  $z$  параллельна постоянному полю  $\mathbf{H}_0$ , а  $Oy \parallel \mathbf{E}_0$ . В сильном поле ( $\omega_H \tau \gg \gg 1$ ) отличные от нуля компоненты тензора проводимости есть

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \frac{N_0 e^2}{m \omega_H^2 \tau_0} \left( \frac{T}{\Theta_0} \right)^q \frac{\Gamma(2,5-q)}{\Gamma(2,5)}, \\ \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} &= -\frac{N_0 e^2}{m \omega_H}, \quad \sigma_{zz} = \frac{N_0 e^2 \tau_0}{m} \left( \frac{\Theta_0}{T} \right)^q \frac{\Gamma(2,5+q)}{\Gamma(2,5)}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Тензоры термоэлектричества и теплопроводности  $\lambda_{ik}$  и  $\kappa_{ik}$  выражаются через  $\sigma_{ik}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{xx} = \lambda_{yy} &= (2,5-q) \sigma_{yy}, \quad \lambda_{zz} = (2,5+q) \sigma_{zz}, \quad \lambda_{xy} = -\lambda_{yx} = 2,5 \sigma_{xy}, \\ \kappa_{xx} = \kappa_{yy} &= (3,5-q) \frac{\Theta_0}{e^2} \lambda_{xx}, \quad \kappa_{zz} = (3,5+q) \frac{\Theta_0}{e^2} \sigma_{zz}, \quad \kappa_{xy} = \frac{7\Theta_0}{2e^2} \lambda_{xy}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

В стационарном состоянии закон сохранения энергии (8.1) принимает вид

$$\sigma_{yy} E_0^2 = \mathcal{F}(N_0, \Theta_0) \equiv \frac{2A(T)}{\pi^{1/2} T} N_0 \left( \frac{\Theta_0}{T} \right)^r \Gamma(r+1,5). \quad (10.3)$$

Ограничимся случаем достаточно высокой концентрации электронов и пренебрежем током смещения. Предположим также, что пространственная дисперсия является слабой, а возмущения распространяются вдоль  $\mathbf{H}_0$ . Кроме того, будем считать, что скорость дрейфа  $v_0$  много меньше фазовой скорости  $\omega/k$  \*). Тогда электрический ток  $\mathbf{j}$  и поток тепла  $\mathbf{Q}$  выражаются через возмущения поля и температуры следующими формулами:

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E} + \frac{\Theta'}{\Theta_0} \left( \hat{\lambda} - \frac{5}{2} \hat{\sigma} \right) \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{Q} = -\frac{\Theta_0}{e} \hat{\lambda} \mathbf{E} - \frac{\Theta'}{\Theta_0} \left( \hat{\kappa} - \frac{5\Theta_0}{2e^2} \hat{\lambda} \right) e \mathbf{E}_0. \quad (10.4)$$

\*) Тем самым снимается вопрос о роли магнитного поля постоянного тока и сдвиге частоты вследствие дрейфа электронов.

Из уравнений Максвелла (8.6) при  $\epsilon_0 = 0$  и линеаризованного уравнения баланса энергии (8.1) нетрудно получить дисперсионное соотношение для связанных электромагнитных и температурных волн

$$(k^2 c^2 - 4\pi i \omega \sigma_{yy}) \left[ k^2 c^2 - 4\pi i \omega \sigma_{yy} \frac{(r-q)\gamma_H - i\omega}{(r+q)\gamma_H - i\omega} \right] = (4\pi \omega \sigma_{xy})^2, \quad (10.5)$$

где  $\gamma_H = 2\sigma_{yy} E_0^2 / 3N_0 \Theta_0$  — характерная частота релаксации энергии в сильном магнитном поле. Решим уравнение (10.5), полагая, что величина  $\gamma_H$  много больше собственной частоты геликона  $\omega_h = k^2 c^2 / 4\pi |\sigma_{xy}|$ . Если учесть, что  $\sigma_{yy} \ll |\sigma_{xy}|$ , то нетрудно получить следующие ветви спектра <sup>75</sup>:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -i(r+q)\gamma_H, \\ \omega_{2,3} &= \left( \pm 1 - i \frac{r}{r+q} \frac{\sigma_{yy}}{|\sigma_{xy}|} \right) \omega_h. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Первая формула описывает аperiодическое затухание возмущений температуры. В них отсутствуют переменные электрическое и магнитное поля, а переменный ток возникает вследствие переноса температурных возмущений в постоянных полях.

Что же касается геликонов, то они могут оказаться неустойчивыми: для этого необходимо, чтобы было  $r < 0$  (величина  $r+q$  всегда положительна). В частности, раскачка геликонов возможна в полярных полупроводниках, где  $r = -1/2$ . Неустойчивость имеет колебательный характер. Ее возникновение обусловлено тем, что в области низких частот  $\omega \approx \omega_h \ll \gamma_H$  температура успевает «следить» за изменением электромагнитного поля, а ее зависимость от поля определяет — будет ли амплитуда геликона затухать или нарастать\*). Довольно очевидно, что в области высоких частот  $\omega \gg \gamma_H$  температура не меняется, а геликон затухает с декрементом, пропорциональным не дифференциальной, а статической проводимости  $\sigma_{yy}$ .

Для возмущений  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ ,  $\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$  с волновым вектором  $\mathbf{k} = (0, k, 0)$  дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\omega^2 + i\omega \left[ (r+q)\gamma_H + \frac{\sigma_{yy}}{4\pi} \left( \frac{kc}{\sigma_{xy}} \right)^2 \right] - (r-q)\gamma_H \frac{\sigma_{yy}}{4\pi} \left( \frac{kc}{\sigma_{xy}} \right)^2 = 0. \quad (10.7)$$

При  $(kc/\sigma_{xy})^2 \gg 4\pi\gamma_H(r+q)/\sigma_{yy}$  флуктуации температуры могут нарастать:

$$\omega_1 \approx -i(r-q)\gamma_H, \quad \omega_2 = -i \frac{k^2 c^2 \sigma_{yy}}{4\pi \sigma_{xy}^2}. \quad (10.8)$$

В отличие от случая (10.6), температурные возмущения сопровождаются  $y$ -компонентой переменного электрического поля, а  $j_y = 0$ . В связи с этим «перенос» флуктуаций температуры происходит иначе, чем в случае (10.6). Если первый член в квадратных скобках в (10.7) значительно больше второго, то неустойчивыми оказываются колебания электромагнитного поля:

$$\omega_1 \approx -i(r+q)\gamma_H, \quad \omega_2 = -i \frac{k^2 c^2}{4\pi \sigma_{xy}^2} \sigma_{yy} \frac{r-q}{r+q}. \quad (10.9)$$

Нетрудно показать, что возмущения с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , направленным вдоль оси  $x$ , всегда устойчивы.

\*) Отметим, что в этом случае потенциальные возмущения плотности быстро затухают и, следовательно, не влияют на колебательный характер неустойчивости геликонов.

Таким образом, для развития периодической неустойчивости (10.6) и подавления аперриодического нарастания (10.8) необходимо, чтобы размеры образца вдоль постоянного поля  $H_0$  были минимальными.

Можно показать, что в магнитном поле неустойчивость потенциальных возмущений также носит колебательный характер. Эти неустойчивости рассматривались в работах <sup>76, 79</sup>.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР, Харьков

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
2. D. Bohm, E. P. Gross, Phys. Rev. 75, 1864 (1949).
3. А. П. Ахизер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ 21, 1962 (1951).
4. Б. Б. Кадомцев, сборник «Вопросы теории плазмы», вып. 2, М., Атомиздат, 1963, стр. 132.
5. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, М., Атомиздат, 1970.
6. О. В. Константинов, В. П. Перель, ЖЭТФ 38, 161 (1960).
7. P. Aigrain, in: Proc. of the Intern. Conference on Semiconductor Physics, Prague, 1960, p. 224.
8. В. Л. Гуревич, ФТН 2, 1557 (1968).
9. В. И. Пустовойт, УФН 97, 257 (1969).
10. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, УФН 96, 633 (1968).
11. В. Л. Бонч-Бруевич, И. П. Звягин, А. Г. Митронов, Доменная электрическая неустойчивость в полупроводниках, М., «Наука», 1972.
12. В. П. Силли, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., Атомиздат, 1961.
13. В. М. Конторович, ЖЭТФ 45, 1368 (1963).
14. В. Г. Скобов, Э. А. Канер, ЖЭТФ 46, 273 (1964).
15. В. Л. Гуревич, П. Г. Ланг, С. Т. Павлов, ЖЭТФ 59, 1679 (1970).
16. Г. Акрамов ФТТ 5, 1310 (1963).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, М., «Наука», 1965.
19. Ю. Л. Игитханов, Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ 58, 2147 (1970).
20. J. Vok, P. Nozières, J. Phys. Chem. Sol. 24, 709 (1963).
21. В. Г. Веселого, М. В. Глушков, А. А. Рухадзе, ФТТ 8, 24 (1966).
22. Л. Э. Гуревич, А. А. Катанов, ФТТ 12, 2465 (1970).
23. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, ФТТ 8, 2703 (1966).
24. М. К. Балакирев, С. В. Богданов, ФТН 3, 1369 (1969).
25. Э. А. Канер, В. М. Яковенко, ЖЭТФ 53, 712 (1967).
26. Ю. Л. Игитханов, Б. Б. Кадомцев, Колебания плазмы с учетом эффекта Холла. Препринт ИАЭ № 1950, Москва, 1970.
27. В. В. Кадомцев, А. V. Nedosrascov, J. Nucl. Energy C1, 230 (1960).
28. А. И. Ахизер, И. А. Ахизер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, М., Атомиздат, 1964.
29. W. Schilz, Phys. Rev. Lett. 20, 104 (1968).
30. А. П. Ахизер, ЖЭТФ 8, 1318 (1938).
31. Ю. И. Равич, Б. А. Ефимова, И. А. Смирнов, Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам серебра PbTe, PbSe, PbS, М., «Наука», 1968.
32. В. М. Яковенко, Препринт ИРЭ АН УССР № 9, Харьков, 1971.
33. R. Nigota, J. Phys. Soc. Japan 19, 2271 (1964).
34. J. P. Klozenberg, В. МсНамага, Р. С. Тһонеманн, J. Fluid Mech. 21, 545 (1965).
35. А. А. Булгаков, ФТТ 13, 867 (1971).
36. J. R. Pierce, J. Appl. Phys. 19, 231 (1948).
37. А. П. Ахизер, Я. Б. Файнберг, ДАН СССР 69, 555 (1949).
38. В. М. Лопухин, А. А. Веденов, УФН 53, 69 (1954).
39. D. Pines, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 124, 1387 (1961).
40. В. М. Яковенко, УФЖ 2, 226 (1965).
41. А. И. Ахизер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ 45, 337 (1963).
42. а) Г. А. Барамидзе, М. Г. Пхакадзе, ФТТ 9, 382 (1967); б) С. И. Ханиа, В. М. Яковенко, *ibid.*, стр. 578.

43. С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, *ibid.*, стр. 2943.
  44. В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, ЖТФ 38, 799 (1969).
  45. А. И. Бородкин, В. М. Яковенко, Г. Я. Левин, Ю. В. Майстренко, ФТТ 12, 1515 (1970).
  46. В. М. Яковенко, С. И. Ханкина, А. П. Тетервов, УФЖ 17, 460 (1972).
  47. А. Р. Тетервов, В. М. Яковенко, *Sol. State Comm.* 9, 1007 (1971); ФТН 5, 1920 (1971).
  48. Н. Н. Белецкий, А. П. Тетервов, В. М. Яковенко, ФТП 6, 2129 (1972).
  49. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 34, 1594 (1958).
  50. В. М. Агранович, М. И. Каганов, ФТТ 4, 1681 (1962).
  51. А. Б. Михайловский, Э. А. Пашпцкий, ЖЭТФ 48, 1787 (1965).
  52. С. П. Баканов, А. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ 36, 1639 (1966).
  53. Р. Р. Киквидзе, В. Г. Котетешвили, А. А. Рухадзе, ФТТ 14, 183 (1972).
  54. Е. А. Корнилов, С. А. Некрашевич, Я. Б. Файнберг, Н. А. Шеховцов, Письма ЖЭТФ 11, 284 (1970).
  55. В. И. Байбаков, В. Н. Дацко, *ibid.* 15, 195 (1972).
  56. В. И. Байбаков, В. Н. Дацко, ФТТ 15, 1616 (1973).
  57. Е. А. Канер, В. Г. Скобов, *Adv. Phys.* 17, 605 (1968).
  58. R. N. Sudan, A. Cavaliere, R. N. Rosenbluth, *Phys. Rev.* 158, 387 (1969).
  59. J. R. Bayless, W. M. Hooge, R. N. Sudan, *Phys. Rev. Lett.* 22, 640 (1969); *Phys. Rev. A* 1, 1488 (1970).
  60. Г. С. Абилов, В. И. Байбаков, Письма ЖЭТФ 11, 192 (1970).
  61. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 7, 1069 (1937).
  62. Э. Конуэлл, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, М., «Мир», 1970.
  63. В. Денис, Ю. Пожела, Горячие электроны, Вильнюс, «Минтис», 1971.
  64. В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, ФТТ 7, 750 (1965).
  65. Р. Р. Киквидзе, А. А. Рухадзе, Тр. ФИАН СССР 61, 3 (1972).
  66. А. М. Злобин, П. С. Зырянов, УФН 104, 353 (1971).
  67. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ 48, 274 (1965).
  68. А. Ф. Волков, Ш. М. Коган, ЖЭТФ 52, 1647 (1967).
  69. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН 70, 201, 393 (1960).
  70. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, УФН 103, 447 (1971).
  71. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
  72. Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, ЖЭТФ 50, 102 (1966).
  73. В. М. Яковенко, ФТТ 8, 941 (1966).
  74. С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 207 (1966).
  75. В. М. Яковенко, УФЖ 13, 1389 (1968).
  76. В. М. Яковенко, *Sol. State Comm.* 11, 279 (1972).
  77. Р. Р. Киквидзе, А. А. Рухадзе, Е. П. Фетисов, ФТТ 9, 1349 (1967).
  78. Р. Р. Киквидзе, А. А. Рухадзе, Е. П. Фетисов, ФТТ 11, 731 (1969).
  79. Ш. М. Коган, ФТТ 10, 1563 (1968).
  80. K. Blöttekjær, *Electron Lett.* 4, 357 (1968).
  81. Ю. В. Гуляев, ФТН 3, 246 (1969).
  82. О. Н. Чавчанидзе, ФТТ 12, 534 (1970).
  83. J. A. Copeland, *IEEE Trans. Electron. Devices ED-14*, 55 (1967).
-